VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS INSTITUTAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Marius Baškys

Polinomų šaknys ant vienetinio apskritimo

Magistro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti ....

Darbo vadovas prof. Paulius Drungilas

Vilnius 2021

Turinys

Įvadas **2**

Polinomai su realiaisiais koeficientais 3

Pavyzdys 4

1 Simetrinis atvejis **6**

1.1 Sangrąžinių polinomų šaknys 6

1.2 Sangrąžinių polinomų šaknų ant vienetinio apskritimo egzistavimas . 10

1.3 Geometrinė prasmė 12

2 Bendrasis atvejis **13**

2.1 Brunault metodas 14

2.2 Mobijaus transformacijos metodas 16

2.3 Polinomo su kompleksiniais koeficientais šaknys 20

Summary 22

Literatūra 23

Įvadas

Žinome, kad šaknys iš vieneto kompleksinėje plokštumoje išsidėsčiusios ant vienetinio apskritimo $|z| = 1$. Tačiau algebriniai skaičiai, kurie nėra šaknys iš vieneto, taip pat gali būti ant jo.

Šturmo teorema leidžia nustatyti kiek realiųjų šaknų turi polinomas su realiaisiais koeficientais. Sunkiau yra nustatyti, kiek šaknų ant vienetinio apskritimo turi polinomas su kompleksiniais koeficientais. Šiam klausimui atsakyti ir skirtas šis darbas, kuris parengtas pagal K. Conrad publikaciją [2].

Pirmame skyriuje pateikiami svarbiausi faktai apie sangrąžinius polinomus: apibrėžimas, kaip suskaičiuoti jų šaknis, esančias ant vienetinio apskritimo, kaip patikrinti ar toks polinomas turės bent vieną šaknį ant vienetinio apskritimo bei metodo geometrinę prasmę. Antrame skyriuje nagrinėsime ne tik sangrąžinius polinomus; suformuluosime ir įrodysime du teiginius, kurių pagalba galima rasti bet kokio polinomo su realiaisiais koeficientais šaknų, priklausančių vienetiniam apskritimui, skaičių. Antro skyriaus pabaigoje įrodysime dar du teiginius, kurių pagalba galima rasti bet kokio polinomo su kompleksiniais koeficientais šaknų, priklausančių vienetiniam apskritimui, skaičių.

Polinomai su realiaisiais koeficientais

Kalbant apie šaknų skaičiavimą, reikėtų pradėti nuo metodų, skirtų skaičiuoti realiąsias šaknis.

1829 m. Šturmas sugalvojo, kaip nustatyti polinomo su realiaisiais koeficientais realiųjų šaknų skaičių duotame intervale.

1 teorema (Šturmo teorema)**.** *Tegul $p(z)$ - n-tojo laipsnio polinomas su realiaisiais* *koeficientais, neturintis kartotinių šaknų, o $a < b$ - du realieji skaičiai, kurie nėra polinomo $p(z)$ šaknys. Tuomet galime konstruoti Šturmo seką:*

$$P_0(z) = p(z),$$
$$P_1(z) = P_0'(z),$$
$$P_{i+1}(z) = -rem(P_{i-1}(z), P_i(z)),$$

kur $1 \leqslant i \leqslant \deg p$ ir $rem(f(z), g(z))$ - polinomo $f(z)$ dalybos iš polinomo $g(z)$ liekana. Tegul $V(c)$ - sekos $P_0(c), P_1(c) \dots$ ženklų, neįskaitant 0, pasikeitimų skaičius taške $c \in \mathbb{R}$. Tuomet polinomas $p(z)$ intervale $(a, b]$ turi lygiai $V(a) - V(b)$ realiųjų šaknų.

Nors šis metodas įtraukia tik šaknis esančias $(a, b]$, tačiau nesunkiai galime patikrinti ir tašką a, todėl galime sakyti, kad metodas tinka ir uždariems intervalams skaičiuoti.

2 pavyzdys. Nustatysime kiek polinomas $p(z) = 3z^3 - 4z^2 - z + 2 \in \mathbb{R}[z]$ turės šaknų intervale $(-2, 3)$. Polinomai $p(z)$ ir $p'(z) = 9z^2 - 8z - 1$ yra tarpusavyje pirminiai, todėl galime sudaryti Šturmo seką:

$$P_0(z) = 3z^3 - 4z^2 - z + 2,$$
$$P_1(z) = 9z^2 - 8z - 1,$$
$$P_2(z) = \frac{50}{27}z - \frac{50}{27}.$$

Sudarome reikšmių lentelę:

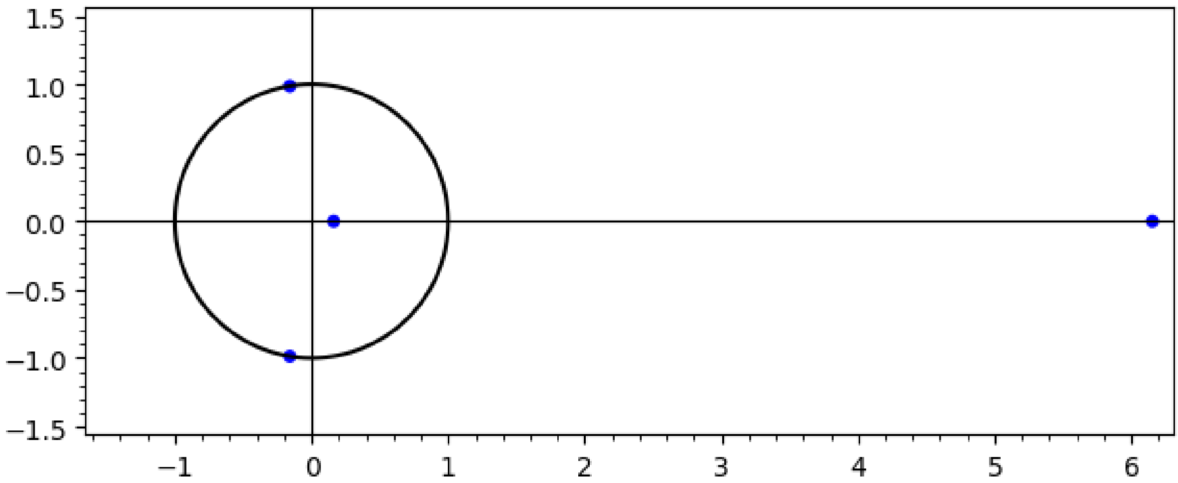
c	$P_0(c)$	$P_1(c)$	$P_2(c)$	$V(c)$
-2	-	+	-	2
3	+	+	+	0

Lentelėje matyti, kad $V(-2) - V(3) = 2 - 0 = 2$. Vadinasi, polinomas $p(z)$ turi 2 realiąsias šaknis intervale $(-2, 3)$.

