**VILNIAUS UNIVERSITETAS**
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

**Arvydas Karbonskis**

# Vėrinių multiaibių statistikos dispersijos efektyvūs įverčiai

Magistro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti ..............................................

Darbo vadovas prof. Eugenijus Manstavičius

Vilnius 2021

# Turinys

# Įvadas

Darbe nagrinėjama priklausomų atsitiktinių dydžių sumos, aptinkamos kombinatorikoje, dispersijos vertinimo problema. Pagrindine paskata – Turáno-Kubiliaus nelygybės sėkmė tikimybinėje skaičių teorijoje. Atskiru atveju nelygybę galima suformuluoti taip:

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{p|m} f(p) - \sum_{p\le n}\frac{f(p)}{p}\right)^2 =: K_n(f)\sum_{p\le n}\frac{f(p)^2}{p}, \quad K_n(f)\le C,$$

čia $C > 0$ yra absoliuti konstanta. Vidinėse sumose $p$ žymi pirminius skaičius, $p|m$ reiškia $p$ dalija $m$, o funkcijos $f(p)$ reikšmės yra bet kokie realieji skaičiai. Pirmą kartą, kai $f(p)$ yra aprėžti nelygybę suformulavo ir pritaikė P. Turán 1934 m. Pateikta forma J. Kubilius ją atrado šeštajame praėjusio amžiaus dešimtmetyje. Buvo iškelta hipotezė, kad įvertis $C = \frac{3}{2}$ yra nepagerinamas visiems $n \ge 2$. Be to, J. Kubilius [6] įrodė, kad

$$\sup_{f\ne 0} K_n(f) = \frac{3}{2} + O\Big(\frac{1}{\log n}\Big).$$

J. Lee [7] patikslino šį rezultatą, išvesdamas nelygybę

$$K_n(f) \le \frac{3}{2} - \frac{C_1}{\log n}$$

su tam tikra $C_1 > 0$, jei $n$ yra pakankamai didelis. „Mažiems“ $n$ hipotezė kol kas nepatikrinama kompiuteriu.

Kombinatorikos objektai – keitiniai, polinomai virš baigtinio kūno ar, bendriau, ansambliai, svorinės multiaibės – panašiai kaip natūralieji skaičiai iš pirminių, taip pat yra atitinkamų paprastesnių pirminių struktūrų (komponenčių) rinkiniai. Imant juos atsitiktinai, pasireiškia komponenčių priklausomumas, būdingas atsitiktinio natūraliojo skaičiaus pirminių daugiklių priklausomumui. Pasinaudojant analogija su tikimybine skaičių teorija, plėtojama adityviųjų funkcijų, apibrėžtų atsitiktinėse struktūrose, teorija. Turáno-Kubiliaus nelygybės analogus keitiniams gavo J. Klimavičius ir E. Manstavičius [5], taip pat Ž. Baronėnas, E. Manstavičius ir P. Šapokaitė [2]. Įdomu pažymėti, kad šiuo atveju įrodyti rezultatai patvirtino, kad analogiška hipotezė teisinga net su tiksliomis konstantomis. Darbe [8] gauti ir tikslūs apatiniai dispersijos įverčiai.

Šiame magistro darbe nagrinėjamos atsitiktinės svorinės kombinatorinės struktūros. Apibrėžus atitinkamas statistikas, nagrinėjama dispersija ir gaunami pastarųjų rezultatų analogai. Įrodyti dispersijų įverčiai patvirtina anksčiau minėtą hipotezę vadinamiesiems kombinatoriniams vėriniams ir, atskiru atveju, polinomams virš baigtinių kūnų.

Tegu $(\mathcal{P}, ||\cdot||)$ yra pirminė svorinių objektų klasė, čia $||\cdot||$ – svorio funkcija, tenkinanti sąlygą

$$\pi(j) := \Big|\{p \in \mathcal{P}: \ ||p|| = j\}\Big| < \infty$$

kiekvienam $j \in \mathbb{N}$. Nagrinėsime aibę $\mathcal{G} := \mathcal{M}(\mathcal{P})$, sudarytą iš visų galimų aibės $\mathcal{P}$ elementų rinkinių su pasikartojimais. Joje pratęsime svorio funkciją. Jei $a \in \mathcal{G}$ ir $a = \{p_1, \dots, p_r\}$, tai $||a|| = ||p_1|| + \dots + ||p_r||$; tuščiai multiaibei $\emptyset$ priskirsime svorį 0. Tuomet $n$-ojo svorio multiaibių skaičių žymėsime

$$m(n) := |\mathcal{G}_n| := \Big|\{a \in \mathcal{G}: \ ||a|| = n\}\Big|.$$

Toliau nagrinėsime klasę multiaibių, tenkinančių sąlygą $m(n) = q^n$, čia $q \geq 2$ yra natūralusis skaičius. Jei $q$ yra pirminio skaičiaus laipsnis, tuomet $\mathcal{G}$ galėtų būti moninių polinomų žiedas $\mathbb{F}_q^*[t]$ virš baigtinio kūno $\mathbb{F}_q$. Tuomet $\mathcal{P}$ būtų neredukuojamų polinomų poaibis, o svorio funkcija – polinomo laipsnis. Bet kokiam natūraliajam $q \geq 2$ aibė $\mathcal{P}$ gali būti sudaroma iš specifinių kombinatorinių struktūrų – vėrinių virš $q$ raidžių abėcėlės. Tokios vėrinių multiaibės tenkina sąlygą $m(n) = q^n$ (daugiau apie vėrinius galima rasti [1] knygoje, žr. 2.12 pavyzdį, p. 43). Vėrinių multiaibėms teisingos šios lygybės:

$$\pi(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} q^{n/d}\mu(d), \qquad q^n = \sum_{d|n} d\pi(d),$$

čia $d$ perbėga visus natūraliuosius $n$ daliklius, o $\mu(d)$ – Möbius'o funkcija. Šie sąryšiai ekvivalentūs formaliai begalinių eilučių lygybei

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n = \frac{1}{1-qx} = \prod_{j=1}^{\infty}(1-x^j)^{-\pi(j)}.$$

Atsitiktinai su vienoda tikimybe imkime multiaibę $a \in \mathcal{G}_n$, t.y. apibrėžkime tikimybę $\nu_n(\{a\}) = q^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ ir $\nu_0(\{\emptyset\}) = 1$. Jei $k_j(a) \geq 0$ yra $j$-ojo svorio pirminių svorinių objektų skaičius multiaibėje $a \in \mathcal{G}_n$, tuomet

$$\bar{k}(a) = \Big(k_1(a), \ldots, k_n(a)\Big)$$

žymės aibės $a$ struktūrinį vektorių. Bus tenkinamas sąryšis $\ell(\bar{k}(a)) = n$, jei $a \in \mathcal{G}_n$, čia

$$\ell(\bar{k}) := \sum_{j=1}^{n} jk_j, \quad \bar{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n := \Big(\mathbb{N} \cup \{0\}\Big)^n.$$

Vėliau darbe įrodoma, jog tikimybė, kad atsitiktinai traukta multiaibė $a \in \mathcal{G}_n$ turės struktūrinį vektorių $\bar{s}$ yra

$$\nu_n\Big(\bar{k}(a) = \bar{s}\Big) = \mathbf{1}\{\ell(\bar{s}) = n\} q^{-n} \prod_{j=1}^{n} \binom{\pi(j) + s_j - 1}{s_j},$$

čia $\bar{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{N}_0^n$, o $\mathbf{1}\{\cdot\}$ – indikatoriaus funkcija.

Apibrėžiame tiesinę statistiką

$$h(\bar{c}) := h(\bar{c}, a) = c_1 k_1(a) + \cdots + c_n k_n(a), \quad \bar{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Funkcija $h(\bar{1}) = k_1(a) + \cdots + k_n(a)$, čia $\bar{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, nusakanti pirminių svorinių objektų skaičių multiaibėje $a \in \mathcal{G}_n$, yra tiesinė statistika. Sudėtingesni tiesinių statistikų pavyzdžiai pateikiami [1].

Šiame darbe nagrinėsime tiesinių statistikų $h(\bar{c})$ dispersiją mato $\nu_n$ atžvilgiu. Pagrindinės techinės kliūtys vertinant šį dydį kyla iš tiesinę statistiką sudarančių atsitktinių dydžių priklausomumo.

Toliau darbe vidurkį ir dispersiją mato $\nu_n$ atžvilgiu žymėsime $\mathbf{E}_n$ ir $\mathbf{V}_n$; kai tikimybinė erdvė $(\Omega,\mathcal{F},P)$ nenurodyta, vartosime žymenis $\mathbf{E}$ ir $\mathbf{V}$. Visi sumavimo indeksai $i$, $j$, $l$, $k, m, m_1$ ir $m_2$ yra natūralieji skaičiai. Glaustai pateiksime gautus rezultatus, visų teoremų įrodymai ir naudojamų sąryšių paaiškinimai išdėstyti 1-ame ir 2-ame skyriuose.

**1 teorema.** *Jei $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ ir $n \in \mathbb{N}$, tai*

$$\mathbf{V}_n h(\bar{c}) = \sum_{1 \le jk \le n} c_j^2 \pi(j) k q^{-jk} - \sum_{\substack{il+jk>n \\ il \le n, jk \le n}} c_i c_j \pi(i)\pi(j) q^{-il-jk}. \tag{1}$$

Žinoma [1], jog fiksuotam $j$ a.d. $k_j(a)$ konverguoja pagal skirstinį, kai $n \to \infty$, į a.d. $\gamma_j$, kuris pasiskirstęs pagal neigiamą binominį dėsnį $NB(\pi(j), q^{-j})$. Tegu $\{\gamma_1,\gamma_2,\dots\}$ yra tarpusavyje nepriklausomi. Apibrėžkime jų tiesinę kombinaciją $Y_n = c_1\gamma_1 + \dots + c_n\gamma_n$. Darbe parodysime, jog pirmoji dešiniosios pusės suma (1) yra gerai aproksimuojama $\mathbf{V}Y_n$, todėl vertindami $\mathbf{V}_n h(\bar{c})$ naudosimės šiomis kvadratinėmis formomis:

$$\mathbf{B}_n(\bar{c}) := \sum_{1 \le jk \le n} c_j^2 \pi(j) k q^{-jk}, \qquad \mathbf{R}_n(\bar{c}) = \sum_{m \le n} m q^{-2m} \Big( \sum_{j|m} c_j \pi(j) \Big)^2.$$

**2 teorema.** *Jei $n \ge 2$, tuomet*

$$\mathbf{V}_n h(\bar{c}) \le \mathbf{B}_n(\bar{c}) + \frac{1}{2}\mathbf{R}_n(\bar{c}).$$

*Be to, nelygybė tampa lygybe, kai*

$$c_j = c_j^* := \frac{3}{\pi(j)} \sum_{d|j} d q^d \mu\Big(\frac{j}{d}\Big) - (2n+1)j, \quad 1 \le j \le n.$$

**1 išvada.** *Jei $n \ge 2$ ir $\bar{c} \ne \bar{0}$, tai*

$$\mathbf{V}_n h(\bar{c}) < \frac{3}{2}\mathbf{B}_n(\bar{c}) \le \frac{3}{2}\Big(1 - \frac{q-1}{q} q^{-n}\Big)\mathbf{V}Y_n.$$

Šios nelygybės yra trivialios funkcijoms, proporcingoms $h(\bar{j}, a) = h(\bar{j}) = n$, čia $\bar{j} = (1, \dots, j, \dots, n)$, kai $a \in \mathcal{G}_n$, nes tada $\mathbf{V}_n h(\bar{j}) = 0$. Šį nepatogumą pašalinsime naudodami $\bar{c}$ postūmį. Pastebime, jog abi kvadratinės formos $\mathbf{B}_n(\bar{c} - t\bar{j})$ ir $\mathbf{R}_n(\bar{c} - t\bar{j})$ pasiekia mažiausią reikšmę pagal $t \in \mathbb{R}$, kai

$$t = t_c := \frac{2}{(n+1)n} \sum_{m \le n} m q^{-m} \sum_{j|m} c_j \pi(j).$$

**3 teorema.** *Jei $n \geq 3$, tai*

$$\mathbf{B}_n(\bar{c} - t_c\bar{j}) - \frac{1}{3}\mathbf{R}_n(\bar{c} - t_c\bar{j})) \leq \mathbf{V}_n h(\bar{c}) \leq \mathbf{B}_n(\bar{c} - t_c\bar{j}) + \frac{1}{2}\mathbf{R}_n(\bar{c} - t_c\bar{j}),$$

*čia abi nelygybės yra nepagerinamos. Be to,*

$$\mathbf{B}_n(\bar{c} - t_c\bar{j}) + \frac{1}{2}\mathbf{R}_n(\bar{c} - t_c\bar{j}) = \mathbf{B}_n(\bar{c}) + \frac{1}{2}\mathbf{R}_n(\bar{c}) - \frac{3(n+1)n}{4}t_c^2.$$

**2 išvada.** *Jei $n \geq 3$ ir $\bar{c} \neq \alpha\bar{j}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tai*

$$\frac{2}{3}\mathbf{B}_n(\bar{c} - t_c\bar{j}) < \mathbf{V}_n h(\bar{c}) < \frac{3}{2}\mathbf{B}_n(\bar{c} - t_c\bar{j}).$$

Iki šiol išvardyti rezultatai publikuoti bendrame darbe su E. Manstavičiumi [4]. Vėliau jie buvo papildyti pastebėjimu, jog konstantos $\frac{3}{2}$ ir $\frac{2}{3}$, esančios paskutinėje išvadoje, yra asimptotiškai tikslios.

