Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
62 tomas, 2021, 22–27
https://doi.org/10.15388/LMR.2021.25222

Ribinės teoremos Floydo trikampiui: naujas požiūris į nenaują uždavinį

Igoris Belovas

Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas, Vilniaus universitetas
Akademijos g. 4, LT-08412 Vilnius
El. paštas: Igoris.Belovas@mif.vu.lt

Įteiktas 2021 balandžio 12; publikuotas 2021 gruodžio 20

Santrauka. Floydo trikampio algoritmo (ir atitinkamos kompiuterinės programos) sudarymo problema yra neretai pateikiama informatikos mokslų krypčių studentams kaip pratimas ar pavyzdys, iliustruojantis teksto formatavimo ir ciklo konstrukcijų sąvokas. Straipsnyje siūloma pažvelgti į objektą (bei jo apibendrinimus) iš kito kampo, kaip į kombinatorinį skirstinį, ir nagrinėti jo elementų elgesį, taikant ribinių teoremų metodologiją. Iškeliami klausimai: kokiam ribiniam dėsniui paklūsta trikampio skaičiai? Koks yra konvergavimo į ribinį dėsnį greitis? Tokio tipo uždaviniai gali būti panaudoti kaip pratimai studijuojantiems matematikos ir informatikos krypčių studijų programose esančius tikimybių teorijos ir kombinatorikos dalykus bakalaurams, padėtų studentams įvaldyti atitinkamą įrodymų techniką ir matematinį aparatą. Straipsnyje siūloma galimų uždavinių serija bei pateikiamos jų įrodymų schemos.

Raktiniai žodžiai: Floydo trikampis; ribinės teoremos; tolygusis skirstinys

AMS: 11B99, 60F05

1 Įvadas

Floydo trikampis yra formuojamas užpildant trikampio eilutes iš eilės natūraliaisiais skaičiais, pradedant vienetu viršutiniame kairiajame kampe (žr. 1 lentelę). Šio trikampio algoritmo (ir atitinkamos kompiuterinės programos) sudarymo problema yra pateikiama informatikos mokslų krypčių studentams kaip pratimas ar pavyzdys, iliustruojantis teksto formatavimo ir ciklo konstrukcijų sąvokas [1, 6].

Kitas susijęs uždavinys studentams yra Floydo trikampio bendrojo nario $F_{n,k}$ formulės išvedimas. Pastebėjus, kad pradinio stulpelio elementai yra paslinkti per

1 lentelė. Floydo trikampis.

	0	1	2	3	4	5	...
0	1	0	0	0	0	0	...
1	2	3	0	0	0	0	...
2	4	5	6	0	0	0	...
3	7	8	9	10	0	0	...
4	11	12	13	14	15	0	...
5	16	17	18	19	20	21	...
...	...	...	...	...	...	...	...

vienetą trikampiai skaičiai, t.y., $F_{n,0} = T_n + 1$, kur

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geqslant 0, \tag{1}$$

ir kad kiekviena trikampio eilutė yra aritmetinė progresija su skirtumu 1, gauname trikampio elementų bendrą formulę,

$$F_{n,k} = \begin{cases} 0, & \text{jei } k > n, \\ T_n + k + 1, & \text{priešingu atveju.} \end{cases} \tag{2}$$

Tačiau į Floydo trikampį galima pažvelgti ir iš kitos pusės, kaip į *kombinatorinį skirstinį*. Tegų Ω_n yra sveikaskaitis atsitiktinis dydis su tikimybėmis p_{nk}, nusakomomis formule

$$P(\Omega_n = k) = p_{n,k} := \frac{F_{n,k}}{\sum_{j=0}^{n} F_{n,j}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n. \tag{3}$$

Dabar galima nagrinėti $F_{n,k}$ elgesį, taikant ribinių teoremų metodologiją (pl. [2]). Pvz., skaičiai yra asimptotiškai normalūs su vidurkiu μ_n ir dispersija σ_n^2, jei

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x \left| \sum_{k<\mu_n + x\sigma_n} p_{n,k} - \Phi(x) \right| = 0, \tag{4}$$

kur $\Phi(x)$ yra standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija. Iš tikrųjų, Floydo trikampio skaičiai nėra asimptotiškai normalūs, tačiau kokiam ribiniam dėsniui jie paklūsta? Koks yra konvergavimo į ribinį dėsnį greitis? Tokie uždaviniai Floydo trikampio apibendrinimams gali būti panaudoti kaip pratimai studijuojantiems matematikos ir informatikos krypčių studijų programose esančius tikimybių teorijos ir kombinatorikos dalykus bakalaurams.