Pavyzdys

Nagrinėkime polinomą $p(z) = z^4 - 6z^3 - 6z + 1$. Nesunku įsitikinti (pavyzdžiui, Šturmo teoremos pagalba), kad šis polinomas turi lygiai dvi realiąsias šaknis (žr. 0.1 pav.). Taigi, lygiai dvi jo šaknys yra menamieji skaičiai. Tegul α – polinomo

$p(z)$ menamoji šaknis. Tuomet $\overline{\alpha}$ taip pat yra šio polinomo šaknis. Be to, teisinga lygybė $p(z) = z^4 p(\frac{1}{z})$, todėl $\frac{1}{\alpha}$ taip pat yra polinomo $p(z)$ šaknis. Gavome, kad skaičiai α, $\overline{\alpha}$ ir $\frac{1}{\alpha}$ yra polinomo $p(z)$ menamosios šaknys. Kadangi šis polinomas turi lygiai dvi menamąsias šaknis ir $\alpha \neq \overline{\alpha}$ bei $\alpha \neq \frac{1}{\alpha}$, tai $\overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$. Taigi, $|\alpha| = 1$.



0.1 pav.: Polinomo $z^4 - 6z^3 - 6z + 1$ šaknys

3 teorema. *Tegul $f(z) \in \mathbb{Q}[z]$ yra n-tojo laipsnio neredukuojamas polinomas, $n > 1$. Jeigu $f(z)$ turi šaknį ant vienetinio apskritimo, tuomet n yra lyginis skaičius ir $z^n f(\frac{1}{z}) = f(z)$.*

Įrodymas. Tegul α yra polinomo $f(z)$ šaknis ir $|\alpha| = 1$. Kadangi $f(z)$ koeficientai yra realieji skaičiai, tai $\overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ taip pat yra $f(z)$ šaknis. Sandauga $z^n f(\frac{1}{z})$ yra n-tojo laipsnio polinomas su racionaliaisiais koeficientais ir α yra jo šaknis. Kadangi $f(z)$ yra neredukuojamas, tai $z^n f(\frac{1}{z}) = cf(z)$ su kažkokiu nenuliniu racionaliuoju skaičiumi c. Imdami $z = 1$, gauname $f(1) = cf(1)$. Kadangi polinomas $f(z)$ yra neredukuojamas virš $\mathbb{Q}$ ir jo laipsnis $n > 1$, tai $f(1) \neq 0$. Taigi, $c = 1$ ir $f(z) = z^n f(\frac{1}{z})$. Imdami $z = -1$, gauname $f(-1) = (-1)^n f(-1)$. Kadangi $f(-1) \neq 0$, tai $(-1)^n = 1$. Todėl n yra lyginis skaičius. $\square$

1 skyrius

Simetrinis atvejis

Šiame skyriuje įrodysime, kad kiekvieną lyginio laipsnio polinomą $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, kuris tenkina sąlygą $p(z) = z^n p(\frac{1}{z})$, galima išreikšti racionaliosios funkcijos $z+\frac{1}{z}$ laipsniais; čia n yra polinomo $p(z)$ laipsnis. Pasinaudoję šiuo rezultatu, nurodysime, kaip galima suskaičiuoti, kiek duotasis polinomas turi šaknų ant vienetinio apskritimo.

1.1 Sangrąžinių polinomų šaknys

4 apibrėžimas. n-tojo laipsnio polinomas

$$f(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$$

vadinamas **sangrąžiniu**, jeigu lygybė $c_k = c_{n-k}$ teisinga su visais $k = 0, 1, \ldots, n$.

Pavyzdžiui, polinomai $z + 1$, $z^3 - 2z^2 - 2z + 1$ yra sangrąžiniai, o polinomas $z^2 + 3z - 1$ nėra sangrąžinis.

5 teorema. *Tegul*

$$f(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$$

yra n-tojo laipsnio polinomas su kompleksiniais koeficientais. Šie teiginiai yra ekvivalentūs:

(i) Polinomas $f(z)$ yra sangrąžinis.

(ii) Polinomui $f(z)$ teisinga lygybė $z^n f(\frac{1}{z}) = f(z)$.

Be to, jei skaičius n yra lyginis, tuomet (i) ir (ii) teiginiai ekvivalentūs tokiam teiginiui:

(iii) Egzistuoja toks $n/2$-ojo laipsnio polinomas $g(z) \in \mathbb{C}[z]$, kad

$$f(z) = z^{n/2} g\left(z + \frac{1}{z}\right). \tag{1.1}$$

Įrodymas. Akivaizdu, kad (i) ir (ii) teiginiai yra ekvivalentūs ir kad iš (iii) teiginio išplaukia (ii) teiginys.

Įrodysime, kad jei skaičius n yra lyginis, tuomet iš (ii) teiginio išplaukia (iii) teiginys. Tegul $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Lygybę $z^n f(\frac{1}{z}) = f(z)$ perrašykime taip: $z^m f(\frac{1}{z}) = (\frac{1}{z})^m f(z)$. Kadangi $f(z)$ yra $2m$-tojo laipsnio polinomas, tai

$$\left(\frac{1}{z}\right)^m f(z) = c_{2m} z^m + \cdots + c_m + \cdots + \frac{c_1}{z^{m-1}} + \frac{c_0}{z^m}. \tag{1.2}$$

(i) ir (ii) teiginiai yra ekvivalentūs, todėl (1.2) lygybėje koeficientai prie z^i ir z^{-i} sutampa visiems $i = 0, 1, \ldots, m$. Kita vertus, išraiškos $c_{2m}(z + \frac{1}{z})^m$ koeficientas prie z^i yra lygus koeficientui prie $\frac{1}{z^i}$ su visais $i = 0, 1, \ldots, m$. Be to, išreikštas $c_{2m}(z + \frac{1}{z})^m$ koeficientai prie z^m ir $\frac{1}{z^m}$ sutampa ir yra lygūs (1.2) išraiškos koeficientams prie z^m ir $\frac{1}{z^m}$. Todėl skirtumo $(\frac{1}{z})^m f(z) - c_{2m}(z + \frac{1}{z})^m$ koeficientai prie z^i ir $\frac{1}{z^i}$ sutampa su visais $i = 0, 1, \ldots, m$, o koeficientai prie z^m ir $\frac{1}{z^m}$ lygūs nuliui. Taikydami indukciją, gauname išraišką

$$\left(\frac{1}{z}\right)^m f(z) - c_{2m}\left(z + \frac{1}{z}\right)^m = h\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

kur $h(z) \in \mathbb{C}[z]$ ir $\deg h < m$. Prie šios lygybės abiejų pusių pridėję $c_{2m}(z + \frac{1}{z})^m$ ir gautos lygybės abi puses padauginę iš z^m, gauname (1.1) išraišką.

