

VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS BAKALAURO STUDIJŲ
PROGRAMA

Bakalauro baigiamasis darbas

Lietuvos gyventojų struktūrinių pokyčių
prognozavimas

Forecasting Structural Changes in the Population of
Lithuania

Aistė Petrevičiūtė

Darbo vadovas: Asist. Dr. Aldona Skučaitė
(darbo vadovo pedagoginis vardas, vadovo vardas ir pavardė)

Vilnius, 2021

Lietuvos gyventojų struktūrinių pokyčių prognozavimas

Santrauka

Šiame darbe prognozuojami iki 2070 metų įvyksiantys Lietuvos gyventojų skaičiaus struktūriniai pokyčiai. Apžvelgiami faktoriai, lemiantys populiacijos skaičiaus ir struktūros pasikeitimus – gimstamumas, mirtingumas, migracija. Taip pat trumpai aprašomi ir praktikoje dažniausiai naudojami populiacijų kitimo metodai: prognozavimas, remiantis augimo modeliais, ir komponentų metodai. Atsižvelgiant į tai, kad projekcija konstruojama skirtingoms amžiaus grupėms ir atskirai moterims bei vyrams, taikyti pasirinkta Kohortos komponentų metodą, kuris atskirai nagrinėja gimstamumo, mirtingumo ir migracijos įtaką populiacijos dydžiui. Galimybė mirti ir emigruoti interpretuojama ir kaip dvi pasitraukimo priežastys nagrinėjamoje aplinkoje. Apžvelgiama gauta Lietuvos gyventojų skaičiaus ir struktūros prognozė, kurios rezultatai pavaizduojami braižant populiacijų piramides ir palyginami su Europos Sąjungos statistikos tarnybos pateiktomis prognozėmis.

Raktiniai žodžiai: populiacija, gimstamumas, mirtingumas, migracija, Kohortos komponentų metodas, vienos pasitraukimo priežasties aplinka, dviejų pasitraukimo priežasčių aplinka.

Forecasting Structural Changes in the Population of Lithuania

Abstract

In this work structural changes in the population of Lithuania by 2070 are predicted. Factors that affect population change – fertility, mortality, migration – are reviewed. The methods most commonly used in practice for population change are also briefly described: forecasting based on growth models and component methods. Given that the projection is constructed for different age groups and separately for women and men, the Cohort component method was chosen. It separately estimates the influence of births, deaths and migration. The possibility of dying and emigrating is also interpreted as double-decrement environment. The obtained forecast of the number and structure of the Lithuanian population is reviewed. The results are depicted by drawing population pyramids and compared with the forecasts provided by the statistical office of the European Union.

Key words: population, fertility, mortality, migration, Cohort Component Method, single-decrement environment, double-decrement environment.

Turinys

1	Įvadas	3
2	Faktoriai, lemiantys populiacijos skaičiaus ir struktūros pokyčius	4
3	Populiacijų kitimo modeliai	7
4	Lietuvos gyventojų skaičiaus ir struktūrinių pokyčių prognozavimas	9
4.1	Kohortos komponentų metodas	9
4.2	Vienos ir dviejų pasitraukimo iš populiacijos priežasčių aplinka	10
4.3	Kohortos komponentų metodo pritaikymas Lietuvos gyventojų prognozavimui	13
4.4	CCM komponentų – likusių gyvų pradinės kohortos gyventojų skaičiaus, gimusiųjų ir migrantų – vertinimas	14
5	Lietuvos gyventojų skaičiaus ateities projekcija	16
5.1	Rezultatai ir išvados	16
5.2	Struktūriniai pokyčiai	18
6	Literatūra	20
A	Priedai	22
A.1	(1) lygybės išvedimas iš Verhulst'o logistinės lygties	22
A.2	Lietuvos gyventojų skaičiaus prognozių pagal lytį ir amžiaus grupę pilnos lentelės	23
A.3	(12) lygybės išvedimas	24
A.4	RStudio kodai	25

1 Įvadas

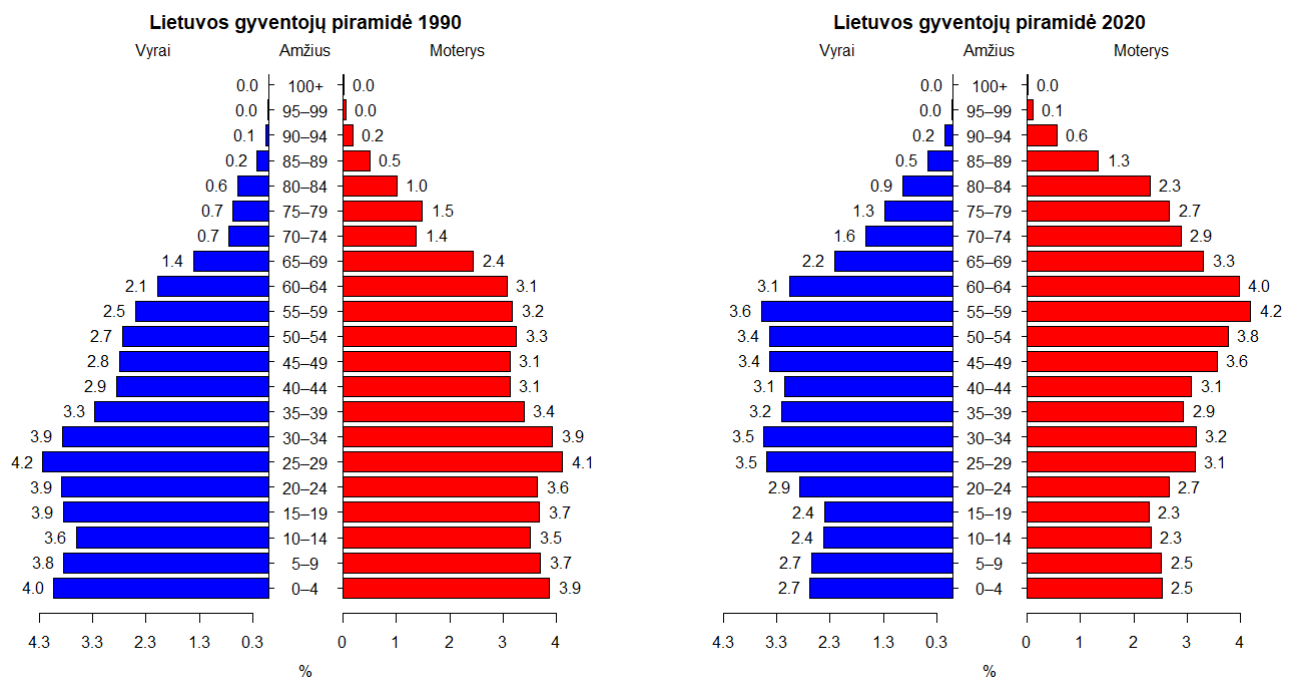
Gyventojų skaičiaus Lietuvoje mažėjimas – vienas sparčiausių pasaulyje, bet tai nėra vienintelis nerimą keliantis demografinis aspektas. Nemažai klausimų kelia ir valstybės mastu vykstantys struktūriniai pokyčiai pagal amžiaus grupes. Žinoma, kad kūdikių kasmet gimsta vis mažiau, o gyventojų senėjimo procesas vis ilgėja. Taip pat gerėjant medicinos paslaugų, medikamentų prieinamumui, mažėja nuo sunkių ligų mirstančių žmonių. Daugumai jau dabar kyla klausimas, ar šios tendencijos tęsis ir ateityje, ar Lietuvai, pavyzdžiui, nereikės keisti senatvės pensijų sistemos, steigti daugiau darželių ar mokyklų, kurti daugiau darbo vietų.

Šio darbo tikslas – sukonstruoti Lietuvos gyventojų skaičiaus projekciją iki 2070 metų pagal amžiaus grupes ir lytį, kuri leistų nuspėti, kokie struktūriniai pokyčiai Lietuvos laukia ateityje. Prognozavimui pasirinkta remtis Kohortos komponentų metodu, kuris analizuoja pagrindinius populiacijos skaičiaus kitimo faktorius – gimstamumą, mirtingumą, migraciją – atskirai.

Darbo pagrindinę dalį sudaro šie skyriai: 3 skyriuje apžvelgiami faktoriai, lemiantys populiacijos skaičiaus ir struktūros kitimą, 4 skyriuje trumpai aprašomi dažniausiai naudojami populiacijų kitimo modeliai, 5 skyriuje, naudojant Kohortos komponentų metodą ir išgyvenamumo įverčių teoriją, sukonstruojama Lietuvos gyventojų skaičiaus projekcija pagal lytį ir amžiaus grupes, 6 skyriuje trumpai apžvelgiami gauti rezultatai.

2 Faktoriai, lemiantys populiacijos skaičiaus ir struktūros pokyčius

Remiantis Europos Sąjungos statistikos tarnybos pateiktais duomenimis, 1990 metais Lietuvoje gyventojų skaičius siekė 3 693 708, 2000 metais – 3 512 074, 2010 metais – 3 141 976, o praėjusiais, 2020 metais, užfiksuota 2 794 090 Lietuvoje gyvenančių žmonių [11]. Be to, remiantis tais pačiais duomenimis, 1990 metais nepilnamečių asmenų skaičius sudarė apytikriai 27 % valstybės gyventojų, o 2020 metais ~ 18 % [11]. Struktūrinis Lietuvos gyventojų pokytis nuo 1990 iki 2020 metų vaizduojamas 1 paveiksle.