2 Ribinės teoremos Floydo trikampio skaičiams

Sprendžiant ribinio dėsnio problemą įprastai (šabloniškai) iš pradžių apskaičiuojama Floydo trikampio skaičių generuojanti funkcija

$$\begin{aligned}
G(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} F_{n,k}x^n y^k &= \frac{1}{(1-y)(1-x)^3} - \frac{1}{(1-y)(1-x)^2} \\
&+ \frac{1}{(1-y)^2(1-x)} - \frac{y}{(1-y)(1-xy)^3} - \frac{y}{(1-y)^2(1-xy)} \\
&= \frac{1+x^4y^2-x^3y-x^2y+x^2-x}{(1-x)^3(1-xy)^3}
\end{aligned}$$

ir atsitiktinio dydžio Ω_n momentus generuojanti funkcija

$$\begin{aligned}
M_n(s) &= \left(n!\sum_{k=0}^{n} F_{n,k}\right)^{-1} \frac{\partial^n}{\partial x^n} G(x,e^s)\bigg|_{x=0} \\
&= \frac{(n^2+3n+2)e^{s(n+2)} - (n^2+3n+4)e^{s(n+1)} - (n^2+n)e^s + (n^2+n+2)}{(n+1)(n^2+2n+2)(1-e^s)^2}.
\end{aligned}$$

Išnagrinėję normuoto atsitiktinio dydžio $X_n = \Omega_n/n$ momentus generuojančios funkcijos $M_{X_n}(s)$ konvergavimą, gauname

$$M_{X_n}(s) = M_U(s) + O\left(1/n\right),$$

kur $M_U(s) = (e^s-1)/s$ yra standartinio tolygaus atsitiktinio dydžio momentus generuojanti funkcija. Taigi, atsitiktinis dydis Ω_n yra asimptotiškai tolygus. Visi šie skaičiavimai užimtų keletą puslapių, tačiau, iš tikrųjų, rezultatą galimą gauti trumpai ir tiesiogiai. Suformuluokime teoremą.

1 teorema. *Atsitiktinis dydis $X_n = \Omega_n/n$ asimptotiškai yra standartinis tolygusis, $X_n \sim \mathbb{U}(0,1)$.*

Nagrinėkime iš karto bendresnį atvejį.

2.1 Natūraliųjų skaičių laipsnių trikampis

Trikampio elementų bendroji formulė yra

$$F_{n,k}^{(1)} = \begin{cases} 0, & \text{jei } k > n, \\ (T_n + k + 1)^s, & \text{priešingu atveju.} \end{cases} \tag{5}$$

Įvertinkime šio apibendrinto Floydo trikampio eilutės elementų sumą (7), pasitelkiant rezultatą natūraliųjų skaičių laipsnių sumoms (gaunamas pritaikius Eulerio–Makloreno sumavimo formulę),

$$\Psi_n^{(1)} := \sum_{k=0}^{n} k^s = \begin{cases} \frac{n^{s+1}}{s+1} + O(n^s), & \text{jei } s > -1, \\ \gamma + \log n + O(n^{-1}), & \text{jei } s = -1, \\ \zeta(s) + \frac{n^{s+1}}{s+1} + O(n^s), & \text{jei } s < -1, \end{cases} \tag{6}$$

čia $\zeta(s)$ yra Rymano dzeta funkcija, γ yra Eulerio–Maskeronio konstanta. Pagal (1) ir (6), turime

$$S_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{n} F_{n,k}^{(1)} = \Psi_{T_n+n+1}^{(1)} - \Psi_{T_n}^{(1)} = \frac{1}{2^s} n^{2s+1} + O(n^{2s}). \tag{7}$$

