VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS BAKALAURO STUDIJŲ PROGRAMA

Bakalauro baigiamasis darbas

Viešosios pensijų sistemos rezervai

Public Pension Scheme Reserves

Tatjana Petiukevič

Darbo vadovas Asist., Dr. Aldona Skučaitė

VILNIUS 2021

Turinys

SANTRAUKA/ABSTRACT 2

ĮVADAS 3

1 VIEŠOSIOS PENSIJŲ SISTEMOS FINANSAVIMAS 5

2 TEORINĖ DALIS 6

2.1 Išgyvenamumo teorijos pagrindai 6

2.2 Mirtingumo lentelių žymėjimai 6

2.3 Pagrindiniai rezervo sudarymo aspektai 7

3 PENSIJŲ SISTEMOS IŠMOKOS IR ĮMOKOS 9

3.1 Išmokos 9

3.2 Įmokos 12

4 PENSIJŲ SISTEMOS REZERVO PROGNOZAVIMAS 15

IŠVADOS IR REKOMENDACIJOS 19

A PRIEDAI 22

A.1 Žymėjimų sąrašas 22

A.2 2019 metų mirtingumo lentelė 23

Santrauka

Kiekvienam asmeniui viešoji pensijų sistema yra aktuali, kadangi garantuoja pajamas, pasiekus pensinį amžių. Tam, kad sistema sklandžiai veiktų, reikia turėti optimalaus dydžio rezervą. Šiame darbe analizuojamas prospektyvinis rezervo sudarymo principas ir sudaromos pensijų sistemos būsimų išmokų ir įmokų apskaičiavimo formulės. Be to, naudojant mirtingumo lentelės duomenis prognozuojamas viešosios pensijų sistemos rezervas dešimties metų laikotarpiui.

Raktiniai žodžiai: viešoji pensijų sistema, pensijos sistemos rezervas, prospektyvinis rezervo sudarymo principas, išmokų ir įmokų prognozavimas.

Abstract

The Public Pension Scheme is relevant to every person, as it guarantees an income reaching retirement age. To work correctly Public Pension Scheme need to have optimal size reserves. This paper analyzes the prospective principle of reserve formation. Formulas for calculating future benefits and contributions to the Pension Scheme are being developed. In addition, the mortality table data used to forecast the Public Pension Scheme reserves for a period of ten years.

Key words: Public Pension Scheme, Pension Scheme reserves, prospective principle of reserve formation, forecasting of benefits and contributions.

Įvadas

Viešosios pensijų sistemos tikslas - paremti asmenis, pasiekusius pensinį amžių. Šiuo metu dirbantys žmonės, mokėdami socialinio draudimo įmokas, išlaiko pensinio amžiaus žmones. Gerai veikiantis socialinis draudimas palaiko šalies gyventojų solidarumą tarp kartų. Solidarumo principas – pagrindas sėkmingai veikiančiai draudimo sistemai.

Socialinio draudimo sistemos egzistavimas yra svarbus aspektas kiekvienos šalies gyventojams. Lietuvoje, kaip daugumoje kitų pasaulio valstybių, egzistuoja trys pensijų pakopos: I – privalomasis socialinis draudimas, II – privatūs pensijų fondai ir III – iš asmeninių lėšų vykdomas individualus kaupimas. Šiame darbe bus nagrinėjami tik I pakopos pensijų fondo aspektai. Pirmos pakopos socialinį draudimą administruojanti institucija yra „Sodra“. Jos veiklą prižiūri Valstybinio socialinio draudimo fondo taryba.

Kiekvienas individas gauna skirtingo dydžio pensijos išmokas. Gaunamos išmokos dydis priklauso nuo individo įmokų ir mokėjimo trukmės. Įmokos yra mokamos pagal nustatytus Valstybės socialinio draudimo fondo valdybos mokestinius tarifus. Šis tarifas yra privalomas ir išskaičiuojamas iš darbo užmokesčio.

Tam, kad draudimo sistema veiktų sėkmingai ir jos veikimui užtektų resursų gali būti sudaromas socialinio draudimo lėšų rezervas. Šiame darbe bus nagrinėjami pagrindiniai rezervo sudarymo principai.

Šio darbo tikslas - taikant prospektyvinį rezervo sudarymo principą, išvesti formulę, skirtą suprognozuoti optimalų viešosios pensijų sistemos rezervą. Tiksliau, analizuojama, kokie aspektai daro įtaką pensijų sistemos pajamoms ir išlaidoms. Taip pat, remiantis duomenimis apie Lietuvos gyventojų mirtingumą, prognozuojamas reikalingas rezervas dešimties metų laikotarpiui. Be to, išvestos formulės gali būti naudojamos rezervo dydžio prognozavimui bet kokiam laiko tarpui, priklausomai nuo turimų duomenų ir keliamų tikslų.

Darbo rezultatai parodė, kad sėkmingam viešosios pensijų sistemos veikimui reikalingas optimalaus dydžio rezervas, kuris tiesiogiai priklauso nuo pensijos išmokų ir gaunamų pajamų. Be to, rezultatas palygintas su šių metų viešosios pensijos sistemos pateikiamais duomenimis.

Šis darbas sudarytas iš keturių dalių. Pirmame skyriuje yra pristatyta viešosios pensijų

sistemos finansavimo problema. Antrame skyriuje aprašyta šiam darbui reikalinga teorinė dalis. Trečiame skyriuje analizuojami pagrindiniai pensijų sistemos išmokų ir įmokų aspektai bei išvedamos tolimesniam skaičiavimui reikalingos formulės. Ketvirtame skyriuje, naudojant anksčiau išvestas formules, išvedama bendra formulė rezervo prognozavimui pagal prospektyvinį rezervo sudarymo principą. Darbo pabaigoje pateikiamos išvados, rekomendacijos darbo tobulinimui ir priedai.