□

6 pastaba. Jeigu $f(z)$ - nelyginio laipsnio sangrąžinis polinomas, tai $z^{2n} f(\frac{1}{z^2}) = f(z^2)$. Todėl $f(z^2)$ yra lyginio laipsnio sangrąžinis polinomas. Be to, lygybėje $z^n f(\frac{1}{z}) = f(z)$ įstatę $z = -1$, gauname $f(-1) = 0$. Taigi, $f(z) = (z+1)f_1(z)$, kur $f_1(z)$ yra $(n-1)$-ojo laipsnio polinomas. Nesunku įsitikinti, kad teisinga lygybė $z^{n-1} f_1(\frac{1}{z}) = f_1(z)$. Todėl $f_1(z)$ yra lyginio laipsnio sangrąžinis polinomas. Remiantis 5 teorema, polinomą $f(z)$ galima išreikšti pavidalu $f(z) = (z+1)z^{\frac{n-1}{2}} g(z + \frac{1}{z})$, kur $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ yra polinomas, kurio laipsnis lygus $\frac{n-1}{2}$.

7 pavyzdys. Polinomas $p(z) = z^6 + z^4 - 3z^3 + z^2 + 1$ yra sangrąžinis. Padaliname iš z^3, gauname $z^3 + z - 3 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3}$. Atimame $(z + \frac{1}{z})^3$:

$$z^3 + z - 3 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} - \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 =$$
$$z^3 + z - 3 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} - \left(z^3 + 3z + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^3}\right) =$$
$$-2z - \frac{2}{z} - 3 = -2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 3.$$

Taip gauname išraišką $p(z) = z^3\left(\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 3\right)$.

Remiantis 5 teorema, egzistuoja bijekciją tarp m-tojo laipsnio polinomų $g(z) \in \mathbb{C}[z]$ aibės ir laipsnio $2m$-tojo laipsnio sangrąžinių polinomų $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ aibės. Be to, iš šios teoremos įrodymo išplaukia, kad polinomo g koeficientai yra sveikieji skaičiai tada ir tik tada, kai polinomo f koeficientai yra sveikieji skaičiai. Taip pat, jeigu $f(z) \in \mathbb{Q}[z]$ yra neredukuojamas virš $\mathbb{Q}$, tai $g(z)$ taip pat bus neredukuojamas virš $\mathbb{Q}$. Tačiau atvirkštinis teiginys nėra teisingas – jeigu $g(z)$ yra neredukuojamas, tai $f(z)$ gali būti redukuojamas. Pavyzdžiui, polinomas $g(z) = z^2 - 5$ yra neredukuojamas virš $\mathbb{Q}$, o atitinkamas polinomas

$$f(z) = z^2 g\left(z + \frac{1}{z}\right) = (z^2 - z - 1)(z^2 + z - 1)$$

yra redukuojamas.

Dabar pateiksime sąryšį tarp vienetinio apskritimo ir realiųjų skaičių ašies.

8 teorema. *Tegul $f(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0$ yra n-tojo laipsnio polinomas su realiaisiais koeficientais, kur $n = 2m$ ir $c_k = c_{n-k}$ su visais $k = 0, 1, \ldots, n$. Užrašykime $f(z) = z^m g(z + \frac{1}{z})$, kur $g(z) \in \mathbb{R}[z]$ yra m-tojo laipsnio polinomas.*

(i) Skaičius 1 (atitinkamai -1) yra polinomo $f(z)$ šaknis tada ir tik tada, kai skaičius 2 (atitinkamai -2) yra polinomo $g(z)$ šaknis.

(ii) Kiekvieną polinomo $f(z)$ menamų šaknų, priklausančių vienetiniam apskritimui, porą $(\alpha, \overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha})$ atitinka polinomo $g(z)$ realioji šaknis $\alpha + \frac{1}{\alpha}$, priklausanti intervalui $(-2, 2)$.

Įrodymas. (i) išplaukia iš lygybės $f(z) = z^m g(z + \frac{1}{z})$.

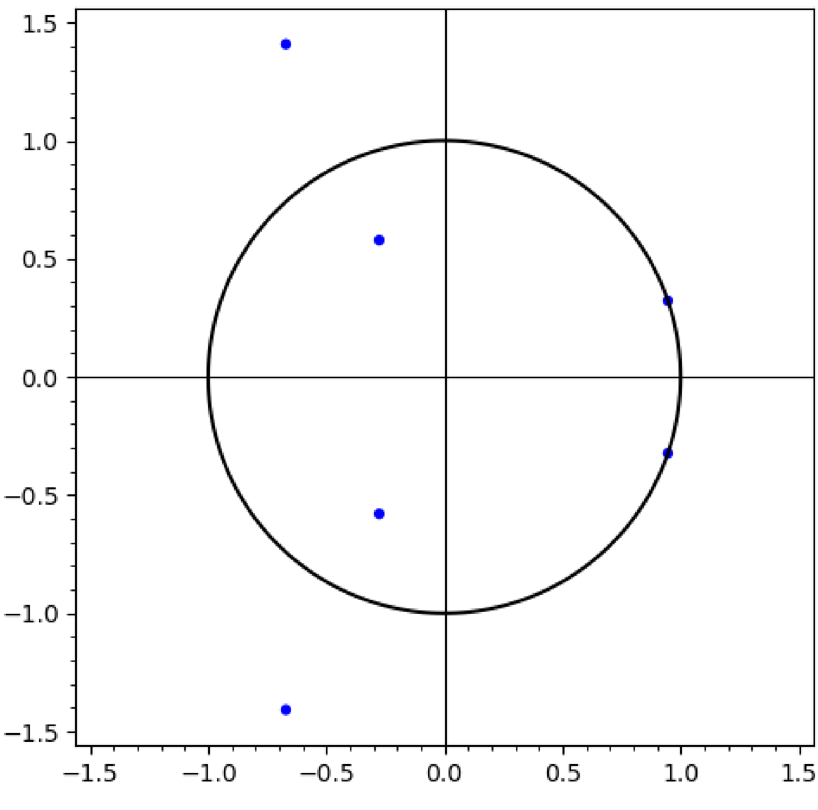
(ii). Turime, kad $f(z) = 0$ tada ir tik tada, kai $g(z + \frac{1}{z}) = 0$. Tegul α yra polinomo $f(z)$ menamoji šaknis, priklausanti vienetiniam apskritimui ($|z| = 1$). Tuomet egzistuoja toks skaičius $\theta \in \mathbb{R}$, kad $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$. Tada skaičius

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \cos\theta + i\sin\theta + \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1} = 2\cos\theta$$

yra polinomo $g(z)$ šaknis, priklausanti intervalui $(-2, 2)$. (Kadangi $\alpha \neq \pm 1$, tai $2\cos\theta \neq \pm 2$.)

