

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS BAKALAURO STUDIJŲ
PROGRAMA

Bakalauro baigiamasis darbas
**Nuostolių dėl įsipareigojimų nevykdymo
skirstinio modeliavimas**

Modeling the Loss Given Default Distribution

Laura Platakytė, Gabrielė Sauspreškytė

Darbo vadovas doc. dr. Andrius Grigutis

Vilnius, 2021

Nuostolių dėl įsipareigojimų nevykdymo skirstinio modeliavimas

Santrauka

Šiame baigiamajame bakalauro darbe aptariama kredito rizika, jos pagrindiniai vertinimo rodikliai bei pateikiamos formulės jų skaičiavimui. Apibrėžiami nuostolio dėl įsipareigojimų nevykdymo vertinimo metodai ir jų principai. Praktinėje dalyje, taikant Monte Carlo simuliaciją, modeliuojamas paskolų portfelio nuostolių pasiskirstymas ir visa tai detaliai aprašoma darbo eigoje. Galiausiai išanalizuojami gauti rezultatai bei pateikiamos išvalgos apie pasirinktą paskolų portfelį. Rezultatai parodo, kad išsikeltas baigiamojo darbo tikslas, apie nuostolio dėl įsipareigojimų nevykdymo ir beta skirstinio atitikimą, buvo realizuotas.

Raktiniai žodžiai: Kredito rizika, įsipareigojimo nevykdymo tikimybė, nuostolis dėl įsipareigojimų nevykdymo, paskolos dydis nemokumo atveju, beta skirstinys, tikėtinas nuostolis, netikėtinas nuostolis, paskolų portfelis, ekonominis kapitalas, Monte Carlo simuliacija

Modeling the Loss Given Default Distribution

Abstract

This bachelor thesis discusses credit risk and its main rating parameters with detailed formulas and calculation methods. A few main ways to generate a loss given default distribution are defined here. The second part is contained of loss given default modeling with Monte Carlo simulation. All detailed steps are given. The main purpose of this bachelor thesis was to show that loss given default distribution and beta distribution are almost equivalents. After analyzing the results, it is shown that this was accomplished.

Key words: credit risk, probability of default, loss given default, exposure at default, beta distributions, expected loss, unexpected loss, loan portfolio, economic capital, Monte Carlo simulation

Turinys

Įvadas	3
1 Rizikos valdymo rodikliai	4
1.1 Įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė	4
1.2 Paskolos dydis įsipareigojimo neįvykdymo atveju	5
1.3 Nuostolis dėl įsipareigojimų neįvykdymo	6
2 Tikėtinas ir netikėtinas nuostoliai	6
3 Paskolų portfeliai	8
4 Vertinimo metodai	10
4.1 Monte Carlo modeliavimas	11
4.2 Analizinė aproksimacija	12
4.2.1 Beta skirstinys	12
5 LGD pasiskirstymo funkcijos modeliavimas	16
5.1 Praktinės dalies įvadas	16
5.2 Paskolų portfelio poaibis	17
5.3 Poaibio LGD skirstinio modeliavimas	19
Išvados	25
Literatūra	26
Priedai	27

Ivadas

Temos aktualumas. Jau daugelį metų finansinės įstaigos susiduria su įvairiais iššūkiais, susijusiais su finansų rinkos sudėtingumu dėl augančios finansavimo paklausos. Kartu su šia paklausa auga ir tikimybė patirti didesnius nuostolius, todėl yra labai svarbu atrasti tinkamas priemones tiems nuostoliams vertinti. Tai galima padaryti matuojant pagrindines rizikas:

- Rinkos rizika - tikimybė patirti nuostolius dėl nepalankios dinamikos finansų rinkose.
- Operacinė rizika - tikimybė patirti nuostolius dėl netinkamų ar nepavykusių vidaus procesų, dėl darbuotojų arba išorės įtakos.
- Likvidumo rizika - rizika, kad bankas neturės pakankamai lėšų įvykdyti įsipareigojimų. Tai rizika, atsirandanti dėl galimo vėlavimo vykdyti įsipareigojimus arba mažo įmonės likvidumo.
- Valiutų kursų rizika - tikimybė patirti nuostolius dėl tam tikros valiutos kurso svyravimo.
- Kredito rizika - tikimybė patirti nuostolius dėl to, kad skolininkas negrąžins paskolos arba nevykdys skolinių įsipareigojimų.

Kadangi finansinių įstaigų viena iš pagrindinių veiklų yra paskolų teikimas, tai šių institucijų siekis - veiksmingai valdyti kredito riziką. Netinkamas kredito rizikos valdymas yra dažniausiai pasitaikanti bankų žlugimo priežastis. Remiantis [4] šaltiniu, kredito riziką įvertina šie pagrindiniai etapai:

1. Klientų rizikos modeliavimas ir skaičiavimas;
2. Kredito rizikos analizė visam portfeliui;
3. Portfelio rizikos gražos analizė.

Šių etapų esmė, visų pirma, yra nusistatyti efektyvius kredito rizikos veiksnius, tuomet sumodeliuoti ir apskaičiuoti nuostolio tikimybes, nustatyti ribą - kiek daugiausiai galima prarasti dėl kliento įsipareigojimo nevykdymo, įvertinti portfelio diversifikaciją, numatyti paskolų monitoringą, apskaičiuoti nuostolį nemokumo atveju ir galiausiai tinkamai paskirstyti kapitalą tikėtinam ir netikėtinam nuostoliui padengti.

Darbo tikslas. Modeliuojant paskolų portfelio nuostolį dėl įsipareigojimų nevykdymo įvertinti pasiskirstymo funkcijos atitikimą su beta skirstiniu.

Darbo uždaviniai.

1. Išnagrinėti teoriją susijusią su kredito rizika ir nuostoliu dėl įsipareigojimų nevykdymo.
2. Išanalizuoti turimo paskolų portfelio duomenis.
3. Naudojant Monte Carlo simuliaciją sugeneruoti visus galimus paskolų portfelio nuostolių variantus.

4. Nustatyti paskolų portfelio nuostolio dėl kliento nemokumo pasiskirstymo funkciją ir palyginti ją su beta skirstiniu.

Darbo struktūra. Bakalauro baigiamąjį darbą sudaro dvi dalys: teorinė (žr. 1-4 skyrius) ir praktinė (žr. 5 skyrių), darbo pabaigoje pateikiamas literatūros sąrašas ir priedai, kuriuose sudarytos lentelės, atvaizduojančios nuostolio dėl įsipareigojimų nevykdymo reikšmių intervalus su atitinkamomis nuostolių ribomis ir pasiskirstymo dažniu bei atitinkamomis beta reikšmėmis. Teorinėje dalyje, visų pirma, aptariami pagrindiniai rizikos vertinimo rodikliai, vėliau supažindinama su tikėtinais ir netikėtiniais nuostoliais bei jų formulių taikymu. Tuomet įvedamas paskolų portfelio apibrėžimas ir galiausiai pateikiami paskolų portfelių vertinimo metodai. Praktinėje dalyje pritaikomos teorinės žinios paskolų portfelio nuostolio dėl įsipareigojimo nevykdymo modeliavimui. Naudojami internete viešai skelbiami finansiniai duomenys [7]. Darbui su šiais duomenimis taikoma statistinė programa RStudio, kurios kodas su paaiškinimais ir rezultatais pateikiamas darbo eigoje.

1 Rizikos valdymo rodikliai

1.1 Įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė

Suteikdamas paskolas klientams, kiekvienas bankas prisiima riziką patirti nuostolį dėl kliento įsipareigojimų neįvykdymo. Šiai rizikos tikimybei įvertinti yra naudojamas finansinis rodiklis - įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė (angl. Probability of default, žym. PD). PD rodiklis kinta nuo 0 iki 1: kai 0 - visi įsipareigojimai įvykdomi, t. y. klientas grąžino visą paskolos sumą su palūkanomis, o kai 1 - įsipareigojimai neįvykdomi. Kuo didesnė numatoma įsipareigojimo neįvykdymo tikimybė, tuo didesnė palūkanų norma bus siūloma skolininkui. Paskolos davėjas įvertina kliento riziką remdamasis jo kredito balais, (FICO)¹ reitingų sistema ir finansiniais ištekliais.

Reitingų sistema yra sudaroma remiantis daugelio metų duomenimis, kurie parodo, kiek klientas yra patikimas, nes jiems nustatyti naudojama informacija apie kliento įsipareigojimus, turtą, ankstesnę kredito istoriją ir pan. Pagrindinės ir žinomiausios kredito reitingų agentūros yra: “Moody’s”, “Standard & Poor” ir “Fitch Rating”, jos naudoja tam tikrą kredito reitingų klasifikaciją, kuri yra pateikta 1 lentelėje.

¹Fair Isaac Corporation balas įvertina klientus balais nuo 300 iki 850, kurie nusako, kiek yra tikėtina, kad klientas įvykdys įsipareigojimus. Balas siekiantis 660 parodo gerą kredito istoriją

Apibūdinimas	Moody's	Standard & Poor	Fitch Rating
Aukščiausias saugumo lygis	Aaa	AAA	AAA
Aukštas saugumo lygis	Aa1	AA+	AA+
	Aa2	AA	AA
	Aa3	AA-	AA-
Aukštesnis investicinis reitingas	A1	A+	A+
	A2	A	A
	A3	A-	A-
Žemesnis investicinis reitingas	Baa1	BBB+	BBB
	Baa2	BBB	BBB
	Baa3	BBB-	BBB-
Neinvesticinis (spekuliacinis) reitingas	Ba1	BB+	BB+
	Ba2	BB	BB
	Ba3	BB-	BB-
Labai spekuliacinis reitingas	B1	B+	B+
	B2	B	B
	B3	B-	B-
Bloga būklė	Caa1	CCC+	CCC+
	Caa2	CCC	-
	Caa3	CCC-	-
Ypač spekuliacinis reitingas	Ca	CC	CC
Galimas įsipareigojimų nevykdymas	C	C	C
Įsipareigojimų nevykdymas	-	-	DDD
	-	-	DD
	-	D	D

1 lentelė: Kredito reitingai ir jų interpretacija. Šaltinis: sudaryta darbo autorių, remiantis [6].