1 Viešosios pensijų sistemos finansavimas

Viešoji pensijų sistema turi užtikrinti pensijų išmokėjimą visiems šalies gyventojams, kurie pasiekė pensinį amžių. Tam, kad įsipareigojimai vyktų sklandžiai, sistemai reikalingas pastovus pajamų šaltinis. Pajamos gaunamos iš šiuo metu dirbančių asmenų įmokų (privalomų mokesčių). Taip pat, dalis iš mokesčių gaunamų pinigų yra investuojami siekiant padidinti bendras biudžeto pajamas.

Kadangi viešosios pensijų sistemos biudžetas priklauso nuo įmokų ir išmokų, reikia įvertinti jų tarpusavio santykį. Svarbu prognozuoti asmenų kiekį, kuriems išmokamos pensijos bei skaičių asmenų, kurie moka įmokas. Natūralu tikėtis, kad dirbančiųjų kiekis šalyje yra didesnis negu pensininkų ir kad visų gaunamų mokesčių turėtų užtekti pensijų išmokėjimui. Tačiau ne visada viešoji pensijų sistema turi pakankamai lėšų vykdyti savo pagrindinę funkciją.

Šios sistemos biudžetas gali būti ir neigiamas - įsipareigojimams (pensijų išmokoms) viršijus iš mokesčių gaunamas pajamas. Tą gali lemti įvairios ekonominės aplinkybės: krizė, darbo jėgos sumažėjimas, mokesčių tarifų keitimas, gaunamų pajamų dydžio sumažėjimas. Taip pradeda kauptis pensijų sistemos skola. Kadangi viešoji pensijų sistema negali nevykdyti savo įsipareigojimų, valstybė privalo palaikyti sistemos veiksmingumą lėšų trūkumą kompensuodama iš valstybės biudžeto. Tokiu atveju biudžetas gali būti išbalansuojamas. Tai veda prie kitos problemos - kitų valstybinių sferų veikimo sutrikimo.

Norint išvengti minėtų problemų, viešoji pensijų sistema galėtų kaupti lėšų rezervą, kuris gali būti paskaičiuotas atsižvelgiant į statistinius duomenis. Taip pat turi būti suprognozuojamas optimalus rezervo dydis ilgajam laikotarpiui. Tada sistema galėtų veikti sklandžiai ir nedaryti neigiamos įtakos valstybės biudžetui [4].

2 Teorinė dalis

2.1 Išgyvenamumo teorijos pagrindai

Kiekvieno žmogaus gyvenimo trukmę nuo gimimo iki mirties galima aprašyti naudojant matematinius modelius. Vienas iš tokių modelių yra išgyvenamumo modelis, kuris apibrėžia naujagimio būsimo gyvenimo trukmę (amžių mirties dieną) kaip atsitiktinį dydį X. Asmens likusio gyvenimo trukmė yra atsitiktinis dydis, kurio pasiskirstymo funkcija - $F(x)$. Tačiau, dažniau yra naudojama ne pasiskirstymo, o išgyvenamumo funkcija $S(x) = 1 - F(x)$. Taigi, jei X žymi žmogaus amžių mirties dieną, galime užrašyti tikimybę, kad momentu x žmogus yra dar gyvas:

$$S(x) = P(X > x),$$

kur $X \geqslant 0$.

Išgyvenamumo funkcija tenkina natūralias savybes:

$$S(0) = P(X > 0) = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} S(x) = \lim_{t\to\infty} P(X > x) = 0,$$

nes tikimybė gyventi begalinį laiką yra nulinė [5].

2.2 Mirtingumo lentelių žymėjimai

Kiekvienoje šalyje yra skaičiuojamas bendras mirtingumo lygis, kuris priklauso nuo mirusių žmonių skaičiaus ir šalies populiacijos dydžio. Visus statistikos duomenis galima sekti Lietuvos oficialiosios statistikos portale, kur informacija yra nuolat atnaujinama [7].

Mirtingumo proceso dokumentavimui yra sudaromos mirtingumo lentelės [1]. Žmogaus mirtingumo tikimybė yra susijusi su žmogaus išgyvenamumo tikimybe $S(x)$. Tikimybę, kad žmogus būdamas amžiaus x išgyvens iki momento $x + 1$, žymėsime p_x:

$$p_x = \frac{S(x+1)}{S(x)}.$$

Priešingu atveju - kad žmogus, būdamas amžiaus x, mirs iki amžiaus $x+1$ - žymėsime q_x:

$$q_x = 1 - p_x = \frac{S(x) - S(x+1)}{S(x)}.$$

Pagrindiniai žymėjimai, naudojami mirtingumo lentelėse bei jų sąryšiai yra tokie [1]:

- l_0 – tam tikra hipotetinė pradinė naujagimių kohorta. Dažniausiai laikoma kad $l_0 = 100000$;
- l_x – skaičius asmenų iš pradinės kohortos, kurie sulaukė amžiaus x.
- d_x – skaičius asmenų, kurie sulauks amžiaus x, bet mirs iki amžiaus $x+1$:

$$d_x = l_x - l_{x+1};$$

- L_x – grupės, kuri yra atvira mirties rizikai, dydis. Tai yra bendras asmenų, kuriems dabar x metų, nugyventų metų skaičius per artimiausius metus:

$$L_x = \int_0^1 l_{x+s} ds;$$

- T_x – bendras grupės l_x nugyventų metų skaičius intervale nuo x iki ∞.

  Dydžius L_x ir T_x sieja sąryšis:

$$T_x = \sum_{y=x}^{\infty} L_y;$$

- q_x – tikimybė, kad žmogus sulauks amžiaus x, bet mirs iki amžiaus $x+1$;

2.3 Pagrindiniai rezervo sudarymo aspektai

Visos socialinio draudimo išmokos gali būti mokamos iš draudimo fondo rezervo, todėl yra ypač svarbu, kad gautų įmokų pakaktų tinkamo dydžio rezervų formavimui. Šiame darbe laikoma, kad rezervas skaičiuojamas prospektyviniu (angl. prospective) metodu. Ši sąvoka apibūdina būsimą, laukiamą įvykį. Taigi, prospektyvinis rezervas momentu t yra ly-

gus būsimų išmokų dabartinės vertės momentu t ir būsimų įmokų dabartinės vertės momentu t skirtumui.