Kita vertus, tegul $t \in (-2, 2)$ yra polinomo $g(z)$ šaknis. Egzistuoja toks $\theta \in \mathbb{R}$, kad $t = 2\cos\theta$. Pažymėkime $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$. Tuomet $t = \alpha + \frac{1}{\alpha}$, todėl iš lygybės $f(z) = z^m g(z + \frac{1}{z})$ išplaukia, kad skaičiai α ir $\frac{1}{\alpha}$ yra polinomo $f(z)$ menamosios šaknys, priklausančios vienetiniam apskritimui. ($\alpha \neq \pm 1$, nes $|t| = |2\cos\theta| < 2$.) $\square$

9 pavyzdys. Polinomas $p(z) = z^6 + z^4 - 3z^3 + z^2 + 1$ gali būti užrašytas kaip $z^3((z + \frac{1}{z})^3 - 2(z + \frac{1}{z}) - 3)$ kaip nagrinėjome 7 pavyzdyje, todėl $p(z)$ šaknys ant vienetinio apskritimo turi atitikti polinomo $z^3 - 2z - 3$ šaknis intervale $[-2, 2]$. Šis polinomas turi lygiai vieną realiąją šaknį ≈ 1.89, kuri priklauso intervalui $[-2, 2]$, todėl polinomas $p(z)$ turės lygiai dvi šaknis ant vienetinio apskritimo (žr. 1.1 paveiksliuką).



1.1 pav.: Polinomo $z^6 + z^4 - 3z^3 + z^2 + 1$ šaknys

1.2 Sangrąžinių polinomų šaknų ant vienetinio apskritimo egzistavimas

Kartais skaičiuoti polinomo šaknis nėra būtina, ir užtenka tik patikrinti, ar tokių šaknų yra. Todėl suformuluosime teoremą, padėsiančią patikrinti, ar polinomas turi šaknį ant vienetinio apskritimo. Nagrinėsime lyginio laipsnio sangrąžinius polinomus, nes jeigu laipsnis nėra lyginis, tai kaip įrodėme anksčiau, -1 bus jo šaknis.

10 lema ([4])**.** *Lyginio laipsnio n sangrąžinis polinomas*

$$f(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0 \in \mathbb{R}[z] \tag{1.3}$$

turi šaknį ant vienetinio apskritimo tada ir tik tada, kai funkcija

$$\phi(t) = c_{\frac{n}{2}} + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} 2c_k \cos\left(\left(\frac{n}{2} - k\right) t\right) \tag{1.4}$$

turi realiąją šaknį.

11 lema ([4])**.** *Jeigu* (1.3) *polinomo koeficientas $c_{\frac{n}{2}} = 0$, tai jis turės šaknį ant vienetinio apskritimo.*

Įrodymas. Remiantis 10 lema, užtenka parodyti, kad funkcija

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} 2c_k \cos\left(\left(\frac{n}{2} - k\right) t\right)$$

turi realiąją šaknį. Tai parodyti galime pasinaudodami vidurio taško teorema, nes $\phi(x)$ integralas intervale $[0, 2\pi]$ yra lygus 0 ir funkcija yra tolydi. $\square$

Kaip matome, kartais patikrinti, ar polinomas turi šaknį ant vienetinio apskritimo yra paprasta. Tačiau jeigu vidurinis koeficientas nėra 0, tai mums reikalingas kitas metodas - galime atkreipti dėmesį į vidurinio koeficiento sąryšį su kitais koeficientais. Norėdami įrodyti kitą teoremą, pasinaudosime *Egerváry-Szász nelygybe* (žr. [1]): jei funkcija

$$\psi(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} c_k \cos(kt), \qquad a_n \neq 0,$$

yra neneigiama, t. y. $\psi(t) \geqslant 0$ su visais $t \in \mathbb{R}$, tai su kiekvienu $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ teisinga nelygybė

$$|c_k| \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{[n/k] + 2}\right).$$

Čia $[x]$ žymi skaičiaus $x \in \mathbb{R}$ sveikąją dalį, t. y. $[x]$ lygus didžiausiam sveikajam skaičiui, neviršijančiam x.

12 teorema ([4])**.** *Tegul*

$$f(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0 \in \mathbb{R}[z]$$

yra lyginio laipsnio n sangrąžinis polinomas. Jeigu kokiam nors $k \in \{1, 2, \ldots, \frac{n}{2}\}$ teisinga nelygybė

$$|c_k| \geqslant |c_{\frac{n}{2}}| \cos\left(\frac{\pi}{[t]+2}\right), \quad t = \frac{n/2}{n/2 - k},$$

tai polinomas $f(z)$ turi bent vieną šaknį ant vienetinio apskritimo.

Įrodymas. Jei $c_{\frac{n}{2}} = 0$, tai teoremos tvirtinimas išplaukia iš 11 lemos. Tarkime, kad $c_{\frac{n}{2}} \neq 0$. Kadangi $f(z)$ ir $-f(z)$ šaknys sutampa, galime laikyti, kad $c_{\frac{n}{2}} > 0$. Nagrinėkime $\phi(t)$, apibrėžtą 10 lemoje. Funkcijos $\phi(t)$ integralas intervale $[0, 2\pi]$ bus teigiamas, nes (1.4) lygybėje kiekvieno dėmens, išskyrus $c_{\frac{n}{2}}$, integralas lygus 0, o koeficiento $c_{\frac{n}{2}}$ integralas $2\pi c_{\frac{n}{2}}$ – teigiamas skaičius.

Tarkime, kad polinomas $f(z)$ neturi šaknų ant vienetinio apskritimo. Tuomet funkcija $\phi(t)$ neturi realiųjų šaknų. Kadangi jos integralas intervale $[0, 2\pi]$ yra teigiamas skaičius, tai $\phi(t) > 0$ su visais $t \in [0, 2\pi]$. Tuomet funkcijos

$$\psi(t) = \frac{\phi(t)}{2c_{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{c_k}{c_{\frac{n}{2}}} \cos\left(\left(\frac{n}{2} - k\right) t\right)$$

visos reikšmės taip pat yra teigiamos. Tegul

$$\delta = \min\{\psi(t) : t \in [0, 2\pi]\}.$$

Įrodysime, kad $\delta < \frac{1}{2}$. Iš tikrųjų, funkcija $\psi(z) - \frac{1}{2}$ nėra nulinė, yra tolydi ir jos integralas intervale $[0, 2\pi]$ lygus 0. Todėl šį funkcija įgyja ir teigiamas, ir neigiamas reikšmės. Taigi, egzistuoja toks $t_0 \in [0, 2\pi]$, kad $\psi(t_0) - \frac{1}{2} < 0$, t. y. $\phi(t_0) < \frac{1}{2}$. Vadinasi, $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

Kadangi $\psi(t) \geqslant \delta$ su visais $t \in \mathbb{R}$, tai

$$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{c_{\frac{n}{2}-j}}{2c_{\frac{n}{2}}(\frac{1}{2} - \delta)} \cos(jt) =$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{c_k}{2c_{\frac{n}{2}}(\frac{1}{2} - \delta)} \cos\left(\left(\frac{n}{2} - k\right) t\right) = \frac{2}{1 - 2\delta}\left(\psi(t) - \delta\right) \geqslant 0$$