Normuoto atsitiktinio dydžio $X_n^{(1)} = \Omega_n^{(1)}/n$ pasiskirstymo funkcija lygi

$$\begin{aligned} F_{X_n^{(1)}}(x) &= \big(S_n^{(1)}\big)^{-1} \sum_{k<nx} F_{n,k}^{(1)} = \big(S_n^{(1)}\big)^{-1} \big(\Psi_{T_n+[nx]+1}^{(1)} - \Psi_{T_n}^{(1)}\big) \\ &= \frac{(n^2+n)^s([nx]+1)(1+O(n^{-1}))}{n^{2s+1}(1+O(n^{-1}))} \\ &= \underbrace{\frac{[nx]+1}{n}}_{\in[x,x+1/n]} \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = x + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Taigi, 1 teorema galioja $F_{n,k}^{(1)}$ skaičiams. Analogiškai teorema įrodoma lyginių ir nelyginių skaičių laipsniams.

2.2 Pirminių skaičių laipsnių trikampis

Tegu $\{p_n\}$ yra pirminių skaičių seka. Atitinkamo apibendrintojo trikampio elementų formulė yra

$$F_{n,k}^{(2)} = \begin{cases} 0, & \text{jei } k > n, \\ (p_{T_n+k+1})^s, & \text{priešingu atveju.} \end{cases} \tag{8}$$

Galime įvertinti šio apibendrinto Floydo trikampio eilutės elementų sumą (12), pasitelkiant pirminių skaičių laipsnių sumos asimptotine formule [5],

$$\pi_s(t) = \sum_{p_k \leqslant t} p_k^s = \pi(t^{s+1}) + \begin{cases} O(t^{s+1}e^{\theta(t)}), & \text{jei } s > 0, \\ O(t^{s+1}e^{(s+1)^{3/5}\theta(t)}), & \text{jei } -1 < s < 0, \end{cases} \tag{9}$$

kur

$$\theta(t) = -0.2098(\log t)^{3/5}(\log\log t)^{-1/5}$$

ir $\pi(t)$ yra pirminių skaičių pasiskirstymo funkcija [4],

$$\pi(t) = \mathrm{li}(t) + O\big(te^{\theta(t)}\big), \tag{10}$$

kur $\mathrm{li}(t)$ yra integralinis logaritmas. Toliau, atsižvelgę į įvertį [3]

$$p_n = n\log n\left(1 + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right), \tag{11}$$

apskaičiuosime sumą

$$S_n^{(2)} = \sum_{k=0}^{n} F_{n,k}^{(2)} = \pi_s(p_{T_n+n+1}) - \pi_s(p_{T_n}) = n^{2s+1}(\log n)^s\left(1 + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right) \tag{12}$$

ir normuoto atsitiktinio dydžio $X_n^{(2)} = \Omega_n^{(2)}/n$ pasiskirstymo funkciją

$$\begin{aligned} F_{X_n^{(2)}}(x) &= \big(S_n^{(2)}\big)^{-1} \sum_{k<nx} F_{n,k}^{(2)} = \big(S_n^{(2)}\big)^{-1} \big(\pi_s(p_{T_n+[nx]+1}) - \pi_s(p_{T_n})\big) \\ &= \frac{[nx]}{n} + O\bigg(\frac{\log\log n}{\log n}\bigg) = x + O\bigg(\frac{\log\log n}{\log n}\bigg). \end{aligned}$$

Taigi, 1 teorema galioja $F_{n,k}^{(2)}$ skaičiams. Kitas kelias įrodyti asimptotinį tolygumą – tai pastebėti, kad $m \leqslant p_m \leqslant m^2$, kai $m > 1$ (pl. (11)), ir pasinaudoti jau įrodytu rezultatu laipsninėms funkcijoms.

2.3 Rodyklinių funkcijų trikampis

Ar visi Floydo tipo trikampių skaičiai paklūsta tolygiajam dėsniui? Nagrinėkime trikampį su elemento bendrąja formule

$$F_{n,k}^{(3)} = \begin{cases} 0, & \text{jei } k > n, \\ e^{s(T_n+k+1)}, & \text{priešingu atveju.} \end{cases} \tag{13}$$

Įvertinsime trikampio eilutės elementų sumą, pasitelkiant geometrinės progresijos narių sumos formulę,

$$\Psi_n^{(3)} := \sum_{k=0}^{n} e^{sk} = \frac{e^{s(n+1)} - 1}{e^s - 1}. \tag{14}$$