Prospektyvinis rezervų skaičiavimo metodas yra ypač plačiai naudojamas gyvybės draudimo srityje. Rezervo dydis priklauso nuo atsitiktinių faktorių, tokių kaip mirtingumas, finansiniai ištekliai, išgyvenamumo tikimybė ir pan. Kadangi paminėti faktoriai yra susiję tik su būsimu laiku, griežtai ir vienareikšmiškai jų įvertinti neįmanoma. Galima teigti, kad prospektyvinis rezervas yra logiškas būsimo pensinio fondo balanso įvertinimas. Vertinant ateities laikotarpį, reikia visada racionaliai integruoti naujus faktorius į turimą modelį bei atkreipti dėmesį į visas galimas papildomas sąlygas.

Tad tam, kad pensinis fondas turėtų pakankamo dydžio rezervą, reikia atkreipti dėmesį į galimas pensinio fondo išlaidas `(išmokas)`, bei į pensinį fondą mokamas pajamas `(įmokas)`. Šiuos aspektus aptarsime tolimesniuose skyriuose [2].

3 Pensijų sistemos išmokos ir įmokos

3.1 Išmokos

Pensijų sistemos išmokos yra interpretuojamos kaip pensijų sistemos išlaidos. Šios gali būti skirtingų rūšių ir skirtingos paskirties, pavyzdžiui: senatvės pensijoms, netekus darbingumo, našliams, kompensacijoms už ypatingas darbo sąlygas, išankstinėms senatvės pensijoms ir kitos [4].

Šiame darbe laikysime, kad pagrindinės pensijos sistemos išlaidos yra valstybinio socialinio draudimo pensijų išmokos pensinio amžiaus šalies gyventojams. Pagal pensijų sistemos biudžeto išlaidų planavimą, visos išlaidos senatvės pensijoms planuojamos atsižvelgiant į senatvės pensijų gavėjų ir išmokų skaičiaus vidutines kitimo tendencijas. Tai pat, yra prognozuojamas lauktinas vidutinis pensijos dydis [12].

Įvesime žymėjimus (kadangi žymėjimų bus ir daugiau, visas bendras žymėjimų sąrašas pateiktas prieduose A.1):

- Q_{sp} – vidutinis senatvės pensijų (toliau - *sp*) gavėjų skaičius, kur Q (angl. quantity);
- AM_{sp} – lauktinas vidutinis pensijos dydis, kur AM (angl. amount);
- S_{sp} – senatvės pensijų suma, kur S (angl. sum).

Visi dydžiai yra prognozuojami atsižvelgiant į faktinius einamųjų metų duomenis. Tad žemiau pateikta formulė aprašo sąryšį tarp minėtų dydžių:

$$S_{sp} = AM_{sp} \times Q_{sp}. \tag{1}$$

Norint tiksliau apskaičiuoti senatvės pensijų išlaidų sumą, reikia atkreipti dėmesį į faktinius duomenis apie Lietuvos gyventojų mirtingumą. Naudojant Lietuvos gyventojų mirtingumo lentelės duomenis, galima išsamiau išanalizuoti pensijų mokėjimo aspektus. Šiame darbe rezervo skaičiavimui naudosime duomenų bazėje `https://www.mortality.org` pateikta Lietuvos gyventojų mirtingumo lentele, kurią galima rasti prieduose A.2.

Tarkime, kad pensinio amžiaus žmonių proporcijos pagal amžių atitinka Lietuvos gyventojų proporciją. Pagal Lietuvos oficialiosios statistikos portalo duomenis [8] 2019 metų pabaigoje

Lietuvoje buvo 2794184 nuolatinių gyventojų. Kadangi pradinės kohortos skaičius l_0 lygus 100000, tai reiškia daroma prielaida, kad kiekvienais metais gimsta 100000 naujagimių. Tada taip galima paskaičiuoti proporcinį koeficientą P_c žmonių, 2019 metais sulaukė tam tikro amžiaus:

$$P_c = \textit{nuolatinių gyventojų skaičius} \div \sum_{i=0}^{110} l_i. \tag{2}$$

Pensijų išmokų skaičiavimui svarbi ir nustatyta pensinio amžiaus pradžia. Kitaip sakant, nuo kada žmogus turėtų pradėti gauti išmokas. Laikysime, kad žmogus, pasiekęs pensinį amžių, daugiau nebemoka įmokų, o tik gauna pensijos išmokas.

Lietuvoje senatvės pensinis amžius nustatomas pagal valstybinių socialinio draudimo pensijų įstatymo nuostatas. Šiuo metu pensinis amžius moterims yra 63 metai, o vyrams – 64 metai ir 2 mėnesiai. Tačiau 2027 metais tiek vyrai, tiek moterys pensinį amžių pasieks būdami 65 metų [10].

Šiame darbe yra daroma prielaida, kad vyrų ir moterų pensinis amžius yra vienodas – 65 metai. Kadangi mus domina visos galimos pensinio fondo išlaidos, reikia atkreipti dėmesį į senatvės pensijų sumą S_{sp}. Iš (1) formulės matome, kad norint ją apskaičiuoti, reikia žinoti vidutinį senatvės pensijų gavėjų skaičių bei vidutinį valstybinio socialinio draudimo pensijos dydį. Pagal oficialiosios statistikos portalo duomenis [9] vidutinis mėnesinės pensijos dydis Lietuvoje 2019 metais $AM_{sp} = 344,42$ eur. Tada gauname, kad $AM_{sp} = 344,42 \times 12 = 4133,04$ eurų per metus.