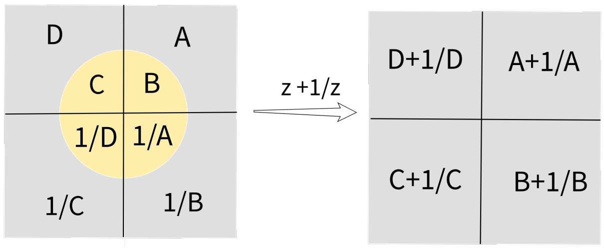
su visais $t \in \mathbb{R}$. Remiantis Egerváry-Szász nelygybe,

$$\left|\frac{c_k}{c_{\frac{n}{2}}}\right| \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{\left[\frac{n/2}{n/2-k}\right] + 2}\right)(1 - 2\delta) < \cos\left(\frac{\pi}{\left[\frac{n/2}{n/2-k}\right] + 2}\right)$$

su visais $k \in 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1$. O tai prieštarauja teoremos sąlygai. Vadinasi, polinomas $f(z)$ turi bent vieną šaknį ant vienetinio apskritimo. □

1.3 Geometrinė prasmė

13 pastaba. Šiame skyrelyje nemažai nagrinėjome $z + \frac{1}{z}$ ir kaip tai padeda apskaičiuoti šaknis ant vienetinio apskritimo, tačiau kokia yra to geometrinė prasmė? Erdvėje $\mathbb{C}$, atvaizdis $z \mapsto \frac{1}{z}$ apkeičia vienetinio apskritimo vidų ir išorę ir apatinę bei viršutinę plokštumos dalis vietomis. Šis apvertimas ganėtinai paprastas ant vienetinio apskritimo, kuris yra atvaizduojamas ant abscisių ašies.
Dabar panagrinėkime atvaizdį $z \mapsto z + \frac{1}{z}$ ervėje $\mathbb{C}$. Lengva pastebėti, kad taškai z ir $\frac{1}{z}$ yra perkeliami į tą patį tašką.



1.2 pav.: Atvaizdis $z \mapsto z + \frac{1}{z}$ erdvėje $\mathbb{C}$

Kaip matome, regionai A ir $\frac{1}{A}$ yra perkeliami į tą patį kvadrantą. Toliau pažiūrėkime į vienetinio apskritimo dalį nuo i iki 1, kuri skiria A ir B regionus. Ši dalis yra transformuojama į $[0, 2]$ ant realiųjų skaičių tiesės, nes A ribojasi kartu ir su $\frac{1}{B}$, todėl po transformacijos intervalas $[1, \infty]$ atvaizduojama į $[2, \infty]$.

2 skyrius

Bendrasis atvejis

Praeito skyriaus 12 teorema tinka tik sangrąžiniams polinomams, todėl norėdami skaičiuoti kitokio polinomo šaknis ant vienetinio apskritimo, reikia naujų idėjų. Pradėsime nuo tokio pavyzdžio:

14 pavyzdys. Nagrinėkime polinomą

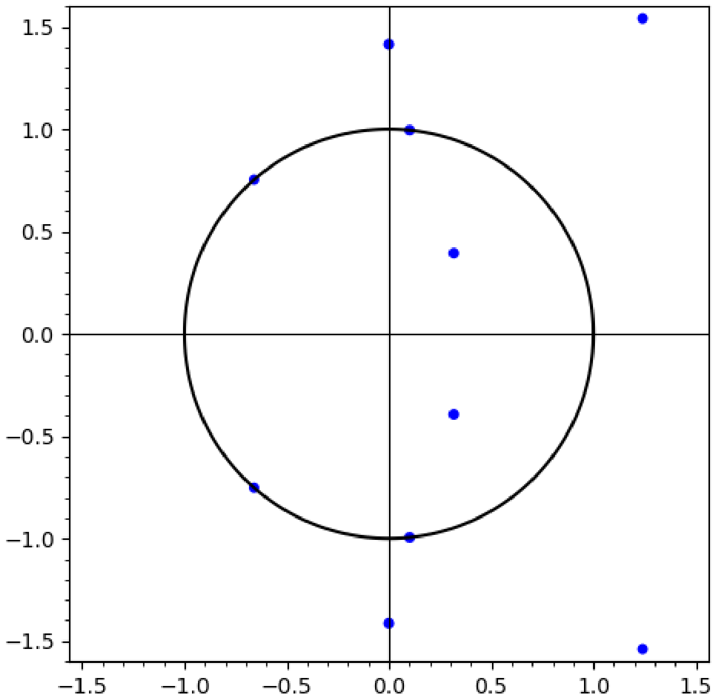
$$f(z) = z^{10} - 2z^9 + 6z^8 - 5z^7 + 13z^6 - 3z^5 + 14z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 2.$$

Kaip matome, šis polinomas nėra sangrąžinis, tačiau, kaip matyti 2.1 paveikslėlyje, jis turi keturias šaknis ant vienetinio apskritimo. Kaip tai patikrinti?

Vienas metodas būtų išskaidyti polinomą $f(z)$ žiede $\mathbb{Q}[z]$. Jeigu polinomas turi šaknų ant vienetinio apskritimo, tai jis turi būti redukuojamas šiame žiede, nes jis nėra sangrąžinis. Tuomet neredukuojamiems daugikliams galėtume pritaikyti 8 teoremą. Polinomas $f(z)$ žiede $\mathbb{Q}[z]$ išsiskaido taip:

$$f(z) = (z^2 + 2)(z^8 - 2z^7 + 4z^6 - z^5 + 5z^4 - z^3 + 4z^2 - 2z + 1).$$

Matome, kad $(z^2 + 2)$ šaknų ant vienetinio apskritimo neturi. Dabar pasinaudodami 5 teorema antrą dauginamąjį galime užrašyti pavidalu $z^4 g(z + \frac{1}{z})$ su tam tikru polinomu $g(z) \in \mathbb{Q}[z]$ ir suskaičiuoti šio polinomo šaknis intervale $[-2, 2]$, pagal 8 teoremą. Tačiau tai nėra labai geras būdas ir reikėtų bendresnio metodo, kuriam nereikėtų skaidyti polinomų. Šiame skyriuje suformuluosime du metodus, kurie sprendžia šią problemą.



2.1 pav.: $z^{10} - 2z^9 + 6z^8 - 5z^7 + 13z^6 - 3z^5 + 14z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 2$ šaknys

2.1 Brunault metodas

Pirmasis metodas remiasi tuo, kad jei nei vienas iš skaičių $0, 1, -1$ nėra polinomo $f(z) \in \mathbb{R}[z]$ šaknis, tai kompleksinis skaičius z_0, priklausantis vienetiniam apskritimui, yra polinomo $f(z)$ šaknis tada ir tik tada, kai z_0 yra polinomo $F(z) = \mathrm{dbd}(f(z), z^n f(\frac{1}{z}))$ šaknis; čia n yra polinomo $f(z)$ laipsnis.

