VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS INSTITUTAS
DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ KATEDRA

Magistro baigiamasis darbas

Laiko atžvilgiu periodinio Puazeilio sprendinio korektiškumas su minimaliu srauto reguliarumu

Correctness of Time-Periodic Poiseuille Type Solution with Minimally Regular Flow-Rate

Gabija Gumbakytė

Leidžiu ginti ....

Darbo vadovas: prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas

Vilnius 2021

Turinys

1 Įvadas

Navjė-Stokso lygtys, aprašančios klampaus nespūdaus skysčio tekėjimą buvo sukurtos XIX amžiuje prancūzų inžinieriaus, fiziko K. L. Navjė ir anglų mokslininko G. G. Stokso. Šių dienų aktualijose Navjė-Stokso lygtys taip pat yra aktyviai naudojamos širdies ir kraujagyslių ligų gydymui, kraujo tekėjimo modeliavimui. Realistiniu trimačiu atveju kompiuterinis kraujo tekėjimo modeliavimas yra opi problema dėl kraujagyslių tinklų tankumo ir komplikuotos geometrijos, tokie skaičiavimai reikalauja pernelyg didelių išteklių. Atsižvelgiant į šią situaciją, buvo pasiūlytas metodas, kuris yra pagrįstas vienmačiais modeliais, tačiau papildomai yra taikomas trimatis priartinimas mažiems kraujagyslių išsišakojimams aktualioje tinklo vietoje. Ši greičiau kompiliuojama technika naudoja asimptotinį dalinės srities dekompozicijos metodą, pasiūlytą G. Panasenko 1998m. [1] ir patobulintą [2]-[4] darbuose. Šie metodai yra pagrįsti vienmačiais Puazeilio tipo tekėjimais tiesiais cilindrais.

Tarkime, turime begalinį cilindrą erdvėje $\mathbb{R}^n$, kurį pažymėsime $\Pi = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R} : x' \in \sigma \subset \mathbb{R}^{n-1}, -\infty < x_n < \infty\}, n = 2, 3$, čia skerspjūvis σ yra aprėžta sritis. Pavyzdžiui, kai $n = 2$ turime, kad Π yra begalinė juosta erdvėje $\mathbb{R}^2$, o $\sigma = (0, h_0)$ - baigtinis intervalas. Stacionarus tekėjimas per šį cilindrą buvo aprašytas J. L. Puazeilio XIX amžiuje [7]. Su Puazeilio tekėjimu susijęs greitis turi tik vieną nenulinę komponentę $u(x')$ kryptimi pagal x_n ašį ir priklauso tik nuo kintamojo $x' = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \in \sigma$, o $p = p(x)$ skysčio slėgis yra tiesinis dydis kintamojo x_n atžvilgiu. Puazeilio sprendinį galima nagrinėti ir nestacionariu atveju, kaip, pavyzdžiui, [8] straipsnyje. Kadangi realiomis sąlygomis duomenys retai būna aprašomi glodžiomis funkcijomis, todėl didelė svarba tenka būtent nestacionariems Puazeilio tipo sprendiniams su minimaliu duomenų reguliarumu.

Šiame magistro darbe nagrinėjamas periodinės pagal laiką Navjė-Stokso lygčių sistemos uždavinys begaliniame cilindre Π:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Pi} = 0, \\ \mathbf{u}(x, -\pi) = \mathbf{u}(x, \pi), \end{cases} \tag{1.1}$$

čia $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ skysčio tekėjimo greičio vektorius taške $x \in \Pi$ laiko momentu t, $p = p(x, t)$ - skysčio slėgis, $\nu > 0$ - skysčio klampumo keoficientas. Žymėjimas $\mathbf{u}_t$ reiškia greičio vektoriaus $\mathbf{u}(x, t)$ išvestinę kintamojo t atžvilgiu, Δ - Laplaso operatorius, ∇ - gradientas kintamųjų x atžvilgiu, div $\mathbf{u}(x,t)$ - greičio vektoriaus divergencija, o „ $\cdot$ “ žymi skaliarinę sandaugą $\mathbb{R}^n$.

Sistemos (1.1) Puazeilio sprendinys $(\mathbf{u}(x,t), p(x,t))$ turi tokią išraišką:

$$\mathbf{u}(x,t) = (0,\ldots,0,U_n(x',t)), \quad p(x,t) = -q(t)x_n + p_0(t), \tag{1.2}$$

kur $q(t)$ yra slėgio nuolydis, o $p_0(t)$ bet kokia kintamojo t funkcija. Pasinaudojus (1.2) sąryšiais, iš (1.1) lygčių sistemos gauname, kad $U(x',t) = U_n(x',t)$ ir $q(t)$ turi tenkinti tokį uždavinį:

$$\begin{cases} U_t(x',t) - \nu\Delta' U(x',t) = q(t), \\ U_t(x',t)\Big|_{\partial\sigma} = 0, \ \ U(x',-\pi) = U(x',\pi), \end{cases} \tag{1.3}$$

čia Δ' žymi Laplaso operatorių pagal kintamąjį x'.

Kai slėgio nuolydis $q(t)$ yra žinomas, funkcija $U(x',t)$ yra randama kaip įprastinis šilumos laidumo uždavinio sprendinys, kuris yra gerai išnagrinėtas, tarkime, [5] knygoje. Tačiau realiomis sąlygomis slėgio nuolydis retai yra žinomas, todėl nagrinėsime uždavinį, kai yra užduodamas periodinis Puazeilio tekėjimo srautas:

$$F(t) = \int\limits_{\sigma} U(x',t)dx', \ F(-\pi) = F(\pi). \tag{1.4}$$

Šiuo atveju, reikia spręsti atvirkštinį uždavinį: turimam $F(t)$ reikia surasti funkcijų porą $(U(x',t), q(t))$, kuri tenkina (1.3) lygčių sistemą ir (1.4) srauto sąlygą. Šiuo atveju, sąryšis tarp $q(t)$ ir $F(t)$ priklauso nuo sprendinio $U(x',t)$. Laiko atžvilgiu periodinio Puazeilio sprendinio egzistavimas, kai srautas yra glodus, t.y. $F \in W^{1,2}(-\pi,\pi)$, buvo įrodytas [6] straipsnyje. Tačiau reikalavimas, kad $F \in W^{1,2}(-\pi,\pi)$ yra per stiprus, kadangi duomenys retai būna reguliarūs. Tad, atsiranda poreikis turėti sistemos sprendinį, kai srautas $F \in L^2(-\pi,\pi)$.

Nestacionarusis Puazeilio tipo sprendinys su srautu $F \in L^2(0,T)$ buvo tyrinėtas [9] straipsnyje, kuriame buvo apibrėžta nauja silpnojo sprendinio klasė, įrodytas tokio sprendinio egzistavimas ir vienatis. Kai srautas $F \in L^2(0,T)$ yra periodinė funkcija, silpnasis periodinis pagal laiką sprendinys buvo nagrinėtas [10] straipsnyje.

Šio magistro darbo tikslas yra atsakyti į [9] straipsnyje suformuluotus klausimus:

1. Ar prie minimalių glodumo sąlygų silpnasis sprendinys gali turėti geresnį reguliarumą nei suformuluota [9] straipsnyje?

2. Kaip keičiasi silpnojo sprendinio reguliarumas didėjant $F(t)$ reguliarumui?

2 Pagalbiniai teorijos elementai

Tarkime, kad G yra n-matės euklidinės erdvės $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, sritis, kuri gali būti ir neaprėžta, ∂G - srities G kraštas, $\overline{G} = G \cup \partial G$, $|G|$ - srities G matas.
$C^\infty(G)$ yra visų be galo diferencijuojamų srityje G funkcijų aibė, o $C_0^\infty(G)$ yra aibės $C^\infty(G)$ poaibis, kurį sudaro funkcijos su kompaktiška atrama, priklausančia aibei G. Žemiau yra minimi apibrėžimai ir teoremos, naudojami magistro darbe.

2.1 apibrėžimas. [11] $L^q(G)$, $1 \leqslant q < \infty$, yra Lebego erdvė, sudaryta iš mačių funkcijų su baigtine norma

$$\|u\|_{L^q(G)} = \Big(\int\limits_G |u(x)|^q dx \Big)^{1/q}.$$

Atitinkamai, $L_\infty(G)$ yra mačių, iš esmės aprėžtų srityje G funkcijų erdvė su norma

$$\|u\|_{L^\infty(G)} = ess \sup_{x \in G} |u(x)|.$$

2.2 apibrėžimas. [11] Sobolevo erdve, žym. $W^{l,q}(G)$, čia $l \geqslant 0$ sveikasis skaičius, $1 \leqslant q < \infty$, vadinsime erdvę, kurią sudaro funkcijos u iš $L^q(G)$, turinčios apibendrintąsias išvestines $D^\alpha u \in L^q(G)$, $\forall |\alpha| \leqslant l$ ir baigtinę normą

$$\|u\|_{W^{l,q}(G)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \int\limits_G |D^\alpha u(x)|^q dx \Big)^{1/q}.$$

Akivaizdu, kad $W^{0,q}(G) = L^q(G)$.