Laikysime, kad visi žmonės iš pradinės kohortos mirs iki 110 metų amžiaus. Mus domina, koks bus pensininkų gavėjų skaičius ateityje, pradedant nuo 2021 metų. Tada, panaudojus 2019 metų mirtingumo lentelės duomenis A.2, paskaičiuosime skaičių žmonių, kuriems turi būti išmokėta pensija 2021 metais – $Q_{sp_{2021}}$. Tai yra skaičius asmenų, kuriems 2021 metais bus 65 metai arba daugiau.

Jeigu 2019 metais 65 metų pensininkų skaičius buvo l_{65}, tai 2020 metais prie pensininkų skaičiaus prisijungs tie, kuriems 2019 metais buvo 64 metai $l_{64}p_{64}$, o 2021 metais prisijungs žmonės, kuriems 2019 m. buvo 63 metai ir t.t.. Tada, panaudojus proporcinį koeficientą (2)

galime užrašyti $Q_{sp_{2021}}$ formulę:

$$\begin{aligned} Q_{sp_{2021}} &= P_c \times \big(l_{63}(1-q_{63})(1-q_{64}) + l_{64}(1-q_{64})(1-q_{65}) + \cdots + l_{108}(1-q_{108})(1-q_{109})\big) \\ &= P_c \sum_{i=63}^{108} l_i(1-q_i)(1-q_{i+1}) = P_c \sum_{i=63}^{108} l_i p_i p_{i+1}, \end{aligned} \tag{3}$$

kur $p_i p_{i+1}$ tikimybė, kad žmogus, kuris yra amžiaus i, sulauks amžiaus $i+2$.

Laikysime, kad vidutinis pensijos dydis AM_{sp} nekinta. Pertvarkysime (1) formulę ir paskaičiuosime 2021 metų visu senatvės pensijų sumą:

$$\begin{aligned} S_{sp_{2021}} &= AM_{sp} \times Q_{sp_{2021}} \\ &= AM_{sp} P_c \sum_{i=63}^{108} l_i(1-q_i)(1-q_{i+1}) \\ &= AM_{sp} P_c \sum_{i=63}^{108} l_i p_i p_{i+1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Tęsdami procesą skaičiuosime skaičių žmonių, kurie gaus pensijas konkrečiais metais - $Q_{sp_{2022}}, Q_{sp_{2023}}, \ldots Q_{sp_{2030}}$ - ir tikėtinos pensijos sumas - $S_{sp_{2022}}, S_{sp_{2023}}, \ldots S_{sp_{2030}}$. Paskutiniai prognozės dydžiai aprašomi žemiau:

$$\begin{aligned} Q_{sp_{2030}} &= P_c \times \big(l_{54}p_{54}p_{55}p_{56}\ldots p_{64} + l_{55}p_{55}p_{56}p_{57}\ldots p_{65} + \cdots + l_{99}p_{99}p_{100}p_{101}\ldots p_{109}\big) \\ &= P_c \times \Big(l_{54}\prod_{i=54}^{i+10} p_i + l_{55}\prod_{i=55}^{i+10} p_i + \cdots + l_{99}\prod_{i=99}^{i+10} p_i\Big) = P_c \sum_{i=54}^{99} l_i \prod_{j=i}^{i+10} p_j, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} S_{sp_{2030}} &= AM_{sp} \times Q_{sp_{2030}} \\ &= AM_{sp} P_c \sum_{i=54}^{99} l_i \prod_{j=i}^{i+10} p_j. \end{aligned} \tag{6}$$

Užrašysime bendro nario formulę:

$$S_{sp_{2020+t}} = AM_{sp} P_c \sum_{i=64-t}^{109-t} l_i \prod_{j=i}^{i+t} p_j, \tag{7}$$

kur $t \in N$. Tada, visų galimų išlaidų skaičius S_B 2021-2030 metų laikotarpiu gali būti paskaičiuotas taip:

$$\begin{aligned} S_{B_{sp}} &= \sum_{t=1}^{10} S_{sp_{2020+t}} \\ &= AM_{sp}P_c \sum_{t=1}^{10} \sum_{i=64-t}^{109-t} l_i \prod_{j=i}^{i+t} p_j. \end{aligned} \tag{8}$$

3.2 Įmokos

Įmokos yra pagrindinis pensijų sistemos pajamų šaltinis. Kiekvienas dirbantis šalies gyventojas turi mokėti įmokas pagal Valstybės socialinio draudimo fondo nustatytą mokestinį tarifą. Šie mokesčiai nuskaičiuojami nuo bruto darbo atlyginimo (atlyginimo „ant popieriaus“).

Šiame darbe laikysime, kad visi žmonės, sulaukę 20 metų amžiaus, pradeda dirbti. Taip pat laikysime, kad kiekvienas žmogus dirba ir moka įmokas iki pensinio amžiaus, tai yra iki 65 metų. Norėdami suprognuozuoti būsimas pensijų sistemos pajamas, reikia atkreipti dėmesį į 2019 metų šalies vidutinę algą ir į 2019 metų socialinio draudimo mokestinį tarifą.

Įvesime žymėjimus:

- Q_{dirb} – vidutinis dirbančių žmonių skaičius, kur Q (angl. quantity) ir $dirb$ - dirbantys žmonės;
- T_{pm} – pensijų socialiniam draudimui mokestinis tarifas, kur T (angl. taxes) ir pm - pensinis mokestis;
- DU_{vid} – vidutinis darbo užmokestis prieš mokesčius;
- S_{paj} – pensijų sistemos pajamų suma per vienerius metus, kur S (angl. sum) ir paj - pajamos.

Žemiau pateikta formulė aprašo, kaip randama visų pensijų sistemos pajamų suma:

$$S_{paj} = T_{pm} \times DU_{vid} \times Q_{dirb}. \tag{9}$$

Kiekvienam asmeniui privaloma mokėti $8,72\%$ mokestį pensijų socialiniam draudimui. Galima kaupti ir daugiau, tačiau šiame darbe nagrinėsime tik privalomąjį dydį, nes nežinoma, kiek tiksliai žmonių dalyvauja papildomame pensijų kaupime. Be to, darysime prielaidą, kad dydis $T_{pm} = 8,72\%$ nekinta ir yra vienodas visiems dirbantiems šalies piliečiams. Visus mokesčių tarifų dydžius bei įmokų bazes (nuo kokios dalies pajamų skaičiuojami mokesčiai) galima rasti „Sodros“ puslapyje [11].