15 teorema ([2])**.** *Tegul $f(z) \in \mathbb{R}[z]$ - toks n-tojo laipsnio polinomas, kad nei vienas iš skaičių $0, 1$ ir -1 nėra jo šaknis. Tuomet polinomas $F(z) = dbd(f(z), z^n f(\frac{1}{z}))$ yra sangrąžinis ir jo laipsnis yra lyginis skaičius. Be to, kompleksinis skaičius z_0, priklausantis vienetiniam apskritimui, yra polinomo $f(z)$ šaknis tada ir tik tada, kai z_0 yra polinomo $F(z)$ šaknis.*

Įrodymas. Kadangi polinomas $F(z)$ yra polinomo $f(z)$ daliklis ir nei vienas iš skaičių 0, 1, -1 nėra $f(z)$ šaknis, tai $F(-1) \cdot F(0) \cdot F(1) \neq 0$. Nenulinis skaičius $\alpha \in \mathbb{C}$ yra polinomo $F(z)$ šaknis tada ir tik tada, kai $f(\alpha) = f(\frac{1}{\alpha}) = 0$. Taigi, $F(\alpha) = 0$ tada ir tik tada, kai $F(\frac{1}{\alpha}) = 0$: visas polinomo $F(z)$ šaknis galima suskirstyti poromis $(\alpha, \frac{1}{\alpha})$, kur $\alpha \neq \frac{1}{\alpha}$.

Jei $\alpha \in \mathbb{C}$ priklauso vienetiniam apskritimui, tuomet $\frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$. Kadangi polinomo $f(z)$ visi koeficientai yra realieji skaičiai, tai $f(\overline{\alpha}) = \overline{f(\alpha)}$. Todėl, kai α priklauso vienetiniam apskritimui,

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0 \iff \overline{f(\alpha)}=0 \iff f(\alpha)=0.$$

Taigi, jei α priklauso vienetiniam apskritimui, tuomet $F(\alpha)=0$ tada ir tik tada, kai $f(\alpha)=0$.

Dabar įrodysime, kad $F(z)$ lyginio laipsnio sangrąžinis polinomas. Tarkime, kad α yra $F(z)$ šaknis. Tuomet ir $\frac{1}{\alpha}$ yra polinomo $F(z)$ šaknis ir $\alpha \neq \frac{1}{\alpha}$. Polinomą $f(z)$ galima išskaidyti taip:

$$f(z)=(z-\alpha)^i\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)^j g(z),$$

kur $i,j \geqslant 1$, $g(z)\in\mathbb{R}[z]$, $g(\alpha)\neq 0$ ir $g(\frac{1}{\alpha})\neq 0$. Be to, $i+j+\deg g=n$. Tuomet

$$\begin{aligned}
z^n f\left(\frac{1}{z}\right) &= z^{i+j+\deg g}\left(\frac{1}{z}-\alpha\right)^i\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\alpha}\right)^j g\left(\frac{1}{z}\right)=\\
&= z^i\left(\frac{1}{z}-\alpha\right)z^j\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\alpha}\right)z^{\deg g}g\left(\frac{1}{z}\right)=\\
&= (1-\alpha z)^i\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^j z^{\deg g}g\left(\frac{1}{z}\right)=\\
&= (-\alpha)^i\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)^i\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^j(z-\alpha)^j z^{\deg g}g\left(\frac{1}{z}\right)=\\
&= (z-\alpha)^j\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)^i\left((-\alpha)^i\left(\frac{-1}{\alpha}\right)^j\right)z^{\deg g}g\left(\frac{1}{z}\right).
\end{aligned}$$

Pastebėkime, kad nei vienas iš skaičių α ir $\frac{1}{\alpha}$ nėra polinomo $z^{\deg g}g\left(\frac{1}{z}\right)$ šaknis. Todėl polinomo $F(z)$ šaknų α ir $\frac{1}{\alpha}$ kartotinumai sutampa ir yra lygūs skaičiui $\min\{i,j\}$. Taigi

$$F(z)=(z-\alpha)^{\min\{i,j\}}\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)^{\min\{i,j\}}\operatorname{dbd}\left(g(z), z^{\deg g}g\left(\frac{1}{z}\right)\right).$$

Belieka pastebėti, kad polinomo $p(z)=(z-\alpha)^a\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)^a$, kur $a\in\mathbb{N}$ ir $\alpha\notin\{0,\pm1\}$, laipsnis lygus $2a$ ir jis tenkina sąlygą $p(z)=z^{2a}p\left(\frac{1}{z}\right)$. Vadinasi, $F(z)$ yra lyginio laipsnio sangrąžinis polinomas. □

Norėdami suskaičiuoti $F(z)$, galime pasinaudoti Euklido algoritmu.

16 pavyzdys. Dabar galime šią teoremą pritaikyti 14 pavyzdžio atvejui. Tegul

$$f(z)=z^{10}-2z^9+6z^8-5z^7+13z^6-3z^5+14z^4-4z^3+9z^2-4z+2.$$

Patikriname jo reikšmes taškuose $z=0, z=1, z=-1$: $f(0)=2, f(1)=27, f(-1)=63$, todėl galime taikyti 15 teoremą. Skaičiuojame:

$$z^{10}f\left(\frac{1}{z}\right)=2z^{10}-4z^9+9z^8-4z^7+14z^6-3z^5+13z^4-5z^3+6z^2-2z+1.$$

Tuomet

$$F(z) = \text{dbd}\left(f(z), z^{10} f\left(\frac{1}{z}\right)\right) = z^8 - 2z^7 + 4z^6 - z^5 + 5z^4 - z^3 + 4z^2 - 2z + 1.$$

Gavome, kad $F(z)$ yra lyginio laipsnio sangrąžinis polinomas.

Toliau skaičiuojame $F(z) = z^4 g(1 + \frac{1}{z})$. Padaliję $F(z)$ iš z^4, gauname

$$z^4 - 2z^3 + 4z^2 - z + 5 - \frac{1}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^4}.$$

Atimkime $(z + \frac{1}{z})^4$:

$$z^4 - 2z^3 + 4z^2 - z + 5 - \frac{1}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \left(z + \frac{1}{z}\right)^4 = -2z^3 - z - 1 - \frac{1}{z} - \frac{2}{z^3}.$$

Dabar pridėkime $2(z + \frac{1}{z})^3$:

$$z^4 - 2z^3 + 4z^2 - z + 5 - \frac{1}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \left(z + \frac{1}{z}\right)^4 + 2\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = 5z - 1 + \frac{5}{z}.$$

Atimkime $5(z + \frac{1}{z})$:

$$z^4 - 2z^3 + 4z^2 - z + 5 - \frac{1}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \left(z + \frac{1}{z}\right)^4 + 2\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 5\left(z + \frac{1}{z}\right) = 1.$$

Sukeliame $(z + \frac{1}{z})$ laipsnius į vieną pusę ir gauname

$$g\left(z + \frac{1}{z}\right) = \left(\left(z + \frac{1}{z}\right)^4 - 2\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 + 5\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1\right).$$

Taigi, nagrinėjame polinomą $g(z) = z^4 - 2z^3 + 5z - 1$. Nesunku patikrinti, kad jis turi dvi realiąsias šaknis, kurios abi yra intervale $[-2, 2]$, todėl $F(z)$ turės keturias šaknis ant vienetinio apskritimo, ir pagal 15 teoremą, $f(z)$ turės keturias šaknis ant vienetinio apskritimo.