2.3 apibrėžimas. [11] Sakysime, kad funkcija $u \in L^q(G)$ priklauso erdvei $W^{\beta,q}(G)$, $\beta \in (0,1)$, jeigu reiškinys

$$\langle u \rangle_{W^{\beta,q}(G)} = \Big(\int\limits_G \int\limits_G \frac{|u(x) - u(y)|^q}{|x-y|^{n+q\beta}} dxdy \Big)^{1/q} < \infty.$$

Aibė $W^{\beta,q}(G)$ su norma

$$\|u\|_{W^{\beta,q}(G)} = \Big(\|u\|^q_{L^q(G)} + \langle u \rangle^q_{W^{\beta,q}(G)} \Big)^{1/q}$$

yra normuota erdvė.

2.4 apibrėžimas. [10] Tarkime, V yra Banacho erdvė (pilna normuota erdvė). Bochnerio erdvė, žym. $L^2(a,b;V)$, yra sudaryta iš funkcijų u tokių, kad $u(\cdot,t) \in V$ beveik visiems $t \in [a,b]$ ir turinčių baigtinę normą:

$$\|u\|_{L^2(a,b;V)} = \Big(\int\limits_a^b \|u(\cdot,t)\|_V^2 dt \Big)^{1/2}.$$

Taip pat, žymėsime $W^{\beta,2}(a,b;V)$, čia $0<\beta<1$, erdvę funkcijų u tokių, kad norma $\|u(\cdot,t)\|_V$ priklauso erdvei $W^{\beta,2}(a,b)$. Norma erdvėje $W^{\beta,2}(a,b;V)$ yra apibrėžta formule

$$\|u\|_{W^{\beta,2}(a,b;V)} = \Big\| \|u(\cdot,t)\|_V \Big\|_{W^{\beta,2}(a,b)} .$$

Dar vienas labai svarbus teorinis teiginys, kuris šiame magistro darbe bus dažnai naudojamas, yra Furjė eilučių skleidinys.

2.5 teorema. *[12] Tarkime, kad $f : L^2(-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$, čia $f \in L^2(-\pi,\pi)$. Tada funkciją $f(t)$ galima išskleisti Furjė eilute:*

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \, cos(nt) + b_n \, sin(nt)] \text{ , čia koeficientai}$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \, cos(nt)dt, n = 0,1,2,\ldots, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \, sin(nt)dt, n =,1,2,\ldots. \end{cases}$$

Pagal Parsevalio lygybę [12]

$$\|F\|^2_{L^2(-\pi,\pi)} = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

2.6 teorema. *Tarkime, kad $f = f(x,t) : \sigma \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ ir $f \in L^2(\sigma \times (-\pi,\pi))$. Tada funkciją $f(x,t)$ galima išskleisti Furjė eilute:*

$$f(x,t) \sim \frac{a_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(x) \, cos(nt) + b_n(x) \, sin(nt)] \text{ , čia}$$

$$\begin{cases} a_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x,t) \, cos(nt)dt, n = 0,1,2,\ldots, \\ b_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x,t) \, sin(nt)dt, n =,1,2,\ldots. \end{cases}$$

Pagal Parsevalio lygybę

$$\|F\|^2_{L^2(-\pi,\pi)} = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n(x)|^2 + |b_n(x)|^2).$$

2.7 teorema. *[13] Tegul funkcija $f(x)$, apibrėžta visiems $x \geqslant 1$, yra neneigiama ir nedidėjanti. Tuomet eilutė*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konverguoja tada ir tik tada, kai konverguoja integralas $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$.

2.8 teorema. *[14] Jei f ir g yra diferencijuojamos funkcijos, tokios kad $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ arba $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, tuomet teisinga Liopitalio taisyklė:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3 Uždavinio formulavimas

Mes nagrinėsime tokį uždavinį:

$$\begin{cases} U_t(x',t) - \nu\Delta' U(x',t) = q(t), \\ U_t(x',t)\Big|_{\partial\sigma} = 0, \quad U(x',-\pi) = U(x',\pi), \end{cases} \tag{3.1}$$

kai srautas

$$F(t) = \int\limits_\sigma U(x',t)dx', \; F(-\pi) = F(\pi) \tag{3.2}$$

yra periodinė funkcija.

Kaip jau minėta įvade, laiko atžvilgiu periodinio Puazeilio sprendinio egzistavimas, kai srautas $F \in W^{1,2}(-\pi,\pi)$, [6] straipsnyje yra rastas Furjė eilučių pavidalu:

3.1 teiginys. *Funkcijas $q(t)$ ir $U(x',t)$ galima rasti Furjė eilučių pavidalu:*

$$q(t) = \tfrac{q_{c0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(q_{cn}\cos(nt) + q_{sn}\sin(nt)\Big), \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered} U(x',t) = \tfrac{q_{c0}}{2}\psi_0(x') \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\Big([q_{cn}\varphi_n(x') + q_{sn}\psi_n(x')]\cos(nt) + q_{sn}\varphi_n(x') - q_{cn}\psi_n(x')]\sin(nt)\Big), \end{gathered} \tag{3.4}$$

čia $n = 0,1,2,\ldots$, funkcijų pora $(\varphi_n(x'),\psi_n(x'))$ yra elipsinės sistemos

$$\begin{cases} -n\psi_n - \nu\Delta'\varphi_n = 1, x' \in \sigma, \\ n\varphi_n - \nu\Delta'\psi_n = 0, x' \in \sigma, \\ \varphi_n|_{\partial\sigma} = 0, \quad \psi_n|_{\partial\sigma} = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

sprendinys. Funkcijos $q(t)$ Furjė koeficientus galima išreikšti per $F(t)$ Furjė koeficientus Φ_{cn},Φ_{sn}:

$$\begin{gathered} q_{cn} = \tfrac{a_n\Phi_{cn}+b_n\Phi_{sn}}{a_n^2+b_n^2}, \quad q_{sn} = \tfrac{a_n\Phi_{sn}-b_n\Phi_{cn}}{a_n^2+b_n^2}, \\ \text{čia } a_n = \int\limits_\sigma \varphi_n dx, \quad b_n = -\int\limits_\sigma \psi_n dx. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Taip pat, nurodytame straipsnyje įrodyti įverčiai

$$\begin{gathered} a_n \leqslant \tfrac{|\sigma|}{n}, \;\; b_n \leqslant \tfrac{|\sigma|}{n}, \; \forall\, n = 1,2,\ldots, \\ \lim_{n\to\infty}(nb_n) = |\sigma| \end{gathered} \tag{3.7}$$

ir formulės

$$\begin{gathered} a_n = \nu\Big(\|\nabla'\varphi_n\|^2_{L^2(\sigma)} + \|\nabla'\psi_n\|^2_{L^2(\sigma)}\Big), \\ b_n = n\Big(\|\varphi_n\|^2_{L^2(\sigma)} + \|\psi_n\|^2_{L^2(\sigma)}\Big). \end{gathered} \tag{3.8}$$

[6] straipsnyje, kaip pagalbiniai uždaviniai, buvo nagrinėjami šie kraštiniai uždaviniai:

$$\begin{cases} V_{nt}^{(c)}(x',t) - \nu\Delta' V_n^{(c)}(x',t) = \cos(nt) \\ V_n^{(c)}(x',t)|_{\partial\sigma\times(-\pi,\pi)} = 0 \\ V_n^{(c)}(x',-\pi) = V_n^{(c)}(x',\pi) \end{cases}$$
$$\text{ir} \tag{3.9}$$
$$\begin{cases} V_{nt}^{(s)}(x',t) - \nu\Delta' V_n^{(s)}(x',t) = \sin(nt) \\ V_n^{(s)}(x',t)|_{\partial\sigma\times(-\pi,\pi)} = 0 \\ V_n^{(s)}(x',-\pi) = V_n^{(s)}(x',\pi) \end{cases}$$

Tiesioginiais skaičiavimais galima lengvai patikrinti, kad sprendiniai $V_n^{(c)}$ ir $V_n^{(s)}$ turi tokias išraiškas:

$$\begin{aligned} V_n^{(c)}(x',t) &= \varphi_n(x')\cos(nt) - \psi_n(x')\sin(nt), \\ V_n^{(s)}(x',t) &= \psi_n(x')\cos(nt) + \varphi_n(x')\sin(nt). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Mes nagrinėsime uždavinį, kai $F \in L^2(-\pi,\pi)$, bet $F \notin W^{1,2}(-\pi,\pi)$. Tokio sprendinio egzistavimas ir vienatis buvo nagrinėti [10] straipsnyje. Tam, kad apibrėžti sprendinį, mums reikės papildomų apibrėžimų.