Norėdami paskaičiuoti visų pajamų sumą, remsimės (9) formule. Tam reikia žinoti vidutinį darbo užmokestį. Pagal oficialiosios statistikos portalo duomenis [9] 2019 metais vidutinis metinis darbo užmokestis buvo 15556 EUR. Tarkime, kad dydis DU_{vid} nekinta. Tada, paskaičiuosime, kiek valstybinė pensijų sistema surinks pinigų ateityje.

Pagal mirtingumo lentelės duomenis A.2 nustatysime skaičių žmonių, kurie 2021 metais mokės įmokas. Kadangi žmogus pradeda mokėti įmokas po 20 gimtadienio ir tęs mokėjimus iki 65 metų, tad reikia pradėti vertinti nuo tų asmenų, kurie 2019 metais buvo 18 metų amžiaus. Taigi, pritaikydami procentinį koeficientą P_c užrašysime bendrą visų įmokų mokėtojų skaičių 2021 metais:

$$\begin{aligned} Q_{dirb_{2021}} &= P_c \times \left(l_{18}p_{18}p_{19} + l_{19}p_{19}p_{20} + \cdots + l_{62}p_{62}p_{63}\right) \\ &= P_c \sum_{i=18}^{62} l_i p_i p_{i+1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Tada pertvarkydami (9) formulę gauname:

$$\begin{aligned} S_{paj_{2021}} &= T_{pm} \times DU_{vid} \times Q_{dirb_{2021}} \\ &= T_{pm} DU_{vid} P_c \sum_{i=18}^{62} l_i p_i p_{i+1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Toliau tęsdami procesą gauname paskutinius prognozės dydžius $Q_{dirb_{2030}}$ ir $S_{paj_{2030}}$:

$$Q_{dirb_{2030}} = P_c \times \left(l_9 p_9 p_{10} p_{11} \dots p_{19} + l_{10} p_{10} p_{11} p_{12} \dots p_{20} + \dots + l_{53} p_{53} p_{54} p_{55} \dots p_{63}\right)$$
$$= P_c \sum_{i=9}^{53} l_i \prod_{j=i}^{i+10} p_j, \tag{12}$$

$$S_{paj_{2030}} = T_{pm} DU_{vid} P_c \sum_{i=9}^{53} l_i \prod_{j=i}^{i+10} p_j. \tag{13}$$

Galime užrašyti bendro nario skaičiavimo formulę:

$$S_{paj_{2020+t}} = T_{pm} DU_{vid} P_c \sum_{i=19-t}^{63-t} l_i \prod_{j=i}^{i+t} p_j, \tag{14}$$

kur $t \in N$.

Tada, visos galimos pajamos 2021 - 2030 m. laikotarpiu $S_{B_{paj}}$ gali būti paskaičiuotas taip:

$$S_{B_{paj}} = \sum_{t=1}^{10} S_{paj_{2020+t}}$$
$$= T_{pm} DU_{vid} P_c \sum_{t=1}^{10} \sum_{i=19-t}^{63-t} l_i \prod_{j=i}^{i+t} p_j. \tag{15}$$

4 Pensijų sistemos rezervo prognozavimas

Kaip jau buvo minėta, rezervą prognozuosime naudodami prospektyvinį rezervo sudarymo metodą. Prospektyvinis rezervas tam tikru momentu t, kai išgyvenamumo funkcija $S(x) = i$, skaičiuojamas pagal formulę:

$$\overline{V}_i^{PRO}(t) = B_i(t,n)^{PRO} - P_i(t,n)^{PRO}, \tag{16}$$

kur $\overline{V}_i^{PRO}(t)$ – rezervas sukauptas prospektyviniu metodu;
$B_i(t,n)^{PRO}$ – visų galimų išmokų, mokamų intervale nuo t iki n, dabartinė aktuarinė vertė momentu t;
$P_i(t,n)^{PRO}$ – visų galimų įmokų, mokamų intervale nuo t iki n, dabartinė aktuarinė vertė momentu t.

Panaudodami prospektyvinį rezervo sudarymo principą galime užrašyti sukaupto rezervo formulę [3]. Laikysime, kad išmokos bus mokamos anuitetu. Tada rezervas momentu t, jei išmokos ir įmokos bus mokamos nuo momento u_1 iki momento u_2 gali būti paskaičiuotas pagal formulę:

$$\overline{V}^{PRO}(t) = \sum_{t=u_1}^{u_2} \nu^t b(t) - \sum_{t=u_1}^{u_2} \nu^t p(t), \tag{17}$$

kur ν yra diskonto daugiklis, kuris skaičiuojamas pagal formulę: $\nu = \frac{1}{1+i}$,
$b(t)$ yra momentu t mokamos anuitetų išmokos,
$p(t)$ yra momentu t gaunamos įmokos.
(17) formulė yra sudaryta iš dviejų dalių:

- Išmokų dabartinės vertės:
$$\sum_{t=u_1}^{u_2} \nu^t b(t); \tag{18}$$
- Įmokų dabartinės vertės:
$$\sum_{t=u_1}^{u_2} \nu^t p(t). \tag{19}$$

Laikydami, kad palūkanų norma i nekinta ir $i = 0,02$, paskaičiuosime diskonto daugiklį ν: $\nu = \frac{1}{1+0,02} = 0,980392157$. Tada pertvarkysime (18) formulę panaudodami išvesta (8)

formule ir užrašysime išmokų dabartinę vertę dešimties metų laikotarpiu:

$$\sum_{t=u_1}^{u_2} \nu^t b(t) = \sum_{t=u_1}^{u_2} \nu^t S_{B_{sp}}$$
$$= \sum_{t=u_1}^{u_2} \nu^t AM_{sp} P_c \sum_{t=1}^{10} \sum_{i=64-t}^{109-t} l_i \prod_{j=i}^{i+t} p_j. \tag{20}$$