1 pav.: Gyventojų Lietuvoje 1990 ir 2020 metais piramidės. Parengta: darbo autorės pagal [12].

Galima teigti, kad populiacijos dydis ir struktūra laikui bėgant keičiasi. Vieni žmonės gimsta, kiti – miršta, o kai kurie nusprendžia išvykti iš savo gimtinės, kai tuo tarpu į ją atvyksta ir kiti iš svetimos šalies.

Apibrėžkime pagrindinius populiacijos kitimo faktorius: gimstamumą, mirtingumą ir migraciją.

Gimstamumas yra demografinis rodiklis, kuris nusako, kiek gyvų gimusių kūdikių per metus tenka tūkstančiui gyventojų tam tikroje teritorijoje [10]. Šis rodiklis yra priklausomas ne tik nuo biologinių veiksnių, bet ir nuo socialinės aplinkos (išsilavinimo, kultūros, tradicijų, socialinės apsaugos sistemos), kuri formuoja žmonių mąstymą ir apsisprendimą, kiek ir kada nori turėti vaikų, jei tai yra jų planuose [4].

Skirtinguose regionuose ar valstybėse gimstamumo rodikliai būtent dėl paminėtų socialinių

priežasčių ganėtinai skiriasi. Pavyzdžiui, 2015–2020 metais Europoje TFR – vidutinis gimusių kūdikių skaičius, tenkantis vidutiniškai vienai moteriai per jos gyvenimą (angl. *Total Fertility Rate*) – buvo 1.66, o Centrinėje ir Pietinėje Azijoje siekė 2.41 [3].

Remiantis TFR , kiekvieną valstybę galima priskirti vienai iš žemiau nurodytų gimstamumo fazių [3]:

1. Aukštas gimstamumas, kai $TFR > 5.5$;
2. Pereinamasis periodas, kai $2.1 \leq TFR \leq 5.5$;
3. Žemas gimstamumas, kai $TFR < 2.1$.

Mirtingumas – demografinis rodiklis, aprašantis dėl įvairių priežasčių įvykstančias žmonių mirtis. Formuluojuama, kad mirtis yra negrįžtama žmogaus organizmo, kaip visumos, žūtis [6]. Mirtingumas yra stipriai priklausomas ne tik nuo biologinių veiksnių, amžiaus, lyties, genetikos, bet ir nuo, pavyzdžiui, gyvenamosios vietos (žmogaus sveikatai įtaką daro klimatas, oro užterštumas) ar socialinės padėties (išsilavinimo, finansinio užtikrinimo, gerinančio medicinos įstaigų ar medikamentų prieinamumą) [4].

Remiantis Lietuvos statistikos departamento pateikiamais duomenimis, dažniausiai pasitaikančios mirties priežastys Lietuvoje yra kraujotakos sistemos ligos, piktybiniai navikai ir išorinės mirties priežastys [11].

Įtaką mirtingumui daro ir netikėti įvykiai, tokie kaip karai, krizės ar pandemijos. Pavyzdžiui, 2019 metais visas pasaulis ir Lietuva susidūrė su COVID-19. Nauja kvėpavimo takų liga išplito pasauliniu mastu ir netrukus paskelbta pandemija [14]. COVID-19 sukelti padariniai apima ir padidėjusį mirtingumą. Lietuvoje per metus nuo pirmojo paskelbto karantino pradžios būtent dėl šios ligos mirė mažiausiai 3 000 žmonių [9]. Tiesa, vis dar nėra aišku per kiek laiko Lietuva susidoros su šia užkrečiama liga, todėl darbe nuspręsta COVID-19 padarinius eliminuoti. Panašaus principo (neatsižvelgti į COVID-19) laikomasi ir Tarptautinės aktuarių asociacijos (*International Actuarial Association, IAA*) pasaulio populiacijos projekcijose [3]. Tariau, kad ši liga yra trumpalaikė ir nagrinėjamu laikotarpiu daugiau tokių neatsiras. Darant šią prielaidą atsižvelgiama ir į tai, kad yra sukurtos net kelios vakcinos ir žmonės visame pasaulyje šiuo metu yra skiepijami [14].

Migracija demografijoje apibrėžiama kaip individo persikėlimas gyventi iš vienos vietovės į kitą. Kai kalbama apie migraciją viso pasaulio lygiu, šis terminas yra nereikšmingas, bet kai kalbama apie valstybes, regionus, vietas, kurios yra atviros, t. y. iš jų galima išvykti ar atvykti, migracija pasidaro itin svarbi. Kadangi judėti galima į šalį ir iš jos, šiame darbe vartosime atitinkamai du terminus: imigraciją ir emigraciją [2].

Norint sužinoti, kokios yra migracijos pasekmės valstybėje, t. y. ar valstybės gyventojų

skaičius dėl migracijos didėja ar mažėja, skaičiuojamas grynosios migracijos balansas – imigrantų ir emigrantų skaičiaus skirtumas per kalendorinius metus [4].

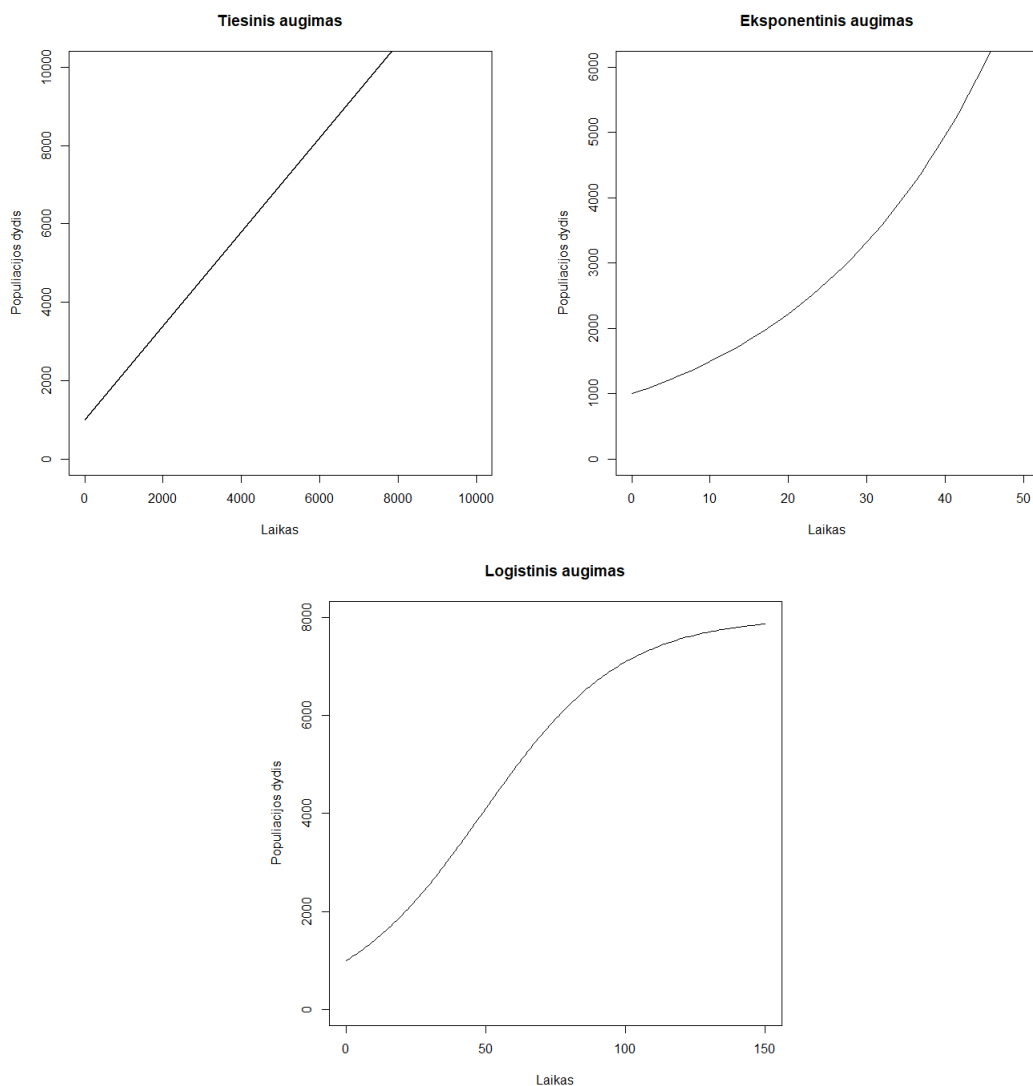
3 Populiacijų kitimo modeliai

Istoriniai duomenys apie gyventojų skaičių, struktūrą ar kitus svarbius rodiklius pasaulyje, tam tikroje valstybėje ar regione yra gana lengvai prieinami. Kur kas sudėtingiau nustatyti, kaip atrodys visi šie skaičiai ateityje. Nepaisant to, kad tiksliai nuspėti gyventojų skaičių po dešimties, penkiasdešimties ar šimto metų nėra itin realu, yra tikrai nemažai modelių ir metodų sukonstruoti apytikres demografines projekcijas.