Nagrinėkime glodžių periodinių intervale $[-\pi,\pi]$ funkcijų aibę $C_\wp^\infty(-\pi,\pi) = \{h \in C^\infty(\mathbb{R}) : h(t) = h(t+2\pi)\ \forall t \in \mathbb{R}\}$. Tegul $L^2(-\pi,\pi)$ yra Lebego erdvė intervale $(-\pi,\pi)$, jos funkcijas galima pratęsti į visą $\mathbb{R}$ erdvę teigiant, kad $f(t) = f(t+2\pi)$ visiems $t \in [-\pi,\pi]$. $L_\wp^2(-\pi,\pi)$ yra poaibis visų periodinių funkcijų iš $L^2(-\pi,\pi)$. Taip pat, apibrėžiame erdvę $L_\#^2(-\pi,\pi) = \{h \in L_\wp^2(-\pi,\pi) : \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)dt = 0\}$, sudarytą iš periodinių funkcijų, kurių vidurkiai yra lygūs nuliui. Akivaizdu, kad $L_\#^2(-\pi,\pi)$ yra erdvės $C_\#^\infty(-\pi,\pi) = \{h \in C_\wp^\infty(-\pi,\pi) : \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)dt = 0\}$ uždarinys pagal $L^2(-\pi,\pi)$ normą ir yra $L_\wp^2(-\pi,\pi)$ poerdvis, nesutampantis su $L_\wp^2(-\pi,\pi)$ erdve.
Bet kokiai funkcijai $f \in L_\wp^2(-\pi,\pi)$ apibrėžkime pirmykštę funkciją $S_f(t)$:

$$S_f(t) = \int\limits_t^{\pi} f(\tau)d\tau, \text{ čia } t \in [-\pi,\pi]. \tag{3.11}$$

Akivaizdu, kad $S_f(\pi) = 0$ ir $S_f(t)$ yra periodinė funkcija. Taip pat, jei $f \in L_\#^2(-\pi,\pi)$ tai $S_f(-\pi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tau)d\tau = 0$. Vadinasi, $S_f \in L_\wp^2(-\pi,\pi)$.

Apibrėžkime reikalingas Sobolevo tipo erdves. Tegul $W_\wp^{1,2}(-\pi,\pi)$ yra aibės $C_\wp^\infty(-\pi,\pi)$ uždarinys pagal $W^{1,2}$ normą. Kadangi funkcijos $f \in W_\wp^{1,2}(-\pi,\pi)$ yra tolydžios, turime kad $f(-\pi) = f(\pi)$. Pažymėsime $W_\wp^{-1,2}(-\pi,\pi)$ erdvės $W_\wp^{1,2}(-\pi,\pi)$ dualia erdve. Bet koks funkcionalas $h \in W_\wp^{-1,2}(-\pi,\pi)$ gali būti išreikštas pavidalu:

$$\langle h,\eta\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} H(t)\eta'(t)dt, \forall \eta \in W_\wp^{1,2}(-\pi,\pi), \tag{3.12}$$

su vienintele funkcija $H \in L^2_{\#}(-\pi,\pi)$. Jei funkcionalas h gali būti išreikštas per $L^2_{\#}(-\pi,\pi)$ erdvės funkciją, $\langle h,\eta\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)\eta(t)dt, \forall\eta \in W^{1,2}_{\wp}(-\pi,\pi)$, tai $H(t) = -\int\limits_{t}^{\pi} h(\tau)d\tau$. Todėl bendru atveju, funkcionalą h su apibendrinta pirmykšte funkcija H taip pat žymėsime $H(t) = S_h(t)$.

Sprendinys $(U(x',t), q(t))$ gali būti išreikštas tokiu pavidalu:

$$U(x',t) = V(x',t) + \overline{U}(x'), \quad q(t) = \alpha(t) + \overline{q}. \tag{3.13}$$

čia $(\overline{U}(x'), \overline{q})$ yra stacionarus Puazeilio sprendinys su srautu $\overline{F}$, o $\overline{h} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)dt$ yra funkcijos $h(t)$ vidurkis. Tada akivaizdu, kad $\overline{V(x',t)} = 0, \overline{\alpha(t)} = 0$, o pora (V,α) yra žemiau nurodytos sistemos sprendinys:

$$\begin{cases} V_t(x',t) - \nu\Delta' V(x',t) = \alpha(t), \\ V_t(x',t)\Big|_{\partial\sigma} = 0, V(x',-\pi) = V(x',\pi), \\ \int\limits_{\sigma} V(x',t)dx' = \widetilde{F}(t), \end{cases} \tag{3.14}$$

čia $\widetilde{F}(t) = F(t) - \overline{F}, \overline{\widetilde{F}} = 0$. Toliau nemažinant bendrumo laikysime, kad $F(t) = \widetilde{F}(t)$, taigi $\overline{F} = 0$.

Pasinaudojus šia informacija, galima suformuluoti [10] straipsnyje pasiūlytą silpnąjį sistemos sprendinio apibrėžimą.

3.2 apibrėžimas. Tegul $F \in L^2_{\#}(-\pi,\pi)$. Silpnuoju sistemos (3.14) sprendiniu laikysime porą (V,α) tokią, kad $V \in L^2_{\#}(-\pi,\pi;L^2(\sigma))$, $S_V \in L^2_{\wp}(-\pi,\pi;W^{1,2}(\sigma))$, $\alpha \in W^{-1,2}_{\wp}(-\pi,\pi)$, funkcija $V(x',t)$ tenkina srauto sąlygą

$$\int\limits_{\sigma} V(x',t)dx' = F(t) \tag{3.15}$$

ir pora (V,α) tenkina integralinę tapatybę

$$\begin{gathered} \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{\sigma} V(x',t)\eta_t(x',t)dx'dt + \nu\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{\sigma} \nabla' S_V(x',t)\cdot\nabla'\eta_t(x',t)dx'dt \\ = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{\sigma} S_\alpha(t)\eta_t(x',t)dx'dt \end{gathered} \tag{3.16}$$

bet kuriai testinei funkcijai $\eta \in L^2_{\wp}(-\pi,\pi;W^{1,2}(\sigma))$ su $\eta_t \in L^2_{\#}(-\pi,\pi;L^2(\sigma))$.

4 Funkcijų $S_\alpha(t)$ ir $F(t)$ Furjė koeficientų sąryšis

Šiame skyriuje bus ieškomas sąryšis tarp funkcijos $S_\alpha(t)$ ir funkcijos $F(t)$ Furjė eilučių koeficientų. Tarkime, kad $F \in L^2_\#(-\pi,\pi)$, tada pritaikius (2.5) teoremą, srautą $F(t)$ galime išskleisti Furjė eilute:

$$F(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\Phi_{cn} \cos(nt) + \Phi_{sn} \sin(nt) \Big), \tag{4.1}$$

čia

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt, \\ \Phi_{cn} &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos(nt)dt, \\ \Phi_{sn} &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin(nt)dt. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Kadangi $F \in L^2_\#(-\pi,\pi)$, pagal erdvės apibrėžimą gauname, kad $\Phi_0 = 0$. Integralinėje tapatybėje (3.16)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\sigma} V(x',t)\eta_t(x',t)dx'dt + \nu \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\sigma} \nabla' S_V(x',t) \cdot \nabla' \eta_t(x',t)dx'dt \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\sigma} S_\alpha(t)\eta_t(x',t)dx'dt \end{aligned} \tag{4.3}$$

imame $\eta = V_n^{(c)}(x',t)$, kur $V_n^{(c)}(x',t)$ yra (3.9) lygties sprendinys:

$$\begin{cases} V_{nt}^{(c)}(x',t) - \nu\Delta' V_n^{(c)}(x',t) = \cos(nt), \\ V_n^{(c)}(x',t)|_{\partial\sigma\times(-\pi,\pi)} = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Tuomet

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\sigma} V(x',t)V_{nt}^{(c)}(x',t)dx'dt + \nu \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\sigma} \nabla' S_V(x',t) \cdot \nabla' V_{nt}^{(c)}(x',t)dx'dt \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\sigma} S_\alpha(t)V_{nt}^{(c)}(x',t)dx'dt. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Integruojant dalimis antrą (4.5) lygties narį, gauname, kad

$$\begin{aligned} \nu \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\sigma} \nabla' S_V(x',t) \cdot \nabla' V_{nt}^{(c)}(x',t)dx'dt = -\nu \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\sigma} S_V(x',t)\Delta' V_{nt}^{(c)}(x',t)dx'dt \\ = \nu \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial S_V(x',t)}{\partial t} \Delta' V_n^{(c)}(x',t)dx'dt = -\nu \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\sigma} V(x',t)\Delta' V_n^{(c)}(x',t)dx'dt. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pasinaudojame $V_n^{(c)}(x',t)$ išraiška iš (3.10):

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\sigma} S_\alpha(t)V_{nt}^{(c)}(x',t)dx'dt = -\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t)n\sin(nt)dt \int_{\sigma} \varphi_n(x')dx' \\ -\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t)n\cos(nt)dt \int_{\sigma} \psi_n(x')dx' = -a_n \int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t)n\sin(nt)dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t)n\cos(nt)dt \end{aligned}$$

ir įstačius į (4.5) lygtį ką tik gautus sąryšius, turime

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\sigma} V(x',t)\Big(V_{nt}^{(c)}(x',t)dx'dt - \nu\Delta' V_n^{(c)}(x',t)\Big)dx'dt \\ = -a_n \int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t)n\sin(nt)dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t)n\cos(nt)dt, \end{aligned}$$

o tai, pagal (4.4) lygtį, yra ekvivalentu

$$\begin{gathered}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\sigma} V(x',t)\cos(nt)dx'dt \\ = -a_n\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t)n\sin(nt)dt + b_n\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t)n\cos(nt)dt.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Kadangi funkcija $S_\alpha \in L^2(-\pi,\pi)$, galime išskleisti Furjė eilute:

$$S_\alpha(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\alpha_{cn}\cos(nt) + \alpha_{sn}\sin(nt)\Big) \tag{4.8}$$

ir iš (4.7) išplaukia, kad

$$-a_n\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t)n\sin(nt)dt + b_n\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t)n\cos(nt)dt = \pi n(-a_n\alpha_{sn} + b_n\alpha_{cn}). \tag{4.9}$$

Tuomet, pagal (3.15) sąryšį gauname:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\sigma} V(x',t)\cos(nt)dx'dt = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\int_{\sigma} V(x',t)dx'dt = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)F(t)dt = \pi\Phi_{cn}$$

ir sulyginus su (4.9) lygybe turime

$$\Phi_{cn} = n(-a_n\alpha_{sn} + b_n\alpha_{cn}), \tag{4.10}$$

čia $a_n = \int_{\sigma}\varphi_n(x')dx'$ ir $b_n = -\int_{\sigma}\psi_n(x')dx'$, o funkcijos $\varphi_n(x'), \psi_n(x')$ yra apibrėžtos (4.6) elipsine sistema.