Kai $s > 0$, turime

$$S_n^{(3)} = \sum_{k=0}^{n} F_{n,k}^{(3)} = \Psi_{T_n+n+1}^{(3)} - \Psi_{T_n}^{(3)} = \frac{e^{s(T_n+n+2)}}{e^s - 1}\big(1 - e^{-s(n+1)}\big). \tag{15}$$

Normuoto atsitiktinio dydžio $X_n^{(3)} = \Omega_n^{(3)}/n$ pasiskirstymo funkcija lygi

$$F_{X_n^{(3)}}(x) = \big(S_n^{(3)}\big)^{-1} \sum_{k<nx} F_{n,k}^{(3)} = \big(S_n^{(3)}\big)^{-1} \big(\Psi_{T_n+[nx]+1}^{(3)} - \Psi_{T_n}^{(3)}\big) \tag{16}$$

$$= \underbrace{e^{s([nx]-n)}}_{\sim e^{-sn(1-x)}} \big(1 + O(e^{-sn})\big) \Rightarrow F_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{jei } x \geqslant 1, \\ 0, & \text{jei } x < 1, \end{cases} \tag{17}$$

čia $F_1(x)$ yra išsigimęs skirstinys. Taigi, 1 teorema negalioja $F_{n,k}^{(3)}$ skaičiams.

2.4 Uždavinių pavyzdžiai

Daugiau uždavinių apibendrintų Floydo trikampių skaičiams galima rasti 2 lentelėje. Visi šie skaičiai yra asimptotiškai tolygūs.

Literatūra

[1] A. Arora, S. Bansal. *Unix and C Programming.* Firewall Media, 2005.

2 lentelė. Floydo trikampiai.

Trikampio funkcija	Trikampio skaičiai	Pagalbinė suma $\Psi_n^{(j)}$
Logaritminė	$\log(T_n + k + 1)$	$\sum_{k=1}^n \log k = n \log n - n + O(\log n)$
Sinuso kvadratas	$\sin^2(T_n + k + 1)$	$\sum_{k=0}^n \sin^2 k = n/2 + O(1)$
Kosinuso kvadratas	$\cos^2(T_n + k + 1)$	$\sum_{k=0}^n \cos^2 k = n/2 + O(1)$
Pagr. Dirichlė charakt.	$\chi_{0;d}(T_n + k + 1)$	$\sum_{k=0}^n \chi_{0;d}(k) \sim \varphi(d) \left[\frac{n}{d}\right]$
Eulerio funkcija	$\varphi(T_n + k + 1)$	$\sum_{k=1}^n \varphi(k) \sim 3n^2/\pi^2$

[2] I. Belovas. Centrinė ribinė teorema trikampių masyvų klasės skaičiams, asocijuotiems su Ermito daugianariais. *Liet. matem. rink. LMD darbai, serija B*, **61**:1–7, 2020. https://doi.org/10.15388/LMR.2020.22466.

[3] P. Dusard. The kth prime is greater than $k(\ln k + \ln \ln k - 1)$ for $k \geqslant 2$. *Math. Comput.*, **68**(225):411–415, 1999. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-99-01037-6.

[4] K. Ford. Vinogradov's integral and bounds for the Riemann zeta function. *Proc. London Math. Soc.*, **85**(3):565–633, 2002. https://doi.org/10.1112/S0024611502013655.

[5] J. Gerard, L. Washington. Sums of powers of primes. *Ramanujan J.*, **45**:171–178, 2018. https://doi.org/10.1007/s11139-016-9847-4.

[6] C. Xavier. *C Language And Numerical Methods*. New Age International, 2007.

SUMMARY

Limit theorems for Floyd's triangle: a new approach to not a new problem

I. Belovas

Floyd's triangle is often presented to computer science students as an exercise or example to illustrate the concepts of text formatting and loop constructs. The paper proposes to look at an object from a different angle and to examine limit theorems for the numbers of generalized Floyd's triangles. Tasks of this type can be used as exercises in study programs of mathematics and informatics (couses of probability theory and combinatorics). It would help to master the appropriate proof techniques and mathematical apparatus. The article proposes a series of possible problems and their proof schemes.

Keywords: Floyd's triangle; limit theorems; uniform distribution