Praktikoje dažniausiai naudojami du būdai: [4]

1. Prognozavimas, remiantis populiacijos augimo modeliais;
2. Komponentų metodai, kurie aprašomi 4.1 skyriuje.

Populiacijos augimo modelius galima išskirti į tiesinius, eksponentinius ir logistinius. Visi šie modeliai pavaizduoti 2 paveiksle.



2 pav.: Populiacijos kitimo modeliai. Parengta: darbo autorės.

Kai remiamasi populiacijos augimo modeliais, atsižvelgiama į populiacijos pokytį per

metus, kuris gali būti [5]:

1. Absoliutus, kuris apskaičiuojamas remiantis formule:

$$\Delta P_{t,1} = P_{t+1} - P_t,$$

kur P_t – populiacijos dydis momentu t ;

2. Santykinis, kuris apskaičiuojamas taip:

$$r_{t,1} = \frac{\Delta P_{t,1}}{P_t}.$$

Tiesinio augimo modelio atveju absoliutus populiacijos pokytis per metus yra pastovus, eksponentinio augimo modelio atveju atitinkamai pastovus yra santykinis populiacijos pokytis [5]. Pirmieji du augimo modeliai praktikoje nėra labai tinkami, nes modeliuose neįtraukti populiacijos augimą stabdantys veiksniai.

Tinkamesnis žmonių populiacijos kitimui aprašyti yra logistinis modelis, kuris aprašo situaciją, kad iš pradžių tiriamuoju laikotarpiu populiacijos augimas yra spartus, vėliau sulėtėja ir galiausiai pasiekia maksimalų dydį, kurio neviršija [4], [13].

Populiacijos dydį momentu t (P_t) galima rasti pasinaudojus žemiau nurodyta lygybe [13]:

$$P_t = \frac{K P_0}{(K - P_0)e^{-Rt} + P_0}, \quad (1)$$

$R = \ln(1 + r)$, kur r – santykinis populiacijos pokytis per metus;

$K > 0$ – maksimalus populiacijos dydis.

Ši lygybė gaunama išsprendus diferencialinę lygtį, kuri dar vadinama Verhulst'o logistine lygtimi (angl. *Verhulst logistic equation*)[13]:

$$\frac{dP_t}{dt} = RP_t \left(1 - \frac{P_t}{K}\right). \quad (2)$$

(1) lygybės išvedimas iš (2) Verhulst'o logistinės lygties pateikiamas A.1 priede.

4 Lietuvos gyventojų skaičiaus ir struktūrinių pokyčių prognozavimas

Vienas iš šio darbo tikslų, kaip ir minėta įvade, yra sukonstruoti Lietuvos gyventojų skaičiaus projekciją, atsižvelgiant į gyventojų lytį ir amžių, todėl prognozavimui pasirinkta naudoti Kohortos komponentų metodą, kurį šiame darbe dar vadinsime CCM (angl. *Cohort Component Method*).

4.1 Kohortos komponentų metodas

Kohortos komponentų metodas yra vienas iš plačiai naudojamų populiacijos projekcijų konstravimo metodų. Šios metodikos išskirtinumas yra tas, kad patogiu prognozuoti ne tik bendrą gyventojų skaičių ateityje, bet suskirstant populiaciją į kohortas pagal amžių (įprastai naudojamos 5 metų amžiaus grupės) ar lytį, sukonstruoti projekcijas ir tam tikrai populiacijos grupei [8].

CCM vadinamas komponentų metodu dėl to, kad konstruojant ateities projekcijas, atskirai nagrinėjami trys populiacijos kitimo komponentai: gimstamumas, mirtingumas ir migracija [4].

Nors migracijai įtaką daro daug jau 2 skyriuje minėtų veiksnių ir nėra paprasta nuspėti, koks bus judėjimas tarp valstybių ateityje, tose valstybėse, kuriose gryniosios migracijos balansas gerokai atitolęs nuo nulio, konstruojant ateities projekcijas, dažnai pasirenkama į migraciją atsižvelgti. Tuomet populiacijos dydį momentu $t > 0$ galėtume apskaičiuoti remiantis šia lygybe [8]:

$$P_t = P_0 + G - M + I - E, \quad (3)$$

P_0 – populiacijos dydis pradiniu momentu 0;

G – gimusiųjų skaičius laikotarpiu nuo 0 iki t ;

M – mirusiųjų skaičius laikotarpiu nuo 0 iki t ;

I – imigrantų skaičius laikotarpiu nuo 0 iki t ;

E – emigrantų skaičius laikotarpiu nuo 0 iki t .

Pats paprasčiausias Kohortos komponentų metodo pritaikymo būdas vadinamas kohortų išlikimo metodu, kurį naudojant remiamasi prielaida, kad gryniosios migracijos balansas lygus nuliui, t. y. imigrantų ir emigrantų skaičiai yra lygūs. Tokiu atveju populiacijos dydį domintinu momentu $t > 0$ būtų galima apskaičiuoti remiantis šia lygybe [4]:

$$P_t = P_0 + G - M. \quad (4)$$

Atkreipiamas dėmesys, kad (3) ir (4) lygybės tenkinamos ir tada, kai populiacijos dydis skaičiuojamas atskirai tam tikro amžiaus grupėms, nebūtinai tik bendram populiacijos dydžiui.

4.2 Vienos ir dviejų pasitraukimo iš populiacijos priežasčių aplinka

Poskyris parengtas pagal [7].

CCM pritaikymui svarbi išgyvenamumo įverčių teorija, kurios svarbiausi teiginiai pateikiami šiame poskyryje.

Kai iš kohortos pasitraukti galima tik dėl mirties, sakome, kad stebimoje aplinkoje egzistuoja viena pasitraukimo priežastis (angl. *single-decrement environment*). Žemiau aprašomi įverčiai vienos pasitraukimo priežasties aplinkoje.

Sakykime, kad X – atsitiktinis dydis, nurodantis amžių mirties momentu. Šio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija yra $F(x)$:

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Taip pat tarkime, kad tam tikras asmuo gimsta amžiaus $x = 0$. Tikimybę, kad asmuo vis dar bus gyvas amžiaus x žymėsime $S(x)$:

$$S(x) = P(X > x).$$

Mirtingumo lentelė – vienas iš demografinių metodų, padedančių nagrinėti mirtingumo rodiklius. Nors ir mirtingumo lentelės buvo sukurtos anksčiau nei išgyvenamumo modelių teorija, jas galima susieti.

Tarkime, kad l_0 mirtingumo lentelėje žymi pradinį kohortos dydį (pavyzdžiui, 100 000). Taip pat lentelėje pateikiamas ir dydis l_x – asmenų iš pradinės kohortos, sulaukusių x -ojo gimtadienio, skaičius. l_x padalijus iš l_0 gaunama $S(x)$ – tikimybė, kad asmuo iš pradinės kohortos sulauks amžiaus x . Tuomet mirtingumo lentelėse randamus dydžius l_x , l_0 ir išgyvenamumo teorijoje nagrinėjamą $S(x)$ galima susieti tokiu sąryšiu:

$$l_x = l_0 \cdot S(x).$$

$S(x)$ yra tikimybė išgyventi, todėl l_x dar galime laikyti lauktinu asmenų iš pradinės kohortos, išgyvenusių iki amžiaus x , skaičiumi.

Mirusių tarp amžiaus x ir $x+1$ žmonių skaičius žymimas d_x ir apskaičiuojamas naudojantis tokia formule:

$$d_x = l_x - l_{x+1}.$$

Bendresniu atveju, ${}_n d_x$ žymi asmenų skaičių, kurie mirs tarp amžiaus x ir $x+n$, ir yra apskaičiuojamas tokiu būdu:

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n}.$$

Tikimybę, kad x -metis sulauks $x+1$ -ių metų žymėsime p_x ir apskaičiuosime naudodamiesi formule:

$$p_x = 1 - q_x = 1 - \frac{d_x}{l_x} = 1 - \frac{(l_x - l_{x+1})}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x},$$

kur q_x – tikimybė, kad amžiaus x asmuo mirs iki kito gimtadienio.

Bendresniu atveju, ${}_n p_x$ žymi tikimybę, kad x metų individas sulauks $x+n$ -ojo gimtadienio. Ši tikimybė apskaičiuojama remiantis tokia formule:

$${}_n p_x = 1 - {}_n q_x = 1 - \frac{{}_n d_x}{l_x} = 1 - \frac{(l_x - l_{x+n})}{l_x} = \frac{l_{x+n}}{l_x},$$

kur ${}_n q_x$ – tikimybė, kad amžiaus x asmuo mirs iki n -ojo gimtadienio.