Dabar paimkime funkciją $V_n^{(s)}(x',t)$, kuri yra

$$\begin{cases} V_{nt}^{(s)}(x',t) - \nu\Delta' V_n^{(s)}(x',t) = \sin(nt), \\ \qquad V_n^{(s)}(x',t)|_{\partial\sigma\times(-\pi,\pi)} = 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

sistemos sprendinys. Atitinkamai, įrašius funkciją $\eta(x',t) = V_n^{(s)}(x',t)$ į (4.3) lygtį, gauname

$$\begin{gathered}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\sigma} V(x',t)V_{nt}^{(s)}(x',t)dx'dt + \nu\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\sigma}\nabla' S_V(x',t)\cdot\nabla' V_{nt}^{(s)}(x',t)dx'dt \\ = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{\sigma} S_\alpha(t)V_{nt}^{(s)}(x',t)dx'dt.\end{gathered} \tag{4.12}$$

Atliekant tuos pačius žingsnius, (4.12) lygties antrą narį integruojame dalimis:

$$\begin{gathered}\nu\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\sigma}\nabla' S_V(x',t)\cdot\nabla' V_{nt}^{(s)}(x',t)dx'dt = -\nu\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\sigma} S_V(x',t)\Delta' V_{nt}^{(s)}(x',t)dx'dt \\ = \nu\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\sigma}\tfrac{\partial S_V(x',t)}{\partial t}\Delta' V_n^{(s)}(x',t)dx'dt = -\nu\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\sigma} V(x',t)\Delta' V_n^{(s)}(x',t)dx'dt.\end{gathered}$$

Pasinaudojus (3.10) formule funkcijai $V_n^{(s)}$ analogiškai turime, kad

$$\begin{gathered}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\sigma} S_\alpha(t)V_{nt}^{(s)}(x',t)dx'dt = -\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t)n\sin(nt)dt\int_{\sigma}\psi_n(x')dx' + \\ \int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t)n\cos(nt)dt\int_{\sigma}\varphi_n(x')dx' = b_n\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t)n\sin(nt)dt + a_n\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t)n\cos(nt)dt.\end{gathered}$$

Įrašome gautus sąryšius į (4.12) lygtį:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{\sigma} V(x',t)\Big(V_{nt}^{(s)}(x',t)dx'dt - \nu\Delta' V_n^{(s)}(x',t)\Big)dx'dt$$
$$= b_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t) n\sin(nt)dt + a_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t) n\cos(nt)dt,$$

kuri yra ekvivalenti

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{\sigma} V(x',t)\sin(nt)dx'dt = b_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t) n\sin(nt)dt + a_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t) n\cos(nt)dt. \quad (4.13)$$

Pasinaudojus funkcijos $S_\alpha(t)$ Furjė skleidiniu turime

$$b_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t) n\sin(nt)dt + a_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t) n\cos(nt)dt = \pi n(a_n\alpha_{cn} + b_n\alpha_{sn})$$

ir

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{\sigma} V(x',t)\sin(nt)dx'dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\int\limits_{\sigma} V(x',t)dx'dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)F(t)dt = \pi\Phi_{sn},$$

todėl

$$\Phi_{sn} = n(a_n\alpha_{cn} + b_n\alpha_{sn}). \quad (4.14)$$

Telieka išspręsti lygčių sistemą, susidedančią iš (4.10) ir (4.14) lygčių:

$$\begin{cases} \Phi_{sn} = n(a_n\alpha_{cn} + b_n\alpha_{sn}) \\ \Phi_{cn} = n(-a_n\alpha_{sn} + b_n\alpha_{cn}) \end{cases} \quad (4.15)$$

Iš šios lygčių sistemos gauname išraiškas

$$\begin{cases} \alpha_{sn} = \frac{\Phi_{sn} - na_n\alpha_{cn}}{nb_n} \\ \alpha_{cn} = \frac{\Phi_{cn} - na_n\alpha_{sn}}{nb_n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{sn} = \frac{b_n\Phi_{sn} - a_n\Phi_{cn}}{n(a_n^2+b_n^2)} \\ \alpha_{cn} = \frac{b_n\Phi_{cn} + a_n\Phi_{sn}}{n(a_n^2+b_n^2)} \end{cases}, \quad (4.16)$$

kurios bus naudojamos tolimesniems skaičiavimams.

5 Funkcijų $V(x',t)$ ir $F(t)$ Furjė koeficientų sąryšis

Praeitame skyriuje buvo rasti sąryšiai tarp $S_\alpha(t)$ ir $F(t)$ Furjė eilučių koeficientų. Tad, šiame skyriuje bus ieškomi sąryšiai tarp funkcijų $V(x',t)$ ir $F(t)$ Furjė koeficientų. Kai $F \in W^{1,2}(-\pi,\pi)$, sprendinio išraiška buvo rasta [6] straipsnyje (žiūrėti (3.1) teiginį, (3.4) lygybę). Taip pat, kaip [6] straipsnyje, ieškosime $V(x',t)$ tokio pavidalo:

$$\begin{aligned} V(x',t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(&[M_{ck}\varphi_k(x') + M_{sk}\psi_k(x')]\cos(kt) \\ &+[M_{sk}\varphi_k(x') - M_{ck}\psi_k(x')]\sin(kt)\Big), \end{aligned} \tag{5.1}$$

čia M_{ck}, M_{sk} yra nežinomos konstantos. Verta paminėti, kad laisvasis narys $M_{c_0} = 0$, nes $V \in L^2_{\#}(\sigma \times (-\pi,\pi))$.

Pasirinkime testinę funkciją $\eta(x',t)$ tokią, kad $\eta(x',t) = V_n^{(c)}(x',t)$. Tuomet įstačius (5.1) į (4.7) lygybės kairę pusę gausime:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{\sigma} V(x',t)\cos(nt)dx'dt = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(&[M_{ck}\varphi_k(x') + M_{sk}\psi_k(x')]\cos(kt) \\ &+[M_{sk}\varphi_k(x') - M_{ck}\psi_k(x')]\sin(kt)\Big)\cos(nt)dx'dt \\ =\Big(M_{cn}\int_{\sigma}\varphi_n(x')dx' + M_{sn}\int_{\sigma}\psi_n(x')dx'\Big)&\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nt)dt \\ &= (M_{cn}a_n - M_{sn}b_n)\pi. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Įstatome funkcijos $S_\alpha(t)$ Furjė eilutės (4.8) išraišką į (4.7) lygybės dešinę pusę:

$$\begin{aligned} &-a_n\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\alpha_{ck}\cos(kt) + \alpha_{sk}\sin(kt)\Big)n\sin(nt)dt \\ &+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\alpha_{ck}\cos(kt) + \alpha_{sk}\sin(kt)\Big)n\cos(nt)dt \\ &= -a_n n\,\alpha_{sn}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nt)dt + b_n n\,\alpha_{cn}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nt)dt = n\pi(\alpha_{cn}b_n - \alpha_{sn}a_n). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Iš (5.2)-(5.3) lygybių išplaukia:

$$(M_{cn}a_n - M_{sn}b_n)\pi = n\pi\big(\tfrac{b_n\Phi_{cn}+a_n\Phi_{sn}}{n(a_n^2+b_n^2)}b_n - \tfrac{b_n\Phi_{sn}-a_n\Phi_{cn}}{n(a_n^2+b_n^2)}a_n\big), \tag{5.4}$$

kuri, po paprastų algebrinių pertvarkymų, yra

$$M_{cn}a_n - M_{sn}b_n = \Phi_{cn}. \tag{5.5}$$

Ši lygtis buvo gauta, kai $\eta(x',t) = V_n^{(c)}(x',t)$. Analogiškai naudosime (4.13) lygtį su $\eta(x',t) = V_n^{(s)}(x',t)$. Atliekant tuos pačius žingsnius su (4.13) lygties kairiąja puse gauname:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{\sigma} V(x',t)\sin(nt)dx'dt = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(&[M_{ck}\varphi_k(x') + M_{sk}\psi_k(x')]\cos(kt) \\ &+[M_{sk}\varphi_k(x') - M_{ck}\psi_k(x')]\sin(kt)\Big)\sin(nt)dx'dt \\ =\Big(M_{sn}\int_{\sigma}\varphi_n(x')dx' - M_{cn}\int_{\sigma}\psi_n(x')dx'\Big)\int_{-\pi}^{\pi}&\sin^2(nt)dt = (M_{sn}a_n + M_{cn}b_n)\pi. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Iš dešiniosios (4.13) lygties pusės turime, kad