**4 teorema.** *Egzistuoja tokia $C > 0$, kad*

$$\frac{3}{2} - \frac{C}{n^2} \leq \sup_{\bar{c} \in \mathbb{R}^n / \{\bar{0}\}} \frac{\mathbf{V}_n h(\bar{c})}{\mathbf{B}_n(\bar{c})} \leq \frac{3}{2}, \qquad \frac{2}{3} \leq \inf_{\substack{\bar{c} \in \mathbb{R}^n / \{\bar{0}\} \\ \bar{c} \neq \alpha\bar{j}}} \frac{\mathbf{V}_n h(\bar{c})}{\mathbf{B}_n(\bar{c})} \leq \frac{2}{3} + \frac{C}{n^2},$$

*kai $n \geq 3$.*

Iliustruojant teorinius rezultatus, 3-iame skyriuje pateikiami kompiuterinių skaičiavimų rezultatai, pabrėžiantys teorinius įverčius.

# 1 skyrius

# Sąvokos ir pagalbinės lemos

## 1.1 Svorinės multiaibės

Šiame magistro darbe pasinaudota [9] knygos 5, 7 ir 13 skyriuose siūloma tyrimo metodika.

Apibrėšime pradinę svorinių objektų klasę.

**1 apibrėžimas.** Aibę $\mathcal{P}$ ir svorio funkciją $||\cdot|| : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$, tenkinančią sąlygą

$$\pi(j) := \Big|\{p \in \mathcal{P} : \ ||p|| = j\}\Big| < \infty, \quad j \in \mathbb{N},$$

vadinsime pradine svorinių objektų klase.

Iš pradinės klasės svorinių objektų sudarysime multiaibes.

**2 apibrėžimas.** Aibę $\mathcal{G} := \mathcal{M}(\mathcal{P}) = \{\{p_1, \dots, p_r\} : p_1, \dots, p_r \in \mathcal{G}\}$ ir pratęstą svorio funkciją $||\cdot|| : \mathcal{G} \to \mathbb{N}_0$ vadinsime svorinių multiaibių klase. Svorio funkcija pratęsiama taip:

$$||a|| = ||\{p_1, \dots, p_r\}|| = \sum_{i=1}^{r} ||p_i||.$$

Aibę, kurią sudaro $n$-ojo svorio multiaibės, žymėsime $\mathcal{G}_n := \{a \in \mathcal{G} : ||a|| = n\}$, o jos galią – $m(n) := |\mathcal{G}_n|$. Jei $\bar{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$, tai sumą $1 \cdot k_1 + \dots + nk_n$ žymėsime $\ell(\bar{k})$.

**1 lema.** *Teisinga ši lygybė*

$$m(n) = |\mathcal{G}_n| = \Big|\{a \in \mathcal{G} : \ ||a|| = n\}\Big| = \sum_{\ell(\bar{k})=n} \prod_{j=1}^{n} \binom{\pi(j) + k_j - 1}{k_j}. \tag{1.1}$$

*Įrodymas.* Skaičiuosime galimus būdus, kaip sukonstruoti skirtingas $n$-ojo svorio multiaibes. Pirma, grupuokime multiaibes pagal jas sudarančių pradinių objektų svorį ir skaičių. Tegu vieną grupę sudarys multiaibės, turinčios $k_j \geq 0$ svorio $j$ elementų, čia $1 \leq j \leq n$ ir $\ell(\bar{k}) = n$.

Teliko suskaičiuoti skirtingus būdus, kaip parinkti $k_j$ svorio $j$ pradinių objektų. Žinome, kad $j$-ojo svorio pradinių objektų turime $\pi(j)$, taigi iš jų parinkti $k_j$ objektų su pasikartojimais bus $\binom{\pi(j)+k_j-1}{k_j}$ būdų. Pereidami per visus pradinių objektų svorius ir sudauginę objektų parinkimo būdus gausime skirtingų multiaibių skaičių atitinkamam vektoriui $\bar{k}$. Telieka pereiti per visus vektorius $\bar{k}$ ir sudėti atitinkamus multiaibių skaičius. □

Šiame darbe toliau nagrinėjamos multiaibėsm, kai $m(n) = q^n$, $q \geq 2$, $q \in \mathbb{N}$. Norėdami gauti klasės $\mathcal{G}$ generuojančią eilutę, taikysime šią formulę.

**2 lema.** *Teisinga formali lygybė*

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_j(k) x^{jk}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell(\bar{k})=n} \prod_{j=1}^{n} f_j(k_j)\right) x^n.$$

Lemos įrodymą galima rasti [9] knygos 5.3 skyriuje.

**3 lema.** *Teisingos šios generuojančios eilutės $M(x)$ išraiškos*

$$M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m(n) x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^j)^{-\pi(j)} = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \pi(j) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{jk}}{k}\right),$$

*kai* $0 \leq x < q^{-1}$.

*Įrodymas.* Pradedame nuo generuojančios eilutės $M(x)$ apibrėžimo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} m(n)x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{\ell(\bar{k})=n}\prod_{j=1}^{n}\binom{\pi(j)+k_j-1}{k_j}\Bigg)x^n \\
&= \prod_{j=1}^{\infty}\Bigg(1+\sum_{k=1}^{\infty} x^{jk}\binom{\pi(j)+k-1}{k}\Bigg) \\
&= \prod_{j=1}^{\infty}\Bigg(1+\sum_{k=1}^{\infty} x^{jk}(-1)^k\binom{-\pi(j)}{k}\Bigg) = \prod_{j=1}^{\infty}(1-x^j)^{-\pi(j)} \\
&= \exp\Bigg(-\sum_{j=1}^{\infty}\pi(j)\ln(1-x^j)\Bigg) = \exp\Bigg(\sum_{j=1}^{\infty}\pi(j)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{jk}}{k}\Bigg).
\end{aligned}$$

Pereidami iš pirmos į antrą eilutę taikome 2 lemos rezultatą. Kituose dviejuose perėjimuose remiamasi binominio koeficiento savybėmis, o paskutinėje eilutėje gauta sandauga potencijuojama ir logaritmuojama bei taikomas logaritmo funkcijos Taylor'o skleidinys. □

**4 lema.** *Teisingos lygybės*

$$q^n = \sum_{d|n} d\pi(d), \qquad \pi(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} q^{n/d}\mu(d). \tag{1.2}$$

*Šiose sumose $d$ perbėga teigiamus $n$ daliklius.*

*Įrodymas.* Tarsime, jog $0 \le x < q^{-1}$. Logaritmuosime dvi generuojančios eilutės $M(x)$ išraiškas ir jas palyginsime:

$$\ln(M(x)) = \ln\Bigg(\sum_{n=0}^{\infty} m(n)x^n\Bigg) = \ln\Bigg(\sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n\Bigg) = \ln\Bigg(\frac{1}{1-qx}\Bigg) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n x^n}{n},$$

$$\ln(M(x)) = \ln\Bigg(\exp\Bigg(\sum_{j=1}^{\infty}\pi(j)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{jk}}{k}\Bigg)\Bigg) = \sum_{j=1}^{\infty}\pi(j)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{jk}}{k} = \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{kj=n}\frac{\pi(j)}{k}\Bigg)x^n.$$

Palyginę eilučių koeficientus prie $x^n$, gauname

$$\frac{q^n}{n} = \sum_{kj=n}\frac{\pi(j)}{k} \quad \text{arba} \quad q^n = \sum_{j|n} j\pi(j).$$

Įrodydami 1.2 lygybę, pritaikome Möbius'o apgręžimo sąryšį.

□

## 1.2 Atsitiktinės multiaibės

Apibūdintoms svorinių multiaibių struktūroms įvesime atsitiktinį jų elementų parinkimą.

**3 apibrėžimas.** Tolygusis tikimybinis matas, žymimas $\nu_n$, aibėje $\mathcal{G}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, apibrėžiamas lygybėmis:

$$\nu_n(\{a\}) = q^{-n}, \quad a \in \mathcal{G}_n, \tag{1.3}$$

be to, $\nu_0(\{\emptyset\}) = 1$.

Atsitiktinių dydžių vidurkį ir dispersiją mato $\nu_n$ atžvilgiu žymėsime $\mathbf{E}_n$ ir $\mathbf{V}_n$.

**4 apibrėžimas.** Tegu $k_j(a)$ yra $j$-ojo pirminių elementų skaičius multiaibėje $a \in \mathcal{G}_n$. Tuomet vektorių $\bar{k}(a) = (k_1(a), \ldots, k_n(a))$ vadinsime multiaibės $a$ struktūriniu vektoriumi.

Kiekvienas $n$-ojo svorio multiaibės $a$ struktūrinis vektorius turi savybę $\ell(\bar{k}(a)) = n$. Tikimybė, kad atsitiktinai parinktos multiaibės $a \in \mathcal{G}_n$ struktūrinis vektorius sutaps su prieš tai parinktu vektoriumi $\bar{s} := (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{N}_0^n$, lygi

$$\nu_n\Big(\bar{k}(a) = \bar{s}\Big) = \mathbf{1}\{\ell(\bar{s}) = n\} q^{-n} \prod_{j=1}^{n} \binom{\pi(j) + s_j - 1}{s_j}. \tag{1.4}$$

Formulė išvedama naudojantis tais pačiais samprotavimais, kaip ir 3 lemos įrodyme.

Apžvelgsime gerai žinomus faktus apie atsitiktines multiaibes. Plačiau multiaibės aprašomos [3] straipsnyje ir [1] knygoje, 2.3 skyriuje.

Tegu $\bar{\gamma}^{(x)} = (\gamma_1^{(x)}, \gamma_2^{(x)}, \ldots)$ yra begalinės dimensijos vektorius. Tarkime, kad jo koordinatės yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal neigiamą binominį dėsnį $\gamma_j^{(x)} \sim NB(\pi(j), x^j)$:

$$P(\gamma_j^{(x)} = m) = \binom{\pi(j) + m - 1}{m} (1 - x^j)^{\pi(j)} x^{jm}, \qquad m \in \mathbb{N}_0,$$

čia $0 < x < q^{-1}$. Jų momentus generuojančios funkcijos atrodys taip:

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\gamma_j^{(x)} = k) z^k = \left( \frac{1 - x^j}{1 - z x^j} \right)^{\pi(j)}.$$

Vėliau taip pat naudosimės šių atsitiktinių dydžių faktorialiniais momentais:

$$\mathbf{E}\Big(\gamma_j^{(x)}\Big)_r = \mathbf{E}\Big(\gamma_j^{(x)}(\gamma_j^{(x)}-1)\cdots(\gamma_j^{(x)}-r+1)\Big) = \psi^{(r)}(z)|_{z=1} = \left(\frac{x^j}{1-x^j}\right)^r \frac{\Gamma(\pi(j)+r)}{\Gamma(\pi(j))},$$

čia $\Gamma$ – Euler'io gama funkcija.