Tam tikrais atvejais praverčia dydis μ_x , kurį vadiname mirtingumo galia, esant amžiaus x , ir apibrėžiame taip:

$$\mu_x = \frac{-\frac{d}{dx} S(x)}{S(x)} = -\frac{d}{dx} \ln S(x).$$

Kai kuriais atvejais stebimoje aplinkoje egzistuoja dvi pasitraukimo priežastys (angl. *double-decrement environment*), todėl išskirkime šias tikimybes:

${}_t p_x^{(d)}$ – tikimybė, kad amžiaus x asmuo nemirs iki $(x+t)$ -ojo gimtadienio;

${}_t p_x^{(w)}$ – tikimybė, kad amžiaus x asmuo nepasitrauks iš kohortos dėl kitos priežastis nei mirtis iki $(x+t)$ -ojo gimtadienio;

$q_x^{(d)}$ – tikimybė, kad amžiaus x asmuo mirs iki kito gimtadienio (analogiškai kaip ir tikimybės q_x atveju).

$q_x^{(w)}$ – tikimybė, kad amžiaus x asmuo pasitrauks iš kohortos dėl kitos priežastis nei mirtis iki kito gimtadienio.

Su tikimybėmis ${}_t p_x^{(d)}$, $q_x^{(d)}$ susijusi ir mirtingumo galia $\mu_{x+t}^{(d)}$. Atsižvelgiant į tai, kad pasitraukimas iš kohortos (nutraukimas) taip pat yra atsitiktinis dydis, $\mu_{x+t}^{(w)}$ laikysime nutraukimo galia. Tuomet:

$${}_t p_x^{(d)} = \exp \left[-\int_0^t \mu_{x+s}^{(d)} ds \right], \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
q_x^{(d)} &= 1 - \exp\left[-\int_0^1 \mu_{x+s}^{(d)} ds\right], \\
{}_t p_x^{(w)} &= \exp\left[-\int_0^t \mu_{x+s}^{(w)} ds\right], \\
q_x^{(w)} &= 1 - \exp\left[-\int_0^1 \mu_{x+s}^{(w)} ds\right].
\end{aligned} \tag{6}$$

Jei mirtis ir nutraukimas įvyksta nepriklausomai vienas nuo kito, tai apibrėšime ${}_t p_x^{(\tau)}$ – tikimybę, kad amžiaus x asmuo iki $(x+t)$ -ojo gimtadienio nemirs ir nepasitrauks iš kohortos. ${}_t p_x^{(\tau)}$ galima apskaičiuoti pasinaudojus žemiau nurodyta lygybe:

$${}_t p_x^{(\tau)} = {}_t p_x^{(d)} \cdot {}_t p_x^{(w)}. \tag{7}$$

Sakykime, kad $q_x^{(d)}$ ir $q_x^{(w)}$ yra tikimybės amžiaus x asmeniui mirti arba atitinkamai pasitraukti iš nagrinėjamos kohortos per metus, kai joje egzistuoja dviejų pasitraukimo priežasčių aplinka. Tuomet:

$$q_x^{(d)} = \int_0^1 {}_u p_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+u}^{(d)} du.$$

Kadangi

$${}_u p_x^{(\tau)} = {}_u p_x^{(d)} \cdot {}_u p_x^{(w)} = (1 - {}_u q_x^{(d)}) \cdot (1 - {}_u q_x^{(w)}),$$

tai

$$q_x^{(d)} = \int_0^1 (1 - {}_u q_x^{(d)}) \cdot (1 - {}_u q_x^{(w)}) \cdot \mu_{x+u}^{(d)} du.$$

Atitinkamai ir

$$q_x^{(w)} = \int_0^1 (1 - {}_u q_x^{(d)}) \cdot (1 - {}_u q_x^{(w)}) \cdot \mu_{x+u}^{(w)} du.$$

Darysime prielaidą, kad ir mirtys ir nutraukimai amžiaus intervale $(x, x+1]$ pasiskirstę tolygiai, o tai leidžia teigti, kad:

$${}_s q_x^{(d)} = s \cdot q_x^{(d)} \tag{8}$$

ir

$${}_s q_x^{(w)} = s \cdot q_x^{(w)}. \tag{9}$$

Mirtingumo ir nutraukimo galios tuomet atrodo taip:

$$\mu_{x+s}^{(d)} = \frac{q_x^{(d)}}{1 - s \cdot q_x^{(d)}}, \tag{10}$$

$$\mu_{x+s}^{(w)} = \frac{q_x^{(w)}}{1 - s \cdot q_x^{(w)}}. \quad (11)$$

I (7) įstačius (5), (6) ir pasinaudojus (10), (11) gauname (išvedimas pateikiamas A.3 priede):

$${}_t p_x^{(\tau)} = \left(q_x^{(d)} \cdot t - 1 \right) \cdot \left(q_x^{(w)} \cdot t - 1 \right). \quad (12)$$

Nagrinėjant dviejų pasitraukimo iš populiacijos priežasčių aplinką, galima taikyti tą patį CCM modelį, tik jį tuomet patogiau performuluoti taip:

$$P_t = (P_0 - M - E) + G + I,$$

$(P_0 - M - E)$ – populiacijos dydis, išskaičiavus mirtis ir išvykusius (emigravusius) asmenis laikotarpiu nuo 0 iki t ;

G – gimusiųjų skaičius laikotarpiu nuo 0 iki t ;

I – imigrantų skaičius laikotarpiu nuo 0 iki t .

Populiacijos dydis be gimusiųjų ir imigrantų, veikiant dviem pasitraukimo iš populiacijos priežastims – mirčiai ir emigracijai – skaičiuojamas padauginant tuo metu esantį žmonių skaičių (atitinkamai pagal amžiaus grupes) iš tikimybės ${}_t p_x^{(\tau)}$, apibrėžtos (12) formulėje.

4.3 Kohortos komponentų metodo pritaikymas Lietuvos gyventojų prognozavimui

Poskyris parengtas pagal [8] šaltinyje pateiktą metodiką, šiame darbe aprašytą 4.1 poskyryje.

Šiame poskyryje pritaikysime kohortos komponentų metodiką Lietuvos gyventojų skaičiaus prognozei pagal amžiaus grupes ir lytį iki 2070 metų imtinai. Prognozė konstruojama 0, 1–4, 5–9, 10–14, ..., 90–94, 95–99, 100–104, 105–109, 110+ metų amžiaus grupėms. Taip pat bus atsižvelgiama ir į projektuojamu laikotarpiu įvykusių gimimų skaičių, t. y. nagrinėjama kohorta bus atvira. Lietuvos gyventojų skaičiaus ateities projekcija konstruojama kas penkerius metus į priekį. Šiame darbe svarbu tai, kad, pavyzdžiui, 2020 metais 1–4 metų amžiaus grupei priklausantis vaikas 2025 metais jau priklausys 5–9 metų amžiaus grupei, 2030 metais – 10–14 metų amžiaus grupei ir t. t.

Atsižvelgiant į tai, kad grynosios migracijos balansas Lietuvoje pastaraisiais metais nebuvo nulinis, naudojamas komponentų metodas, kuris įvertina ir migracijos įtaką.

Kad būtų patogiau, (3) formulė perrašoma tokiu būdu:

$$P_t = (P_0 - M) + G + (I - E), \quad (13)$$

$(P_0 - M)$ – likusių gyvų pradinės kohortos gyventojų skaičius momentu t ;

G – gimusiųjų skaičius laikotarpiu nuo 0 iki t ;

$(I - E)$ – gryniosios migracijos balansas laikotarpiu nuo 0 iki t .

Kiekvienas (13) formulėje paminėtų komponentų nagrinėjamas atskirai 4.4 poskyryje pagal amžiaus grupes. Atsižvelgiant į tai, kad pasitraukimo priežastys (mirtis ir emigracija) (13) lygybėje sugrupuotos atskirai, jų skaičiavimams galima naudoti ir vienos priežasties aplinkoje nurodytą teoriją, t. y. įvertinamos ir mirsiančių ir emigruosiančių žmonių projekcijos, tik atskirai.

4.4 CCM komponentų – likusių gyvų pradinės kohortos gyventojų skaičiaus, gimusiųjų ir migrantų – vertinimas

Šio poskyrio skaičiavimams naudoti duomenys paimti iš [11] ir [12] šaltinių.

Prognozuojant likusių gyvų populiacijos gyventojų skaičių ir struktūrą ateityje, populiacija suskirstoma pagal lytį ir amžiaus grupes. Laikysime, kad 2020 metų sausio 1 dieną fiksuotas gyventojų skaičius yra tarsi pradinė kohorta.

Likusių gyvų pradinės kohortos gyventojų skaičiaus pagal amžių ir lytį projekcija gaunama tam tikro amžiaus x gyventojų skaičių l_x dauginant iš atitinkamos penkerių metų išgyvenamumo tikimybės ${}_5p_x$, kuri apibrėžiama taip:

$${}_5p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot p_{x+3} \cdot p_{x+4}.$$

2025–2070 metais gimstančių kūdikių skaičius skaičiuojamas atsižvelgiant į 15–49 metų amžiaus gyvų moterų skaičiaus projekciją.