1.2 Paskolos dydis įsipareigojimo neįvykdymo atveju

Kitas svarbus rodiklis yra paskolos dydis įsipareigojimų neįvykdymo atveju (angl. Exposure at default, žym. EAD), tai yra numatomas nuostolių dydis, kurį gali patirti bankas, kai skolininkas neįvykdo paskolos įsipareigojimų. Bankai dažniausiai apskaičiuoja kiekvienos paskolos EAD dydį ir tuos skaičius naudoja, kad įvertintų bendrą jų įsipareigojimų nevykdymo riziką. Šis dydis yra nepastovus visą paskolos laikotarpį, nes kinta su kiekviena skolininko įmoka. Paprastai EAD skirstomas į neapmokėtos skolos (angl. outstandings, žym. OUTST) ir kredito įsipareigojimų (angl. commitments, žym. COMM) dalis. Neapmokėta skola - paskolos dalis, kurios klientas dar negrąžino, t. y. tai, ką turime iš išmokejimų atėmus visas

įmokas. Kredito įsipareigojimais - paskolos dalis, kurią bankas įsipareigojo klientui suteikti, kai šis to pareikalau. Tuomet EAD gali būti apskaičiuojamas pagal šią formulę

$$EAD = OUTST + \gamma COMM,$$

čia $\gamma \in [0; 1]$ yra tikėtina įsipareigojimų dalis, kuria klientas pasinaudos iki tampant nemokiu. Įprastai γ yra atitinkamo atsitiktinio dydžio vidurkis. Jis parenkamas atsižvelgus į kliento kredito reitingą, paskolos pobūdį ir jos garantijas bei kitus aspektus.

1.3 Nuostolis dėl įsipareigojimų neįvykdymo

Anskčiau minėti PD ir EAD rodikliai yra neatsiejami nuo dar vieno svarbaus rizikos vertinimo rodiklio - nuostolio dėl įsipareigojimų neįvykdymo (angl. Loss given default, žym. LGD). Paprastai LGD apibrėžiamas kaip nuostolio dalis, kurią finansų įstaiga praras, kai klientas taps nemokiu. Šis rodiklis yra labai dažnai naudojamas apskaičiuojant ekonominį kapitalą, norminį kapitalą ar tikėtinus nuostolius. Ekonominis kapitalas kaupiamas, kad būtų galima padengti netikėtinus nuostolius, o norminis kapitalas - tikėtinus ir netikėtinus nuostolius.

LGD gali būti skirstomas į:

1. Faktinį LGD - skaičiuojamas paskoloms, kurių gavėjai jau yra nemokūs. Tai yra, nuostolio dydis, kurį bankas patyrė momentu, kai klientas tapo nemokiu;
2. Prognozuojamą LGD - skaičiuojamas dar neišduotoms arba jau išduotoms paskoloms, kurių gavėjas vykdo įsipareigojimus, arba toms paskoloms, kurių išieškojimo procesas, gavėjui tapus nemokiu, dar vykdomas.

Paprasčiausia ir dažniausiai naudojama formulė LGD apskaičiavimui užrašoma taip

$$LGD = 1 - RR = 1 - \frac{\text{atgautos sumos}}{EAD} = \frac{\text{nuostolis}}{EAD}, \quad (1)$$

čia RR - atgaunama dalis (angl. recovery rate), tai yra skolos dalis, kurią finansinė įstaiga gali susigrąžinti po skolininko įsipareigojimų neįvykdymo.

Atvejis, kai $LGD = 0$, t. y. bankas nepatiria nuostolio, gali būti traktuojamas trejopai:

1. Visą paskolos sumą klientas sumokėjo su skolų išieškojimo pagalba arba be jos;
2. Buvo sutartos naujos paskolos mokėjimo sąlygos;
3. Buvo sumokėtas užstatas, kuris padengė visą likusią skolos dalį.

2 Tikėtinas ir netikėtinas nuostoliai

Rizikos valdymo požiūriu, dvi pagrindinės nuostolių pasiskirstymo sąvokos yra tikėtinas ir netikėtinas nuostoliai. Finansinės institucijos kaupia kapitalą, kad galėtų padengti netikėtinus

nuostolius ir įvertina atidėjinių poreikį tikėtiniems nuostoliams padengti.

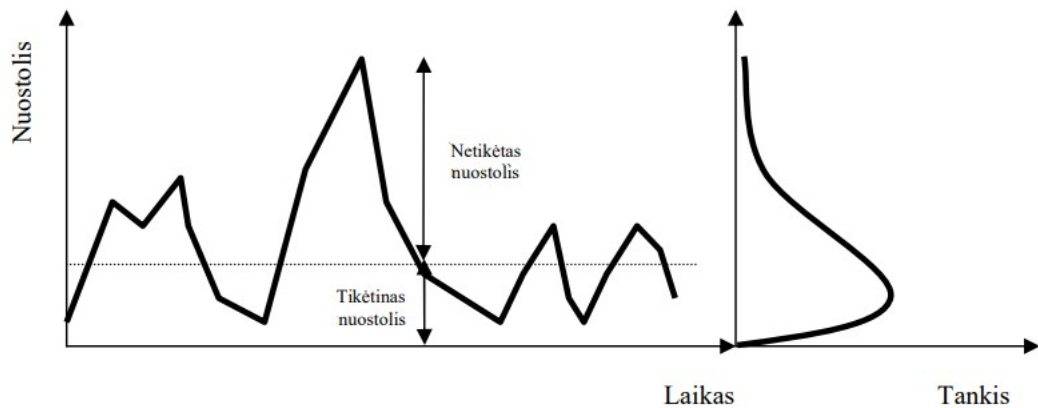
Tikėtinas nuostolis (angl. Expected Loss, žym. EL) yra vidutinis nuostolis, kurį galima patirti per tam tikrą laikotarpį, dėl skolininko nemokumo. Matematiškai galima apskaičiuoti

$$EL = EAD \cdot LGD \cdot PD.$$

Tačiau, kaip ir minėjome, bankui neužtenka įvertinti tik tikėtiną nuostolį, nes nuostolis, kurį patirs, gali būti didesnis nei tikimasi. Tai gali įvykti dėl įvairių priežasčių, tokių kaip: netiksliai įvertinta kredito rizika, ekonominiai padėties pokyčiai ir kt. Netikėtinas nuostolis (angl. Unexpected Loss, žym. UL) dažniausiai yra vertinamas nuostolio standartiniu nuokrypiu arba rizikos vertės (angl. Value at Risk, žym. VaR) matu ir gali būti apskaičiuojamas

$$\begin{aligned} UL &= \sqrt{\mathbb{D}(\tilde{L})} = \sqrt{\mathbb{D}(EAD \cdot LGD \cdot L)} = EAD \cdot LGD \cdot \sqrt{\mathbb{D}(L)} \\ &= EAD \cdot LGD \cdot \sqrt{PD \cdot (1 - PD)}, \end{aligned}$$

čia $\mathbb{D}(x)$ yra atsitiktinio dydžio dispersija, $\tilde{L}$ - paskolos nuostolis, o $L = \mathbb{1}_D$, t. y. $L = 1$, kai paskola yra nuostolinga, $L = 0$ - priešingu atveju.



1 pav. Tikėtini ir netikėtini nuostoliai. Šaltinis: [2]

Bankams neįmanoma nuspėti kokius nuostolius patirs, todėl jie prognozuoja vidutinį galimą nuostolio dydį, kurio gali tikėtis klientui tapus nemokiu. Šį dydį vaizduoja punktyrinė linija 1 paveikslėlyje, t. y. tikėtini nuostoliai, kuriuos galima įvertinti. Visa tai, kas yra virš punktyrinės linijos, yra netikėtini nuostoliai, kurių bankas, paprastai, negali taip tiksliai nustatyti, tačiau taip pat yra labai svarbu apsisaugoti nuo šių nuostolių, tam jie kaupia kapitalą. Dešinėje vaizduojamame grafiko eskize matosi, kad dideli nuostoliai pasitaiko rečiau nei vidutiniai, taip pat kaip ir nuostoliai lygūs arba beveik lygūs nuliui.

3 Paskolų portfeliai

Iki šiol nagrinėjome vienos paskolos rizikos vertinimą, tačiau bankai suteikia daug paskolų, kurios yra skirstomos į paskolų portfelius. Jų riziką taip pat svarbu įvertinti atsižvelgus į anksčiau (žr. 1 skyriuje) minėtus rizikos vertinimo rodiklius.

Tarkime, kad portfelis yra sudarytas iš n paskolų. Tada kiekvienos paskolos nuostolis yra lygus

$$\tilde{L}_i = EAD_i \cdot SEV_i \cdot L_i,$$

čia $L_i = \mathbb{1}_{D_i}$, $\mathbb{P}(D_i) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{D_i}] = PD_i$, $i = 1, \dots, n$, čia D_i yra įvykis, kad klientas yra ar taps nemokus per tam tikrą laikotarpį $\forall i$, o SEV - nuostolių sunkumas įsipareigojimų neįvykdymo atveju traktuojamas kaip atsitiktinis dydis su $\mathbb{E}[SEV] = LGD$.

Iš aukščiau minėtos formulės gauname, kad portfelio nuostolis yra apibrėžiamas kaip atsitiktinis dydis

$$\tilde{L}_{PF} = \sum_{i=1}^m \tilde{L}_i = \sum_{i=1}^m EAD_i \cdot SEV_i \cdot L_i.$$

Kai kiekvieno kliento SEV_i ir D_i yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, tai teisinga formulė

$$EL_{PF} = \mathbb{E}\tilde{L}_{PF} = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}\tilde{L}_i = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[EAD_i] \cdot LGD_i \cdot PD_i = \sum_{i=1}^m EAD_i \cdot LGD_i \cdot PD_i. \quad (2)$$

Kadangi dažniausiai EAD ir L nepriklausomumo patikrinti negalime, todėl šioje formulėje, vietoje $\mathbb{E}[EAD]$ naudojame EAD .