Kadangi, skaičiuosime dabartinę išmokų vertę kiekvienais metais, galime pertvarkyti (20) formulę, kai $u_1 = 1$ iki $u_2 = 10$:

$$AM_{sp} P_c \sum_{t=1}^{10} \nu^t \sum_{i=64-t}^{109-t} l_i \prod_{j=i}^{i+t} p_j. \tag{21}$$

Analogiškai pertvarkysime (19) formulę. Paskaičiuosime visų pajamų dabartinę vertę naudodamiesi anksčiau išvesta (15) formule:

$$\sum_{t=u_1}^{u_2} \nu^t b(t) = \sum_{t=u_1}^{u_2} \nu^t S_{B_{paj}}$$
$$= \sum_{t=u_1}^{u_2} \nu^t T_{pm} DU_{vid} P_c \sum_{t=1}^{10} \sum_{i=19-t}^{63-t} l_i \prod_{j=i}^{i+t} p_j.$$

Visų pajamų dabartinė vertė, kai $u_1 = 1$ iki $u_2 = 10$ yra:

$$T_{pm} DU_{vid} P_c \sum_{t=1}^{10} \nu^t \sum_{i=19-t}^{63-t} l_i \prod_{j=i}^{i+t} p_j. \tag{22}$$

Naudojantis prieduose pateikta mirtingumo lentele bei visais apibrėžtais rodikliais, paskaičiuosime rezervą. Kad būtų patogiau, prisiminsime anksčiau išsivestus tolimesnei analizei reikalingus dydžius: $P_c = \frac{2794184}{7692072} = 0,36325505$; $AM_{sp} = 4133,04$; $DU_{vid} = 16303,2$; $T_{pm} = 8,72$; $\nu = 0,980392157$. Juos įstatome į (21) ir (22) formules ir naudodami Microsoft Excel skaičiuojame rezultatus:

- Būsimų išmokų dabartinė vertė 2021-2030 metų laikotarpiu imtinai:

$$B_{2021-2030}(1,10)^{PRO} = P_c AM_{sp} \sum_{t=1}^{10} \nu^t \sum_{i=64-t}^{109-t} l_i \prod_{j=i}^{i+t} p_j$$
$$\approx 1967385086\ EUR \approx 19,67\ mlrd.\ EUR. \tag{23}$$

- Būsimų įmokų dabartinė vertė 2021-2030 metų laikotarpiu imtinai:

$$P_{2021-2030}(1,10)^{PRO} = T_{pm} DU_{vid} P_c \sum_{t=1}^{10} \nu^t \sum_{t=1}^{10} \sum_{i=19-t}^{63-t} l_i \prod_{j=i}^{i+t} p_j$$
$$\approx 18774385336\ EUR \approx 18,77\ mlrd.\ EUR. \tag{24}$$

Tada įstatome gautas (23) ir (24) reikšmes į (16) formulę ir gauname pensijų sistemos rezervą:

$$\begin{aligned} \overline{V}^{PRO}_{2021-2030}(1) &= B_{2021-2030}(1,10)^{PRO} - P_{2021-2030}(1,10)^{PRO} \\ &= 19673850868 - 18774385336 = 899465531\ EUR. \\ &\approx 9\ mln.\ EUR. \end{aligned} \tag{25}$$

Taigi, gauname, kad suprognozuotas rezervas dešimties metų laikotarpiui, pradedant nuo 2021 metų ir baigiant 2030 metais, lygus apie 9 mln. eurų.

Kadangi, buvo daryta prielaida, kad žmonių skaičius pagal amžių mirtingumo lentelėje atitinka Lietuvos gyventojų proporciją, galime palyginti rezultatus su dabartine statistika. Pagal Valstybinio socialinio draudimo fondo skelbiamus duomenis [6], 2021 metais senatvės pensijos gavėjų skaičius yra 607800, o dirbančių žmonių skaičius - 1390500. Palyginsime su dydžiais $S_{sp_{2021}}$ ir $S_{paj_{2021}}$. Panaudojus (4) ir (11) formules gauname, kad šiame darbe suprognozuotas senatvės pensijos gavėjų skaičius 2021 metais yra 529929, o dirbančių žmonių skaičius lygus 1540813. Matome, kad faktiniai ir suprognozuoti dydžiai skiriasi, tačiau skirtumas nėra labai didelis. Kadangi suprognozuotas pensininkų skaičius yra mažesnis, negu faktinis skaičius, tad galime sakyti, kad suprognozuota išmokų suma yra mažesnė už sumą išmokų, kurią tikrai reikės išmokėti ateityje. Tačiau suprognozuotas skaičius dirbančių žmonių yra

didesnis už faktinį skaičių. Taip pat prognozuojant pajamų sumą, buvo pritaikytas mažesnis senatvės pensijos mokesčių tarifas. Tad, galime sakyti, kad suprognozuota pajamų suma bus mažesnė, negu faktinė pajamų suma. Tai reiškia, kad suprognozuoto rezervo gali nepakakti norint išlaikyti pensinio amžiaus žmones 10 metų laikotarpyje.

Išvados ir rekomendacijos

Viešoji pensijų sistema atlieka svarbų vaidmenį visų šalies gyventojų atžvilgiu. Tam, kad ši sistema veiktų sklandžiai ir jai netrūktų lėšų, gali būti sudaromas atitinkamo dydžio rezervas. Pagrindinis šio darbo aspektas panaudoti prospektyvinį rezervo sudarymo principą ir pritaikyti konkrečiai situacijai. Buvo sudarytos formulės, reikalingos pensijų sistemos išmokų ir įmokų prognozavimui. Nepriklausomai nuo turimų duomenų, formulės gali būti pritaikomos konkrečiai situacijai.