Remiantis paskutinių trejų metų gimstamumo pagal motinos amžių duomenimis, apskaičiuojama *ASFR* (angl. *Age-Specific Fertility Rate*) – tikimybė, kad reproduktyvaus amžiaus (15–49 metų) moteris per metus susilauks kūdikio. Šis dydis apskaičiuojamas padalijus per trejus paskutinius metus gimusių kūdikių skaičiaus vidurkį iš reproduktyvaus amžiaus moterų skaičiaus. *ASFR* reproduktyvaus amžiaus Lietuvos moterims pavaizduotas 1 lentelėje.

Motinos amžius	<i>ASFR</i> mergaičių	<i>ASFR</i> berniukų	<i>ASFR</i> bendras
15–19	0,005795482	0,005695313	0,011490795
20–24	0,022845902	0,024065574	0,046911475
25–29	0,051685547	0,055057309	0,106742745
30–34	0,051002216	0,053595563	0,104597779
35–39	0,023852036	0,025177874	0,04902991
40–44	0,004806415	0,004952517	0,009758819
45–49	0,000186465	0,000150448	0,000336912

1 lentelė: *ASFR* pagal motinos amžių. Parengta: darbo autorės.

Norint sužinoti, kiek vaikų gims kitais metais, pagal amžių apskaičiuotas gimstamumo rodiklis *ASFR* dauginamas iš atitinkamo reproduktyvaus amžiaus likusių gyvų moterų skaičiaus. Modeliuojama, kad projekcijos laikotarpiu, nuo 2025 metų iki 2070 metų, gims kūdikiai, kurie prisijungs prie populiacijos, bet bėgant laikui visgi yra tikimybė q_x , kad kūdikiai tam tikru savo gyvenimo metu neišgyvens, todėl gautas kūdikių skaičius dar padauginamas iš išgyvenamumo tikimybės.

Projektuojant grynosios migracijos balanso prognozę darysime prielaidą, kad emigrantų ir imigrantų procentai Lietuvoje projekcijos konstravimo metu išliks pastovūs ir bus lygūs paskutinių trejų metų procentų vidurkiui.

Grynosios migracijos balanso rodiklis skirtingoms amžiaus grupėms ir lytims apskaičiuojamas remiantis tokia formule:

$$\text{Grynosios migracijos balanso rodiklis} = \frac{I - E}{P},$$

I – imigrantų skaičius laikotarpiu nuo 0 iki t ;

E – emigrantų skaičius laikotarpiu nuo 0 iki t ;

P – vidutinis populiacijos dydis laikotarpiu nuo 0 iki t .

Grynosios migracijos balanso rodiklis pagal amžiaus grupes ir lytį padauginamas iš tuo metu esančio gyventojų skaičiaus. Jei jis gaunamas teigiamas – parodo per metus įvykusį imigrantų srautą, o jei gaunamas neigiamas skaičius – parodo emigrantų srautą.

5 Lietuvos gyventojų skaičiaus ateities projekcija

5.1 Rezultatai ir išvados

4.4 poskyrio skaičiavimų rezultatas – 2025–2070 metų Lietuvos gyventojų skaičiaus projekcija pagal lytį ir amžiaus grupes. Bendra Lietuvos gyventojų skaičiaus projekcija vaizduojama 2 lentelėje, vyrų ir moterų projekcijos atskirai vaizduojamos atitinkamai 3 ir 4 lentelėse (pilni lentelių duomenys pateikiami A.2 priede). Lentelėse x žymi amžiaus grupę, o $l_{x,t}$ – metais t į x amžiaus grupę patenkančių asmenų skaičių.

x	$l_{x,2020}$	$l_{x,2030}$	$l_{x,2040}$	$l_{x,2050}$	$l_{x,2060}$	$l_{x,2070}$
0–4	145,590	128,788	109,750	111,597	104,868	92,031
5–9	144,512	132,554	112,366	105,976	106,094	94,398
10–14	132,642	135,573	119,559	101,900	103,898	97,594
15–19	130,926	130,733	118,490	100,109	95,006	95,029
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100–104	0,181	0,830	1,290	1,232	1,557	1,433
105–109	0,001	0,027	0,058	0,070	0,075	0,092
110+	0,000	0,000	0,001	0,002	0,002	0,002
Iš viso:	2794,090	2641,530	2406,676	2148,687	1899,249	1669,814

2 lentelė: Lietuvos gyventojų skaičiaus prognozės pagal amžių rezultatai, tūkst.

x	$l_{x,2020}$	$l_{x,2030}$	$l_{x,2040}$	$l_{x,2050}$	$l_{x,2060}$	$l_{x,2070}$
0–4	74,862	66,135	56,342	57,292	53,852	47,251
5–9	74,046	68,102	57,756	54,364	54,452	48,496
10–14	67,809	69,557	61,411	52,317	53,199	50,181
15–19	67,138	66,928	61,275	51,966	48,914	48,993
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100–104	0,026	0,151	0,241	0,233	0,320	0,319
105–109	0,000	0,005	0,013	0,015	0,017	0,022
110+	0,000	0	0,000	0,000	0,000	0,001
Iš viso:	1304,354	1285,981	1218,699	1134,356	1046,014	950,111

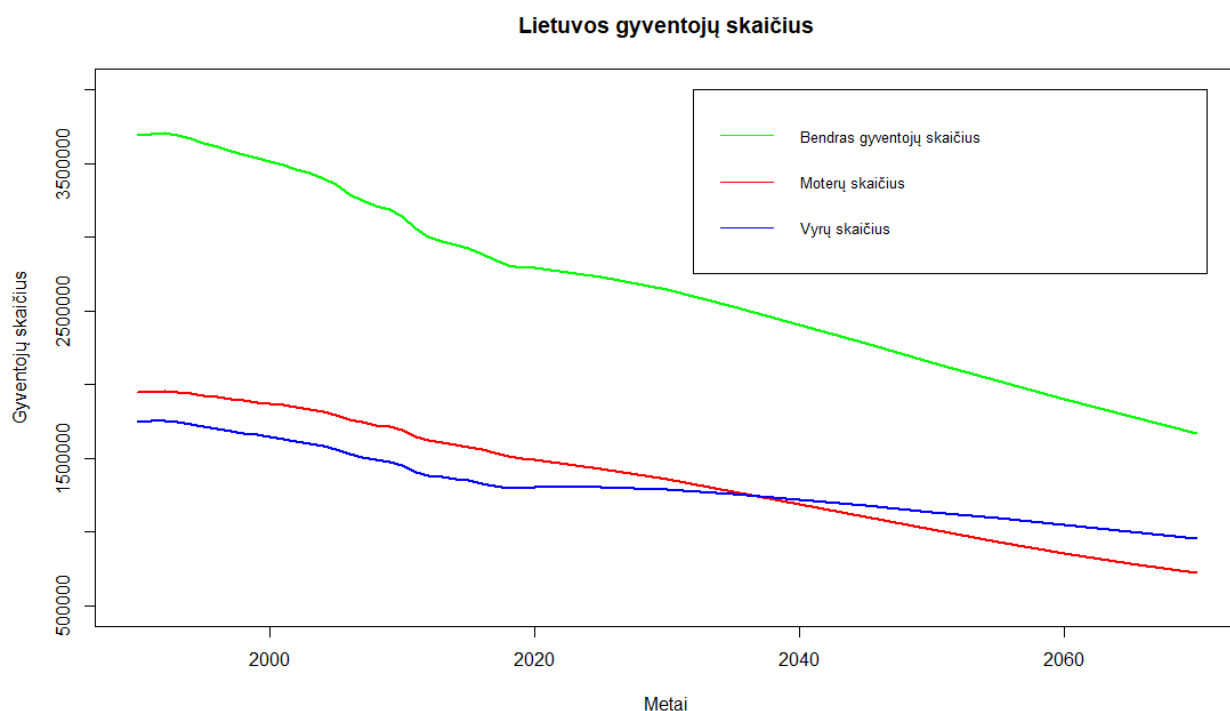
3 lentelė: Lietuvos gyventojų vyrų skaičiaus prognozės pagal amžių rezultatai, tūkst.

x	$l_{x,2020}$	$l_{x,2030}$	$l_{x,2040}$	$l_{x,2050}$	$l_{x,2060}$	$l_{x,2070}$
0–4	70,728	62,652	53,408	54,305	51,017	44,780
5–9	70,466	64,452	54,610	51,611	51,642	45,902
10–14	64,833	66,015	58,148	49,583	50,699	47,412
15–19	63,788	63,805	57,215	48,143	46,092	46,035
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100–104	0,155	0,679	1,049	1,000	1,237	1,114
105–109	0,001	0,022	0,046	0,055	0,058	0,069
110+	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001
Iš viso:	1489,736	1355,550	1187,976	1014,330	853,234	719,703

4 lentelė: Lietuvos gyventojų moterų skaičiaus prognozės pagal amžių rezultatai, tūkst.

Pagal gautą Lietuvos gyventojų skaičiaus prognozę (2, 3, 4 lentelės) 2070 metais Lietuvoje iš viso liks apytikriai 1,67 mln. gyventojų. O vyrų skaičius 2070 metais sieks $\sim 0,95$ mln., moterų $\sim 0,72$ mln.