Galima pastebėti, kad paskolų portfelio tikėtinas nuostolis yra lygus jį sudarančių paskolų tikėtinų nuostolių sumai. Tačiau netikėtino nuostolio atveju adityvumas galioja tik tada, kai nuostolio kintamasis L yra poromis nekoreliuotas, tačiau ši prielaida yra mažai tikėtina. Taigi, dažniausiai adityvumas yra prarandamas ir yra būtina įvertinti paskolų rizikos koreliaciją, kuri parodo, kaip vienos paskolos rizika yra susijusi su kitos paskolos rizika. Šiuo atveju paskolų portfelio netikėtiną nuostolį galima apskaičiuoti taikant šią formulę

$$UL_{PF} = \sqrt{\mathbb{D}(\tilde{L}_{PF})} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m EAD_i \cdot EAD_j \cdot Cov(SEV_i \cdot L_i, SEV_j \cdot L_j)}. \quad (3)$$

Teiginys 1. *Kai paskolų portfelių sunkumai $SEV_i, i = 1, \dots, n$ yra konstantos, tai netikėtinas*

nuostolis yra lygūs

$$(UL_{PF})^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m EAD_i \cdot EAD_j \cdot LGD_i \cdot LGD_j \cdot \sqrt{PD_i \cdot (1 - PD_i) \cdot PD_j \cdot (1 - PD_j)} \cdot \rho_{i,j},$$

čia $\rho_{i,j} = Corr(L_i, L_j) = Corr(\mathbb{1}_{D_i}, \mathbb{1}_{D_j})$.

Irodymas. Žinant, kad $Cov(X, Y) = \sqrt{\mathbb{D}X} \sqrt{\mathbb{D}Y} Corr(X, Y)$ ir $\mathbb{D}(\mathbb{1}_{D_i}) = PD_i(1 - PD_i)$, tuomet iš (3) lygybės gauname

$$\begin{aligned} UL_{PF} &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m EAD_i \cdot EAD_j \cdot \sqrt{\mathbb{D}(SEV_i \cdot L_i)} \sqrt{\mathbb{D}(SEV_j \cdot L_j)} \cdot Corr(SEV_i \cdot L_i, SEV_j \cdot L_j)} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m EAD_i \cdot EAD_j \cdot SEV_i \sqrt{\mathbb{D}(L_i)} \cdot SEV_j \sqrt{\mathbb{D}(L_j)} \cdot Corr(L_i, L_j)} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m EAD_i \cdot EAD_j \cdot LGD_i \cdot LGD_j \cdot \sqrt{\mathbb{D}(L_i) \cdot \mathbb{D}(L_j)} \cdot \rho_{i,j}}. \end{aligned}$$

Pakėlus abi puses kvadratu gauname

$$\begin{aligned} (UL_{PF})^2 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m EAD_i \cdot EAD_j \cdot LGD_i \cdot LGD_j \cdot \sqrt{\mathbb{D}(L_i) \cdot \mathbb{D}(L_j)} \cdot \rho_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m EAD_i \cdot EAD_j \cdot LGD_i \cdot LGD_j \cdot \sqrt{PD_i(1 - PD_i) \cdot PD_j(1 - PD_j)} \cdot \rho_{i,j}. \end{aligned} \tag{4}$$

□

Norint geriau suprasti koreliacijos prasmę ir interpretaciją, verta panagrinėti pavyzdį. Tarkime, portfelis sudarytas iš dviejų paskolų, kurių $LGD_i = 100\%$ ir $EAD_i = 1$, $i = 1, 2$. Pažymėkime, $PD_i = p_i$ ir $\rho = Corr(L_i, L_j)$. Tuomet iš (4) lygybės gauname

$$(UL_{PF})^2 = p_1(1 - p_1) + p_2(1 - p_2) + 2\rho\sqrt{p_1(1 - p_1)}\sqrt{p_2(1 - p_2)}.$$

Išskirkime tris atvejus atsižvelgiant į koreliaciją ρ :

1. $\rho = 0$. Šiuo atveju trečiojo nario formulėje nebelieka ir UL_{PF} pasiekia savo minimumą. Tokia situacija vadinama tobula diversifikacija. Yra labai mažai tikėtina, kad kelios išduotos paskolos, kurios sudaro tą patį portfelį, skirtingiems klientams, bus negrąžin-

tos vienu metu, nes šių paskolų rizika yra tiesiškai nesusijusi. Tai yra vieno kliento įsipareigojimų neįvykdymas neturės įtakos kito kliento būsenai.

2. $\rho > 0$. Šiuo atveju abiejų paskolų nemokumas yra tarpusavyje priklausomas, nes vieno kliento nemokumas padidina kito kliento tikimybę tapti nemokiu. Ši sąlyginė tikimybė gali būti apskaičiuojama

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_2 = 1|L_1 = 1) &= \frac{\mathbb{P}(L_2 = 1, L_1 = 1)}{\mathbb{P}(L_1)} = \frac{\mathbb{E}(L_1 L_2)}{p_1} = \frac{p_1 p_2 + \text{Cov}(L_1, L_2)}{p_1} \\ &= p_2 + \frac{\rho \sqrt{p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)}}{p_1} > p_2.\end{aligned}$$

Retu atveju, kai $\rho = 1$ ir $p_1 = p_2 = p$ gauname $UL_{PF} = 2\sqrt{p(1-p)}$, t. y. $PD_1 = PD_2$ parodo, kad portfelį sudaro tik vienas klientas, o rizika padvigubėja (koncentracijos rizika). Vadinasi, jei bus negrąžinta viena paskola, tai ir kita nebus grąžinta.

3. $\rho < 0$. Šis atvejis yra analogiškas $\rho > 0$ atvejui, tik skirtumas toks, kad vieno kliento nemokumas sumažina kito kliento tikimybę tapti nemokiu. Tai yra sumažėja sąlyginė įsipareigojimų tikimybė $\mathbb{P}(L_2 = 1|L_1 = 1) < p_2$. Retu atveju, kai $\rho = -1$ ir $p_1 = p_2 = p$, gauname $UL_{PF} = 0$. Vadinasi, negrąžinus vienos paskolos, kita turi būti grąžinta. Tokia situacija vadinama tobulu apsidraudimu (angl. perfect hedging).

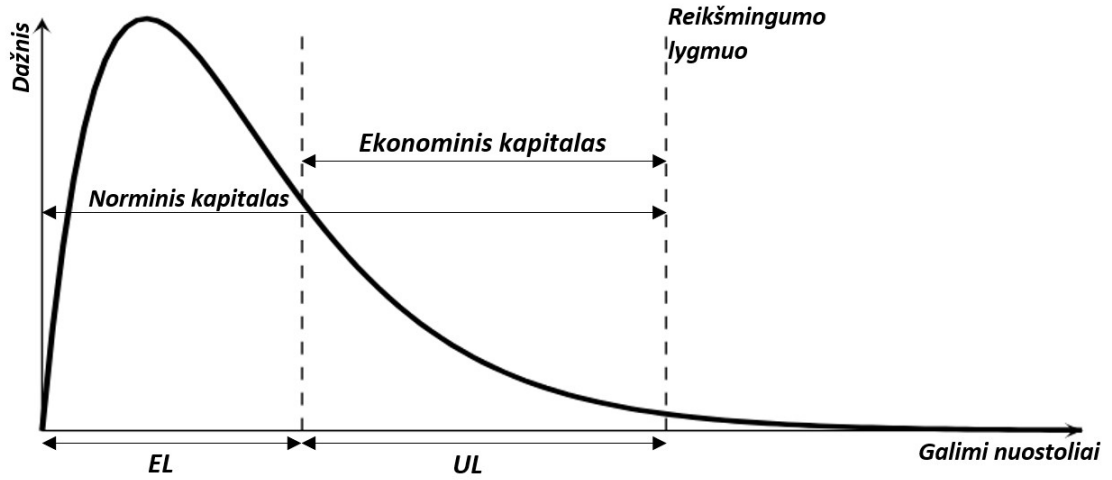
Tiesiogiai paskolų rizikos koreliacijos įvertinti neįmanoma, nes bankams trūksta duomenų ir informacijos apie nemokumo atvejus, be to, ganėtinai keblu įvertinti galimas paskolų portfelio nuostolių baigčių tikimybes.

4 Vertinimo metodai

Kiekviena finansinė įstaiga privalo įvertinti kiek turto turi sukaupti, kad galėtų padengti $EL + UL$ dydžio nuostolius, patirtus dėl klientų įsipareigojimų neįvykdymo. Kad suvaldytų galimą riziką yra kaupiamas ekonominis kapitalas (angl. economic capital, žym. EC), dar vadinamas rizikos kapitalu. Jo dydis turėtų siekti bent jau netikėtinius nuostolius. Ekonominį kapitalą galima apskaičiuoti

$$EC_\alpha = q_\alpha - EL_{PF}, \quad (5)$$

čia α - reikšmingumo lygmuo, o $q_\alpha = \inf\{q > 0 : \mathbb{P}(\tilde{L}_{PF} \leq q) \geq \alpha\}$, tai yra paskolų portfelio nuostolių $\tilde{L}_{PF}$ α -lygmens kvantilis. Kuo didesnį pasikliautinąjį intervalą nustato, tuo mažesnė nemokumo tikimybė. Šią formulę puikiai atspindi 2 paveikslėlis, kuriame matome, kad ekonominis kapitalas yra lygus skirtumui tarp paskolų portfelio nuostolių α -lygmens kvantilio ir tikėtinų portfelio nuostolių.



2 pav. Įprastas paskolų portfelio nuostolių skirstinys. Šaltinis: sudaryta autorių.

Praktikoje naudojami du metodai paskolų portfelio nuostolio $\tilde{L}_{PF}$ skirstiniui įvertinti:

1. Monte Carlo metodas;
2. Analizinės aproksimacijos metodas.

4.1 Monte Carlo modeliavimas

Monte Carlo modeliavimas yra vienas dažniausiai naudojamų metodų rizikos analizėje, kadangi juo nesunkiai galima įvertinti paskolų rizikos koreliaciją. Šio metodo privalumai:

- Yra labai išsamus, nes įtraukiami visi galimi nuostolių įvykiai;
- Rezultatai parodo ne tik tai, kas gali nutikti, bet ir tai, kiek tikėtini yra visi galimi rezultatai.