Dėl paprastumo atitinkamai pratęsiame $\bar{k}(a)$ iki begalinės dimensijos vektoriaus $\bar{k}(a) := (k_1(a),\dots,k_n(a),0,\dots)$. Tegu $\theta^{(x)} = 1\gamma_1^{(x)} + \cdots + n\gamma_n^{(x)} + (n+1)\gamma_{n+1}^{(x)} + \cdots$. Atsitiktinis dydis $\theta^{(x)}$ apibrėžtas korektiškai, kai $0 < x < q^{-1}$, nes tenkinama Boreli-Cantelli lemos sąlyga:

$$\sum_{j=1}^{\infty} P\Big(\gamma_j^{(x)} \neq 0\Big) = \sum_{j=1}^{\infty}\Big(1-(1-x^j)^{\pi(j)}\Big) < \infty. \tag{1.5}$$

Šios sumos konvergavimas yra ekvivalentus begalinės sandaugos

$$\frac{1}{M(x)} = \prod_{j=1}^{\infty}(1-x^j)^{\pi(j)} \tag{1.6}$$

konvergavimui. Žinome, kad $M(x) \neq 0$, kai $0 < x < q^{-1}$, todėl (1.5) eilutė konverguoja, kai tenkinama ta pati sąlyga.

**5 lema.** *Jei* $\bar{s} = (s_1,\dots,s_j,s_{j+1},\dots) \in \mathbb{N}_0^{\infty}$ *ir* $0 < x < q^{-1}$, *tai*

$$\nu_n\Big(\bar{k}(a) = \bar{s}\Big) = P(\bar{\gamma}^{(x)} = \bar{s} |\, \theta^{(x)} = n).$$

*Įrodymas.* Lygybės kairiosios pusės išraiška jau yra žinoma:

$$\nu_n\Big(\bar{k}(a) = \bar{s}\Big) = \frac{\mathbf{1}\{\ell(\bar{s}) = n\}}{m(n)} \prod_{j=1}^{n}\binom{\pi(j)+s_j-1}{s_j}.$$

Telieka rasti tikslią dešiniosios pusės išraišką. Pradėsime nuo sąlygos $\theta^{(x)} = n$:

$$\begin{aligned}
P(\theta^{(x)} = n) &= P(\theta = n) \prod_{k=n+1}^{\infty} P(\gamma_k^{(x)} = 0)\\
&= \sum_{\ell(\bar{k})=n}\prod_{j=1}^{n}\binom{\pi(j)+k_j-1}{k_j}(1-x^j)^{\pi(j)}x^{jk_j}\prod_{k=n+1}^{\infty}P(\gamma_k^{(x)} = 0)\\
&= \sum_{\ell(\bar{k})=n}\prod_{j=1}^{n}\binom{\pi(j)+k_j-1}{k_j}(1-x^j)^{\pi(j)}x^{jk_j}\prod_{k=n+1}^{\infty}(1-x^k)^{\pi(k)}\\
&= \sum_{\ell(\bar{k})=n} x^{\ell(\bar{k})}\prod_{j=1}^{n}\binom{\pi(j)+k_j-1}{k_j}\prod_{k=0}^{\infty}(1-x^k)^{\pi(k)} = \frac{x^n m(n)}{M(x)}.
\end{aligned}$$

Galiausiai surasime sąlyginės tikimybės išraišką:

$$P(\bar{\gamma}^{(x)}=\bar{s}|\,\theta^{(x)}=n)=\frac{P((\theta^{(x)}=n)\cap(\bar{\gamma}^{(x)}=\bar{s}))}{P(\theta^{(x)}=n)}=\frac{\mathbf{1}\{\ell(\bar{s}=n)\}P(\bar{\gamma}^{(x)}=\bar{s}))}{P(\theta^{(x)}=n)}$$
$$=\frac{\mathbf{1}\{\ell(\bar{s})=n\}}{P(\theta^{(x)}=n)}\prod_{j=1}^{\infty}\binom{\pi(j)+s_j-1}{s_j}(1-x^j)^{\pi(j)}x^{js_j}$$
$$=\frac{\mathbf{1}\{\ell(\bar{s})=n\}}{P(\theta^{(x)}=n)}\frac{x^n}{M(x)}\prod_{j=1}^{n}\binom{\pi(j)+s_j-1}{s_j}=\frac{\mathbf{1}\{\ell(\bar{s})=n\}}{m(n)}\prod_{j=1}^{n}\binom{\pi(j)+k_j-1}{k_j}.$$

□

**6 lema.** *Tegul* $\Psi:\mathbb{N}_0^\infty\to\mathbb{R}$ *yra toks atvaizdis, kad* $\mathbf{E}\Big|\Psi(\bar{\gamma}^{(x)})\Big|<\infty$. *Tuomet*

$$\mathbf{E}\Psi(\bar{\gamma}^{(x)})=(1-qx)\Bigg(\Psi(\bar{0})+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}_n\Psi(\bar{k}(a))q^nx^n\Bigg),\quad 0<x<q^{-1}.$$

*Įrodymas.* Lygybei įrodyti remsimės sąlyginio vidurkio savybe

$$\mathbf{E}\Psi(\bar{\gamma}^{(x)})=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}\Big(\Psi(\bar{\gamma}^{(x)})\Big|\theta^{(x)}=n\Big)P(\theta^{(x)}=n)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}_n\Psi(\bar{k}(a))P(\theta^{(x)}=n)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}_n\Psi(\bar{k}(a))\frac{x^nm(n)}{M(x)}$$
$$=(1-qx)\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}_n\Psi(\bar{k}(a))x^nq^n.$$

□

Pritaikę įrodytos lemos teiginį, randame atsitiktinių struktūrinių vektorių koordinačių vidurkius ir kitus momentus.

**7 lema.** *Teisingos lygybės*

$$\mathbf{E}_nk_j(a)=\pi(j)\sum_{1\le k\le n/j}q^{-jk},$$
$$\mathbf{E}_n\Big(k_j(a)(k_j(a)-1)\Big)=\pi(j)(\pi(j)+1)\sum_{1\le k\le n/j}(k-1)q^{-jk}.$$

*Taip pat, jei* $i\ne j$, *tai*

$$\mathbf{E}_n\Big(k_i(a)k_j(a)\Big)=\pi(i)\pi(j)\sum_{\substack{l,k\ge1\\ il+jk\le n}}q^{-il-jk}.$$

*Įrodymas.* Lygybėms įrodyti taikysime 6 lemos teiginį.

1) Tegu $\Psi(\bar{k}) = k_j$. Tuomet

$$\mathbf{E}\Psi(\bar{\gamma}^{(x)}) = \mathbf{E}\gamma_j^{(x)} = \frac{\pi(j)x^j}{1-x^j} = \pi(j)\sum_{n=0}^{\infty} x^{(n+1)j}.$$

Kitą vertus, turime

$$(1-qx)\left(\Psi(\bar{0}) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n\Psi(\bar{k}(a))q^n x^n\right) = (1-qx)\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n k_j(a) q^n x^n.$$

Sujungiame abi lygybės puses:

$$\pi(j)\sum_{n=0}^{\infty} x^{(n+1)j} = (1-qx)\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n k_j(a) q^n x^n,$$
$$\left(\pi(j)\sum_{n=0}^{\infty} x^{(n+1)j}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(qx)^k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n k_j(a) q^n x^n,$$
$$\pi(j)\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\substack{jk+l=n\\ l\geq 0,\, k\geq 1}} q^l = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n k_j(a) q^n x^n.$$

Palyginę koeficientus prie $x^n$, gauname

$$\pi(j)\sum_{\substack{jk+l=n\\ l\geq 0,\, k\geq 1}} q^l = \mathbf{E}_n k_j(a) q^n, \quad \text{arba}$$
$$\mathbf{E}_n k_j(a) = \pi(j)\sum_{\substack{jk+l=n\\ l\geq 0,\, k\geq 1}} q^{l-n} = \pi(j)\sum_{1\leq k\leq n/j} q^{-jk}.$$

Kitos lygybės įrodomos atitinkamai parenkant kitus funkcionalus $\Psi$.

2) Tegu $\Psi(\bar{k}) = k_j(k_j-1)$. Tuomet

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Psi(\bar{\gamma}^{(x)}) &= \mathbf{E}\gamma_j^{(x)}(\gamma_j^{(x)}-1) = \mathbf{E}\Big(\gamma_j^{(x)}\Big)_2 \\ &= \left(\frac{x^j}{1-x^j}\right)^2 \frac{\Gamma(\pi(j)+2)}{\Gamma(\pi(j))} = \left(\frac{x^j}{1-x^j}\right)^2 \pi(j)(\pi(j)+1).\end{aligned}$$

Taip pat

$$(1-qx)\left(\Psi(\bar{0}) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n\Psi(\bar{k}(a))q^n x^n\right) = (1-qx)\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n\Big(k_j(a)(k_j(a)-1)\Big)q^n x^n.$$

Vadinasi:

$$\left(\frac{x^j}{1-x^j}\right)^2 \pi(j)(\pi(j)+1) = (1-qx)\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n\Big(k_j(a)(k_j(a)-1)\Big)q^n x^n,$$

$$\pi(j)(\pi(j)+1)\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{kj}\right)^2 \sum_{l=0}^{\infty}(qx)^l = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n\Big(k_j(a)(k_j(a)-1)\Big)q^n x^n,$$

$$\pi(j)(\pi(j)+1)\sum_{n=2j}^{\infty} x^n \left(\sum_{\substack{kj+rj+l=n \\ k,r\geq 1,\, l\geq 0}} q^l\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n\Big(k_j(a)(k_j(a)-1)\Big)q^n x^n.$$

Palyginame koeficientus prie $x^n$:

$$\pi(j)(\pi(j)+1)\left(\sum_{\substack{kj+rj+l=n \\ k,r\geq 1,\, l\geq 0}} q^l\right) = \mathbf{E}_n\Big(k_j(a)(k_j(a)-1)\Big)q^n,$$

$$\pi(j)(\pi(j)+1)\left(\sum_{\substack{1\leq r\leq n/j, \\ 1\leq k\leq (n-r)/j}} q^{-j(k+r)}\right) = \mathbf{E}_n\Big(k_j(a)(k_j(a)-1)\Big),$$

$$\pi(j)(\pi(j)+1)\left(\sum_{1\leq k\leq n/j} (k-1)q^{-jk}\right) = \mathbf{E}_n\Big(k_j(a)(k_j(a)-1)\Big).$$

3) Tegu $\Psi(\bar{k}) = k_j k_i$, $i \neq j$. Tuomet:

$$\mathbf{E}\Psi(\bar{\gamma}^{(x)}) = (1-qx)\left(\Psi(\bar{0}) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n \Psi(\bar{k}(a))q^n x^n\right),$$

$$\mathbf{E}\Big(\gamma_j^{(x)}\gamma_i^{(x)}\Big) = \frac{\pi(j)x^j\pi(i)x^i}{(1-x^j)(1-x^i)} = (1-qx)\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n\Big(k_j(a)k_i(a)\Big)q^n x^n,$$

$$\pi(j)\pi(i)\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{ki}\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty} x^{lj}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}(qx)^m\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n\Big(k_j(a)k_i(a)\Big)q^n x^n,$$

$$\pi(j)\pi(i)\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{\substack{ki+lj+m=n, \\ k,l\geq 1,\, m\geq 0}} q^m = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n\Big(k_j(a)k_i(a)\Big)q^n x^n.$$

Todėl:

$$\pi(j)\pi(i)\sum_{ki+lj\leq n} q^{-ki-lj} = \mathbf{E}_n\Big(k_j(a)k_i(a)\Big).$$

$\square$

## 1.3 Matricos $U$ spektras ir iš jo išvedamos nelygybės

Šiame skyrelyje aprašomas matricos $U = ((\mathbf{1}\{i+j>n\}(ij)^{-1/2}))$ spektras. Naudodamiesi juo, išvedame nelygybes, kurios labai svarbios įrodant tiesinių statistikų dispersijų įverčius.