Lietuvos bendro gyventojų skaičiaus 1990–2070 metų pokytis bėgant laikui matomas 3 paveiksle. Prognozuojama, kad nuo 1990 metų iki 2070 metų bendrai populiacija sumažės apytikriai 2,2 kartus, moterų skaičius apytikriai 2,7 kartus, vyrų skaičius apytikriai 1,8 karto. Remiantis Europos Sąjungos statistikos tarnybos pateikta gyventojų skaičiaus projekcija, 2070 metais bendras gyventojų skaičius turėtų siekti 1,8 mln [11]. Nors ir nuo 1990 metų iki 2020 metų moterų skaičius nenutraukiamai viršijo vyrų skaičių, projekcijoje pastebima, kad jau 2040 metais vyrų skaičius viršys moterų skaičių ir iki pat projekcijos laikotarpio pabaigos, 2070 metų, didins atotrūkį. Šį pasikeitimą galima paaiškinti paskutiniu metu vis didėjančiu imigrantų vyrų srautu ir didesniu emigrančių nei imigrančių moterų srautu. Europos Sąjungos statistikos tarnybos pateiktose projekcijose taip pat matoma, kad vyrų skaičius viršys moterų, tik tai turėtų įvykti kiek vėliau – 2065 metais[11].



3 pav.: Lietuvos gyventojų skaičiaus nuo 1990 metų iki 2070 metų pokytis. Parengta: darbo autorės pagal gautus prognozės rezultatus.

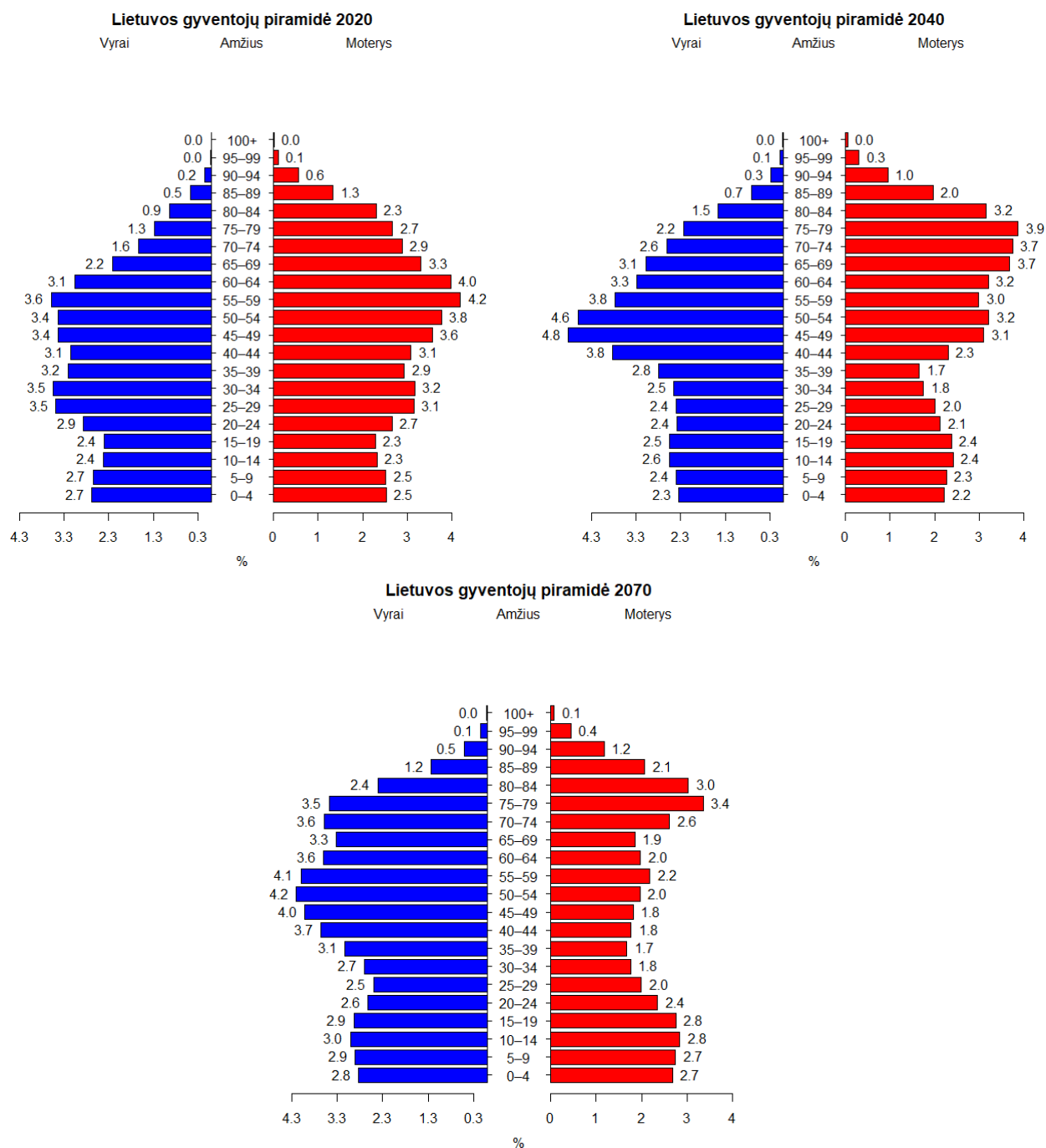
5.2 Struktūriniai pokyčiai

Poskyris parengtas pagal [1].

Gyventojų skaičiaus pasiskirstymas pagal amžiaus grupes ir lytį dažniausiai vaizduojamas braižant populiacijų piramides (angl. *Population pyramids*). Šios iliustracijos, nors ir vadinamos piramidėmis, ne visada įgyja standartinės piramidės formą. Būtent forma ir leidžia greitai atpažinti, kokia demografinė situacija yra toje populiacijoje. Platus piramidės pagrindas dažniausiai rodo didelį gimstamumą, siauras pagrindas – mažą. Plati piramidės dalis, žyminti pensinio amžiaus gyventojus, rodo ilgą gyvenimo trukmę ir atvirkščiai.

Taip pat turint istorinių duomenų ar ateities projekcijų populiacijų piramides, galima lengviau interpretuoti ir struktūrinius pokyčius laikui bėgant.

Lietuvos gyventojų skaičiaus struktūriniai pokyčiai pagal lytį ir amžiaus grupes nuo 2020 metų iki 2070 metų, remiantis atlikta prognoze, vaizduojami 4 paveiksle. Matomas gana siauras pagrindas, kuris rodo besitęsiantį mažą gimstamumą. Lyginant su 2020 metų piramide, 2070 metais akivaizdžiai pastebimas darbingo amžiaus žmonių Lietuvoje sumažėjimas ir pensinio amžiaus žmonių didėjimas.



4 pav.: Lietuvos gyventojų piramidės. Parengta: darbo autorės pagal gautus prognozės rezultatus.

6 Literatūra

- [1] Department of Health. *Tools of the Trade: POPULATION PYRAMIDS*, https://www.health.pa.gov/topics/HealthStatistics/Statistical-Resources/UnderstandingHealthStats/Documents/Population_Pyramids.pdf.
Žiūrėta: 2021-05-22.
- [2] Europos migracijos tinklas. *Migracijos tendencijos*, <https://123.emn.lt/>. Žiūrėta: 2021-05-22.
- [3] International Actuarial Association. *Actuarial Perspectives on World Population Prospects 2019*, 2020, 81 p.
- [4] G. Kasnauskienė. *Demografijos pagrindai*. Vilnius: Vilniaus universiteto leidykla, 2006, 303 p.
- [5] R. Lapinskas. *Trumpas matematinės demografijos kursas*, Vilnius: Vilniaus universiteto leidykla, 1998, 99 p.
- [6] Lietuvos Respublikos Seimas. *Lietuvos Respublikos žmogaus mirties nustatymo ir kritinių būklių įstatymas*, 1997 m. kovo 25 d. Nr. VIII-157 Vilnius, <https://e-seimas.lrs.lt/rs/legalact/TAD/TAIS.37504/>. Žiūrėta: 2021-05-23.
- [7] D. London. *Survival Models and their Estimation*, Connecticut: ACTEX Publications, 1988, 326 p.
- [8] MEASURE Evaluation. *Lesson 8: The Cohort Component Population Projection Method*, <https://www.measureevaluation.org/resources/training/online-courses-and-resources/non-certificate-courses-and-mini-tutorials/population-analysis-for-planners/lesson-8/lesson-8-the-cohort-component-population-projection-method>. Žiūrėta: 2021-05-22.
- [9] Oficiali COVID-19 pandemijos statistika, https://experience.arcgis.com/experience/cab84dcfe0464c2a8050a78f817924ca/page/page_4/. Žiūrėta: 2021-05-22.

- [10] Oficialiosios statistikos portalas. *Lietuvos gyventojai (2020 m. leidimas) Gimstamumas*, <https://osp.stat.gov.lt/lietuvos-gyventojai-2020/gimstamumas>. Žiūrėta: 2021-05-22.
- [11] Statistical office of the European Union, <https://ec.europa.eu/eurostat/web/main/data/database>. Žiūrėta: 2021-05-22.
- [12] The Human Mortality Database, <https://www.mortality.org>. Žiūrėta: 2021-04-01.
- [13] A. Tsoularis. Analysis of Logistic Growth Models, *Mathematical Biosciences*, 2002, p. 23-46.
- [14] World Health Organization, https://www.who.int/health-topics/coronavirus#tab=tab_1. Žiūrėta: 2021-05-22.