Tarkime, turime n potencialių portfelio paskolų nuostolių $\tilde{L}_{PF}^{(1)}, \dots, \tilde{L}_{PF}^{(n)}$, kurie sudaryti atsižvelgiant į portfelio klientų nuostolių kintamuosius ir jų koreliacijas. Tuomet empirinė pasiskirstymo funkcija užrašoma taip

$$F(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{L}_{PF}^{(i)}).$$

Apsibrėžiame indikatoriaus funkciją

$$\mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{L}_{PF}^{(i)}) = \begin{cases} 1, & \tilde{L}_{PF}^{(i)} \leq x \\ 0, & \tilde{L}_{PF}^{(i)} > x \end{cases}.$$

α -lygmens kvantilį galime rasti iš mūsų modeliavimo rezultatų $\tilde{L}_{PF}^{(1)}, \dots, \tilde{L}_{PF}^{(n)}$ ir laikome, kad

$\tilde{L}_{PF}^{(i_1)} \leq \tilde{L}_{PF}^{(i_2)} \leq \dots \leq \tilde{L}_{PF}^{(i_n)}$, tuomet empirinio nuostolio pasiskirstymo α -kvantilis q_α yra

$$q_\alpha = \begin{cases} \alpha \tilde{L}_{PF}^{(i_{[n\alpha]})} + (1 - \alpha) \tilde{L}_{PF}^{(i_{[n\alpha]+1})}, & \text{kai } n\alpha \in \mathbb{N} \\ \alpha \tilde{L}_{PF}^{(i_{[n\alpha]})}, & \text{kai } n\alpha \notin \mathbb{N}, \end{cases}$$

čia $[n\alpha] = \min\{k \in \{1, \dots, n\} \mid n\alpha \leq k\}$. Tuomet ekonominis kapitalas gali būti apskaičiuojamas taip

$$EC_\alpha = q_\alpha - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{L}_{PF}^{(i)}.$$

Analogiškai, apskaičiuojant atitinkamo empirinio skirstinio rezultatus, galime gauti bet kokią kitą rizikos dydį.

4.2 Analizinė aproksimacija

Kitas būdas įvertinti portfelio nuostolių pasiskirstymą yra analizinė aproksimacija. Šis metodas yra paprastesnis ir greitesnis nei Monte Carlo metodas, tačiau taikomas rečiau, nes jis labiau tinka, kai portfelį sudaro panašios rizikos paskolos. Taikant šį metodą portfeliui su nežinomu nuostolių pasiskirstymu yra parenkamas žinomos ir panašios į pradinį portfelį formos skirstinys, apibūdinamas pirmos ir antros eilės momentais. Todėl darant prielaidą, kad paskolų rizikos būtų koreliuotos, svarbu įsivertinti pradinio portfelio tikėtinus ir netikėtinus nuostolius. Galiausiai turint šiuos duomenis, galima rasti skirstinio funkciją ir paskolų portfelio nuostolių kvantilį.

4.2.1 Beta skirstinys

Modeliuojant LGD rodiklį, galima daryti prielaidą (pagal Vytauto Valvonio disertaciją [5]), kad jis pasiskirstęs pagal beta skirstinį, kurio tankis yra

$$f(x; p, q) = \begin{cases} \frac{x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}}{\beta(p, q)}, & \text{kai } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{kitais atvejais} \end{cases} \quad (6)$$

čia $p, q > 0$, $\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ - beta funkcija, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ - gama funkcija.

Žinant, kad beta skirstinio funkcija yra išreiškiama

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

ir taikant integravimo dalimis metodą, gauname, kad gama funkcija lygi

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = (-t^{x-1} e^{-t}) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty (x-1) t^{x-2} e^{-t} dt = (x-1) \int_0^\infty t^{x-2} e^{-t} dt \\ &= (x-1) \Gamma(x-1),\end{aligned}$$

tuomet beta skirstinio vidurkj, naudojantis tankio funkcija (6), galime apskaičiuoti pagal šią formulę

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \int_0^1 x \cdot \frac{x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}}{\beta(p, q)} dx \\ &= \frac{1}{\beta(p, q)} \int_0^1 x^p \cdot (1-x)^{q-1} dx = \frac{1}{\beta(p, q)} \cdot \beta(p+1, q) \\ &= \frac{\Gamma(p+q) \Gamma(p+1) \Gamma(q)}{\Gamma(p) \Gamma(q) \Gamma(p+q+1)} = \frac{\Gamma(p+q) \Gamma(p) \cdot p}{\Gamma(p) \Gamma(p+q) \cdot (p+q)} = \frac{p}{p+q}.\end{aligned}$$

Taip pat galime rasti beta skirstinio dispersiją $\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 \frac{x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}}{\beta(p, q)} dx \\ &= \frac{1}{\beta(p, q)} \int_0^1 x^{(p+2)-1} (1-x)^{(q-1)} dx \\ &= \frac{1}{\beta(p, q)} \cdot \beta(p+2, q) = \frac{\Gamma(p+q) \Gamma(p+2) \Gamma(q)}{\Gamma(p) \Gamma(q) \Gamma(p+q+2)} \\ &= \frac{\Gamma(p+q) \Gamma(p+1) \cdot (p+1)}{\Gamma(p) \Gamma(p+q+1) \cdot (p+q+1)} \\ &= \frac{\Gamma(p+q) \Gamma(p) \cdot (p+1) \cdot p}{\Gamma(p) \Gamma(p+q) \cdot (p+q+1) \cdot (p+q)} \\ &= \frac{(p+1) \cdot p}{(p+q+1) \cdot (p+q)};\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X)^2 = \left(\frac{p}{p+q} \right)^2;$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(X) &= \frac{(p+1) \cdot p}{(p+q+1) \cdot (p+q)} - \left(\frac{p}{p+q} \right)^2 \\
&= \frac{(p+1) \cdot p}{(p+q+1) \cdot (p+q)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\
&= \frac{(p+q) \cdot p \cdot (p+q) - p^2(p+q+1)}{(p+q+1)(p+q)^2} \\
&= \frac{p^3 + p^2q + p^2 + pq - p^3 - p^2q - p^2}{(p+q+1)(p+q)^2} \\
&= \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)^2}.
\end{aligned}$$

Taikant tokius pačius skaičiavimo principus galima rasti k -tosios eilės momentą

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^k) &= \int_0^1 x^k f(x) dx = \int_0^1 x^k \frac{x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}}{\beta(p, q)} dx \\
&= \frac{1}{\beta(p, q)} \int_0^1 x^{(p+k)-1} (1-x)^{(q-1)} dx = \frac{1}{\beta(p, q)} \cdot \beta(p+k, q) \\
&= \frac{\Gamma(p+q) \Gamma(p+k) \Gamma(q)}{\Gamma(p) \Gamma(q) \Gamma(p+q+k)} \\
&= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \Gamma(q)} \cdot \frac{\Gamma(p) \cdot p \cdot (p+1) \cdot \dots \cdot (p+k-1)}{\Gamma(p+q) \cdot (p+q+1) \cdot \dots \cdot (p+q+k-1)} \\
&= \frac{p \cdot (p+1) \cdot \dots \cdot (p+k-1)}{(p+q) \cdot (p+q+1) \cdot \dots \cdot (p+q+k-1)} = \prod_{n=0}^{k-1} \frac{p+n}{p+q+n}.
\end{aligned}$$

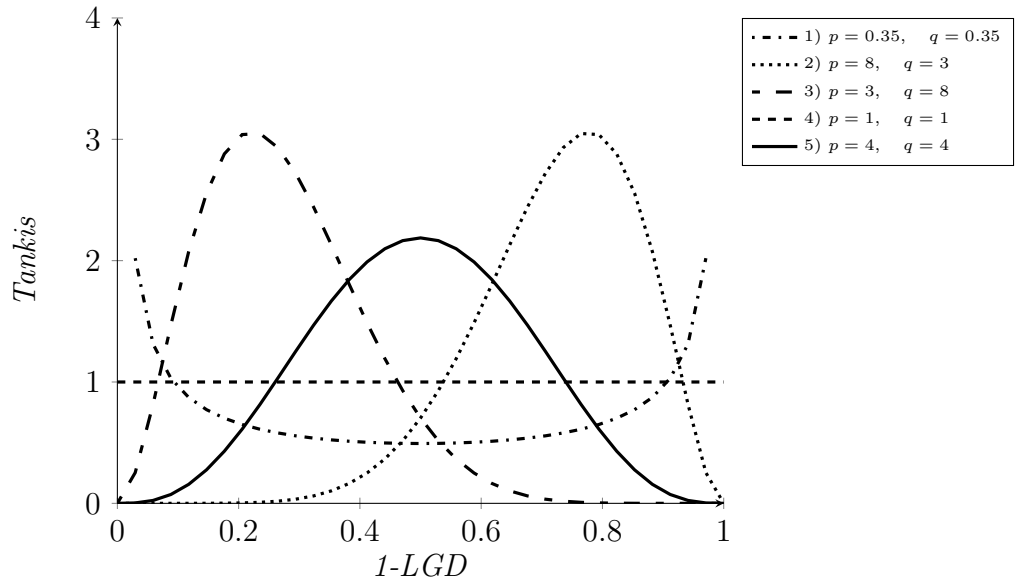
Praktinėje dalyje, norint įvertinti β skirstinį, naudosime parametrus p ir q , todėl sprendžiame lygčių sistemas parametų išraiškoms gauti.

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = \frac{p}{p+q} \\ \mathbb{D}(x) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} \end{cases} = \begin{cases} q = \frac{p(1-\mathbb{E}(X))}{\mathbb{E}(X)} \\ \mathbb{D}(x) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} \end{cases} = \begin{cases} q = \frac{p(1-\mathbb{E}(X))}{\mathbb{E}(X)} \\ \mathbb{D}(x) = \frac{p \frac{p(1-\mathbb{E}(X))}{\mathbb{E}(X)}}{(p + \frac{p(1-\mathbb{E}(X))}{\mathbb{E}(X)})^2 (p + \frac{p(1-\mathbb{E}(X))}{\mathbb{E}(X)} + 1)} \end{cases}.$$

Apibrėžiame naują kintamąjį $V = \frac{(1-\mathbb{E}(X))}{\mathbb{E}(X)}$.

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} q = pV \\ \mathbb{D}(x) = \frac{p^2 V}{(p+pV)^2(p+pV+1)} \end{cases} = \begin{cases} q = pV \\ \mathbb{D}(x) = \frac{V}{(1+V)^2(p+pV+1)} \end{cases} \\
& = \begin{cases} q = pV \\ V = \mathbb{D}(X)(V^3 p + 3V^2 p + V^2 + 3V p + 2V + p + 1) \end{cases} \\
& = \begin{cases} q = pV \\ \frac{V}{\mathbb{D}(X)} = p(V^3 + 3V^2 + 3V + 1) + (V^2 + 2V + 1) \end{cases} \tag{7} \\
& = \begin{cases} q = pV \\ \frac{V}{\mathbb{D}(X)} - (V^2 + 2V + 1) = p(V^3 + 3V^2 + 3V + 1) \end{cases} \\
& = \begin{cases} q = pV \\ p = \frac{V - \mathbb{D}(X)(V^2 + 2V + 1)}{\mathbb{D}(X)(V^3 + 3V^2 + 3V + 1)}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Žinant p ir q parametrų išraiškas galima išsinagrinėti, kokios yra dažniausiai pasitaikančios $\beta(p, q)$ formos.