**8 lema.** *Tegu* $U = ((u_{ij}))$, $i,j \leq n$, *yra simetrinė matrica, apibrėžta taip:*

$$u_{ij} = \mathbf{1}\{i + j > n\}(ij)^{-1/2}.$$

*Tuomet matricos* $U$ *spektrą sudaro aibė* $\{1, \ -1/2,\ 1/3, \dots, (-1)^{n-1}/n\}$. *Be to, pirmas tris tikrines reikšmes atitinkantys tikriniai vektoriai yra proporcingi* $\bar{e}_r = (e_{r1}, \dots, e_{rn})$, *čia* $r = 1,\ 2,\ 3$, $j \leq n$ *ir*

$$e_{1j} = \sqrt{j}, \quad e_{2j} = (3j - 2n - 1)\sqrt{j}, \quad e_{3j} = \Big(10j^2 - 6(2n+1)j + 3n^2 + 3n + 2\Big)\sqrt{j}.$$

Matricos $U$ spektras ir tikriniai vektoriai yra surandami [5] ir [2] straipsniuose.

Transponuotą vektorių $\bar{x}$ žymėsime $\bar{x}'$.

**9 lema.** *Tegu* $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *yra simetrinė matrica, t.y.* $a_{ij} = a_{ji}$, $i,j \leq n$. *Matricos* $A$ *tikrines reikšmes žymėsime* $\lambda_i$, *o jas atitinkančius ortonormuotus tikrinius vektorius* $\bar{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$. *Tarkime,* $L_V$ *yra tiesinis matricos* $A$ *tikrinių vektorių, esančių poaibyje* $V \subseteq \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$, *generuotas* $\mathbb{R}^n$ *poerdvis, o* $I_V := \{i : \bar{v}_i \in V\}$. *Tuomet*

$$\max_{\bar{x} \in L_V} \frac{\bar{x}A\bar{x}'}{||\bar{x}||^2} = \max_{i \in I_V} \lambda_i, \quad \min_{\bar{x} \in L_V} \frac{\bar{x}A\bar{x}'}{||\bar{x}||^2} = \min_{i \in I_V} \lambda_i. \tag{1.7}$$

*Įrodymas.* Tarkime $\bar{x} \in L$. Tuomet $\bar{x}$ galime išreikšti taip $\sum_{i \in I_V} \alpha_i \bar{v}_i$, čia $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Tada

$$\begin{aligned}
&\max_{\bar{x} \in L_V} \frac{\bar{x}A\bar{x}'}{||\bar{x}||^2} = \max_{\bar{x} \in L_V} \frac{1}{||\bar{x}||^2} \Bigg(\sum_{i \in I_V} \alpha_i \bar{v}_i A\Bigg)\Bigg(\sum_{j \in I_V} \alpha_j \bar{v}_j\Bigg) \\
&= \max_{\bar{x} \in L_V} \frac{1}{||\bar{x}||^2} \Bigg(\sum_{i \in I_V} \alpha_i \lambda_i \bar{v}_i\Bigg)\Bigg(\sum_{j \in I_V} \alpha_j \bar{v}_j\Bigg) = \max_{\bar{x} \in L_V} \frac{1}{||\bar{x}||^2} \sum_{i \in I_V} \sum_{j \in I_V} \alpha_i \alpha_j \lambda_i \bar{v}_i \bar{v}_j \\
&= \max_{\bar{x} \in L_V} \frac{1}{||\bar{x}||^2} \sum_{i \in I_V} \alpha_i^2 \lambda_i = \max_{\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n} \sum_{i \in I_V} \frac{\alpha_i^2}{||\bar{\alpha}||^2} \lambda_i = \max_{i \in I_V} \lambda_i.
\end{aligned}$$

Minimumas įrodomas atitinkamai. □

Toliau matricos $U$ tikrinius vektorius žymėsime $\bar{e}_r$, $1 \leq r \leq n$.

**10 lema.** *Tegu* $b_m \in \mathbb{R}$, $\ 1 \leq m \leq n$ *ir* $n \geq 2$. *Tuomet*

$$-\frac{1}{2} \sum_{1 \leq m \leq n} m b_m^2 \leq \sum_{\substack{1 \leq m_1, m_2 \leq n \\ m_1 + m_2 > n}} b_{m_1} b_{m_2} \leq \sum_{1 \leq m \leq n} m b_m^2. \tag{1.8}$$

*Jei* $n \geq 3$ *ir*

$$\sum_{m \leq n} m b_m = 0,$$

*tai*

$$\sum_{\substack{1 \leq m_1, m_2 \leq n \\ m_1 + m_2 > n}} b_{m_1} b_{m_2} \leq \frac{1}{3} \sum_{1 \leq m \leq n} m b_m^2. \tag{1.9}$$

*Be to, abi* (1.8) *ir* (1.9) *nelygybės tampa lygybėmis, kai* $b_m = e_{rm}/\sqrt{m}$*, čia* $r = 2, 1, 3$ *ir* $e_{rm}$ *toks pat, kaip apibrėžtas* 8 *lemoje.*

*Įrodymas.* Nelygybės įrodomos pritaikius 9 lemos rezultatą matricai $U$, apibrėžtai 8 lemoje. Iš tiesų

$$\max_{\bar{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{\bar{x} U \bar{x}'}{||\bar{x}||^2} = \max_{1 \leq r \leq n} \frac{(-1)^{r-1}}{r} = 1 \Longrightarrow \bar{x} U \bar{x}' \leq ||\bar{x}||^2.$$

Atitinkamai minimumui turime

$$\bar{x} U \bar{x}' \geq -\frac{1}{2} ||\bar{x}||^2.$$

Pritaikę keitinį $x_m = b_m \sqrt{m}$, $m \leq n$, gauname (1.8) nelygybę.

Įrodysime paskutinį sąryšį. Pirma pastebime, kad

$$\sum_{m \leq n} m b_m = 0 \iff \sum_{m \leq n} x_m \sqrt{m} = \bar{x} \cdot \bar{e}_1' = 0, \tag{1.10}$$

t.y. $\bar{x}$ priklauso poerdviui $L_V$, generuotam iš $V = \{\bar{e}_2, \bar{e}_3, \ldots, \bar{e}_n\}$. Tokiu atveju gauname griežtesnę nelygybę

$$\max_{\bar{x} \in L_V} \frac{\bar{x} U \bar{x}'}{||\bar{x}||^2} \leq \max_{2 \leq r \leq n} \frac{(-1)^{r-1}}{r} = \frac{1}{3},$$

kadangi nebereikia atsižvelgti į vektoriaus $\bar{e}_1$ tikrinę reikšmę $-1$.

Be to (1.8) ir (1.9) nelygybės tampa lygybėmis vietoj $\bar{x}$ parenkant atitinkamus tikrinius vektorius $\bar{e}_i$. $\square$

# 2 skyrius

# Teoremų įrodymai

## 2.1 Tiesinės statistikų vidurkių ir dispersijų išraiškos

**5 apibrėžimas.** Tiesine statistika vadinsime atsitiktinį dydį $h(\bar{c})$, apibrėžtą taip:

$$h(\bar{c}) := h(\bar{c}, a) = c_1 k_1(a) + \cdots + c_n k_n(a), \quad \bar{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n,\ a \in \mathcal{G}_n.$$

Nagrinėsime jų dispersijas, arba Turáno-Kubiliaus tipo nelygybes tiesinėms statistikoms.

**1 teorema.** *Jei $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ ir $n \in \mathbb{N}$, tai*

$$\mathbf{V}_n h(\bar{c}) = \sum_{1 \le jk \le n} c_j^2 \pi(j) k q^{-jk} - \sum_{\substack{il+jk>n \\ il \le n, jk \le n}} c_i c_j \pi(i) \pi(j) q^{-il-jk}. \tag{2.1}$$

*Įrodymas.* Gana lengvai galime gauti tiesinės statistikos vidurkio išraišką:

$$\mathbf{E}_n(h(\bar{c})) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{E}_n k_j(a) = \sum_{j=1}^{n} c_j \pi(j) \sum_{1 \le k \le n/j} q^{-jk}.$$

Dispersiją skaičiuosime remdamiesi formule

$$\mathbf{V}_n(h(\bar{c})) = \mathbf{E}_n\Big(h(\bar{c})\Big)^2 - \Big(\mathbf{E}_n h(\bar{c})\Big)^2. \tag{2.2}$$

Gauname

$$\mathbf{E}_n\Big(h(\bar{c})\Big)^2 = \mathbf{E}_n\Bigg(\sum_{j=1}^{n} c_j\pi(j)k_j(a)\Bigg)^2 = \mathbf{E}_n\Bigg(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_jc_i\pi(j)\pi(i)k_j(a)k_i(a)\Bigg)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} c_j^2\Big(\mathbf{E}_nk_j(a) + \mathbf{E}_n\Big(k_j(a)\Big)_2\Big) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{n} c_ic_j\mathbf{E}_n\Big(k_i(a)k_j(a)\Big).$$

Gautas išraiškas įstatome į (2.2) formulę:

$$\mathbf{V}_n(h(\bar{c})) = \sum_{j=1}^{n} c_j^2\Big(\mathbf{E}_nk_j(a)\mathbf{E}_n\Big(k_j(a)\Big)_2\Big)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{n} c_ic_j\mathbf{E}_n\Big(k_i(a)k_j(a)\Big) - \Bigg(\sum_{j=1}^{n} c_j\pi(j)\sum_{1\le k\le n/j} q^{-jk}\Bigg)^2$$
$$= \sum_{j=1}^{n} c_j^2\Big(\pi(j)\sum_{1\le k\le n/j} q^{-jk} + \pi(j)(\pi(j)+1)\sum_{1\le k\le n/j}(k-1)q^{-jk}\Big)$$
$$+ \sum_{\substack{i,j\le n\\ i\neq j}} c_ic_j\pi(i)\pi(j)\sum_{\substack{l,k\ge 1\\ il+jk\le n}} q^{-il-jk} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_ic_j\pi(i)\pi(j)\sum_{\substack{l\le n/i,\\ k\le n/j}} q^{-il-jk}$$
$$= \sum_{1\le jk\le n} c_j^2\pi(j)kq^{-jk} + \sum_{1\le jk\le n} c_j^2\pi(j)^2(k-1)q^{-jk} - \sum_{1\le im\le n} c_i^2\pi(i)^2(m-1)q^{-im}$$
$$- \sum_{il+jk>n} c_ic_j\pi(i)\pi(j)q^{-il-jk} = \sum_{1\le jk\le n} c_j^2\pi(j)kq^{-jk} - \sum_{il+jk>n} c_ic_j\pi(i)\pi(j)q^{-il-jk}.$$

□

## 2.2 Tiesinių statistikų dispersijų įverčiai

Šiame skyrelyje formuluojami ir įrodomi nauji rezultatai – tiesinių statistikų dispersijų įverčiai (jie publikuoti [4]). Dispersiją $\mathbf{V}_n$, išreikštą (2.1) formule, įvertinsime per kvadratines formas:

$$\mathbf{B}_n(\bar{c}) := \sum_{1\le jk\le n} c_j^2\pi(j)kq^{-jk}, \quad \mathbf{R}_n(\bar{c}) := \sum_{m\le n} mq^{-2m}\Bigg(\sum_{j|m} c_j\pi(j)\Bigg)^2. \tag{2.3}$$