A Priedai

A.1 (1) lygybės išvedimas iš Verhulst'o logistinės lygties

Parengta pagal [5].

Pertvarkę (2) lygtį gauname:

$$\int \frac{K}{P_t(K - P_t)} dt = \int R dt.$$

Šiai lygybei jau galima pritaikyti neapibrėžtųjų koeficientų metodą, kuriuo pasinaudojus, gauname:

$$\int \frac{1}{P_t} dP_t + \int \frac{1}{K - P_t} dP_t = \int R dt.$$

Suintegravus gauname:

$$\ln(P_t) - \ln(K - P_t) = Rt + C,$$

kur C – konstanta.

Tuomet:

$$\ln\left(\frac{P_t}{K - P_t}\right) = Rt + C.$$

Pertvarkome reiškinių į

$$P_t = \frac{K}{1 + e^{-Rt - C}}. \quad (14)$$

Konstantą C randame, laikydami, kad momentu $t = 0$ populiacijos dydis yra P_0 :

$$P_0 = \frac{K}{1 + e^{-C}} \Rightarrow C = \ln\left(\frac{P_0}{K - P_0}\right).$$

Galiausiai, C įstačius į (14), gauname (1) lygybę:

$$P_t = \frac{K}{\frac{(K - P_0)}{P_0} e^{-Rt} + 1} = \frac{K P_0}{(K - P_0) e^{-Rt} + P_0}.$$

A.2 Lietuvos gyventojų skaičiaus prognozių pagal lytį ir amžiaus grupę pilnos lentelės

x	$l_{x,2020}$	$l_{x,2025}$	$l_{x,2030}$	$l_{x,2035}$	$l_{x,2040}$	$l_{x,2045}$	$l_{x,2050}$	$l_{x,2055}$	$l_{x,2060}$	$l_{x,2065}$	$l_{x,2070}$
0-4	145,59000	137,55979	128,78817	116,72066	109,74967	109,88741	111,59688	110,03875	104,86808	98,00077	92,03101
5-9	144,51200	140,45962	132,55351	124,05780	112,36630	105,72619	105,97554	107,65061	106,09465	101,22553	94,39822
10-14	132,64200	139,82400	135,57289	127,79269	119,55943	108,22553	101,90006	102,25550	103,89784	102,34396	97,59351
15-19	130,92600	123,99890	130,73265	126,05407	118,48996	110,75910	100,10914	94,41635	95,00625	96,59117	95,02879
20-24	154,36000	113,41445	107,94084	113,90046	108,37386	101,16974	94,35908	84,96100	80,47211	81,53792	83,02539
25-29	185,37600	143,98028	104,72854	100,27224	106,00529	99,95236	92,82289	86,41991	77,57444	73,72681	75,11467
30-34	187,44600	186,78223	144,45921	105,17487	101,26299	107,32568	101,09397	93,75413	87,23218	78,22095	74,42721
35-39	171,79300	191,12359	189,99811	146,57442	107,03705	103,59947	110,08307	103,74895	96,16068	89,43951	80,15122
40-44	174,25200	173,29326	192,98965	191,46798	147,38980	107,87751	104,85654	111,64722	105,25371	97,51104	90,66704
45-49	195,47000	173,37660	172,64535	192,38371	190,55047	146,39414	107,27762	104,60801	111,54649	105,15402	97,36584
50-54	201,30800	191,61881	169,78271	169,09917	188,43937	186,40558	142,95523	104,74536	102,32401	109,23067	102,90628
55-59	217,73100	194,38747	184,97166	163,69503	162,89397	181,41559	179,25551	137,24345	100,39564	98,24926	104,93640
60-64	196,70800	208,13862	185,80803	176,60152	156,07082	154,91827	172,19826	169,96477	129,97661	95,04521	93,05044
65-69	154,54000	182,14359	192,51592	171,70162	162,96386	143,66434	142,15628	157,67282	155,26611	118,44596	86,36611
70-74	126,48000	138,37366	162,84496	171,85406	153,07473	145,00004	127,38963	125,49869	138,72143	136,27600	103,54180
75-79	110,41000	108,75795	118,78871	139,54123	146,98288	130,71068	123,51729	108,05392	105,79743	116,57564	114,11433
80-84	90,73900	88,29663	86,90152	94,74868	111,07988	116,74844	103,62423	97,65980	84,90825	82,71938	90,75881
85-89	50,31806	61,93769	60,27468	59,27196	64,50897	75,47606	79,15427	70,12134	65,78604	57,00906	55,18428
90-94	19,81457	25,04593	30,84996	30,02375	29,50234	32,05866	37,44244	39,19135	34,59223	32,43476	27,98180
95-99	3,49195	5,96768	7,52613	9,27637	9,02463	8,86107	9,61494	11,21030	11,74076	10,31104	9,64400
100-104	0,18121	0,48586	0,82999	1,04659	1,29006	1,25508	1,23225	1,33689	1,55733	1,63193	1,43296
105-109	0,00130	0,01003	0,02699	0,04629	0,05845	0,07201	0,07004	0,06881	0,07467	0,08724	0,09156
110+	0,00000	0,00003	0,00023	0,00063	0,00108	0,00137	0,00169	0,00164	0,00161	0,00176	0,00206
Iš viso:	2794,09009	2728,97671	2641,53042	2531,30581	2406,67588	2277,50433	2148,68686	2022,26956	1899,24855	1781,76959	1669,81373

1 lentelė: Lietuvos gyventojų skaičiaus prognozės pagal amžių rezultatai, tūkst.

x	$l_{x,2020}$	$l_{x,2025}$	$l_{x,2030}$	$l_{x,2035}$	$l_{x,2040}$	$l_{x,2045}$	$l_{x,2050}$	$l_{x,2055}$	$l_{x,2060}$	$l_{x,2065}$	$l_{x,2070}$
0-4	70,72800	66,89481	62,65241	56,79095	53,40763	53,47701	54,30529	53,53718	51,01653	47,67945	44,78020
5-9	70,46600	68,28913	64,45165	60,32088	54,61032	51,42775	51,61122	52,43707	51,64247	49,15059	45,90212
10-14	64,83300	68,36857	66,01596	62,17560	58,14802	52,57685	49,58276	49,87473	50,69883	49,87853	47,41224
15-19	63,78800	60,34149	63,80489	61,06449	57,21518	53,41167	48,14309	45,56122	46,09185	46,91268	46,03534
20-24	74,29100	53,20592	51,25991	54,57765	51,05243	47,18447	43,83396	39,17706	37,42901	38,44259	39,25687
25-29	87,97900	65,79970	46,06194	45,12493	48,34250	44,29274	40,41505	37,37112	33,12829	31,94141	33,27858
30-34	88,43200	83,81503	61,71177	42,63553	42,17474	45,34070	41,04969	37,17275	34,27734	30,23529	29,31419
35-39	81,83500	85,12198	80,29633	58,30218	39,79749	39,71924	42,83695	38,36199	34,49263	31,72402	27,85164
40-44	86,27200	78,76978	82,18419	77,20182	55,35812	37,37136	37,60535	40,67500	36,05758	32,21136	29,55269
45-49	99,57700	83,23412	76,12016	79,61743	74,53635	52,89607	35,37609	35,84629	38,86151	34,16383	30,34717
50-54	105,29500	96,84028	80,80568	73,97429	77,49228	72,39374	51,04285	33,93334	34,51878	37,50044	32,78988
55-59	117,27500	102,60900	94,39739	78,70548	72,08460	75,56510	70,52625	49,58002	32,81217	33,50597	36,42591
60-64	111,05800	114,80951	100,54720	92,47564	77,15937	70,63857	74,00162	69,12800	48,66999	32,33215	32,95298
65-69	92,40200	106,44649	110,03319	96,35089	88,61968	73,93420	67,69015	70,91948	66,18691	46,61828	30,95773
70-74	80,63000	86,53158	99,69049	103,03853	90,20974	82,97555	69,21581	63,37535	66,34942	61,96506	43,62199
75-79	74,58600	72,91008	78,25593	90,16388	93,17960	81,56001	75,02424	62,57229	57,22905	59,99609	56,01988
80-84	64,38000	62,83823	61,42615	65,94395	75,98971	78,51278	68,69475	63,19710	52,58474	48,20090	50,54515
85-89	37,32728	46,19451	45,06940	44,05654	47,30505	54,51802	56,31726	49,25867	45,20129	37,70059	34,56273
90-94	15,50585	19,38412	23,98857	23,39681	22,87097	24,56063	28,30822	29,23813	25,49937	23,46276	19,56559
95-99	2,91933	4,86378	6,07557	7,51848	7,32680	7,16211	7,69394	8,87011	9,19074	7,98145	7,34537
100-104	0,15535	0,40745	0,67884	0,84797	1,04935	1,02260	0,99962	1,07384	1,23688	1,28275	1,11397
105-109	0,00130	0,00837	0,02194	0,03656	0,04566	0,05651	0,05507	0,05383	0,05773	0,06661	0,06908
110+	0,00000	0,00003	0,00018	0,00047	0,00079	0,00099	0,00122	0,00119	0,00116	0,00125	0,00144
Iš viso:	1489,73611	1427,68394	1355,54974	1274,32095	1187,97639	1100,59866	1014,33045	931,21576	853,23429	782,95403	719,70272