Šiame darbe, atliktas viešosios pensinės sistemos rezervo prognozavimas 2021-2030 metų laikotarpiui: suprognozuotos išlaidų sumos, kurias reikės išmokėti 10 metų laikotarpiu bei pensijų sistemos pajamos ir apskaičiuota jų dabartinė vertė. Gautas rezultatas parodė, kad nepriklausomai nuo to, jog dirbančiųjų kiekis visada yra didesnis negu pensininkų, viešajai pensijų sistemai reikalingas pakankamai ne mažo dydžio rezervas.

Kadangi darbe buvo daroma daug prielaidų apie konkrečių rodiklių pastovumą, rezultatas gali ne visai atitikti realią situaciją. Tęsiant tyrimą būtų galima atkreipti dėmesį į darbo užmokesčio, mokestinių tarifų ir pensijos dydžio kitimo tendencijas. Taip pat, prognozė būtų tikslesnė, jei būtų naudojami duomenys apie gyventojų pasiskirstymą pagal amžiaus grupes.

Literatūros sąrašas

[1] F. C. Bell, M. L. Miller. Life Tables for the United States Social Security Area 1900-2100, *SSA Pub.*, 2002, No. 11-11536, p. 1-6.

[2] Г. Фалин. *Основы актуарной и финансовой математики*, Maskva, p. 1-7.

[3] Г. Фалин, А.Фалин. *Актуарная математика в задачах*, Maskva: Физматлит, 2003, p. 170-171.

[4] D. Pattison. Social Security Trust Fund Cash Flows and Reserves, *Social Security Bulletin*, 2015, 75, p. 1-22.

[5] E. V. Slud. Basics of Probability and the Theory of Interest, *Actuarial Mathematics and Life-Table Statistics*, University of Maryland, College Park, 2001, p. 1-8.

[6] Atvira Sodra, Pensijos, `https://atvira.sodra.lt/lt-eur`.

[7] Lietuvos oficialiosios statistikos portalas, `https://osp.stat.gov.lt`.

[8] Lietuvos oficialiosios statistikos portalas, Lietuvos gyventojai, `https://osp.stat.gov.lt/lietuvos-gyventojai-2020/salies-gyventojai/gyventoju-skaicius-ir-sudetis`.

[9] Lietuvos oficialiosios statistikos portalas, Darbo užmokestis ir pensija, `https://osp.stat.gov.lt/spaudos-konferencija/2020-01-30/socialine-statistika/darbo-uzmokestis-ir-pensija#`

[10] Sodra, Senatvės pensijos amžiaus skaičiuoklė, `https://www.sodra.lt/lt/skaiciuokles/senatves_pensijos_amziaus_skaiciuokle`.

[11] Sodra, Įmokų tarifai, `https://www.sodra.lt/lt/situacijos/imoku-tarifai`.

[12] Valstybinio socialinio draudimo fondo biudžeto planavimo tvarkos aprašas, 2014, p. 4.

A Priedai

A.1 Žymėjimų sąrašas

- Q_{sp}– vidutinis senatvės pensijų gavėjų skaičius, kur Q (angl. quantity);
- AM_{sp}– lauktinas vidutinis pensijos dydis, kur AM (angl. amount);
- S_{sp}– senatvės pensijų suma, kur S (angl. sum);
- P_c - nuolatinių gyventojų proporcinis koeficientas;
- Q_{dirb} – vidutinis dirbančių žmonių skaičius, kur Q (angl. quantity) ir $dirb$ - dirbantys žmonės;
- T_{pm} – pensijų socialiniam draudimui mokestinis tarifas, kur T (angl. taxes) ir pm - pensinis mokestis;
- DU_{vid} – vidutinis darbo užmokestis prieš išskaitant mokesčius;
- S_{paj} – pensijų sistemos pajamų suma per vienerius metus, kur S (angl. sum) ir paj - pajamos;
- $\overline{V}_i^{PRO}(t)$ – sukauptas rezervas prospektyviniu metodu;
- $B_i(t,n)^{PRO}$ – visų galimų išmokų, mokamų intervale nuo t iki n, dabartinė aktuarinė vertė momentu t;
- $P_i(t,n)^{PRO}$ – visų galimų įmokų, mokamų intervale nuo t iki n, dabartinė aktuarinė vertė momentu t.

A.2 2019 metų mirtingumo lentelė

Amžius	m_x	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x
0	0.00324	0.00323	100000	323	99723	7641957	76.42
1	0.00021	0.00021	99677	21	99667	7542233	75.67
2	0.00003	0.00003	99656	3	99655	7442567	74.68
3	0.00007	0.00007	99653	6	99650	7342912	73.68
4	0.00010	0.00010	99647	10	99642	7243262	72.69
5	0.00007	0.00007	99637	7	99633	7143620	71.70
6	0.00010	0.00010	99630	10	99625	7043987	70.70
7	0.00011	0.00011	99619	11	99614	6944363	69.71
8	0.00017	0.00017	99609	17	99600	6844748	68.72
9	0.00024	0.00024	99592	24	99580	6745148	67.73
10	0.00014	0.00014	99568	14	99561	6645568	66.74
11	0.00015	0.00015	99554	15	99546	6546007	65.75
12	0.00008	0.00008	99539	8	99535	6446461	64.76
13	0.00020	0.00020	99531	20	99521	6346926	63.77
14	0.00004	0.00004	99511	4	99509	6247405	62.78
15	0.00043	0.00043	99507	43	99486	6147896	61.78
16	0.00040	0.00040	99465	39	99445	6048410	60.81
17	0.00031	0.00031	99425	31	99410	5948965	59.83
18	0.00058	0.00058	99394	57	99366	5849555	58.85
19	0.00068	0.00068	99337	68	99303	5750190	57.89
20	0.00069	0.00069	99269	69	99235	5650887	56.93
21	0.00075	0.00075	99200	75	99163	5551652	55.96
22	0.00058	0.00058	99125	57	99097	5452490	55.01
23	0.00085	0.00085	99068	84	99026	5353393	54.04
24	0.00074	0.00074	98984	73	98947	5254367	53.08
25	0.00071	0.00071	98910	70	98875	5155420	52.12