**2 teorema.** *Jei $n \ge 2$, tuomet*

$$\mathbf{V}_nh(\bar{c}) \le \mathbf{B}_n(\bar{c}) + \frac{1}{2}\mathbf{R}_n(\bar{c}). \tag{2.4}$$

*Be to, nelygybė tampa lygybe, kai*

$$c_j = c_j^* := \frac{3}{\pi(j)} \sum_{d|j} dq^d \mu\Big(\frac{j}{d}\Big) - (2n+1)j, \quad 1 \le j \le n. \tag{2.5}$$

*Įrodymas.* Reikia įrodyti, kad

$$-\sum_{\substack{il+jk>n \\ il\le n, jk\le n}} c_i c_j \pi(i)\pi(j) q^{-il-jk} \le \mathbf{R}_n(\bar{c}) = \sum_{m\le n} mq^{-2m}\Big(\sum_{j|m} c_j\pi(j)\Big)^2. \tag{2.6}$$

Pergrupuojame dėmenis kairiojoje (2.6) nelygybės pusėje:

$$-\sum_{\substack{il+jk>n \\ il\le n, jk\le n}} c_i c_j \pi(i)\pi(j) q^{-il-jk} = -\sum_{\substack{m_1,m_2\le n \\ m_1+m_2>n}} \Big(q^{-m_1}\sum_{i|m_1} c_i\pi(i)\Big)\Big(q^{-m_2}\sum_{j|m_2} c_j\pi(j)\Big). \tag{2.7}$$

Pakanka pritaikyti(1.8) nelygybę, kai

$$b_m = q^{-m}\sum_{j|m} c_j\pi(j), \quad m \le n.$$

Be to, remiantis 10 lema, ši nelygybė tampa lygybe, kai

$$q^{-m}\sum_{j|m} c_j\pi(j) = 3m - 2n - 1.$$

Padauginę lygybę iš $q^m$, pritaikę Möbius'o apgręžimo sąryšį ir padaliję iš $\pi(j)$, turime

$$c_j = \frac{3}{\pi(j)}\sum_{d|j} dq^d\mu\Big(\frac{j}{d}\Big) - \frac{2n+1}{\pi(j)}\sum_{d|j} q^d\mu\Big(\frac{j}{d}\Big).$$

Pritaikę (1.2) sąryšį gauname norėtą 2.5 išraišką. □

Vėlesniuose įrodymuose vartosime žymenį

$$\bar{j} := (1, \ldots, j, \ldots, n) \in \mathbb{R}^n.$$

**1 išvada.** *Tegu* $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ *yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal neigiamą binominį dėsnį* $NB(\pi(j), q^{-j})$. *Pažymėkime* $Y_n = c_1\gamma_1 + \cdots + c_n\gamma_n$. *Jei* $n \ge 2$ *ir* $\bar{c} \ne \bar{0}$, *tai*

$$\mathbf{V}_n h(\bar{c}) < \frac{3}{2}\mathbf{B}_n(\bar{c}) \le \frac{3}{2}\Big(1 - \frac{q-1}{q}q^{-n}\Big)\mathbf{V}Y_n. \tag{2.8}$$

*Įrodymas.* Pirmai (2.8) nelygybei pakanka parodyti, kad $\mathbf{R}_n(\bar{c}) \le \mathbf{B}_n(\bar{c}), n \ge 2$ ir $\bar{c} \ne \bar{0}$. Užtenka įvertinti vidinę $\mathbf{R}_n$ sumą:

$$\Big(\sum_{j|m} c_j\pi(j)\Big)^2 \le \sum_{j|m} \frac{c_j^2\pi(j)}{j} \cdot \sum_{j|m} j\pi(j) = \sum_{j|m} \frac{c_j^2\pi(j)}{j} \cdot q^m, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{R}_n(\bar{c}) = \sum_{m\le n} mq^{-2m}\Big(\sum_{j|m} c_j\pi(j)\Big)^2 \le \sum_{m\le n} mq^{-m}\sum_{j|m}\frac{c_j^2\pi(j)}{j} \le \mathbf{B}_n(\bar{c}). \tag{2.10}$$

Iš tiesų (2.9) ir (2.10) nelygybėse ženklą $\le$ galėtume pakeisti $<$, kadangi Cauchy nelygybė yra griežta, išskyrus tą atvejį, kai $\bar{c}$ yra proporcingas $\bar{j}$.

Įrodysime antrąją (2.8) nelygybę. Pirma surandame tikslią $\mathbf{V}Y_n$ išraišką

$$\mathbf{V}Y_n = \sum_{1\le j\le n} c_j^2 \mathbf{V}\gamma_j = \sum_{1\le j\le n} \frac{c_j^2\pi(j)q^j}{(q^j-1)^2} = \sum_{1\le j\le n} c_j^2\pi(j)\sum_{k=1}^{\infty} kq^{-jk}. \tag{2.11}$$

Toliau taikysime formulę

$$\sum_{k=a}^{\infty} kx^{-k} = \frac{x^{1-a}(ax-a+1)}{(x-1)^2}, \quad |x|>1. \tag{2.12}$$

Vertiname:

$$\mathbf{V}Y_n - \mathbf{B}_n(\bar{c}) = \sum_{j\le n} c_j^2\pi(j) \sum_{k=\lfloor n/j\rfloor+1}^{\infty} kq^{-jk} = \sum_{j\le n} c_j^2\pi(j)\left(\frac{q^{-j\lfloor n/j\rfloor}(q^j(\lfloor n/j\rfloor+1)-\lfloor n/j\rfloor)}{(q^j-1)^2}\right)$$

$$\ge q^{-n}\sum_{j\le n} c_j^2\pi(j)\frac{q^j(n/j)-(n/j)}{(q^j-1)^2} \ge q^{-n}\sum_{j\le n} c_j^2\pi(j)\frac{q^j}{(q^j-1)^2}\frac{q^j-1}{q^j} \ge q^{-n}\frac{q-1}{q}\mathbf{V}Y_n.$$

□

**11 lema.** *Kvadratinės formos* $\mathbf{B}_n(\bar{c}-t\bar{j})$ *ir* $\mathbf{R}_n(\bar{c}-t\bar{j})$ *įgyja mažiausią reikšmę pagal* $t\in\mathbb{R}$, *kai*

$$t = t_c := \frac{2}{(n+1)n}\sum_{m\le n} mq^{-m}\sum_{j|m} c_j\pi(j). \tag{2.13}$$

*Įrodymas.* Išskleisime $\mathbf{B}_n(\bar{c}-t\bar{j})$ ir $\mathbf{R}_n(\bar{c}-t\bar{j})$ išraiškas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_n(\bar{c}-t_c\bar{j}) &= \sum_{1\le jk\le n} (c_j - t_cj)^2\pi(j)kq^{-jk} \\
&= \mathbf{B}_n(\bar{c}) - 2t\sum_{1\le jk\le n} c_j\pi(j)jkq^{-jk} + t^2\sum_{1\le jk\le n}\pi(j)j^2kq^{-jk} \\
&= \mathbf{B}_n(\bar{c}) - 2t\sum_{m\le n} mq^{-m}\sum_{j|m}c_j\pi(j) + t^2\sum_{m\le n} mq^{-m}\sum_{j|m} j\pi(j) \\
&= \mathbf{B}_n(\bar{c}) - tn(n+1)t_c + t^2\frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Taip pat

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_n(\bar{c}-t\bar{j}) &= \sum_{m=1}^{n} mq^{-2m}\Big(\sum_{j|m}(c_j-t_cj)\pi(j)\Big)^2 = \sum_{m=1}^{n} mq^{-2m}\Big(\sum_{j|m}c_j\pi(j)-tq^m\Big)^2\\ &= \mathbf{R}_n(\bar{c}) - 2t\sum_{m\le n} mq^{-m}\sum_{j|m}c_j\pi(j) + t^2\sum_{m\le n} mq^{-m}\sum_{j|m} j\pi(j)\\ &= \mathbf{R}_n(\bar{c}) - tn(n+1)t_c + t^2\frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Matome, kad $\mathbf{B}_n(\bar{c}-t\bar{j})$ ir $\mathbf{R}_n(\bar{c}-t\bar{j})$ mažiausias reikšmes įgyja, kai $t=t_c$. □

**3 teorema.** *Jei $n \geq 3$, tai*

$$\mathbf{B}_n(\bar{c}-t_c\bar{j}) - \frac{1}{3}\mathbf{R}_n(\bar{c}-t_c\bar{j})) \le \mathbf{V}_n h(\bar{c}) \le \mathbf{B}_n(\bar{c}-t_c\bar{j}) + \frac{1}{2}\mathbf{R}_n(\bar{c}-t_c\bar{j}). \tag{2.14}$$

*Be to,*

$$\mathbf{B}_n(\bar{c}-t_c\bar{j}) + \frac{1}{2}\mathbf{R}_n(\bar{c}-t_c\bar{j}) = \mathbf{B}_n(\bar{c}) + \frac{1}{2}\mathbf{R}_n(\bar{c}) - \frac{3(n+1)n}{4}t_c^2. \tag{2.15}$$

*Abi (2.14) nelygybės nepagerinamos.*

*Įrodymas.* Pirma pastebime, kad

$$\mathbf{V}_n h(\bar{c}) = \mathbf{V}_n\Big(h(\bar{c}) - tn\Big) = \mathbf{V}_n h(\bar{c}-t\bar{j}),\ \forall t\in\mathbb{R}. \tag{2.16}$$

Tada dešinioji (2.14) nelygybė išplaukia iš (2.4) įverčio ir (2.16) savybės. Kairioji (2.14) nelygybė išplaukia iš (1.9) nelygybės pritaikius keitinį

$$\tilde{b}_m = q^{-m}\sum_{j|m}(c_j-t_cj)\pi(j), \quad m\le n,$$

kvadratinei formai $\mathbf{R}_n$. Belieka parodyti, kad tenkinama sąlyga

$$\sum_{m\le n} m\tilde{b}_m = 0.$$

Iš tiesų:

$$\begin{aligned}\sum_{m\le n} m\tilde{b}_m &= \sum_{m\le n} mq^{-m}\sum_{j|m}(c_j-t_cj)\pi(j)\\ &= \sum_{m\le n} mq^{-m}\sum_{j|m}c_j\pi(j) - \sum_{m\le n} mq^{-m}\sum_{j|m}t_cj\pi(j)\\ &= \frac{n(n+1)}{2}t_c - t_c\sum_{m\le n} mq^{-m}q^m = 0.\end{aligned}$$

Galiausiai (2.15) lygybė gaunama į 11 lemos įrodyme gautas išraiškas įstačius $t_c$ reikšmę.

$\square$

**2 išvada.** *Jei* $n \geq 3$ *ir* $\bar{c} \neq \alpha\bar{j}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *tai*

$$\frac{2}{3}\mathbf{B}_n(\bar{c} - t_c\bar{j}) < \mathbf{V}_n h(\bar{c}) < \frac{3}{2}\mathbf{B}_n(\bar{c} - t_c\bar{j}).$$

*Įrodymas.* Pastebėjus, kad $\mathbf{B}_n \geq \mathbf{R}_n$, rezultatas išplaukia (2.14) įverčių. $\square$

## 2.3 Asimptotinės formulės.

Vartosime ankstesniuose skyreliuose įvestus žymenis ir apibrėžimus. Toliau $\Theta$ yra bet koks dydis, kurio absoliutusis didumas neviršija 1, t.y. vietoje $|A| \leq |B|$ rašysime $A = \Theta B$.