2 lentelė: Lietuvos gyventojų moterų skaičiaus prognozės pagal amžių rezultatai, tūkst.

x	$l_{x,2020}$	$l_{x,2025}$	$l_{x,2030}$	$l_{x,2035}$	$l_{x,2040}$	$l_{x,2045}$	$l_{x,2050}$	$l_{x,2055}$	$l_{x,2060}$	$l_{x,2065}$	$l_{x,2070}$
0-4	74,86200	70,66499	66,13576	59,92971	56,34205	56,41040	57,29159	56,50157	53,85155	50,32133	47,25081
5-9	74,04600	72,17049	68,10187	63,73692	57,75597	54,29844	54,36432	55,21354	54,45217	52,07495	48,49610
10-14	67,80900	71,45543	69,55693	65,61709	61,41141	55,64868	52,31730	52,38077	53,19901	52,46543	50,18127
15-19	67,13800	63,65742	66,92776	64,98958	61,27479	57,34742	51,96605	48,85513	48,91440	49,67849	48,99345
20-24	80,06900	60,20853	56,68093	59,32280	57,32142	53,98527	50,52512	45,78394	43,04310	43,09533	43,76852
25-29	97,39700	78,18058	58,66659	55,14731	57,66279	55,65961	52,40784	49,04879	44,44615	41,78540	41,83610
30-34	99,01400	102,96720	82,74744	62,53935	59,08825	61,98498	60,04428	56,58138	52,95484	47,98566	45,11302
35-39	89,95800	106,00162	109,70178	88,27225	67,23956	63,88023	67,24612	65,38696	61,66806	57,71549	52,29958
40-44	87,98000	94,52348	110,80546	114,26616	92,03168	70,50615	67,25119	70,97222	69,19613	65,29969	61,11435
45-49	95,89300	90,14249	96,52518	112,76628	116,01412	93,49807	71,90153	68,76172	72,68499	70,99018	67,01866
50-54	96,01300	94,77853	88,97703	95,12488	110,94709	114,01184	91,91238	70,81202	67,80523	71,73024	70,11640
55-59	100,45600	91,77847	90,57428	84,98955	90,80937	105,85049	108,72925	87,66343	67,58347	64,74330	68,51049
60-64	85,65000	93,32911	85,26083	84,12588	78,91145	84,27970	98,19664	100,83677	81,30662	62,71306	60,09746
65-69	62,13800	75,69710	82,48274	75,35073	74,34418	69,73014	74,46614	86,75335	89,07920	71,82768	55,40839
70-74	45,85000	51,84209	63,15447	68,81552	62,86499	62,02449	58,17382	62,12334	72,37201	74,31093	59,91981
75-79	35,82400	35,84787	40,53278	49,37734	53,80328	49,15067	48,49305	45,48162	48,56837	56,57956	58,09446
80-84	26,35900	25,45840	25,47537	28,80472	35,09018	38,23567	34,92948	34,46270	32,32351	34,51847	40,21366
85-89	12,99078	15,74319	15,20528	15,21542	17,20393	20,95804	22,83701	20,86267	20,58475	19,30848	20,62155
90-94	4,30872	5,66182	6,86139	6,62695	6,63137	7,49803	9,13422	9,95323	9,09285	8,97201	8,41622
95-99	0,57262	1,10389	1,45056	1,75789	1,69782	1,69896	1,92100	2,34019	2,55002	2,32959	2,29863
100-104	0,02586	0,07841	0,15116	0,19862	0,24071	0,23248	0,23264	0,26304	0,32044	0,34917	0,31899
105-109	0,00000	0,00167	0,00505	0,00973	0,01279	0,01550	0,01497	0,01498	0,01694	0,02064	0,02249
110+	0,00000	0,00000	0,00005	0,00015	0,00029	0,00039	0,00047	0,00045	0,00045	0,00051	0,00062
Iš viso:	1304,35398	1301,29277	1285,98067	1256,98486	1218,69949	1176,90566	1134,35640	1091,05380	1046,01427	998,81556	950,11101

3 lentelė: Lietuvos gyventojų vyrų skaičiaus prognozės pagal amžių rezultatai, tūkst.

A.3 (12) lygybės išvedimas

$$\begin{aligned}
tp_x^{(\tau)} &= tp_x^{(d)} \cdot tp_x^{(w)} \\
&= \exp\left[-\int_0^t \mu_{x+s}^{(d)} ds\right] \cdot \exp\left[-\int_0^t \mu_{x+s}^{(w)} ds\right] \\
&= \exp\left[-\int_0^t \frac{q_x^{(d)}}{1-s \cdot q_x^{(d)}} ds\right] \cdot \exp\left[-\int_0^t \frac{q_x^{(w)}}{1-s \cdot q_x^{(w)}} ds\right] \\
&= \exp\left[-\left(-\ln|q_x^{(d)} \cdot s - 1|\right)\right]_0^t \cdot \exp\left[-\left(-\ln|q_x^{(w)} \cdot s - 1|\right)\right]_0^t \\
&= \exp[\ln|q_x^{(d)} \cdot t - 1|] \cdot \exp[\ln|q_x^{(w)} \cdot t - 1|] \\
&= \left(q_x^{(d)} \cdot t - 1\right) \cdot \left(q_x^{(w)} \cdot t - 1\right).
\end{aligned}$$

A.4 RStudio kodai

1 paveikslo RStudio kodas:

```
library(plotrix)
par(mfrow=c(1,2)) # grafikų išdėstymas
mcol<-"blue" # parenkama spalva
fcol<-"red" # parenkama spalva
# reikalingi duomenys
age<-Population$'Amžiaus grupė'
fem_pop1990<-Population$'Moterys 1990'
mal_pop1990<-Population$'Vyrai 1990'
fem_pop2020<-Population$'Moterys 2020'
mal_pop2020<-Population$'Vyrai 2020'
# braižomi populiacijos piramidžių grafikai
par(mar=pyramid.plot(mal_pop1990,fem_pop1990, labels=age,c("Vyrai","Amžius","Moterys"),
                      main="Lietuvos gyventojų piramidė 1990",lxcoll=mcol,rxcol=fcol,
                      gap=0.7,show.values=TRUE))
par(mar=pyramid.plot(mal_pop2020,fem_pop2020, labels=age,c("Vyrai","Amžius","Moterys"),
                      main="Lietuvos gyventojų piramidė 2020",lxcoll=mcol,rxcol=fcol,
                      gap=0.7,show.values=TRUE))
```

2 paveikslo RStudio kodas:

```
library(ggplot2)
# pasirinkti parametrai tiesiniam augimui
P_0 <- 1000
t <- 0:10000
k <- 1
P_t <- P_0 +t*k
par(mfrow=c(2,2)) # grafikų išdėstymas
# tiesinio augimo grafikas
plot(t,P_t, type="l",xlab="Laikas", ylab="Populiacijos dydis", ylim = c(0,10000),
      xlim = c(0,10000), main="Tiesinis augimas")
# pasirinkti parametrai eksponentiniam augimui
t <-0:50
R <- 0.04
```

```

P_e <- P_0*exp(1)^(R*t)
# eksponentinio augimo grafikas
plot(t,P_e, type="l",xlab="Laikas", ylab="Populiacijos dydis", ylim = c(0,6000),
xlim = c(0,50), main="Eksponentinis augimas")
# pasirinkti parametrai logistiniam augimui
a <- 8000
R <- 0.04
t <-0:150
P_l <- a / (1+((a-P_0)/P_0)*exp(-R*t) )
# logistinio augimo grafikas
plot(t,P_l, type="l",xlab="Laikas", ylab="Populiacijos dydis", ylim = c(0,8000),
xlim = c(0,150), main="Logistinis augimas")

```

3 paveikslo RStudio kodas:

```

# reikalingi duomenys
Bendras<-Gyventojų_sk_nuo_1990_iki_2070$Bendras
Moterys<-Gyventojų_sk_nuo_1990_iki_2070$Moterys
Vyrai<-Gyventojų_sk_nuo_1990_iki_2070$Vyrai
Metai<-Gyventojų_sk_nuo_1990_iki_2070$Metai
# brėžiamas grafikas
plot(Metai, Bendras, type="l", col="green", lwd=2, xlab="Metai",
      ylab="Gyventojų skaičius", ylim=range(500000,4000000))
lines(Metai, Moterys, col="red", lwd=2)
lines(Metai, Vyrai, col="blue", lwd=2)
title("Lietuvos gyventojų skaičius")
legend(2032, 4000000, legend=c("Bendras gyventojų skaičius", "Moterų skaičius",
                              "Vyrų skaičius"),
      col=c("green", "red", "blue"),lty=1, cex=0.8 )

```

4 paveikslui nubrėžti buvo naudotas toks pat RStudio kodas kaip ir 1 paveikslui, tik pakeisti duomenys.