$$\begin{aligned} & b_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t) n \sin(nt) dt + a_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(t) n \cos(nt) dt \\ & = b_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\alpha_{ck} \cos(kt) + \alpha_{sk} \sin(kt) \Big) n \sin(nt) dt \\ & + a_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\alpha_{ck} \cos(kt) + \alpha_{sk} \sin(kt) \Big) n \cos(nt) dt = n\pi(\alpha_{sn} b_n + \alpha_{cn} a_n). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Sulyginus (5.6) ir (5.7) skaičiavimų rezultatus randame sąryšį, kad

$$(M_{sn} a_n + M_{cn} b_n)\pi = n\pi\left(\tfrac{b_n \Phi_{sn} - a_n \Phi_{cn}}{n(a_n^2 + b_n^2)} b_n + \tfrac{b_n \Phi_{cn} + a_n \Phi_{sn}}{n(a_n^2 + b_n^2)} a_n\right), \tag{5.8}$$

kuris po suprastinimo duoda tokį rezultatą

$$M_{sn} a_n + M_{cn} b_n = \Phi_{sn}. \tag{5.9}$$

Taigi, iš (5.5) ir (5.9) sąryšių išvedame tokias formules:

$$\begin{cases} M_{cn} a_n - M_{sn} b_n = \Phi_{cn} \\ M_{sn} a_n + M_{cn} b_n = \Phi_{sn} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{sn} = \frac{a_n \Phi_{sn} - b_n \Phi_{cn}}{a_n^2 + b_n^2} \\ M_{cn} = \frac{a_n \Phi_{cn} + b_n \Phi_{sn}}{a_n^2 + b_n^2} \end{cases}. \tag{5.10}$$

6 Kontrpavyzdys

Šiame skyriuje bus sukonstruotas pavyzdys, kuris parodo, kad silpnojo apibendrinto sprendinio glodumas negali būti didesnis negu apibrėžta [10] straipsnyje (žiūrėti (3.2) apibrėžimą).

6.1 Srauto $F(t)$ apibrėžimas

Tarkime, kad $\sigma = (0, \sqrt{2})$ ir funkcija $F(t)$ yra apibrėžta taip:

$$F(t) = \frac{\Phi_{c0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\Phi_{cn} \cos(nt) + \Phi_{sn} \sin(nt) \Big) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ ln^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon} n} \sin(nt), \tag{6.1}$$

su pakankamai mažu $\varepsilon > 0$. Turime, kad:

$$\|F\|^2_{L^2(-\pi,\pi)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ ln^{1+\varepsilon} n}. \tag{6.2}$$

Pagal (2.7) integralinį eilučių konvergavimo požymį, (6.2) eilutė konverguoja, jei konverguoja integralas:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ ln^{1+\varepsilon} x} dx. \tag{6.3}$$

Integralas, o kartu ir Furjė eilutės norma, konverguoja, kadangi:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ ln^{1+\varepsilon} x} dx = \begin{bmatrix} u = ln(x) \\ du = \frac{1}{x} dx \end{bmatrix} = \int_{ln(2)}^{\infty} \frac{1}{u^{1+\varepsilon}} du = -\frac{1}{u^{\varepsilon}} \Big|_{ln(2)}^{\infty} < \infty. \tag{6.4}$$

Iš čia gauname, kad $F \in L^2(-\pi, \pi)$.

Funkcija $G \in W^{(\beta,2)}(-\pi, \pi)$, $0 < \beta < 1$, tada ir tik tada, kai eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\beta}(G_{cn}^2 + G_{sn}^2)$ konverguoja, čia G_{cn}, G_{sn} yra funkcijos G Furjė koeficientai. Taigi, pažymėkime eilutę:

$$c_n = \frac{n^{2\beta}}{n\ ln^{1+\varepsilon} n}. \tag{6.5}$$

Du kartus pasinaudoję (2.8) Liopitalio taisykle, suskaičiuosime tokią ribą:

$$\lim_{n\to\infty} nc_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2\beta}}{ln^{1+\varepsilon} n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2\beta)^2 n^{2\beta} ln^{1-\varepsilon} n}{\varepsilon(1+\varepsilon)} = \infty. \tag{6.6}$$

Turime, kad $0 \leqslant nc_n \to \infty$, kai $n \to \infty$. Iš čia gavome, kad prie pakankamai didelių n galioja nelygybė $c_n \geqslant \frac{1}{n}$. Pasinaudoję faktu, kad $\frac{1}{n}$ eilutė diverguoja, gauname, kad ir eilutė $\sum_{n=2}^{\infty} c_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{2\beta}}{n\ ln^{1+\varepsilon} n}$ diverguoja.

Vadinasi, srautas $F \in L^2(-\pi, \pi)$ ir $F \notin W^{(\beta,2)}(-\pi, \pi), 0 < \beta < 1$.

6.2 Skaičių a_n ir b_n įverčiai

Žinant srauto $F(t)$ glodumą, įvertinkime, kokį glodumą turi funkcija $S_\alpha(t)$. Sprendinys (V, α) gali būti ištirtas pasinaudojus 4 ir 5 skyriuose surastomis išraiškomis:

$$S_\alpha(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\alpha_{cn}\cos(nt) + \alpha_{sn}\sin(nt)\Big),$$

$$V(x', t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big([M_{ck}\varphi_k(x') + M_{sk}\psi_k(x')]\cos(nt) + [M_{sk}\varphi_k(x') - M_{ck}\psi_k(x')]\sin(nt)\Big),$$

čia funkcijos $\psi_n(x')$ ir $\varphi_n(x')$ yra sistemos

$$\begin{cases} -n\psi_n(x_1) = \varphi_n''(x_1) + 1, \\ n\varphi_n(x_1) = \psi_n''(x_1), \\ \varphi_n(0) = \varphi_n(\sqrt{2}) = 0, \psi_n(0) = \psi_n(\sqrt{2}) = 0, \end{cases} \tag{6.7}$$

sprendiniai, $\sigma = (0, \sqrt{2})$. Pasinaudojus (4.16) ir (5.10) koeficientų išraiškomis, mūsų atveju turime:

$$\begin{aligned} \alpha_{sn} &= \frac{b_n}{(a_n^2+b_n^2)\sqrt{n^3}\, ln^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon} n}, \alpha_{cn} = \frac{a_n}{(a_n^2+b_n^2)\sqrt{n^3}\, ln^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon} n}, \\ M_{sn} &= \frac{a_n}{(a_n^2+b_n^2)\sqrt{n}\, ln^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon} n}, M_{cn} = \frac{b_n}{(a_n^2+b_n^2)\sqrt{n}\, ln^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon} n}, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{6.8}$$

Kad išspręsti (6.7) diferencialinę sistemą, pradedame nuo pirmos lygties ir diferenciavę ją du kartus gauname:

$$-n^2\varphi_n(x_1) = \varphi_n^{(4)}(x_1). \tag{6.9}$$

Lygties (6.9) charakteristinis polinomas bus:

$$\lambda^4 = -n^2.$$

Sprendžiant šią ketvirtos eilės charakteristinę lygtį gauname tokias šaknis:

$$\lambda_{1,2} = \pm\Big(\sqrt{\frac{n}{2}} + i\sqrt{\frac{n}{2}}\Big), \quad \lambda_{3,4} = \pm\Big(-\sqrt{\frac{n}{2}} + i\sqrt{\frac{n}{2}}\Big).$$

Taigi, turime, kad sprendinys bus:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x_1) = e^{\sqrt{\frac{n}{2}}x_1}&\Big(C_1\sin(\sqrt{\tfrac{n}{2}}x_1) + C_2\cos(\sqrt{\tfrac{n}{2}}x_1)\Big) \\ +e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}x_1}&\Big(C_3\sin(\sqrt{\tfrac{n}{2}}x_1) + C_4\cos(\sqrt{\tfrac{n}{2}}x_1)\Big). \end{aligned}$$

Dukart diferenciavus $\varphi_n(x_1)$ funkciją ir pasinaudojus pirmuoju sąryšiu iš (6.7) sistemos: $\psi_n(x_1) = -\frac{\varphi_n''(x_1)}{n} - \frac{1}{n}$, gauname:

$$\begin{aligned} \psi_n(x_1) = e^{\sqrt{\frac{n}{2}}x_1}&\Big(-C_1\cos(\sqrt{\tfrac{n}{2}}x_1) + C_2\sin(\sqrt{\tfrac{n}{2}}x_1)\Big) \\ +e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}x_1}&\Big(C_3\cos(\sqrt{\tfrac{n}{2}}x_1) - C_4\sin(\sqrt{\tfrac{n}{2}}x_1)\Big) - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Konstantas $C_i, i = 1, 2, 3, 4$, galime rasti iš (6.7) kraštinių sąlygų ir lygybių $a_n = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \varphi_n(x_1)dx_1$ ir $b_n = -\int\limits_0^{\sqrt{2}} \psi_n(x_1)dx_1$. Tuomet:

$$a_n = \frac{p_1(e^{\sqrt{n}})}{p_2(e^{\sqrt{n}})}\frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad b_n = \frac{p_3(e^{\sqrt{n}})}{p_4(e^{\sqrt{n}})}\frac{1}{n\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2}}{n},$$