3 pav. Beta skirstinių formos. Šaltinis: sudaryta autorių.

Kaip galima pastebėti iš 3 paveikslėlyje esančių beta skirstinių formų, tikimybės atgauti mažąją arba didžiąją negražinamos paskolos dalį gali sutapti, tai parodo 1 kreivė. Esant tokiai beta skirstinio formai, nėra prasmės skaičiuoti vidutinio LGD rodiklio. Didžiausia

galimybė yra atgauti mažąją arba priešingai – didžiąją dalį paskolos, kurias atvaizduoja 2 ir 3 kreivės atitinkamai. 4 kreivė parodo, kad bet kokio dydžio paskolą galima atgauti su vienoda tikimybe. 5 kreivė parodo, kad didžiausia tikimybė yra atgauti pusę paskolos sumos, o prarasti didžiąją arba mažąją paskolos dalį tikimybės yra ekvivalenčios.

5 LGD pasiskirstymo funkcijos modeliavimas

5.1 Praktinės dalies įvadas

Praktinės dalies tikslas yra, naudojant tam tikrą paskolų portfelį, įvertinti jo nuostolį dėl įsipareigojimų nevykdymo bei palyginti pasiskirstymą su beta skirstiniu. Tam naudojame internete viešai skelbiamus paskolų klubo duomenis apie suteiktas paskolas, kurių visi klientai dėl įvairių priežasčių tapo nemokūs. Turimo portfelio duomenys sudaryti iš tokios informacijos, kaip: paskolos suma, imamos paskolos tikslas, sumokėtos paskolos suma prieš tampant nemokiu ir atgautos paskolos suma, o trūkstamus rodiklius, tokius kaip: EAD, nuostolį ir LGD, apsiskaičiavome pritaikant reikiamas formules turimiems duomenims Microsoft Excel faile. Paskolų portfelį, kurį sudaro 9 967 paskolos, atvaizduojame 2 lentelėje pagal paskolos tipą.

Paskolos tipas	Paskolų skaičius	Paskolų skaičius, %	Paskolų suma	Paskolų suma, %	Nuostolių suma	Nuostolis nuo paskolų sumos, %
Turto paskola	994	10 %	109 484	9 %	6 277 230	57 %
Kredito kortelės	2 059	21 %	26 815 975	22 %	14 328 852	53 %
Vartojimo paskola	298	3 %	2 233 875	2 %	1 340 164	60 %
Skolos konsolidavimas	5 831	59 %	76 016 375	61 %	41 965 057	55 %
Kitos paskolos	785	8 %	8 387 650	7 %	5 354 786	64 %
Iš viso:	9 967	100 %	124 402 325	100 %	69 266 089	54 %

2 lentelė: Portfelio paskolų pasiskirstymas pagal paskolos tipą

Galima pastebėti, kad didžiausią portfelio dalį, tiek pagal paskolų skaičių, tiek pagal nuostolių sumą, sudaro skolos konsolidavimo paskolos. Tačiau procentaliai didžiausias patiriamas nuostolis nuo paskolų sumos tenka kitoms paskoloms: smulkiajam verslui, atsinaujinančiai energijai ir kt.

Yra svarbu atkreipti dėmesį, kokio dydžio paskolos sudaro turimą portfelį. Todėl jį suskirstome į keturis intervalus pagal paskolos dydį. Pasirinktame paskolų portfelyje turima mažiausia paskola yra 1 000 eurų, o didžiausia siekia 35 000 eurų. 3 lentelėje matome, kad paskolų skaičius yra beveik tolygiai pasiskirstęs intervaluose. Taip pat procentinis nuostolis

nuo paskolų sumos kiekviename intervale yra beveik vienodas, t. y. nepriklausomai nuo paskolų dydžio, prarandamos paskolų dalys yra panašios.

Paskolos dydis	Paskolų skaičius	Paskolų skaičius, %	Paskolų suma	EAD	Paskolų nuostoliai	Nuostolis nuo paskolų sumos, %
Iki 7,2 tūkst.	2 535	25,43 %	12 208 850	7 240 693	6 722 353	55 %
7,2 - 11 tūkst.	2 461	24,69 %	22 785 625	13 173 337	12 199 808	53 %
11 - 16,5 tūkst.	2 495	25,03 %	33 938 450	20 131 755	18 644 839	54 %
Virš 16,5 tūkst.	2 476	24,84 %	55 469 400	34 375 699	31 699 089	57 %
Iš viso:	9 967	100 %	124 402 325	74 921 484	69 266 089	55 %

3 lentelė: Portfelio paskolų pasiskirstymas pagal paskolos sumą

Norint įgyvendinti aukščiau minėtą praktinės dalies tikslą, pasirinktam portfeliui naudosime Monte Carlo metodą, kuriuo sugeneruosime visus galimus nuostolių dėl įsipareigojimo nevykdymo variantus. Gautus rezultatus atvaizduosime histogramoje, taip įvertinsime LGD pasiskirstymą ir patikrinsime, ar aukščiau (žr. 4.2.1 skyriuje) minėta prielaida apie LGD ir beta skirstinio atitikimą yra teisinga.

5.2 Paskolų portfelio poaibis

Kadangi turint daug duomenų yra gana sudėtinga atlikti įvairius skaičiavimus, susidarome poaibį iš mažiau paskolų, su kuriuo atliekame tolimesnius skaičiavimus ir vertinimus R programavimo kalba. Kad atrinktas paskolų poaibis pakankamai gerai atspindėtų pradinį portfelį yra svarbu atsižvelgti į tai, kad atrinktą poaibį sudarytų panašus procentas paskolų pagal paskolų dydžio intervalus ir pagal LGD intervalus. Atsitiktine tvarka atrenkame 20 paskolų iš sugrupuoto portfelio. Visa tai padarome realizuojant šią kodo dalį

```
set.seed(1)
poaibis <- Duomenys %>% group_by(amount_int) %>% group_by(LGD_int) %>%
sample_frac(0.002)
```

Sugeneruoto poaibio duomenys atvaizduojami 4 lentelėje. Pastebime, kad bendra poaibio nuostolio dalis nuo paskolos sumos išlieka tokia pati kaip ir pradinio portfelio - 55%.

Paskolos dydis	Paskolų skaičius	Paskolų skaičius, %	Paskolų suma	EAD	Paskolų nuostoliai	Nuostolis nuo paskolų sumos, %
Iki 7,2 tūkst.	5	25,00 %	23 950	13 012	12 038	50 %
7,2 - 11 tūkst.	5	25,00 %	50 475	26 860	26 550	53 %
11 - 16,5 tūkst.	5	25,00 %	62 900	28 754	26 745	43 %
Virš 16,5 tūkst.	5	25,00 %	121 325	88 219	76 877	63 %
Iš viso:	20	100 %	258 650	156 846	142 212	55 %

4 lentelė: Poaibio paskolų pasiskirstymas pagal paskolos sumą

Palyginus pradinio paskolų portfelio ir sugeneruoto paskolų poaibio procentines dalis pagal paskolų dydį ir LGD intervalus, matosi 5 ir 6 lentelėse, kad paklaidos yra nežymios. Galime pastebėti, kad poaibio paskolų skaičius, priklausantis kiekvienam intervalui, pagal paskolų dydį procentaliai yra vienodas, taip pat tos dalys beveik atitinka ir pradinį portfelį. Neatitikimas siekia tik 0,43%. Sekančioje lentelėje matome, kad poaibio paskolų skaičius, suskirstytas pagal LGD rodiklio intervalus, taip pat nežymiai skiriasi nuo portfelio. Šis skirtumas neviršija 0,79%. Iš to galima daryti išvadas, kad poaibis sudarytas ir atrinktas atsitiktiniu būdu teisingai, nes pasiskirstymas yra tolygus pagal pasirinktus grupių pjūvius.

Paskolos dydis	Portfelio paskolų skaičius, %	Poaibio paskolų skaičius, %	Neatitikimas, %
Iki 7,2 tūkst.	25,43 %	25,00 %	0,43 %
7,2 - 11 tūkst.	24,69 %	25,00 %	0,31 %
11 - 16,5 tūkst.	25,03 %	25,00 %	0,03 %
Virš 16,5 tūkst.	24,84 %	25,00 %	0,16 %

5 lentelė: Portfelio ir poaibio paskolų vertinimas pagal sumą

LGD	Portfelio paskolų skaičius, %	Poaibio paskolų skaičius, %	Neatitikimas, %
0 - 0,8	5,78 %	5,00 %	0,78 %
0,8 - 0,9	30,01 %	30,00%	0,01 %
0,9 - 1	64,21 %	65,00 %	0,79 %

6 lentelė: Paskolų portfelio ir poaibio neatitikimai pagal LGD

5.3 Poaibio LGD skirstinio modeliavimas

Turėdami mažesnį poaibį, sekančiais žingsniais atliekami skaičiavimai, reikalingi susidaryti multiaibės matricą iš visų galimų portfelių nuostolių. Pirmiausia, naudojantis tikimybių teorijos derinių formule $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, apskaičiuojame visus galimus variantus. Kadangi sudarinėjant multiaibę yra daroma prielaida, kad kiekvienos paskolos nuostolis gali būti lygus 0 arba lygus tos paskolos faktiškai patirtam nuostoliui, tai ieškant visų įmanomų nuostolių derinių yra įvertinama, koks gaunasi nuostolis, kai tik viena paskola nuostolinga, o likusios ne, kai dvi paskolos nuostolingos, o likusios ne ir taip skaičiuojama tol, kol visos paskolos tampa nuostolingomis.

```
paskolu_sk <- length(poaibis$loss_prncp)

galimi_var <- c()
for(i in 1:paskolu_sk){
  galimi_var = c(galimi_var, factorial(paskolu_sk)/(factorial(paskolu_sk-i)*
    factorial(i)))
}
portfeliu_sk <- sum(galimi_var)
```

Gauname, kad iš 20 paskolų galima iš viso sudaryti 1 048 575 portfelių su skirtingais nuostoliais. Tuomet žemiau pateiktas ciklas išrašo visus šių galimų portfelių variantus matricos pavidalu ir suskaičiuoja kiekvieno naujo portfelio bendrą nuostolį.

```
acc <- list()
for (i in 1:paskolu_sk) {
  c <- t(combn(poaibis$loss_prncp, i))
  zeros <- matrix(0, nrow = dim(c)[1], ncol = paskolu_sk - i)
  acc[[i]] <- cbind(c, zeros)
}
matrica <- do.call(rbind, acc)

nuost_suma <- data.frame(rowSums(matrica))
```