2.2 Mobijaus transformacijos metodas

Įvade aprašytas Šturmo metodas tinka tik realiųjų šaknų skaičiaus nustatymui, o 1 skyriuje pateiktas metodas pritaikomas tik sangrąžiniams polinomams. Šioje dalyje suformuluosime ir įrodysime tokią teoremą:

17 teorema ([2]). *Tegul $p(z)$ - n - tojo laipsnio polinomas, turintis m šaknų, įskaitant kartotinumą, ant vienetinio apskritimo. Tuomet transformuotas polinomas $q_\mu(z)$ (20 apibrėžimas) turės lygiai m realiųjų šaknų, irgi įskaitant kartotinumą. Priešingai, jeigu $p(z)n$ - tojo laipsnio polinomas, turintis m šaknų, įskaitant kartotinumą, ant realiųjų skaičių tiesės ir $p(-i) \neq 0$, tai ir transformuotasis polinomas $q_\omega(z)$ (20 apibrėžimas) turės m šaknų ant vienetinio apskritimo, įskaitant kartotinumą.*

Pasinaudodami šia teorema, mūsų problemą, skaičiuojant polinomų šaknis ant vienetinio apskritimo, galėsime sumažinti iki šaknų skaičiavimų ant realiųjų skaičių tieses. Šis metodas paremtas Mobijaus transformacijomis.

18 apibrėžimas (Mobijaus Transformacija)**.** Kompleksinės erdvės racionali vieno kintamojo funkcija, formos

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

kur a, b, c, d - kompleksiniai skaičiai, tenkinantys $ad - bc \neq 0$ yra vadinama Mobijaus transformacija.

O būtent pasinaudosime šiomis transformacijomis:

19 apibrėžimas (Cayley transformacijos)**.** Apibrėžkime $\mu(z)$ ir $\omega(z)$ taip:

$$\mu(z) = \frac{z - i}{z + i}, \qquad \omega(z) = -i\frac{z + 1}{z - 1},$$

Šie atvaizdžiai dar yra žinomi kaip Cayley transformacijos, kurios kartu su šiomis sąlygomis:

$$\mu(\infty) = 1, \quad \mu(i) = \infty, \quad \omega(1) = \infty, \quad \omega(\infty) = -i$$

yra atvirkštinės viena kitai erdvėje $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ ir $\mu(z)$ transformuoja realiąją skaičių tiesę į vienetinį apskritimą kompleksinėje erdvėje $S = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, o $\omega(z)$ transformuoja vienetinį apskritimą į realiųjų skaičių tiesę.

19 Cayley transformacijos savybių įrodymas. 1. $\mu(z)$ transformuoja realiąją skaičių tiesę į vienetinį apskritimą kompleksinėje erdvėje $S = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Tegu $z = a + bi, \quad b = 0$ - skaičius ant realiųjų skaičių tiesės. Tada

$$\begin{aligned}\mu(z) &= \frac{z - i}{z + i} = \frac{a - i}{a + i} = \frac{(a - i)^2}{(a + i)(a - i)} \\ &= \frac{a^2 - 2ai - 1}{a^2 + 1} = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} - \frac{2a}{a^2 + 1}i\end{aligned}$$

ir

$$|\mu(z)| = ((\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1})^2 + (\frac{2a}{a^2 + 1})^2)^{1/2} = (\frac{(a^2 - 1)^2 + (2a)^2}{(a^2 + 1)^2})^{1/2} = 1$$

2. $\omega(z)$ transformuoja vienetinį apskritimą į realiųjų skaičių tiesę. Tegu $z = a + bi$ ir $|z| = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$. Tada

$$\begin{aligned}
\omega(z) &= -i\frac{z+1}{z-1} = -i\frac{(a+1)+bi}{(a-1)+bi} \\
&= -i\frac{((a+1)+bi)((a-1)-bi)}{((a-1)+bi)((a-1)-bi)} \\
&= -i\frac{a^2-1-2bi+b^2}{a^2+b^2-2a+1} \\
&= -i\frac{a^2-2bi+b^2-1}{-2a+2} \\
&= -i\frac{-bi}{-a+1} = \frac{-b}{-a+1}
\end{aligned}$$

□

Toliau suformuluosime apibrėžimą, kuris naudojamas teoremoje:

20 apibrėžimas (Cayley transformuoti polinomai)**.** Imant n-tojo laipsnio apibrėžkime Cayley transformuotus polinomus $q_\mu(z), q_\omega(z)$ taip:
$q_\mu(z) = (z+i)^n p(\mu(z))$
$q_\omega(z) = (\frac{i}{2})^n (z-1)^n p(\omega(z))$ - priekyje pridėjome $(\frac{i}{2})^n$ tam, kad šie polinomai būtų atvirkštiniai.

Įrodysime kelias svarbias savybės :

21 teorema ([2])**.** *Tegul $p(z)$ - n -tojo laipsnio kopleksinis polinomas. Jeigu $p(z)$ turi m šaknų taške $z = 1$, tuomet $q_\mu(z)$ bus $n - m$ -tojo laipsnio polinomas. Analogiškai, jeigu $p(z)$ turi m-tojo laipsnio šaknį taške $-i$, tai $q_\omega(z)$ bus $n - m$ -tojo laipsnio polinomas.*

Įrodymas. Tarkime $p(z)$ turi šaknį taške $z = 1$, kurios laipsnis yra m, $m \leqslant n$. Išreiškime

$$p(z) = (z-1)^m r(z),$$

kur $r(z)$ $n - m$-tojo laipsnio polinomas,

neturintis šaknies taške $z = 1$

Tuomet

$$q_\mu(z) = (\frac{z-i}{z+i} - 1)^m s(z) = (-2i)^m s(z), \text{ kur } s(z) = (z+i)^{n-m} r(\mu(z))$$

Skleisdami $s(z)$ z laipsniais, gauname:

$$\begin{aligned}
s(z) &= (z+i)^{n-m} r(\mu(z)) \\
&= (z+i)^{n-m}(a_{n-m}((\frac{z-i}{z+i})^{n-m} + \cdots + a_0) \\
&= a_{n-m}(z-i)^{n-m} + \cdots + a_0(z+i)^{n-m} \\
&= z^{n-m}(a_{n-m} + \cdots + a_0) + z^{n-m-1} \ldots
\end{aligned}$$

matome, kad aukščiausias laipsnis yra $n-m$ ir koeficientas prie jo lygus $r(1)$. Pagal sąlygą $r(1) \neq 0$, todėl ir $q_\mu(z)$ laipsnis bus $n-m$.
Analogiškai įrodome ir faktą, kad jeigu $p(z)$ turi m-tojo laipsnio šaknį taške $z = -i$, tai $q_\omega(z)$ bus $n-m$ -tojo laipsnio polinomas. □

Iš šios savybės matome, kad transformuoti polinomai $q_\mu(z)$ ($q_\omega(z)$) bus to paties laipsnio, kaip $p(z)$, jeigu neturės šaknų taške $z = 1$ ($z = -i$).