čia $p_i(t)$ žymi šeštos eilės polinomus pagal kintamąjį t su pastoviais koeficientais. Įvertinę a_n, b_n formules, turime, kad

$$a_n = O\Big(\tfrac{1}{n\sqrt{n}}\Big), \quad b_n = O\Big(\tfrac{1}{n}\Big), \quad \text{kai } n \longrightarrow \infty. \tag{6.10}$$

6.3 Funkcijos $S_\alpha(t)$ glodumas

Formulės (6.8) ir (6.10) suteikia tokius įverčius funkcijos $S_\alpha(t)$ Furjė eilutės koeficientams:

$$\left.\begin{array}{l} |\alpha_{sn}| = O\Bigg(\dfrac{\frac{1}{n}}{(\frac{n+1}{n^3})\sqrt{n^3}\; ln^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}n}\Bigg) \\ |\alpha_{cn}| = O\Bigg(\dfrac{\frac{1}{n\sqrt{n}}}{(\frac{n+1}{n^3})\sqrt{n^3} ln^{\frac{1}{2}1+\frac{1}{2}\varepsilon}n}\Bigg) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} |\alpha_{sn}| = O\Bigg(\dfrac{1}{\sqrt{n}\; ln^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}n}\Bigg) \\ |\alpha_{cn}| = O\Bigg(\dfrac{1}{n\; ln^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}n}\Bigg) \end{array}, \quad n \longrightarrow \infty. \tag{6.11}$$

Iš to seka, kad:

$$\sum_{i=2}^{\infty}(|\alpha_{sn}|^2 + |\alpha_{cn}|^2) \sim \sum_{i=2}^{\infty} O\Big(\frac{1}{n\; ln^{1+\varepsilon}n}\Big) \sim \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n\; ln^{1+\varepsilon}n} < \infty,$$

ir atitinkamai:

$$\sum_{i=2}^{\infty} n^{2\beta}(|\alpha_{sn}|^2 + |\alpha_{cn}|^2) \sim \sum_{i=2}^{\infty} O\Big(\frac{n^{2\beta}}{n\; ln^{1+\varepsilon}n}\Big) \sim \sum_{i=2}^{\infty} \frac{n^{2\beta}}{n\; ln^{1+\varepsilon}n} = \infty, 0 < \beta < 1.$$

Atsižvelgiant į šių sumų konvergavimus, galime padaryti išvadą, kad $S_\alpha \in L^2(-\pi, \pi)$, bet $S_\alpha \notin W^{(\beta,2)}(-\pi, \pi), 0 < \beta < 1$.

6.4 Funkcijos $V(x', t)$ glodumas

Dabar patikrinsime $V \in L^2((0, \sqrt{2}) \times (-\pi, \pi))$ konvergavimą.
Pagal (6.10) informaciją, įvertiname (6.8) koeficientus:

$$\left.\begin{array}{l} |M_{sn}| = O\Bigg(\dfrac{\frac{1}{n\sqrt{n}}}{(\frac{n+1}{n^3})\sqrt{n}\; ln^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}n}\Bigg) \\ |M_{cn}| = O\Bigg(\dfrac{\frac{1}{n}}{(\frac{n+1}{n^3})\sqrt{n}\; ln^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}n}\Bigg) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} |M_{sn}| = O\Bigg(\dfrac{1}{ln^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}n}\Bigg) \\ |M_{cn}| = O\Bigg(\dfrac{\sqrt{n}}{ln^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}n}\Bigg) \end{array}, \quad n \longrightarrow \infty. \tag{6.12}$$

Apskaičiuokime $V(x',t)$ normą, pritaikant sumos ir skirtumo kvadratų formules:

$$\begin{gathered}\|V\|^2_{L^2((0,\sqrt{2})\times(-\pi,\pi))}\\ \sim\sum_{n=2}^{\infty}\|M_{cn}\varphi_n+M_{sn}\psi_n\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})}+\|M_{sn}\varphi_n-M_{cn}\psi_n\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})}\\ \sim\sum_{n=2}^{\infty}\Big(|M_{cn}|^2\,\|\varphi_n\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})}+|M_{sn}|^2\,\|\psi_n\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})}\\ +|M_{sn}|^2\,\|\varphi_n\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})}+|M_{cn}|^2\,\|\psi_n\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})}\Big)\\ \sim\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\|\psi_n\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})}+\|\varphi_n\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})}\Big)\Big(|M_{cn}|^2+|M_{sn}|^2\Big)\end{gathered}$$

Pasinaudojus (3.8) formule koeficientui b_n ir įverčiais iš (6.10) ir (6.12), gauname:

$$\begin{gathered}\|V\|^2_{L^2((0,\sqrt{2})\times(-\pi,\pi))}\\ \sim\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\|\psi_n\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})}+\|\varphi_n\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})}\Big)\Big(|M_{cn}|^2+|M_{sn}|^2\Big)\\ \sim\sum_{n=2}^{\infty}O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\,O\Big(\frac{1}{ln^{1+\varepsilon}n}\Big)+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\,O\Big(\frac{n}{ln^{1+\varepsilon}n}\Big)\leqslant c\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,ln^{1+\varepsilon}n}<\infty\\ \Rightarrow V\in L^2((0,\sqrt{2})\times(-\pi,\pi)).\end{gathered}\tag{6.13}$$

Dabar įvertinkime $\|\nabla'V\|^2_{L^2((0,\sqrt{2})\times(-\pi,\pi))}$. Naudojant (3.8) lygtį koeficientui a_n turime

$$\begin{gathered}\|\nabla'V\|^2_{L^2((0,\sqrt{2})\times(-\pi,\pi))}\\ \sim\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\|M_{cn}\nabla'\varphi_n+M_{sn}\nabla'\psi_n\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})}+\|M_{sn}\nabla'\varphi_n-M_{cn}\nabla'\psi_n\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})}\Big)\\ \sim\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\|\nabla'\psi_n\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})}+\|\nabla'\varphi_n\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})}\Big)\Big(|M_{cn}|^2+|M_{sn}|^2\Big)\\ \sim\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\nu}\,O\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big)\,O\Big(\frac{n}{ln^{1+\varepsilon}n}\Big)\sim\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,ln^{1+\varepsilon}n}\end{gathered}\tag{6.14}$$

Kadangi, integralas:

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\,ln^{1+\varepsilon}x}dx=\begin{bmatrix}u=ln(x)\\ du=\frac{1}{x}dx\\ e^u=x\end{bmatrix}=\int_{ln(2)}^{\infty}\frac{e^{u/2}}{u^{1+\varepsilon}}du\tag{6.15}$$

diverguoja, tai ir suma $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,ln^{1+\varepsilon}n}$ diverguoja.
Gauname išvadą, kad $V\in L^2((0,\sqrt{2})\times(-\pi,\pi))$, bet gradientas $\nabla'V\notin L^2((0,\sqrt{2})\times(-\pi,\pi))$.

Pavyzdys rodo, jei srautas $F\in L^2(-\pi,\pi)$, bet $F\notin W^{\beta,2}(-\pi,\pi)$, tai sprendinys (V,α) nepriklauso $W^{\beta,2}((0,\sqrt{2})\times(-\pi,\pi))$.

6.5 Funkcijos $S_V(x', t)$ glodumas

Suintegruokime $V(x', t)$ funkciją:

$$\begin{aligned} S_V(x',t) = \int_t^\pi V(x',\tau)d\tau = \int_t^\pi \sum_{n=1}^\infty \Big([M_{cn}\varphi_n(x') + M_{sn}\psi_n(x')]\cos(n\tau) \\ +[M_{sn}\varphi_n(x') - M_{cn}\psi_n(x')]\sin(n\tau)\Big)d\tau = \sum_{n=1}^\infty \Big(\tfrac{1}{n}[M_{cn}\varphi_n(x') \\ +M_{sn}\psi_n(x')]\sin(n\tau)\Big|_t^\pi + \tfrac{1}{n}[M_{cn}\psi_n(x') - M_{sn}\varphi_n(x')]\cos(n\tau)\Big|_t^\pi\Big) \\ = \sum_{n=1}^\infty \Big(-\tfrac{1}{n}[M_{cn}\varphi_n(x') + M_{sn}\psi_n(x')]\sin(nt) \\ +\tfrac{1}{n}[M_{sn}\varphi_n(x') - M_{cn}\psi_n(x')]\cos(nt) + \tfrac{1}{n}[M_{sn}\varphi_n(x') - M_{cn}\psi_n(x')]\Big). \end{aligned} \tag{6.16}$$