**12 lema.** *Jei* $1 \leq j \leq n$*, tai:*

$$|\pi(j)c_j^* - 3jq^j + (2n+1)j\pi(j)| \leq 3jq^{j/2}, \tag{2.17}$$

$$\pi(j)c_j^* = \Theta(6jq^j + (2n+1)q^j), \tag{2.18}$$

$$c_j^* = \Theta(6j + (2n+1))4j. \tag{2.19}$$

*Įrodymas.* Remiantis $c_j^*$ apibrėžimu,

$$|\pi(j)c_j^* - 3jq^j + (2n+1)j\pi(j)| = \Big|3 \sum_{\substack{d|j \\ d \leq j/2}} dq^d \mu(j/d)\Big|$$

$$\leq 3 \sum_{\substack{d|j \\ d \leq j/2}} dq^d \leq 3\sum_{d=1}^{j/2} dq^d \leq 3\frac{j}{2}\sum_{d=1}^{j/2} q^d = \frac{3jq}{2}\frac{q^{j/2}-1}{q-1} \leq 3jq^{j/2}.$$

Nelygybės (2.18) ir (2.19) gaunamos taikant nelygybę $\frac{q^j}{4} \leq j\pi(j) < q^j$:

$$\pi(j)c_j^* = \Theta(3jq^j + (2n+1)j\pi(j) + 3jq^{j/2}) = \Theta(6jq^j + (2n+1)q^j),$$

$$c_j^* = \Theta(6j + 2n + 1)q^j\pi(j)^{-1} = \Theta(6j + 2n + 1)4j.$$

□

**13 lema.** *Jei* $n \geq 2$*, tai*

$$\sum_{k=2}^{\infty} kq^{-jk} \leq 8q^{-2j}. \tag{2.20}$$

*Įrodymas.* Taikysime (2.12) formulę:

$$\sum_{k=2}^{\infty} kq^{-jk} = \frac{q^{-j}(2q^j - 2 + 1)}{(q^j-1)^2} = \frac{2 - q^{-j}}{(q^j-1)^2} \leq \frac{2}{q^{2j}}\left(\frac{q^j}{q^j-1}\right)^2 \leq 8q^{-2j}. \tag{2.21}$$

□

**14 lema.** *Jei* $n \geq 2$*, tai*

$$\sum_{\substack{1 \leq kj \leq n \\ k \geq 2}} (c_j^*)^2 \pi(j) kq^{-jk} = O(n^2). \tag{2.22}$$

*Įrodymas.* Remsimės prieš tai įrodytos lemos rezultatu:

$$\sum_{\substack{1\le kj\le n\\ k\ge 2}} (c_j^*)^2\pi(j)kq^{-jk} \le \sum_{j=1}^{n}(c_j^*)^2\pi(j)\sum_{k=2}^{\infty} kq^{-jk} \le 8\sum_{j=1}^{n}(c_j^*)^2\pi(j)q^{-2j} \le 8\sum_{j=1}^{n}(c_j^*)^2 q^{-j}j^{-1}.$$

Taikysime (2.19) nelygybę:

$$\begin{aligned}
&8\sum_{j=1}^{n}(c_j^*)^2 q^{-j}j^{-1} = \Theta\sum_{j=1}^{n}(6j+2n+1)^2 q^{-j}j\\
&= \Theta\sum_{j=1}^{n} j^3q^{-j} + \Theta\sum_{j=1}^{n} j^2q^{-j}(2n+1) + \Theta\sum_{j=1}^{n} jq^{-j}(2n+1)^2 = O(n^2).
\end{aligned}$$

□

**15 lema.** *Jei $n \ge 2$, tai*

$$\mathbf{R}_n(\bar{c}^*) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}. \tag{2.23}$$

*Įrodymas.* Užtenka pritaikyti $\mathbf{R}_n$ ir $\bar{c^*}$ apibrėžimus:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_n(\bar{c}^*) &= \sum_{m=1}^{n} mq^{-2m}(q^m(3m-2n-1))^2\\
&= \sum_{m=1}^{n} 9m^3 - 6m^2(2n+1) + m(2n+1)^2\\
&= \frac{9}{4}n^2(n+1)^2 - 6(2n+1)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}(2n+1)^2\\
&= \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}.
\end{aligned}$$

□

**16 lema.** *Jei $q \ge 2$, tai*

$$\pi(j)^{-1} = jq^{-j}(1+\Theta jq^{-j/2}). \tag{2.24}$$

*Įrodymas.* Taikysime gerai žinomą nelygybę $q^j/j - \pi(j) \le q^{j/2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{q^j}{j} - \pi(j) &= \Theta q^{j/2},\\
\frac{q^j}{j\pi(j)} &= 1 + \Theta\frac{q^{j/2}}{\pi(j)},\\
\pi(j)^{-1} &= jq^{-j}(1+\Theta jq^{j/2}).
\end{aligned}$$

□

**17 lema.** *Jei $n \geq 2$, tai*

$$\mathbf{B}_n(\bar{c}^*) = \mathbf{R}_n(\bar{c}^*) + O(n^2). \tag{2.25}$$

*Įrodymas.* Remiamės šiame skyrelyje įrodytų lemų teiginiais:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_n(\bar{c}^*) &= \sum_{1\leq jk\leq n} c_j^2 \pi(j) k q^{-jk} = \sum_{1\leq j\leq n} (c_j^*)^2 \pi(j) q^{-j} + \sum_{\substack{1\leq kj\leq n\\ k\geq 2}} (c_j^*)^2 \pi(j) k q^{-jk} \\
&= \sum_{1\leq j\leq n} c_j^* \pi(j) c_j^* q^{-j} + O(n^2) = \sum_{1\leq j\leq n} \Big(3jq^j - (2n+1)j\pi(j) + O(jq^{j/2})\Big) \\
&\quad \times \Big(3jq^j \pi(j)^{-1} - (2n+1)j + O(jq^{j/2}\pi(j)^{-1})\Big) + O(n^2) \\
&= \sum_{1\leq j\leq n} \Big(9j^2 q^{2j}\pi(j)^{-1} - 3(2n+1)j^2q^j - 3(2n+1)j^2q^j + (2n+1)^2 j^2 \pi(j) + \\
&\quad + O(j^2q^{j/2}\pi(j)^{-1} + nj^3\pi(j)q^{-j/2} + j^3)\Big) q^{-j} + O(n^2) \\
&= \sum_{1\leq j\leq n} \Big(9j^3(1+\Theta j q^{-j/2}) - 6(2n+1)j^2 + (2n+1)^2 j\Big) + O(n^2) = \mathbf{R}_n(\bar{c}^*) + O(n^2).
\end{aligned}$$

□

**4 teorema.** *(I dalis) Egzistuoja tokia $C > 0$, kad*

$$\frac{3}{2} - \frac{C}{n^2} \leq \sup_{\bar{c}\in\mathbb{R}^n/\{\bar{0}\}} \frac{\mathbf{V}_n h(\bar{c})}{\mathbf{B}_n(\bar{c})} \leq \frac{3}{2}, \tag{2.26}$$

*kai $n \geq 2$.*

*Įrodymas.* Nelygybė (2.26) išplaukia iš 17 lemos:

$$\sup_{\bar{c}\in\mathbb{R}^n/\{\bar{0}\}} \frac{\mathbf{V}_n h(\bar{c})}{\mathbf{B}_n(\bar{c})} \geq \frac{\mathbf{V}_n h(\bar{c}^*)}{\mathbf{B}_n(\bar{c}^*)} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{R}_n(\bar{c}^*)}{\mathbf{B}_n(\bar{c}^*)} \geq \frac{3}{2} - \frac{C}{n^2}.$$

□

Panašiai įrodysime asimptotinę formulę infimumo atveju. Imsime $\bar{c} = \bar{c}_3$, čia

$$c_{3j} = (3n^2+3n+2)j + \frac{1}{\pi(j)} \sum_{d|j} \mu(j/d) q^d (10d^2 - 6(2n+1)d). \tag{2.27}$$

Tada

$$q^{-j} \sum_{d|j} c_{3d}\pi(d) = 10j^2 - 6(2n+1)j + 3n^2 + 3n + 2. \tag{2.28}$$

**18 lema.** *Jei $n \geq 3$, tai*

$$\mathbf{R}_n(\bar{c}_3) = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.$$

*Įrodymas.* Užtenka pritaikyti $\mathbf{R}_n$ ir $\bar{c}_3$ apibrėžimus:

$$\mathbf{R}_n(\bar{c}_3) = \sum_{m=1}^{n} mq^{-2m}\Big(q^m(10m^2 - 6(2n+1)m + 3n^2 + 3n + 2)\Big)^2$$
$$= \sum_{m=1}^{n} 100m^5 - 120(2n+1)m^4 + (36(2n+1)^2 + 20(3n^2+3n+2))m^3$$
$$- 12(2n+1)(3n^2+3n+2)m^2 + (3n^2+3n+2)^2 m$$
$$= \frac{100}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) - \frac{120}{30}(2n+1)^2 n(n+1)(3n^2+3n-1)$$
$$+ \frac{1}{4}n^2(n+1)^2\Big(36(2n+1)^2 + 20(3n^2+3n+2)\Big) - \frac{12}{6}(2n+1)^2 n(n+1)(3n^2+3n+2)$$
$$+ \frac{1}{2}n(n+1)(3n^2+3n+2)^2 = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.$$

□

**19 lema.** *Jei $1 \leq j \leq n$, $n \geq 3$, tai:*

$$|\pi(j)c_{3j} - (3n^2+3n+2)j\pi(j) - 10j^2q^j + 6(2n+1)jq^j| \leq (5j^2 + 6j(2n+1))q^{j/2}, \quad (2.29)$$

$$\pi(j)c_{3j} = \Theta q^j\Big((3n^2+3n+2) + 15j^2 + 12j(2n+1)\Big), \quad (2.30)$$

$$c_{3j} = \Theta\Big((3n^2+3n+2) + 15j^2 + 12j(2n+1)\Big)4j. \quad (2.31)$$

*Įrodymas.* Vertiname:

$$|\pi(j)c_{3j} - (3n^2+3n+2)j\pi(j) - 10j^2q^j + 6(2n+1)jq^j|$$
$$= \Big|\sum_{\substack{d|j \\ d \leq j/2}} (10d^2 - 6(2n+1)d)q^d\mu(j/d)\Big|$$
$$\leq \sum_{\substack{d|j \\ d \leq j/2}} (10d^2 - 6(2n+1)d)q^d \leq 10\sum_{d=1}^{j/2} d^2q^d + 6(2n+1)\sum_{d=1}^{j/2} dq^d$$
$$\leq \left(\frac{10}{4}j^2 + \frac{6}{2}(2n+1)j\right)\sum_{d=1}^{j/2} q^d \leq \left(\frac{5}{2}j^2 + 3(2n+1)j\right)\frac{q(q^{j/2}-1)}{q-1}$$
$$\leq \Big(5j^2 + 6(2n+1)j\Big)q^{j/2}.$$

Kitos lygybės įrodomos pritaikius ką tik gautą nelygybę. □

**20 lema.** *Jei $n \geq 3$, tai*

$$\sum_{\substack{1 \leq kj \leq n \\ k \geq 2}} (c_{3j})^2 \pi(j) k q^{-jk} = O(n^4). \tag{2.32}$$

*Įrodymas.* Pasinaudoję 14 lemos įrodymu ir (2.31) lygybe, gauname

$$\sum_{\substack{1 \leq kj \leq n \\ k \geq 2}} (c_j^*)^2 \pi(j) k q^{-jk} \leq 8 \sum_{j=1}^{n} (c_j^*)^2 q^{-j} j^{-1}$$

$$= \Theta \sum_{j=1}^{n} \Big( ((3n^2+3n+2) + 15j^2 + 12j(2n+1))4j \Big)^2 q^{-j} j \leq C\Theta n^4 \sum_{j=1}^{n} q^{-j} j^3 = O(n^4).$$