22 teorema ([2])**.** *Tegul $k_1, k_2, \ldots, k_n$ yra n-tojo laipsnio kompleksinio polinomo šaknys. Jeigu $p(1) \neq 0$, tada transformuoto polinomo $q_\mu(z)$ šaknys bus*

$$l_1 = \omega(k_1), \ldots, l_n = \omega(k_n)$$

Analogiškai ir su su $q_\omega(n)$ šaknimis. Jeigu $p(-i) \neq 0$, tuomet q_ω šaknys bus

$$v_1 = \mu(k_1), \ldots, v_n = \mu(k_n)$$

Įrodymas. Apvertę $q_\mu = (z+i)^n p(\mu(z))$ taškuose k gauname:

$$p(k_i) = (i/2)^n (k_i - 1)^n q_\mu(\omega(k_i)) = 0, \text{ kur } 1 \leqslant i \leqslant n$$

Pagal sąlygą $k_i \neq 1$, todėl $q_\mu(\omega(k_i)) = 0 \Rightarrow \omega(k_i)$ yra q_μ šaknys.
Taip pat, apversdami $q_\omega(z) = (\frac{1}{2})^n (z-1) p(\omega(z))$, taškuose $k_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ gausime $p(k_i) = (k+1)^n q_\omega(\mu(k_i)) = 0 \Rightarrow \mu(k_i)$ yra $q_\omega(z)$ šaknys. □

Iš šios teoremos matome, kad transformuodami polinomą, kartu transformuojame ir jo šaknis su atvirkštine transformacija.
Iš šių dviejų teoremų, galima įrodyti ir anksčiau suformuluotą teoremą:

Įrodymas. Kadangi $p(1) \neq 0$, tai pagal 21 transformuotas polinomas $q_\mu(z)$ bus irgi n - tojo laipsnio. Pagal 22 šaknys esančios ant vienetinio apskritimo bus transformuotos ant realiųjų skaičių tieses (pagal įrodytas $\omega(z)$ savybes. Analogiškai įrodome ir į kitą pusę - polinomas p neturi šaknų taške $z = -i$, todėl transformuotas polinomas $q\omega(z)$ irgi bus n-tojo laipsnio bei jo šaknys esančios $\mathbb{R}$ bus transformuotos ant vienetinio apskritimo. $\square$

Taigi, dabar turime būdą skaičiuoti n-tojo laipsnio polinomo šaknis ant vienetinio apskritimo - mums tereikia apskaičiuoti Cayley transformuotą polinomą $q_\mu(z) = (z+i)^n p(\mu(z))$ ir suskaičiuoti jo šaknis ant skaičių tiesės pasinaudojant pasirinktu algoritmu. Deja, čia susiduriame su kita problema - aprašyti šaknų skaičiavimo algoritmai reikalauja realaus polinomo, o Cayley transformacija, net ir transformuojant realiųjų polinomą, dažniausiai grąžina kompleksinį polinomą.

2.3 Polinomo su kompleksiniais koeficientais šaknys

Aukščiau aprašytos problemos sprendimui teks pasinaudoti tokiu metodu - suskaičiuoti papildomą realųjį polinomą $Q(z)$, turinti tiek pat šaknų ant skaičių tiesės kaip ir $q_\mu(z)$.
Norėdami tai padaryti, galima pasirinkti du būdus:
1. Padauginti gautą polinomą $q_\mu(z)$ iš jo kompleksinio konjukto $q^*_\mu(z^*)$ - taip gauname $2n$ -tojo laipsnio polinomą - $Q(z) = q_\mu(z)q^*_\mu(z^*)$. Kadangi $q^*_\mu(z^*)$ šaknys yra $q_\mu(z)$ konjunktai, todėl realusis polinomas $Q(z)$ turės tiek pat šaknų kaip ir $q_\mu(z)$, neįskaitant kartotinumo. Todėl toliau galime pritaikyti šaknų skaičiavimo algoritmą ir gautasis skaičius atitiks $p(z)$ šaknis ant vienetinio apskritimo.

23 pastaba. čia $*$ reiškia kompleksinius konjuktus - taip kad jeigu $p(z) = \Sigma_{k=0}^n p_k z^k$, tai $p^*(z^*) = \Sigma_{k=0}^n p^*_k z^k$.

2.Užrašykime Cayley transformuotą polinomą tokia forma : $q_\mu(z) = r(z) + is(z)$, kur

$$r(z) = \frac{1}{2}(q_\mu(z) + q^*_\mu(z^*))$$
$$s(z) = \frac{1}{2i}(q_\mu(z) - q^*_\mu(z^*))$$

taip kad $s(z)$ ir $r(z)$ yra realieji polinomai. Suskaičiavę $Q(z) = dbd(r(z), s(z))$ matome, kad $Q(z)$ turės tiek pat šaknų kiek ir $q_\mu(z)$.

24 teorema ([2]). *Polinomo* $Q(z) = dbd(r(z), s(z))$ *šaknys yra tos pačios, kaip ir polinomo* $q_\mu(z)$ *šaknys, kurios sutampa su jo kompleksinio konjukto* $q_\mu^*(z)$ *šaknimis.*

Įrodymas. Išskaidome kompleksinį polinomą $q_\mu(z)$ į dviejų polinomų sandaugą $t(z)u(z)$, kur $t(z)$ - realusis polinomas, kuriame yra visos $q_\mu(z)$ šaknys, esančios kompleksiniame konjukte. $u(z)$ - kompleksinis polinomas, kuriame yra visos likusios šaknys. Iš $r(z)$ ir $s(z)$ apibrėžimo matome, kad $t(z)$ dalina juos abu, o $u(z)$ nedalina nei vieno. Taigi, kadangi $Q(z) = dbd(r(z), s(z))$ apima bendras jų šaknis, gauname teoremos rezultatą. □

Roots of polynomial on unit circle

Summary

The problem of counting the number of roots on real line was solved long time ago. However, a similar problem of counting roots on a unit circle is still open. This work reviews Sturm's method used to count roots on real line, presents proofs and examples to reduce the problem of roots on unit circle to the problem of counting roots on real line in general case and special cases. This work is based on an article by K. Conrad [2].

Literatūra

[1] H. Alzer, *An Inequality for the Coefficients of a Cosine Polynomial*, Math. Univ. Carolin. **36** (1995), no. 3, 427–428.

[2] K. Conrad, *Roots on a circle*, Lecture notes, https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/galoistheory/numbersoncircle.pdf (accessed 2021-05-05)

[3] P. Drungilas and H. Markšaitis, *Algebra*, Vilniaus universiteto leidykla, 2013

[4] J. Konvalina and V. Matache, *Palindrome-Polynomials with Roots on the Unit Circle*, 2004, Mathematics Faculty Publications. 44, https://digitalcommons.unomaha.edu/mathfacpub/44

[5] D. Stankov, *The number of unimodular roots of some reciprocal polynomials* https://arxiv.org/pdf/1909.12986.pdf

[6] R.S. Vieira, *How to count the number of zeros that a polynomial has on the unit circle?* https://arxiv.org/pdf/1902.04231v1.pdf