26	0.00090	0.00090	98840	89	98795	5056545	51.16
27	0.00052	0.00052	98751	51	98725	4957750	50.20
28	0.00109	0.00109	98699	107	98646	4859025	49.23
29	0.00125	0.00125	98592	124	98530	4760379	48.28
30	0.00124	0.00124	98469	122	98408	4661848	47.34
31	0.00122	0.00122	98347	120	98287	4563441	46.40
32	0.00136	0.00135	98227	133	98160	4465154	45.46
33	0.00149	0.00149	98094	146	98021	4366993	44.52
34	0.00181	0.00181	97948	177	97859	4268973	43.58
35	0.00214	0.00214	97770	209	97666	4171114	42.66
36	0.00162	0.00162	97561	158	97483	4073448	41.75
37	0.00177	0.00176	97404	172	97318	3975965	40.82
38	0.00244	0.00243	97232	236	97113	3878648	39.89
39	0.00291	0.00291	96995	282	96854	3781534	38.99
40	0.00242	0.00242	96713	234	96597	3684680	38.10
41	0.00344	0.00344	96480	332	96314	3588083	37.19
42	0.00295	0.00295	96148	284	96006	3491769	36.32
43	0.00294	0.00294	95864	282	95723	3395763	35.42
44	0.00329	0.00329	95583	314	95425	3300040	34.53
45	0.00334	0.00333	95268	317	95110	3204614	33.64
46	0.00484	0.00483	94951	459	94722	3109505	32.75
47	0.00446	0.00445	94492	420	94282	3014783	31.91
48	0.00485	0.00484	94072	456	93844	2920501	31.05
49	0.00552	0.00550	93616	515	93359	2826657	30.19
50	0.00442	0.00441	93101	411	92896	2733298	29.36
51	0.00663	0.00660	92691	612	92385	2640402	28.49
52	0.00668	0.00666	92079	613	91772	2548018	27.67
53	0.00701	0.00699	91465	639	91145	2456246	26.85
54	0.00786	0.00783	90826	712	90470	2365100	26.04

55	0.00833	0.008297	90114	747	89741	2274630	25.24
56	0.00906	0.00902	89367	806	88964	2184889	24.45
57	0.00910	0.00906	88561	802	88160	2095925	23.67
58	0.00990	0.00985	87759	864	87327	2007765	22.88
59	0.01207	0.01199	86895	1042	86374	1920438	22.10
60	0.01211	0.01204	85853	1034	85336	1834065	21.36
61	0.01319	0.01310	84819	1111	84263	1748729	20.62
62	0.01392	0.01382	83708	1157	83129	1664465	19.88
63	0.01622	0.01609	82551	1328	81887	1581336	19.16
64	0.01720	0.01705	81223	1385	80530	1499449	18.46
65	0.01992	0.01972	79838	1574	79050	1418919	17.77
66	0.02188	0.02164	78263	1694	77416	1339869	17.12
67	0.02104	0.02082	76569	1594	75772	1262453	16.49
68	0.02196	0.02173	74975	1629	74161	1186680	15.83
69	0.02387	0.02359	73346	1730	72481	1112519	15.17
70	0.02521	0.02489	71616	1783	70725	1040038	14.52
71	0.02435	0.02406	69833	1680	68993	969314	13.88
72	0.02811	0.02772	68153	1890	67208	900321	13.21
73	0.03216	0.03165	66264	2097	65215	833112	12.57
74	0.03290	0.03237	64166	2077	63128	767897	11.97
75	0.03806	0.03735	62089	2319	60930	704769	11.35
76	0.03966	0.03889	59770	2324	58608	643840	10.77
77	0.04278	0.04188	57446	2406	56243	585232	10.19
78	0.04633	0.04528	55040	2492	53794	528989	9.61
79	0.04525	0.04425	52548	2325	51385	475195	9.04
80	0.05411	0.05269	50222	2646	48899	423810	8.44
81	0.06090	0.05910	47576	2812	46171	374911	7.88
82	0.06934	0.06701	44765	3000	43265	328740	7.34
83	0.07687	0.07403	41765	3092	40219	285475	6.84

84	0.08920	0.08539	38673	3302	37022	245256	6.34
85	0.10208	0.09712	35371	3435	33653	208235	5.89
86	0.11666	0.11023	31935	3520	30175	174582	5.47
87	0.13179	0.12364	28415	3513	26658	144407	5.08
88	0.14271	0.13321	24902	3317	23243	117748	4.73
89	0.15461	0.14351	21585	3098	20036	94505	4.38
90	0.18894	0.17263	18487	3191	16891	74469	4.03
91	0.19074	0.17414	15296	2664	13964	57578	3.76
92	0.22069	0.19876	12632	2511	11377	43614	3.45
93	0.25780	0.22836	10121	2311	8966	32237	3.19
94	0.26466	0.23373	7810	1825	6897	23271	2.98
95	0.30515	0.26476	5985	1584	5192	16374	2.74
96	0.33578	0.28751	4400	1265	3768	11181	2.54
97	0.36800	0.31081	3135	974	2648	7414	2.36
98	0.40158	0.33443	2161	723	1799	4766	2.21
99	0.43626	0.35814	1438	515	1181	2967	2.06
100	0.47171	0.38169	923	352	747	1786	1.94
101	0.50757	0.40483	571	231	455	1039	1.82
102	0.54347	0.42735	340	145	267	584	1.72
103	0.57903	0.44903	195	87	151	317	1.63
104	0.61388	0.46971	107	50	82	166	1.55
105	0.64768	0.48924	57	28	43	84	1.48
106	0.68014	0.50754	29	15	22	41	1.42
107	0.71101	0.52453	14	7	11	20	1.37
108	0.74009	0.54019	7	4	5	9	1.32
109	0.76724	0.55452	3	2	2	4	1.28
110+	0.79239	1.00000	1	1	2	2	1.26

1 lentelė: 2019 metų mirtingumo lentelė