□

**21 lema.** *Jei $n \geq 3$, tai*

$$\mathbf{B}_n(\bar{c}_3) = \mathbf{R}_n(\bar{c}_3) + O(n^4). \tag{2.33}$$

*Įrodymas.* Remsimės šiame skyrelyje įrodytų lemų teiginiais:

$$\mathbf{B}_n(\bar{c}_3) = \sum_{1 \leq jk \leq n} (c_{3j})^2 \pi(j) k q^{-jk} = \sum_{1 \leq j \leq n} (c_{3j})^2 \pi(j) q^{-j} + \sum_{\substack{1 \leq kj \leq n \\ k \geq 2}} (c_{3j})^2 \pi(j) k q^{-jk}$$

$$= \sum_{1 \leq j \leq n} (c_{3j})^2 \pi(j)) c_{3j} q^{-j} + O(n^4)$$

$$= \sum_{1 \leq j \leq n} \Big[ q^{-j} \Big( (3n^2+3n+2) j\pi(j) + 10j^2 q^j - 6(2n+1) j q^j + O((j^2+nj) q^{j/2}) \Big)$$

$$\times \Big( (3n^2+3n+2) j - 10j^2 q^j \pi(j)^{-1} + 6(2n+1) j q^j \pi(j)^{-1} + O((j^2+nj) q^{j/2} \pi(j)^{-1}) \Big) \Big]$$

$$+ O(n^4) = \sum_{1 \leq j \leq n} j \Big( (3n^2+3n+2) + 10j^2 - 6(2n+1)j \Big)^2 + O(n^4) = \mathbf{R}_n(\bar{c}_3) + O(n^4).$$

□

**22 lema.** *Jei $n \geq 3$, tai*

$$t_{\bar{c}_3} = 0.$$

*Įrodymas.* Užtenka pritaikyti $t_{\bar{c}}$ apibrėžimą:

$$\frac{t_{\bar{c}_3} n(n+1)}{2} = \sum_{m=1}^{n} m q^{-m} \sum_{j|m} c_{3j} \pi(j) = \sum_{m=1}^{n} m(10m^2 - 6(2n+1)m + (3n^2+3n+2))$$

$$= \frac{10}{4} n^2 (n+1)^2 - \frac{6(2+1)^2 n(n+1)}{6} + \frac{n(n+1)(3n^2+3n+2)}{2} = 0.$$

□

**4 teorema.** *(Tęsinys) Egzistuoja tokia $C > 0$, kad*

$$\frac{2}{3} \leq \inf_{\substack{\bar{c} \in \mathbb{R}^n / \{\bar{0}\} \\ \bar{c} \neq \alpha \bar{j}}} \frac{\mathbf{V}_n h(\bar{c})}{\mathbf{B}_n(\bar{c})} \leq \frac{2}{3} + \frac{C}{n^2}, \tag{2.34}$$

*kai $n \geq 3$.*

*Įrodymas.* Nelygybė (2.34) išplaukia iš (2.33) lygybės ir (2.14) įverčio:

$$\inf_{\substack{\bar{c} \in \mathbb{R}^n / \{\bar{0}\} \\ \bar{c} \neq \alpha \bar{j}}} \frac{\mathbf{V}_n h(\bar{c})}{\mathbf{B}_n(\bar{c})} \leq \frac{\mathbf{V}_n(\bar{c}_3)}{\mathbf{B}_n(\bar{c}_3)} = 1 - \frac{1}{3} \frac{\mathbf{R}_n(\bar{c}_3)}{\mathbf{B}_n(\bar{c}_3)} = 1 - \frac{1}{3} \frac{\mathbf{R}_n(\bar{c}_3)}{\mathbf{R}_n(\bar{c}_3) + O(n^4)} \leq \frac{2}{3} + \frac{C}{n^2}.$$

Parinkome tokį $\bar{c}_3$, kad kairiojoje (2.14) nelygybėje turėtume lygybę. $\square$

# 3 skyrius

# Rezultatų tikrinimas kompiuteriu

Šiame skyriuje aprašoma, kaip teoriniai įverčiai galėtų būti tikrinami kompiuteriniais skaičiavimais. Taip pat pateikiami šių skaičiavimų rezultatai. Kompiuteriu skaičuosime artinį

$$\sup_{\bar{c}\in\mathbb{R}^n}\frac{\mathbf{V}_n(h(\bar{c}))}{\mathbf{B}_n(\bar{c})}=\sup_{\bar{c}\in\mathbb{R}^n}\frac{\mathbf{B}_n(\bar{c})-\Delta_n(\bar{c})}{\mathbf{B}_n(\bar{c})}=1-\inf_{\bar{c}\in\mathbb{R}^n}\frac{\Delta_n(\bar{c})}{\mathbf{B}_n(\bar{c})},\ \text{čia} \tag{3.1}$$

$$\Delta_n(\bar{c}):=\sum_{\substack{il+jk>n\\ il\le n,jk\le n}}c_ic_j\pi(i)\pi(j)q^{-il-jk}. \tag{3.2}$$

Skaičiavimų pagrindą sudaro 9 lemos (1.7) lygybė. Norėdami ją pritaikyti, pirmiausia turime $\frac{\mathbf{V}_n(h(\bar{c}))}{\mathbf{B}_n(\bar{c})}$ suvesti iki pavidalo, atitinkančio (1.7) lygybę, t.y. $\frac{\bar{x}A\bar{x}'}{||\bar{x}||^2}$. Tai padaroma parinkus $c_j$ keitinį $x_j$, $1\le j\le n$, tokį, kad $\mathbf{B}_n(\bar{c})=||\bar{x}||^2$. Šią lygybę tenkina toks keitinys:

$$c_j^2\pi(j)\sum_{k=1}^{\lfloor n/j\rfloor}kq^{-jk}=x_j^2\ \text{ arba }\ c_j=x_j\Bigg(\pi(j)\sum_{k=1}^{\lfloor n/j\rfloor}kq^{-jk}\Bigg)^{-1/2}. \tag{3.3}$$

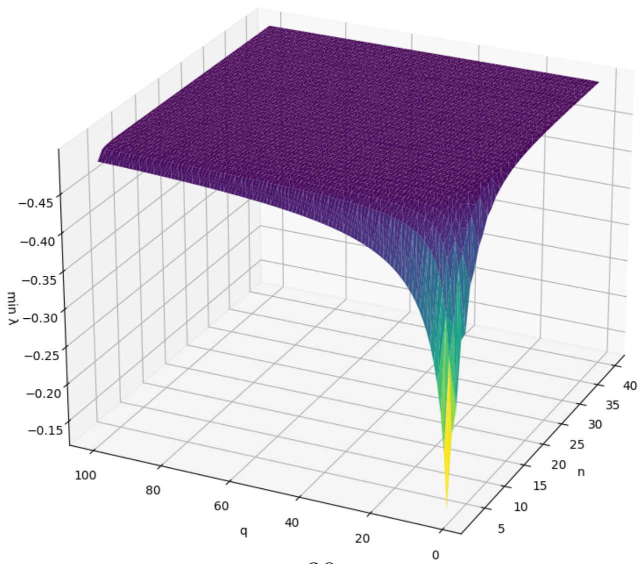
Atlikę kintamųjų pakeitimą, $\Delta_n(\bar{c})$ galime perrašyti taip:

$$\begin{aligned}
\Delta_n(\bar{c}) &= \sum_{\substack{il+jk>n \\ il\le n, jk\le n}} c_i c_j \pi(i)\pi(j) q^{-il-jk} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \pi(i)\pi(j) \sum_{1\le l,k\le n} q^{-il-jk}\mathbf{1}\{il+jk>n,\, il\le n,\, jk\le n\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \pi(i)\pi(j)\Big(\pi(j)\sum_{k=1}^{\lfloor n/i\rfloor} kq^{-jk}\Big)^{-1/2}\Big(\pi(j)\sum_{k=1}^{\lfloor n/j\rfloor} kq^{-jk}\Big)^{-1/2}\cdot \\
&\cdot \sum_{1\le l,k\le n} q^{-il-jk}\mathbf{1}\{il+jk>n,\, il\le n,\, jk\le n\} = \bar{x}\Delta_n\bar{x}', \text{čia } \Delta_n = ((\delta_{ij})), \\
\delta_{ij} &= \pi(i)\pi(j)\Big(\pi(j)\sum_{k=1}^{\lfloor n/i\rfloor} kq^{-jk}\Big)^{-1/2}\Big(\pi(j)\sum_{k=1}^{\lfloor n/j\rfloor} kq^{-jk}\Big)^{-1/2}\cdot \\
&\cdot \sum_{1\le l,k\le n} q^{-il-jk}\mathbf{1}\{il+jk>n,\, il\le n,\, jk\le n\},\ 1\le i,j\le n.
\end{aligned}$$

Jau turėdami reikiamą išraišką, galime pritaikyti antrąją (1.7) lygybę:

$$\inf_{\bar{c}\in\mathbb{R}^n}\frac{\Delta_n(\bar{c})}{\mathbf{B}_n(\bar{c})} = \inf_{\bar{x}\in\mathbb{R}^n}\frac{\bar{x}\Delta_n\bar{x}'}{||\bar{x}||^2} = \min_{i\le n}\lambda_i, \tag{3.4}$$

čia $\lambda_i$ yra matricos $\Delta_n$ tikrinė reikšmė. Taigi telieka surasti matricos $\Delta_n$ spektrą. Tam buvo pasinaudota *Python numpy* moduliu (*linalg* funkcija). Rezultatai pateikti grafiku ir lentele. Kaip ir buvo galima tikėtis remiantis teoriniais rezultatais, mažiausia matricos $\Delta_n$ tikrinė reikšmė artėja prie $-\frac{1}{2}$.






3.1 pav.: Matricos $\Delta_n$ mažiausia tikrinė reikšmė.

3.1 lentelė: Matricos $\Delta_n$ mažiausia tikrinė reikšmė.