Toliau pereiname prie poaibio rodiklių vertinimų. Susikuriame LGD argumentų matricą, kurią sudaro elementai nuo 0 iki 1, bei apskaičiuojame bendrą EAD.

```
LGD_arg <- matrix(seq(0,1, 0.01), ncol=1)
EAD_poaibio <- sum(poaibis$loan_amount)-sum(poaibis$total_rec_prncp)
```

Poaibio EAD gavosi 156 845,68. Sekantis žingsnis - apskaičiuoti bendrą poaibio nuostolį dėl įsipareigojimo nevykdymo kiekvienai LGD reikšmei iš intervalo [0;1]. Tam pritaikysime teorinėje dalyje išreikštą formulę (1).

```
LGD_nuost <- c()
for (i in LGD_arg) {
  LGD_nuost = c(LGD_nuost, EAD_poaibio*i)
}
```

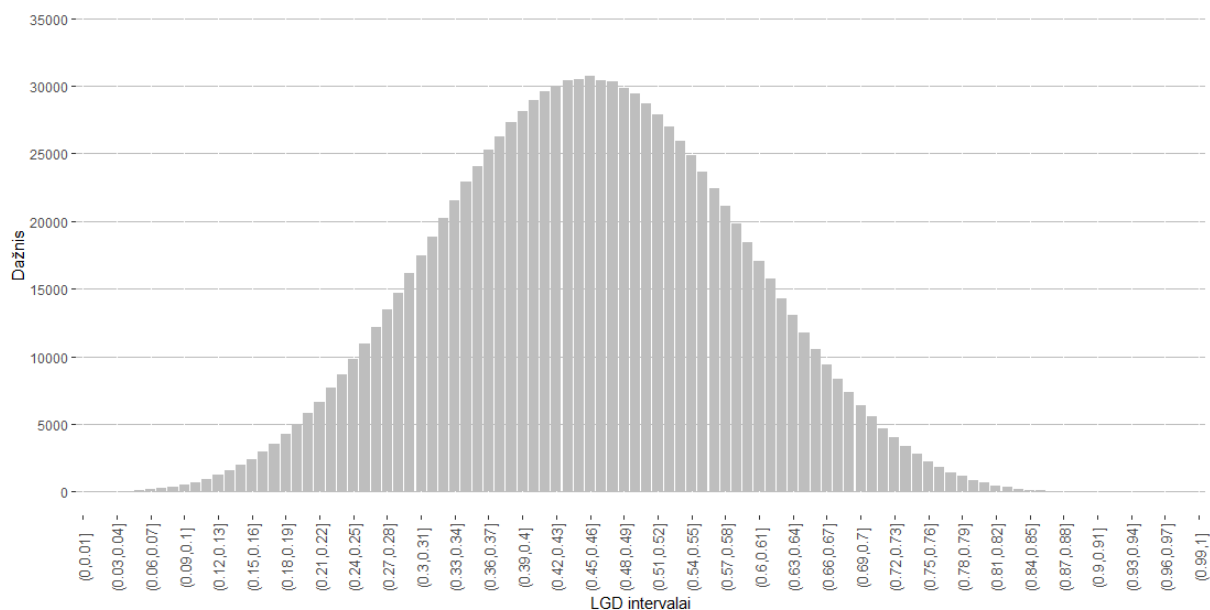
Turint LGD reikšmių intervalus, padalintus kas 0,01, ir imant kiekvieno intervalo dešiniąją ribą įvertinami atitinkami nuostoliai. Tuomet jie taip pat padalinami į atitinkamus intervalus ir sugretinami su LGD intervalų reikšmėmis. Gauti rezultatai pateikiami I priedo lentelėje. Žemiau pateiktame kode sudarome šią lentelę.

```
df1 <- data.frame(LGD_intervalai=c(as.vector(as.data.frame(summary(fdt
(as.numeric(LGD_arg), start=0, end=1, h=0.01, right=TRUE)))$'Class limits')),
Nuostoliu_inter=c(as.data.frame(summary(fdt(rowSums(matrica),
start=0, end=LGD[101], h=LGD[2])))$'Class limits'),
dazniai = c(as.data.frame(summary( fdt(rowSums(matrica),
start=0, end=LGD[101], h=LGD[2])))$f))
```

Turint sudarytą multiaibę, apskaičiuotus pagrindinius kredito rizikos rodiklius bei suskirstytus intervalus ir jų pasikartojimo dažnius galima nubraižyti histogramą.

```
ggplot(df1)+
geom_col(aes(x = lgd_intervalai, y = dazniai), fill = "grey")+
scale_y_continuous(breaks = seq(0, 35000, 5000), limits = c(0, 35000))+
theme(axis.text.x = element_text(angle = 90, size =10, hjust=0.5, vjust = 0.5),
panel.grid.major.y = element_line(colour = "grey"),
panel.background = element_rect(fill = "white"))+
labs(title = "", x = "LGD intervalai", y = "Dažnis")+
scale_x_discrete(breaks = lgd_inter1$'Class limits'[seq(1,
length(lgd_inter1$'Class limits'), by = 3)])
```

Histogramoje atsispindi, kad dažniausiai pasitaikantis nuostolis dėl įsipareigojimų nevykdymo yra ties intervalo viduriu, t. y. paprastai, atgaunama (arba prarandama) apie pusė paskolos sumos, o dažnis patirti labai didelį arba labai mažą nuostolį beveik sutampa.



4 pav. LGD pasiskirstymo histograma

Kitas žingsnis - patikrinti atitikimą tarp gautos histogramos ir betos skirstinio. Kad tai padaryti reikia apskaičiuoti pagrindinius daugiaibės parametrus - vidurkį ir dispersiją.

```
vidurkis <- (sum(daznis*LGD_vekt))/portfelio_sk
dispersija <- (sum((LGD_vekt - vidurkis)^2*daznis))/(portfelio_sk-1)
```

Gauti dydžiai - $E(X) \approx 0,45835$, $D(X) \approx 0,01713$ yra reikalingi įsivertinti beta skirstinio p , q parametrus pagal (7) sistemos išsireiškimą.

```
V <- (1 - vidurkis)/vidurkis
p <- (V - (dispersija*((V)^2+(2*V)+1)))/(dispersija*((V)^3+(3*(V)^2)+3*V+1))
q <- V*p
```

Turint beta skirstinį su atitinkamais parametrais $\beta(6, 1826, 7, 3062)$, galima apskaičiuoti kiekvieno intervalo beta reiškes. Skaičiavimams pasirinkta imti kiekvieno LGD intervalo dešiniąją ribą, apskaičiuotų reikšmių rezultatai atvaizduoti II priedo lentelėje. Žemiau pateiktame kode sudarome reikiamų duomenų lentelę.

```
df2 <- data.frame(LGD_intervalai=c(as.vector(as.data.frame(summary(fdt
(as.numeric(LGD_arg), start=0, end=1, h=0.01, right = TRUE)))$'Class limits')),
betos = c(dbeta((LGD_vekt), p, q)))
```

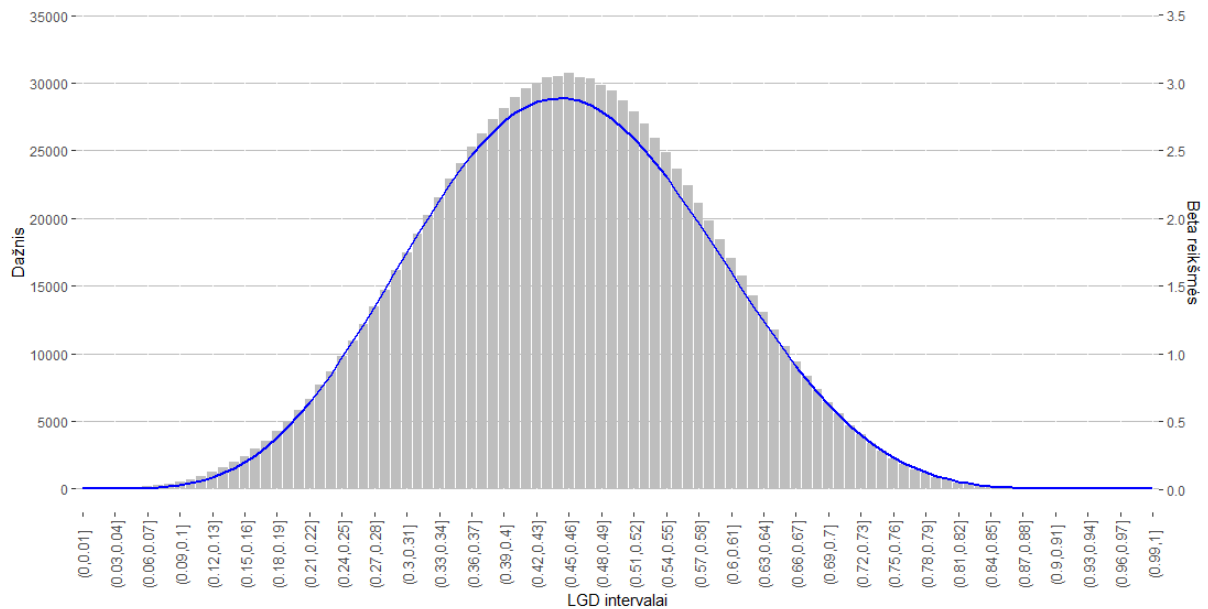
Iš susidarytos lentelės reikšmių nubraižomas beta skirstinio bei nuostolių dėl įsipareigojimų nevykdymo atitikimas.

```
beta <- dbeta((LGD_vekt), p, q)
```

```

ggplot()+
  geom_col(df1, aes(x = lgd_intervalai, y = dazniai), fill = "grey")+
  geom_line(df2, aes(x = lgd_intervalai, y = 10000 * betos), color = "blue",
    group = 1, size = 1)+
  scale_y_continuous(sec.axis = sec_axis(~./ 10000, name = "Beta reikšmės",
    breaks = seq(0,3.5, 0.5)), breaks = seq(0, 35000, 5000), limits = c(0, 35000))+
  theme(axis.text.x = element_text(angle = 90, size = 10, hjust = 0.5,
    vjust = 0.5))+
  labs(title = "", x = "LGD intervalai", y = "Dažnis")+
  scale_x_discrete(breaks = lgd_inter1$'Class limits'[seq(1,
    length(lgd_inter1$'Class limits'), by = 3)])

```



5 pav. Beta skirstinio ir LGD pasiskirstymo histogramos atitikimas

Iš šio grafiko akivaizdu, kad nuostolio nemokumo atveju histograma ir beta skirstinio atitikimas yra gana tikslus. Kadangi žinome poaibio faktinį patirtą nuostolį, galima įvertinti kokia yra jo tikimybė. Kad tai įvertinti, visų pirma, reikia apsiskaičiuoti viso poaibio LGD. Tam naudosime (1) formulę.

$$LGD_{poaibio} = \frac{142212}{156846} \approx 0,9067$$

Tikimybė patirti tokį nuostolį, koks atvaizduojamas poaibyje yra

$$\mathbb{P}(0,90 < X \leq 0,91) = \frac{2}{1048575} \approx 0,000001907.$$

Taip pat galima įsivertinti sudaryto poaibio tikėtinus nuostolius, naudojantis (2) formule.