Gavome, kad:

$$S_V(x',t) = I_1(x',t) + I_2(x), \tag{6.17}$$

čia

$$\begin{aligned} I_1 = \sum_{n=1}^\infty \Big(-\tfrac{1}{n}[M_{cn}\varphi_n(x') + M_{sn}\psi_n(x')]\sin(nt) \\ +\tfrac{1}{n}[M_{sn}\varphi_n(x') - M_{cn}\psi_n(x')]\cos(nt)\Big), \\ I_2 = \sum_{n=1}^\infty \tfrac{1}{n}\Big(M_{sn}\varphi_n(x') - M_{cn}\psi_n(x')\Big). \end{aligned} \tag{6.18}$$

Kadangi, funkcija $V \in L^2((0,\sqrt{2}) \times (-\pi,\pi))$, vadinasi $S_V \in L^2((0,\sqrt{2}) \times (-\pi,\pi))$. Tuomet patikrinkime, $S_V(x',t)$ gradiento eilutės konvergavimą, atskirai įvertintant $\nabla' I_1(x',t)$, $\nabla' I_2(x)$ sumas:

$$\begin{aligned} \|\nabla' I_1\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})} \sim \sum_{n=2}^\infty \Big(\tfrac{1}{n^2}\|M_{cn}\nabla'\varphi_n + M_{sn}\nabla'\psi_n\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})} \\ +\tfrac{1}{n^2}\|M_{sn}\nabla'\varphi_n - M_{cn}\nabla'\psi_n\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})}\Big) \\ \sim \sum_{n=2}^\infty \tfrac{1}{n^2}(|M_{sn}|^2 + |M_{cn}|^2)(\|\nabla'\varphi_n\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})} + \|\nabla'\psi_n\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})}). \end{aligned} \tag{6.19}$$

Pasinaudojame (3.8) formule koeficientui a_n, įverčiais iš (6.10) ir (6.12):

$$\|\nabla' I_1\|^2_{L^2(0,\sqrt{2})} \sim \sum_{n=2}^\infty \tfrac{1}{n^2}\tfrac{1}{\nu}\, O\Big(\tfrac{n}{ln^{1+\varepsilon}n}\Big)\, O\Big(\tfrac{1}{n\sqrt{n}}\Big) \leqslant c \sum_{n=2}^\infty \tfrac{1}{n^{5/2} ln^{1+\varepsilon}n} < \infty. \tag{6.20}$$

Nagrinėkime $\nabla' I_2$ sumą:

$$\begin{aligned} \|\nabla' I_2\|_{L^2(0,\sqrt{2})} \leqslant \sum_{n=2}^\infty \tfrac{1}{n}\Big(|M_{sn}|\|\nabla'\varphi_n\|_{L^2(0,\sqrt{2})} + |M_{cn}|\|\nabla'\psi_n\|_{L^2(0,\sqrt{2})}\Big) \\ \sim \sum_{n=2}^\infty \Big(O\Big(\tfrac{1}{n\, ln^{\frac12+\frac12\varepsilon}n}\Big)\|\nabla'\varphi_n\|_{L^2(0,\sqrt{2})} + O\Big(\tfrac{1}{\sqrt{n}\, ln^{\frac12+\frac12\varepsilon}n}\Big)\|\nabla'\psi_n\|_{L^2(0,\sqrt{2})}\Big) \\ \sim \sum_{n=2}^\infty O\Big(\tfrac{1}{\sqrt{n}\, ln^{\frac12+\frac12\varepsilon}n}\Big)\Big(\|\nabla'\varphi_n\|_{L^2(0,\sqrt{2})} + \|\nabla'\psi_n\|_{L^2(0,\sqrt{2})}\Big) \end{aligned} \tag{6.21}$$

Pagal (3.8) formulę koeficientui a_n ir (6.10) įvertį, gauname:

$$\begin{aligned} \|\nabla' I_2\|_{L^2(0,\sqrt{2})} \leqslant \sum_{n=2}^\infty O\Big(\tfrac{1}{\sqrt{n}\, ln^{\frac12+\frac12\varepsilon}n}\Big) O\Big(\sqrt{\tfrac{2}{n^{3/2}\nu}}\Big) \\ \leqslant c \sum_{n=2}^\infty \Big(\tfrac{1}{n^{5/4}\, ln^{\frac12+\frac12\varepsilon}n}\Big) < \infty. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Iš to išplaukia, kad $\nabla' S_V \in L^2((0,\sqrt{2}) \times (-\pi,\pi))$.

7 Sprendinio glodumas bendru atveju

Praeitame skyriuje patikrinome funkcijų $S_\alpha(t)$ ir $V(x',t)$ glodumą, kai srautas $F(t)$ yra apibrėžtas konkrečia funkcija. Šiame skyriuje patikrinsime, kaip elgiasi (V,α) sprendinys, kai srautas $F \in W^{\beta,2}(-\pi,\pi)$, čia $0<\beta<1$.

7.1 Funkcijos $S_\alpha(t)$ glodumas bendru atveju

Pasinaudojus (3.7) įverčiais ir žinant, kad $|\sigma|$ yra konstanta, turime

$$a_n = O\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad b_n = O\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad n \longrightarrow \infty, \tag{7.1}$$

tad galime įvertinti funkcijos $S_\alpha(t)$ (4.8) Furjė koeficientus iš (4.16) lygčių sistemos:

$$\begin{cases} |\alpha_{sn}| \sim \frac{O\left(\frac{1}{n}\right)(|\Phi_{sn}|+|\Phi_{cn}|)}{2n\,O\left(\frac{1}{n}\right)^2} \\ |\alpha_{cn}| \sim \frac{O\left(\frac{1}{n}\right)(|\Phi_{sn}|+|\Phi_{cn}|)}{2n\,O\left(\frac{1}{n}\right)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha_{sn}| \sim \frac{|\Phi_{sn}|+|\Phi_{cn}|}{2} \\ |\alpha_{cn}| \sim \frac{|\Phi_{sn}|+|\Phi_{cn}|}{2} \end{cases}, \quad n \longrightarrow \infty. \tag{7.2}$$

Iš to seka, kad

$$\|S_\alpha\|^2_{L^2(-\pi,\pi)} \sim \sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_{sn}|^2+|\alpha_{cn}|^2) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\Big(|\Phi_{sn}|^2+|\Phi_{cn}|^2\Big) < \infty, \;\; n \longrightarrow \infty. \tag{7.3}$$

Taip pat, padauginus kiekvieną sumos narį iš $n^{2\beta}, 0<\beta<1$, gauname:

$$\|S_\alpha\|^2_{W^{\beta,2}(-\pi,\pi)} \sim \sum_{i=2}^{\infty} n^{2\beta}(|\alpha_{sn}|^2+|\alpha_{cn}|^2) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\beta}\Big(|\Phi_{sn}|^2+|\Phi_{cn}|^2\Big). \tag{7.4}$$

Kadangi $F \in W^{\beta,2}(-\pi,\pi)$, tai (7.4) suma konverguoja. Iš šių konvergavimų turime, jei $F \in W^{\beta,2}(-\pi,\pi)$, vadinasi, $S_\alpha \in W^{\beta,2}(-\pi,\pi)$. Jei $\beta = 1$, tuomet $S_\alpha \in W^{1,2}(-\pi,\pi)$ ir $S_\alpha(t)$ yra funkcijos $\alpha \in L^2(-\pi,\pi)$ pirmykštė.

7.2 Funkcijos $V(x',t)$ glodumas bendru atveju

Turime funkciją $V(x',t)$ su Furjė eilute:

$$\begin{aligned} V(x',t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(&[M_{cn}\varphi_n(x') + M_{sn}\psi_n(x')]\cos(nt) \\ &+[M_{sn}\varphi_n(x') - M_{cn}\psi_n(x')]\sin(nt)\Big), \end{aligned} \tag{7.5}$$

koeficientų išraiška bendruoju atveju yra

$$M_{sn} = \tfrac{a_n\Phi_{sn}-b_n\Phi_{cn}}{a_n^2+b_n^2}, M_{cn} = \tfrac{a_n\Phi_{cn}+b_n\Phi_{sn}}{a_n^2+b_n^2}.$$

Pasinaudojus tais pačiais (7.1) įverčiais, gauname

$$\begin{cases} |M_{sn}| = \dfrac{O\left(\frac{1}{n}\right)(|\Phi_{sn}|+|\Phi_{cn}|)}{2O\left(\frac{1}{n}\right)^2} \\ |M_{cn}| = \dfrac{O\left(\frac{1}{n}\right)(|\Phi_{sn}|+|\Phi_{cn}|)}{2O\left(\frac{1}{n}\right)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |M_{sn}| \sim \frac{n(|\Phi_{sn}|+|\Phi_{cn}|)}{2} \\ |M_{cn}| \sim \frac{n(|\Phi_{sn}|+|\Phi_{cn}|)}{2} \end{cases}, \ n \longrightarrow \infty. \tag{7.6}$$

Įsitikinkime, kad $V \in L^2(\sigma \times (-\pi, \pi))$:

$$\begin{aligned} \|V\|^2_{L^2(\sigma\times(-\pi,\pi))} &= \sum_{n=1}^{\infty} \|M_{cn}\varphi_n + M_{sn}\psi_n\|^2_{L^2(\sigma)} + \|M_{sn}\varphi_n - M_{cn}\psi_n\|^2_{L^2(\sigma)} \\ &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\|\psi_n\|^2_{L^2(\sigma)} + \|\varphi_n\|^2_{L^2(\sigma)}\Big)\Big(|M_{cn}|^2 + |M_{sn}|^2\Big) \\ &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}\left(\frac{n(|\Phi_{sn}|+|\Phi_{cn}|)}{2}\right)^2 + \frac{b_n}{n}\left(\frac{n(|\Phi_{sn}|+|\Phi_{cn}|)}{2}\right)^2 \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (|\Phi_{sn}|^2 + |\Phi_{cn}|^2) < \infty, \end{aligned} \tag{7.7}$$

kai $F \in W^{\beta,2}(-\pi, \pi)$.