| q\n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2** | -0.12500 | -0.21793 | -0.24551 | -0.32932 | -0.33310 | -0.38813 | -0.40436 | -0.42819 | -0.43991 | -0.45692 | -0.46274 | -0.47234 | -0.47727 | -0.48206 | -0.48515 | -0.48827 | -0.49017 | -0.49204 | -0.49331 |
| **3** | -0.20000 | -0.31651 | -0.35392 | -0.41982 | -0.43340 | -0.46048 | -0.47083 | -0.48044 | -0.48553 | -0.48997 | -0.49238 | -0.49441 | -0.49571 | -0.49671 | -0.49741 | -0.49795 | -0.49835 | -0.49867 | -0.49890 |
| **4** | -0.25000 | -0.36884 | -0.40615 | -0.45328 | -0.46580 | -0.48050 | -0.48668 | -0.49136 | -0.49393 | -0.49580 | -0.49693 | -0.49775 | -0.49829 | -0.49869 | -0.49898 | -0.49919 | -0.49935 | -0.49948 | -0.49957 |
| **5** | -0.28571 | -0.40000 | -0.43432 | -0.46897 | -0.47919 | -0.48831 | -0.49235 | -0.49510 | -0.49663 | -0.49767 | -0.49831 | -0.49876 | -0.49907 | -0.49929 | -0.49944 | -0.49956 | -0.49965 | -0.49971 | -0.49977 |
| **6** | -0.31250 | -0.42019 | -0.45107 | -0.47757 | -0.48585 | -0.49211 | -0.49497 | -0.49678 | -0.49782 | -0.49849 | -0.49891 | -0.49920 | -0.49940 | -0.49954 | -0.49964 | -0.49972 | -0.49977 | -0.49982 | -0.49985 |
| **7** | -0.33333 | -0.43413 | -0.46182 | -0.48283 | -0.48964 | -0.49423 | -0.49638 | -0.49769 | -0.49844 | -0.49892 | -0.49923 | -0.49943 | -0.49957 | -0.49967 | -0.49975 | -0.49980 | -0.49984 | -0.49987 | -0.49989 |
| **8** | -0.35000 | -0.44422 | -0.46914 | -0.48629 | -0.49199 | -0.49555 | -0.49724 | -0.49824 | -0.49882 | -0.49918 | -0.49941 | -0.49957 | -0.49968 | -0.49975 | -0.49981 | -0.49985 | -0.49988 | -0.49990 | -0.49992 |
| **9** | -0.36364 | -0.45180 | -0.47437 | -0.48871 | -0.49356 | -0.49642 | -0.49780 | -0.49860 | -0.49906 | -0.49935 | -0.49953 | -0.49966 | -0.49974 | -0.49980 | -0.49985 | -0.49988 | -0.49990 | -0.49992 | -0.49994 |
| **10** | -0.37500 | -0.45769 | -0.47824 | -0.49048 | -0.49467 | -0.49704 | -0.49819 | -0.49884 | -0.49923 | -0.49946 | -0.49962 | -0.49972 | -0.49979 | -0.49984 | -0.49987 | -0.49990 | -0.49992 | -0.49994 | -0.49995 |
| **11** | -0.38462 | -0.46237 | -0.48120 | -0.49181 | -0.49549 | -0.49749 | -0.49847 | -0.49902 | -0.49935 | -0.49955 | -0.49968 | -0.49976 | -0.49982 | -0.49986 | -0.49989 | -0.49992 | -0.49993 | -0.49995 | -0.49996 |
| **12** | -0.39286 | -0.46616 | -0.48352 | -0.49284 | -0.49610 | -0.49784 | -0.49868 | -0.49916 | -0.49944 | -0.49961 | -0.49972 | -0.49980 | -0.49985 | -0.49988 | -0.49991 | -0.49993 | -0.49994 | -0.49995 | -0.49996 |
| **13** | -0.40000 | -0.46930 | -0.48537 | -0.49366 | -0.49659 | -0.49810 | -0.49885 | -0.49927 | -0.49951 | -0.49966 | -0.49976 | -0.49982 | -0.49987 | -0.49990 | -0.49992 | -0.49994 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 |
| **14** | -0.40625 | -0.47192 | -0.48689 | -0.49433 | -0.49697 | -0.49832 | -0.49898 | -0.49935 | -0.49957 | -0.49970 | -0.49978 | -0.49984 | -0.49988 | -0.49991 | -0.49993 | -0.49994 | -0.49996 | -0.49996 | -0.49997 |
| **15** | -0.41176 | -0.47415 | -0.48814 | -0.49488 | -0.49728 | -0.49849 | -0.49909 | -0.49942 | -0.49961 | -0.49973 | -0.49981 | -0.49986 | -0.49989 | -0.49992 | -0.49994 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49997 |
| **16** | -0.41667 | -0.47607 | -0.48919 | -0.49534 | -0.49754 | -0.49863 | -0.49917 | -0.49947 | -0.49965 | -0.49976 | -0.49983 | -0.49987 | -0.49990 | -0.49993 | -0.49994 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 |
| **17** | -0.42105 | -0.47773 | -0.49009 | -0.49573 | -0.49776 | -0.49875 | -0.49925 | -0.49952 | -0.49968 | -0.49978 | -0.49984 | -0.49988 | -0.49991 | -0.49993 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49997 | -0.49998 |
| **18** | -0.42500 | -0.47919 | -0.49086 | -0.49607 | -0.49794 | -0.49886 | -0.49931 | -0.49956 | -0.49971 | -0.49980 | -0.49985 | -0.49989 | -0.49992 | -0.49994 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 |
| **19** | -0.42857 | -0.48047 | -0.49152 | -0.49635 | -0.49810 | -0.49894 | -0.49936 | -0.49959 | -0.49973 | -0.49981 | -0.49987 | -0.49990 | -0.49993 | -0.49994 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 |
| **20** | -0.43182 | -0.48160 | -0.49210 | -0.49661 | -0.49824 | -0.49902 | -0.49941 | -0.49962 | -0.49975 | -0.49983 | -0.49988 | -0.49991 | -0.49993 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 |
| **21** | -0.43478 | -0.48262 | -0.49261 | -0.49683 | -0.49836 | -0.49909 | -0.49945 | -0.49965 | -0.49977 | -0.49984 | -0.49988 | -0.49991 | -0.49994 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49998 |
| **22** | -0.43750 | -0.48353 | -0.49306 | -0.49702 | -0.49846 | -0.49915 | -0.49948 | -0.49967 | -0.49978 | -0.49985 | -0.49989 | -0.49992 | -0.49994 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 |
| **23** | -0.44000 | -0.48436 | -0.49347 | -0.49720 | -0.49856 | -0.49920 | -0.49952 | -0.49969 | -0.49979 | -0.49986 | -0.49990 | -0.49993 | -0.49994 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 |
| **24** | -0.44231 | -0.48510 | -0.49383 | -0.49735 | -0.49864 | -0.49924 | -0.49954 | -0.49971 | -0.49981 | -0.49987 | -0.49990 | -0.49993 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 |
| **25** | -0.44444 | -0.48579 | -0.49416 | -0.49749 | -0.49871 | -0.49928 | -0.49957 | -0.49973 | -0.49982 | -0.49987 | -0.49991 | -0.49993 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 |
| **26** | -0.44643 | -0.48641 | -0.49445 | -0.49762 | -0.49878 | -0.49932 | -0.49959 | -0.49974 | -0.49983 | -0.49988 | -0.49991 | -0.49994 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 |
| **27** | -0.44828 | -0.48698 | -0.49472 | -0.49773 | -0.49884 | -0.49936 | -0.49961 | -0.49975 | -0.49983 | -0.49989 | -0.49992 | -0.49994 | -0.49995 | -0.49997 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 |
| **28** | -0.45000 | -0.48751 | -0.49496 | -0.49784 | -0.49890 | -0.49939 | -0.49963 | -0.49976 | -0.49984 | -0.49989 | -0.49992 | -0.49994 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 |
| **29** | -0.45161 | -0.48799 | -0.49519 | -0.49794 | -0.49895 | -0.49941 | -0.49965 | -0.49978 | -0.49985 | -0.49990 | -0.49993 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 |
| **30** | -0.45313 | -0.48844 | -0.49539 | -0.49802 | -0.49899 | -0.49944 | -0.49966 | -0.49979 | -0.49986 | -0.49990 | -0.49993 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **31** | -0.45455 | -0.48886 | -0.49558 | -0.49811 | -0.49904 | -0.49946 | -0.49968 | -0.49979 | -0.49986 | -0.49990 | -0.49993 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **32** | -0.45588 | -0.48925 | -0.49576 | -0.49818 | -0.49907 | -0.49949 | -0.49969 | -0.49980 | -0.49987 | -0.49991 | -0.49993 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **33** | -0.45714 | -0.48962 | -0.49592 | -0.49825 | -0.49911 | -0.49951 | -0.49970 | -0.49981 | -0.49987 | -0.49991 | -0.49994 | -0.49995 | -0.49997 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **34** | -0.45833 | -0.48996 | -0.49607 | -0.49832 | -0.49914 | -0.49952 | -0.49971 | -0.49982 | -0.49988 | -0.49992 | -0.49994 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **35** | -0.45946 | -0.49027 | -0.49621 | -0.49838 | -0.49918 | -0.49954 | -0.49972 | -0.49982 | -0.49988 | -0.49992 | -0.49994 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **36** | -0.46053 | -0.49057 | -0.49634 | -0.49843 | -0.49920 | -0.49956 | -0.49973 | -0.49983 | -0.49989 | -0.49992 | -0.49994 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **37** | -0.46154 | -0.49086 | -0.49646 | -0.49848 | -0.49923 | -0.49957 | -0.49974 | -0.49984 | -0.49989 | -0.49992 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **38** | -0.46250 | -0.49112 | -0.49658 | -0.49853 | -0.49926 | -0.49959 | -0.49975 | -0.49984 | -0.49989 | -0.49993 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **39** | -0.46341 | -0.49137 | -0.49669 | -0.49858 | -0.49928 | -0.49960 | -0.49976 | -0.49985 | -0.49990 | -0.49993 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **40** | -0.46429 | -0.49161 | -0.49679 | -0.49862 | -0.49930 | -0.49961 | -0.49977 | -0.49985 | -0.49990 | -0.49993 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **41** | -0.46512 | -0.49184 | -0.49688 | -0.49866 | -0.49932 | -0.49962 | -0.49977 | -0.49986 | -0.49990 | -0.49993 | -0.49995 | -0.49997 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **42** | -0.46591 | -0.49205 | -0.49697 | -0.49870 | -0.49934 | -0.49964 | -0.49978 | -0.49986 | -0.49991 | -0.49994 | -0.49995 | -0.49997 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **43** | -0.46667 | -0.49225 | -0.49706 | -0.49874 | -0.49936 | -0.49965 | -0.49979 | -0.49986 | -0.49991 | -0.49994 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **44** | -0.46739 | -0.49244 | -0.49714 | -0.49877 | -0.49938 | -0.49966 | -0.49979 | -0.49987 | -0.49991 | -0.49994 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **45** | -0.46809 | -0.49263 | -0.49722 | -0.49881 | -0.49940 | -0.49967 | -0.49980 | -0.49987 | -0.49991 | -0.49994 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **46** | -0.46875 | -0.49280 | -0.49729 | -0.49884 | -0.49941 | -0.49967 | -0.49980 | -0.49988 | -0.49992 | -0.49994 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **47** | -0.46939 | -0.49297 | -0.49736 | -0.49887 | -0.49943 | -0.49968 | -0.49981 | -0.49988 | -0.49992 | -0.49994 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **48** | -0.47000 | -0.49313 | -0.49742 | -0.49890 | -0.49944 | -0.49969 | -0.49981 | -0.49988 | -0.49992 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **49** | -0.47059 | -0.49328 | -0.49749 | -0.49892 | -0.49946 | -0.49970 | -0.49982 | -0.49988 | -0.49992 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |
| **50** | -0.47115 | -0.49343 | -0.49755 | -0.49895 | -0.49947 | -0.49971 | -0.49982 | -0.49989 | -0.49992 | -0.49995 | -0.49996 | -0.49997 | -0.49998 | -0.49998 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 | -0.49999 |

# Effective Bounds of the Variance of Statistics on Multisets of Necklaces

Arvydas Karbonskis

Summary

The variance of a linear statistics on multisets of necklaces is explored. The upper and lower bounds with optimal constants are obtained. It is shown that both constants are asymptotically correct. Results are illustrated by computer calculations.

# Literatūra


[1] R. Arratia, A.D. Barbour and S. Tavaré (2003), *Logarithmic Combinatorial Structures: A Probabilistic Approach.* EMS Monographs in Mathematics, EMS Publishing House, Zürich.

[2] Ž. Baronėnas, E. Manstavičius and P. Šapokaitė (2021), A sharp inequality for the variance with respect to the Ewens Sampling Formula, *Lith. Math. J.*, **61**(3) (to appear); *arXiv*: 2003.05975v1.

[3] J.C. Hansen (1993), Factorization in $F_q[x]$ and Brownian motion, *Combin. Probab. Comput.* **2**, 285–299.

[4] A. Karbonskis and E. Manstavičius (2021) Effective bounds of the variance of statistics on multisets of necklaces, *Liet. matem. rink.*, **61**(A), 7–12. doi: 10.15388/LMR.2020.22469.

[5] J. Klimavičius and E. Manstavičius (2018), The Turán-Kubilius inequality on permutations, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* **48**, 45–51.

[6] J. Kubilius (1985), Improved estimate of the second central moment for additive arithmetical functions, *Litovsk. Mat. Sb.* **25**, 104–110 (in Russian); transl.: *Lith. Math. J.* **25**, 250–254.

[7] J. Lee (1992), The second central moment of additive functions, *Proc. AMS* **114**(4), 887–895.

[8] E. Manstavičius (2020), Sharp bounds for the variance of linear statistics on random permutations, *Random Struct. Alg.*, **57**(4), 1303–1313; doi: 10.1002/rsa.20951.

[9] E.Manstavičius (2007), *Analizinė ir tikimybinė kombinatorika*, Vilnius, TEV.