Šiuo atveju laikysime, kad $PD = 0,05$

$$EL = \mathbb{E}(L) = \sum_{i=1}^{20} EAD_i \cdot LGD_i \cdot PD = 7110,58.$$

Taikant prielaidą, kad ekonomis kapitalas yra lygus netikėtiniems nuostoliams ir imant 95% reikšmingumo lygmenį bei naudojantis (5) formule, gauname, kad netikėtini nuostoliai yra lygūs

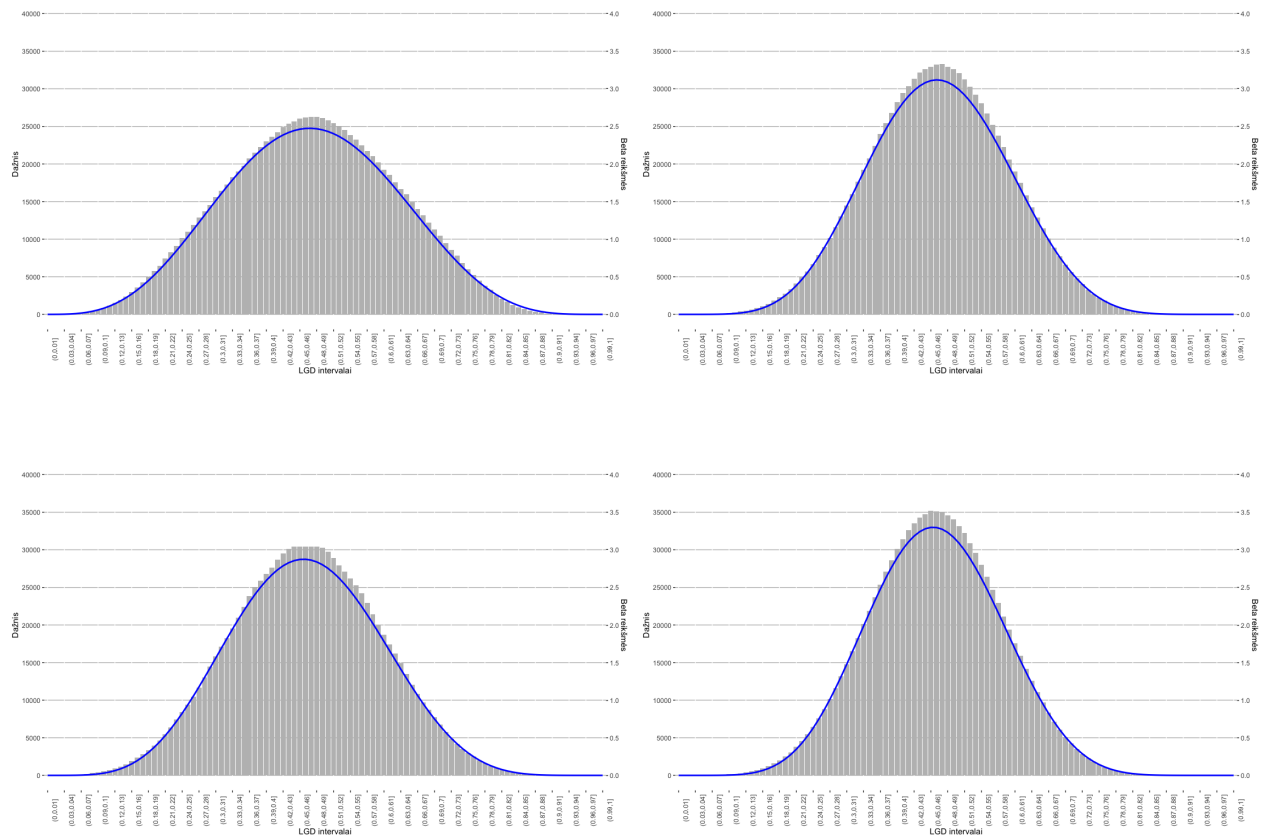
$$UL = EC_{0.95} = q_{0.95} - EL = 20108,96 - 7110,58 = 12998,38.$$

Galima pastebėti, kad paskolų klubas blogai įvertino nuostolių dydį, nes faktinis patirtas poaibio nuostolis yra apie 120 tūkst. didesnis, nei paskolų klubas įsivertino. Iš to galima daryti išvadas, kad tikimybė, patirti finansinei įstaigai numatytus nuostolius arba mažesnius, yra arti nulio, o tikimybė patirti didesnius nuostolius, nei buvo numatyta, yra arti vieneto

$$\mathbb{P}(X \leq 0,13) = \frac{4478}{1048575} = 0,00427,$$

$$\mathbb{P}(X > 0,13) = 1 - 0,00427 = 0,99573.$$

Kadangi sugeneruotas poaibis sudaro ganėtinai mažą portfelio dalį, svarbu įsitikinti, jog pagal atitinkamus kriterijus sugeneruotas poaibis gerai atspindi pradinį portfelį. Todėl sugeneruojame dar keletą atsitiktinių poaibių, kad galėtumėme patikrinti imties reprezentatyvumą. Taigi, iš 6 pav. matome, kad leidžiant kodą keleta kartų rezultatai gaunasi panašūs, t. y. beta skirstinys ir nuostolių dėl nemokumo pasiskirstymas yra beveik analogiški. Darome prielaidą, jog pasirinktas poaibio paskolų skaičius atspindi pradinį portfelį.



6 pav. Beta skirstinio ir LGD pasiskirstymo histogramos

Išvados

Šiame bakalauro baigiamajame darbe nagrinėjome paskolų portfelio nuostolį dėl kliento įsipareigojimų nevykdymo - vieną iš svarbiausių kredito rizikos vertinimo rodiklių. Aki-vaizdu, kad kiekviena finansinė įstaiga siekia apsisaugoti nuo galimų nuostolių, tačiau netinka-mai įvertinus klientų nemokumą ir neteisingai parinkus paskolos sąlygas galima patirti labai didelius nuostolius, dėl kurių gali grėsti žlugimas. Todėl kaip baigiamojo darbo tikslą išsikėlėme įvertinti pasirinkto paskolų portfelio nuostolį dėl įsipareigojimo nevykdymo.

Praktinėje dalyje naudojome paskolų portfelio duomenis, kurį sudarė 9 967 nuostolin-gos paskolos. Dėl didelio duomenų kiekio buvo atsitiktinai sugeneruotas mažesnis poaibis, kad atitiktų nustatytus kriterijus ir būtų ganėtinai panašus į pradinį portfelį. Šiuo atveju buvo atrinkta 20 paskolų, iš kurių buvo sudaryta multiaibė su visais galimais 1 048 575 nuostolių variantais. Kad nekiltų abejonių, jog 20 paskolų gali neatspindėti viso pradinio portfelio, darbo metu atlikome dar keletą atsitiktinių generavimų, kuriant poaibius ir tikri-nant atitikimus su beta skirstiniu. Buvo pastebėta, kad kriterijai yra parinkti geri ir poaibiai yra pakankamai reprezentatyvūs. Tuomet apskaičiavome nuostolius pagal LGD rodiklius ir atvaizdavome juos histogramoje, kurioje matosi, kad nuostoliai daugiausiai pasiskirstę ties viduriu, t. y. kai $LGD \approx 0,5$. Tolimesniais veiksmiais apsiskaičiavome LGD pasiskirstymo funkcijos vidurkį ir dispersiją bei susiradome beta skirstinį su parametrais $p = 6,1826$ ir $q = 7,3062$. Turint šiuos duomenis galėjome nusibraižyti beta skirstinį ir palyginti su LGD pasiskirstymo histograma, kurioje matosi, kad atitikimas yra pakankamai ryškus. Galiausiai apskaičiavus sugeneruoto poaibio LGD, buvo įvertinta tikimybė patirti tokį nuostolį, kokį ir patyrė atrinktas poaibis. Ši tikimybė gavosi labai maža, beveik lygi nuliui. Todėl buvo gal-ima tikėtis, kad finansinė įstaiga tikrai patirs didesnius nuostolius, nei apskaičiuota tikėtinų ir netikėtinų nuostolių suma. Iš to galima suprasti, kad paskolų portfelio nuostolio įvertinimas yra ganėtinai sudėtingas procesas, kurio metu yra sunku įvertinti kiek finansinė įstaiga turėtų sukaupti kapitalo, kad patyrus nuostolius dėl klientų nemokumo, galėtų išvengti sunkumų.