Taip pat, turime, kad:

$$\begin{aligned} \|V\|^2_{W^{\beta,2}(-\pi,\pi;L^2(\sigma))} &\sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\beta}\Big(\|\psi_n\|^2_{L^2(\sigma)} + \|\varphi_n\|^2_{L^2(\sigma)}\Big)\Big(|M_{cn}|^2 + |M_{sn}|^2\Big) \\ &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2\beta}\, b_n}{n}\left(\frac{n(|\Phi_{sn}|+|\Phi_{cn}|)}{2}\right)^2 + \frac{n^{2\beta}\, b_n}{n}\left(\frac{n(|\Phi_{sn}|+|\Phi_{cn}|)^2}{2}\right) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\beta}(|\Phi_{sn}|^2 + |\Phi_{cn}|^2). \end{aligned} \tag{7.8}$$

Kai $F \in W^{\beta,2}(-\pi, \pi)$, tai suma konverguoja ir gauname, kad $V(x', t)$ turi trupmeninę išvestinę pagal t, t.y. $V \in W^{\beta,2}(-\pi, \pi; L^2(\sigma))$.

Tarkime, $F \in W^{\beta,2}(-\pi, \pi)$. Paanalizuokime, su kokia β reikšme $\nabla' V$ priklauso erdvei $L^2(\sigma \times (-\pi, \pi))$:

$$\begin{aligned} \|\nabla' V\|^2_{L^2(\sigma\times(-\pi,\pi))} &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\|\nabla'\psi_n\|^2_{L^2(\sigma)} + \|\nabla'\varphi_n\|^2_{L^2(\sigma)}\Big)\Big(|M_{cn}|^2 + |M_{sn}|^2\Big) \\ \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\nu}\left(\frac{n(|\Phi_{sn}|+|\Phi_{cn}|)}{2}\right)^2 &+ \frac{a_n}{\nu}\left(\frac{n(|\Phi_{sn}|+|\Phi_{cn}|)^2}{2}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\nu}(|\Phi_{sn}|^2 + |\Phi_{cn}|^2). \end{aligned} \tag{7.9}$$

Iš (7.8) ir (7.9) įverčių gauname išvadą, kad su srautu $F \in W^{\beta,2}(-\pi, \pi)$, $\beta \geqslant \frac{1}{2}$, funkcija $\nabla' V \in L^2(\sigma \times (-\pi, \pi))$.

8 Išvados

Šio magistro darbo tikslas buvo atsakyti į [9] straipsnyje suformuluotus klausimus:

1. Ar prie minimalių glodumo sąlygų silpnasis sprendinys gali turėti geresnį reguliarumą nei suformuluota [9] straipsnyje?

Darbe buvo sukonstruotas srauto $F(t)$ pavyzdys, $F(t) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\, ln^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon} n} \sin(nt), \varepsilon > 0$, toks, kad $F \in L^2(-\pi, \pi)$, bet $F \notin W^{\beta,2}(-\pi, \pi), 0 < \beta < 1$. Šiuo atveju buvo parodyta, kad silpnojo apibendrinto sprendinio glodumas negali būti didesnis negu buvo apibrėžta [9] straipsnyje.

2. Kaip keičiasi silpnojo sprendinio reguliarumas didėjant $F(t)$ reguliarumui?

Darbe buvo parodyta, kad silpnojo sprendinio reguliarumas auga didėjant srauto $F(t)$ reguliarumui. Skaičiavimai parodė, jei srauto funkcija $F \in W^{\beta,2}(-\pi, \pi)$, kai $0 < \beta \leqslant 1$, tuomet:

(a) $S_\alpha \in W^{\beta,2}(-\pi, \pi)$. Jei $\beta = 1$, tuomet $S_\alpha \in W^{1,2}(-\pi, \pi)$ ir $S_\alpha(t)$ yra funkcijos $\alpha \in L^2(-\pi, \pi)$ pirmykštė.

(b) $V(x', t)$ turi trupmeninę išvestinę pagal t, t.y. $V \in W^{\beta,2}(-\pi, \pi; L^2(\sigma))$. Jeigu $\beta = 1$, tai $V(x', t)$ turi išvestinę pagal t, $V_t \in L^2(\sigma \times (-\pi, \pi))$.

(c) Jeigu $F \in W^{\beta,2}(-\pi, \pi)$, $\beta \geqslant \frac{1}{2}$, tai funkcija $\nabla' V \in L^2(\sigma \times (-\pi, \pi))$.

Correctness of Time-Periodic Poiseuille Type Solution with Minimally Regular Flow-Rate

Gabija Gumbakytė

Summary

The main task of the work is to answer the following questions:

1. Can a weak solution have a better regularity than formulated in the article [9], assuming minimal regularity of a flow-rate?
2. How is changing the regularity of a weak solution when flow-rate's regularity increases?

The example of the flow-rate was constructed: $F(t) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\, ln^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon} n} \sin(nt), \varepsilon > 0$, such as $F \in L^2(-\pi, \pi)$, but $F \notin W^{\beta,2}(-\pi, \pi), 0 < \beta < 1$. It was shown that the solution, corresponding to the flow-rate cannot have a better regularity than is formulated in [9].

It was also proven that when the flow-rate's regularity increases, the weak solution's regularity also grows. In particular, when $F \in W^{\beta,2}(-\pi, \pi)$ with $0 < \beta \leqslant 1$, then:

(a) $S_\alpha \in W^{\beta,2}(-\pi, \pi)$. If $\beta = 1$, then $S_\alpha \in W^{1,2}(-\pi, \pi)$ and $S_\alpha(t)$ is a primitive function of $\alpha \in L^2(-\pi, \pi)$.

(b) $V(x', t)$ has a fractional derivative by t, that is $V \in W^{\beta,2}(-\pi, \pi; L^2(\sigma))$. If $\beta = 1$, then $V(x', t)$ has a derivative by t, $V_t \in L^2(\sigma \times (-\pi, \pi))$.

(c) If $F \in W^{\beta,2}(-\pi, \pi)$, $\beta \geqslant \frac{1}{2}$, then the function $\nabla' V \in L^2(\sigma \times (-\pi, \pi))$.

Literatūra

[1] G.P. Panasenko, Asymptotic expansion of the solution of Navier-Stokes equation in a tube structure, *C.R.Acad.Sci.Paris,* **326**, Serie IIb, (1998) 867-872.

[2] G. Panasenko, *Multi-Scale Modelling for Structures and Composites,* Springer, Dordrecht, 2005.

[3] G. Panasenko, K. Pileckas, Asymptotic analysis of the nonsteady viscous flow with a given flow rate in a thin pipe, *Applicable Analysis,* **91**, No. 3, (2012) 559-574.

[4] G. Panasenko, K. Pileckas, Asymptotic analysis of the non-steady Navier-Stokes equations in a tube structure II. General case, *Nonlinear Anal. Theory Methods and Appl.,* **122**, (2015) 582-607.

[5] O.A. Ladyzhenskaya, *Boundary Value Problems of Mathematical Physics,* Springer-Verlag, 1985.

[6] G.P. Galdi, A.M. Robertson, The relation between flow rate and axial pressure gradient for time-periodic Poiseuille flow in a pipe, *J. Math. Fluid Mech.,* **7**, suppliment No. 2, (2004) 215-223.

[7] J.L. Poiseuille, Recherches experimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de tres-petits diametres, *Comptes Rendus,* Academie des Sciences, Paris, 1841.

[8] K. Pileckas, V. Keblikas, Existence of a nonstationary Poiseuille solution, *Siberian Mathematical Journal,* **46**, No. 3, (2005) 514-526.

[9] K. Pileckas, R. Čiegis, Existence of nonstationary Poiseuille type solutions under minimal regularity assumptions, *Z. Angew. Math. Phys.,* **71**, (2020) 192.

[10] K. Kaulakytė, N. Kozulinas, K. Pileckas, Time-periodic Poiseuille-type solution with minimally regular flow-rate, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2021 (įteiktas).

[11] A. Ambrazevičius, A. Domarkas, *Matematinės fizikos lygtys, 2 dalis,* „Aldorija“, Vilnius, 1999.

[12] A. Pinkus, S. Zafrany, *Fourier Series and Integral Transforms,* Cambridge University Press, United Kingdom, Cambridge, 1997.

[13] D. K. H. Garling, *A Course in Mathematical Analysis, Volume 1: Foundations and Elementary Real Analysis* Cambridge University Press, United States of America, New York, 2013.

[14] S. P. Gordon, Visualizing and understanding L'hopital's rule, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* (2017) 1096-1105.