Literatūra

- [1] O. Antwi, A. C. Mensah, M. O. Amoamah, D. Joseph, Measuring Economic Capital Using Loss Distributions, International Journal of Economics, Finance and Management Sciences, January 2014.
- [2] C. Bluhm, L. Overbeck, and C. Wagner, An Introduction to Credit Risk Modeling, 2002 metai.
- [3] G. Gumbakytė, Nuostolių dėl įsipareigojimų neįvykdymo matematinis modeliavimas. Bakalauro baigiamasis darbas, 2017
- [4] N. Shirzadi, Credit risk modeling for multilateral lenders. PhD thesis, University of Glasgow, 2015.
- [5] V. Valvonis, Kredito rizikos vertinimo ir valdymo modelis: Lietuvos bankų praktika ir perspektyvos, Daktaro disertacija, 2008, p. 18-95.
- [6] Credit rating. Elektroninė enciklopedija, (2021, March 2).
https://en.wikipedia.org/wiki/Credit_rating
- [7] Internetinė duomenų bazių aplinka.
<https://www.kaggle.com/mrferozi/loan-data-for-dummy-bank>

Priedai

I Priedas

LGD intervalas	Nuostolių intervalas	Intervalo dažnis	LGD intervalas	Nuostolių intervalas	Intervalo dažnis
(0,0.01]	(0,1568.45]	1	(0.5,0.51]	(78422.84,79991.29]	28672
(0.01,0.02]	(1568.45,3136.91]	10	(0.51,0.52]	(79991.29,81559.75]	27885
(0.02,0.03]	(3136.91,4705.37]	19	(0.52,0.53]	(81559.75,83128.21]	27011
(0.03,0.04]	(4705.37,6273.82]	41	(0.53,0.54]	(83128.21,84696.66]	25930
(0.04,0.05]	(6273.82,7842.28]	69	(0.54,0.55]	(84696.66,86265.12]	24897
(0.05,0.06]	(7842.28,9410.74]	113	(0.55,0.56]	(86265.12,87833.58]	23654
(0.06,0.07]	(9410.74,10979.19]	173	(0.56,0.57]	(87833.58,89402.03]	22440
(0.07,0.08]	(10979.19,12547.65]	271	(0.57,0.58]	(89402.03,90970.49]	21120
(0.08,0.09]	(12547.65,14116.11]	371	(0.58,0.59]	(90970.49,92538.95]	19801
(0.09,0.1]	(14116.11,15684.56]	537	(0.59,0.6]	(92538.95,94107.40]	18440
(0.1,0.11]	(15684.56,17253.02]	697	(0.6,0.61]	(94107.40,95675.86]	17034
(0.11,0.12]	(17253.02,18821.48]	956	(0.61,0.62]	(95675.86,97244.32]	15729
(0.12,0.13]	(18821.48,20389.93]	1220	(0.62,0.63]	(97244.32,98812.77]	14326
(0.13,0.14]	(20389.93,21958.39]	1575	(0.63,0.64]	(98812.77,100381.23]	13061
(0.14,0.15]	(21958.39,23526.85]	1978	(0.64,0.65]	(100381.23,101949.69]	11774
(0.15,0.16]	(23526.85,25095.30]	2423	(0.65,0.66]	(101949.69,103518.14]	10577
(0.16,0.17]	(25095.30,26663.76]	2981	(0.66,0.67]	(103518.14,105086.60]	9416
(0.17,0.18]	(26663.76,28232.22]	3528	(0.67,0.68]	(105086.60,106655.06]	8309
(0.18,0.19]	(28232.22,29800.67]	4286	(0.68,0.69]	(106655.06,108223.51]	7342
(0.19,0.2]	(29800.67,31369.13]	4943	(0.69,0.7]	(108223.51,109791.97]	6356
(0.2,0.21]	(31369.13,32937.59]	5856	(0.7,0.71]	(109791.97,111360.43]	5548
(0.21,0.22]	(32937.59,34506.04]	6671	(0.71,0.72]	(111360.43,112928.89]	4711
(0.22,0.23]	(34506.04,36074.50]	7687	(0.72,0.73]	(112928.89,114497.34]	4038
(0.23,0.24]	(36074.50,37642.96]	8697	(0.73,0.74]	(114497.34,116065.80]	3354
(0.24,0.25]	(37642.96,39211.42]	9798	(0.74,0.75]	(116065.80,117634.26]	2813
(0.25,0.26]	(39211.42,40779.87]	10982	(0.75,0.76]	(117634.26,119202.71]	2253
(0.26,0.27]	(40779.87,42348.33]	12159	(0.76,0.77]	(119202.71,120771.17]	1868
(0.27,0.28]	(42348.33,43916.79]	13498	(0.77,0.78]	(120771.17,122339.63]	1436
(0.28,0.29]	(43916.79,45485.24]	14730	(0.78,0.79]	(122339.63,123908.08]	1150
(0.29,0.3]	(45485.24,47053.70]	16163	(0.79,0.8]	(123908.08,125476.54]	848
(0.3,0.31]	(47053.70,48622.16]	17472	(0.8,0.81]	(125476.54,127045.00]	652
(0.31,0.32]	(48622.16,50190.61]	18882	(0.81,0.82]	(127045.00,128613.45]	461
(0.32,0.33]	(50190.61,51759.07]	20227	(0.82,0.83]	(128613.45,130181.91]	338
(0.33,0.34]	(51759.07,53327.53]	21549	(0.83,0.84]	(130181.91,131750.37]	223
(0.34,0.35]	(53327.53,54895.98]	22881	(0.84,0.85]	(131750.37,133318.82]	152
(0.35,0.36]	(54895.98,56464.44]	24059	(0.85,0.86]	(133318.82,134887.28]	94
(0.36,0.37]	(56464.44,58032.90]	25306	(0.86,0.87]	(134887.28,136455.74]	59
(0.37,0.38]	(58032.90,59601.35]	26289	(0.87,0.88]	(136455.74,138024.19]	37
(0.38,0.39]	(59601.35,61169.81]	27324	(0.88,0.89]	(138024.19,139592.65]	15
(0.39,0.4]	(61169.81,62738.27]	28151	(0.89,0.9]	(139592.65,141161.11]	8
(0.4,0.41]	(62738.27,64306.72]	28915	(0.9,0.91]	(141161.11,142729.56]	2
(0.41,0.42]	(64306.72,65875.18]	29556	(0.91,0.92]	(142729.56,144298.02]	0
(0.42,0.43]	(65875.18,67443.64]	30009	(0.92,0.93]	(144298.02,145866.48]	0
(0.43,0.44]	(67443.64,69012.09]	30433	(0.93,0.94]	(145866.48,147434.93]	0
(0.44,0.45]	(69012.09,70580.55]	30502	(0.94,0.95]	(147434.93,149003.39]	0
(0.45,0.46]	(70580.55,72149.01]	30703	(0.95,0.96]	(149003.39,150571.85]	0
(0.46,0.47]	(72149.01,73717.46]	30449	(0.96,0.97]	(150571.85,152140.31]	0
(0.47,0.48]	(73717.46,75285.92]	30348	(0.97,0.98]	(152140.31,153708.76]	0
(0.48,0.49]	(75285.92,76854.38]	29845	(0.98,0.99]	(153708.76,155277.22]	0
(0.49,0.5]	(76854.38,78422.84]	29408	(0.99,1]	(155277.22,156845.68]	0

Priedai

II Priedas

LGD intervalo reikšmė	Beta skirstinio reikšmė	LGD intervalo reikšmė	Beta skirstinio reikšmė
(0,0.01]	3,18244E-07	(0.5,0.51]	2,668019433
(0.01,0.02]	1,08409E-05	(0.51,0.52]	2,59073594
(0.02,0.03]	8,30958E-05	(0.52,0.53]	2,504008618
(0.03,0.04]	0,000345701	(0.53,0.54]	2,408834587
(0.04,0.05]	0,001028645	(0.54,0.55]	2,306277292
(0.05,0.06]	0,002475401	(0.55,0.56]	2,197450409
(0.06,0.07]	0,005144108	(0.56,0.57]	2,083501401
(0.07,0.08]	0,009599502	(0.57,0.58]	1,965594991
(0.08,0.09]	0,016497495	(0.58,0.59]	1,844896804
(0.09,0.1]	0,02656418	(0.59,0.6]	1,722557443
(0.1,0.11]	0,040571007	(0.6,0.61]	1,599697217
(0.11,0.12]	0,059307658	(0.61,0.62]	1,477391784
(0.12,0.13]	0,083554003	(0.62,0.63]	1,356658881
(0.13,0.14]	0,114052347	(0.63,0.64]	1,238446362
(0.14,0.15]	0,15148094	(0.64,0.65]	1,123621692
(0.15,0.16]	0,196429626	(0.65,0.66]	1,012963051
(0.16,0.17]	0,249378245	(0.66,0.67]	0,907152152
(0.17,0.18]	0,310678322	(0.67,0.68]	0,806768863
(0.18,0.19]	0,380538377	(0.68,0.69]	0,712287684
(0.19,0.2]	0,459013084	(0.69,0.7]	0,6240761
(0.2,0.21]	0,545996374	(0.7,0.71]	0,542394806
(0.21,0.22]	0,641218467	(0.71,0.72]	0,467399741
(0.22,0.23]	0,744246752	(0.72,0.73]	0,399145879
(0.23,0.24]	0,854490301	(0.73,0.74]	0,337592646
(0.24,0.25]	0,97120779	(0.74,0.75]	0,282610846
(0.25,0.26]	1,093518518	(0.75,0.76]	0,233990904
(0.26,0.27]	1,220416161	(0.76,0.77]	0,191452257
(0.27,0.28]	1,350784885	(0.77,0.78]	0,154653665
(0.28,0.29]	1,483417414	(0.78,0.79]	0,123204199
(0.29,0.3]	1,617034625	(0.79,0.8]	0,09667468
(0.3,0.31]	1,750306247	(0.8,0.81]	0,07460927
(0.31,0.32]	1,881872236	(0.81,0.82]	0,056536984
(0.32,0.33]	2,010364415	(0.82,0.83]	0,041982828
(0.33,0.34]	2,134427979	(0.83,0.84]	0,03047831
(0.34,0.35]	2,252742486	(0.84,0.85]	0,021571077
(0.35,0.36]	2,364041981	(0.85,0.86]	0,014833439
(0.36,0.37]	2,467133932	(0.86,0.87]	0,009869575
(0.37,0.38]	2,560916698	(0.87,0.88]	0,006321263
(0.38,0.39]	2,644395257	(0.88,0.89]	0,00387198
(0.39,0.4]	2,716695	(0.89,0.9]	0,002249312
(0.4,0.41]	2,777073408	(0.9,0.91]	0,00122564
(0.41,0.42]	2,82492947	(0.91,0.92]	0,000617138
(0.42,0.43]	2,859810763	(0.92,0.93]	0,000281193
(0.43,0.44]	2,881418127	(0.93,0.94]	0,000112433
(0.44,0.45]	2,889607927	(0.94,0.95]	3,76164E-05
(0.45,0.46]	2,884391915	(0.95,0.96]	9,7232E-06
(0.46,0.47]	2,865934773	(0.96,0.97]	1,67202E-06
(0.47,0.48]	2,8345494	(0.97,0.98]	1,36727E-07
(0.48,0.49]	2,790690097	(0.98,0.99]	1,82113E-09
(0.49,0.5]	2,734943783	(0.99,1]	0