

VILNIAUS UNIVERSITETAS MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS
FAKULTETAS FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS
BAKALAURO STUDIJŲ PROGRAMA

Bakalauro baigiamasis darbas

Sunkiauodegių skirstinių klasės
Classes of Heavy-Tailed Distributions

Rokas Mizeikis

Darbo vadovas prof. dr. Jonas Šiaulyš

Vilnius, 2021

Turinys

1	Įvadas	4
2	Apibrėžimai ir žymėjimai	4
2.1	Bendri žymėjimai	4
2.2	Skirstinių klasės	5
3	Klasių tarpusavio įdėjimai	5
3.1	Jei $F \in \mathcal{C}$, tada $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$	6
3.1.1	Jei $F \in \mathcal{C}$, tada $F \in \mathcal{L}$	6
3.1.2	Jei $F \in \mathcal{C}$, tada $F \in \mathcal{D}$	6
3.2	Jei $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$, tada $F \in \mathcal{S}$	7
3.3	Jei $F \in \mathcal{S}$, tada $F \in \mathcal{L}$	7
3.4	Jei $F \in \mathcal{L}$, tada $F \in \mathcal{H}$	8
3.5	Jei $F \in \mathcal{D}$, tada $F \in \mathcal{H}$	8
3.6	$\mathcal{D} \not\subset \mathcal{S}$ ir $\mathcal{S} \not\subset \mathcal{D}$	8
4	\mathcal{H} klasė	9
4.1	Savybės	9
4.1.1	Begalinė dispersija	9
4.1.2	Sąlyginio vidurkio viršijimas	9
5	\mathcal{L} klasė	9
5.1	Savybės	10
5.1.1	h -nejautrumas	10
5.1.2	Kitos savybės	10
6	\mathcal{S} klasė	10
6.1	Savybės	11
6.1.1	Uodega leidžiasi lėčiau nei bet kokios eksponentės uodega	11
6.1.2	Neturi eksponentinių momentų	11
6.1.3	Kitos savybės	11
7	\mathcal{D} klasė	11
7.1	Savybės	11
7.1.1	Tolygus konvergavimas	11
7.1.2	Kitos savybės	12
8	\mathcal{C} klasė	12
8.1	Savybės	12

9	Skirstinių pavyzdžiai	12
9.1	Pareto skirstinys	13
9.1.1	\mathcal{H} klasė	13
9.1.2	\mathcal{L} klasė	13
9.1.3	\mathcal{D} klasė	13
9.1.4	\mathcal{C} klasė	14
9.1.5	\mathcal{S} klasė	14
9.2	Diskretusis Weibull skirstinys	14
9.2.1	\mathcal{H} klasė	14
9.2.2	\mathcal{L} klasė	14
9.2.3	\mathcal{D} klasė	15
9.2.4	\mathcal{C} klasė	15
9.2.5	\mathcal{S} klasė	15
9.3	Cauchy skirstinys	15
9.3.1	\mathcal{H} klasė	16
9.3.2	\mathcal{L} klasė	16
9.3.3	\mathcal{D} klasė	17
9.3.4	\mathcal{C} klasė	17
9.3.5	\mathcal{S} klasė	17
9.4	Lognormalusis skirstinys	18
9.4.1	\mathcal{H} klasė	18
9.4.2	\mathcal{L} klasė	19
9.4.3	\mathcal{D} klasė	20
9.4.4	\mathcal{C} klasė	21
9.4.5	\mathcal{S} klasė	21
9.5	Generalizuoto Peter and Paul skirstinys	21
9.5.1	\mathcal{H} klasė	22
9.5.2	\mathcal{L} klasė	22
9.5.3	\mathcal{D} klasė	23
9.5.4	\mathcal{C} klasė	23
9.5.5	\mathcal{S} klasė	23
10	Išvados	23

Sunkiauodegių skirstinių klasės

Santrauka

Darbe nagrinėjama sunkiauodegių skirstinių klasės \mathcal{H} , \mathcal{L} , \mathcal{S} , \mathcal{D} ir \mathcal{C} , jų tarpusavio įdėjimai, įdėjimų įrodymai. Taip pat pateikiami keli skirstinių pavyzdžiai ir jų priskyrimai jiems tinkamoms klasėms.

Raktiniai žodžiai : Sunkiauodegiai skirstiniai, ilgauodegiai skirstiniai, subeksponentiniai skirstiniai, H klasė, L klasė, S klasė, D klasė, C klasė, Pareto, Diskretusis Weibull, Cauchy, Lognormalusis, Peter and Paul.

Classes of Heavy-Tailed Distributions

Abstract

In this bachelor thesis, we explore \mathcal{H} , \mathcal{L} , \mathcal{S} , \mathcal{D} and \mathcal{C} classes of heavy-tailed distributions, relationship between these classes and proofs of these relationships. We also show a few examples of such distributions and check which distributions belong to which classes.

Key words : Heavy-tailed distributions, Long-tailed distributions, Subexponential distributions, H class, L class, S class, D class, C class, Pareto, Discrete Weibull, Cauchy, Lognormal, Peter and Paul.

1 Įvadas

Matematikoje dažniausiai naudojami mums gerai pažįstami skirstiniai - Normalusis, Bernulio, Binominis, Tolygusis ar Puasono. Tačiau kartais mums reikia įvertinti dydžius, kurių pavienės reikšmės smarkiai skirias nuo kitų. Kai kalbame apie tokių dydžių skirstinius, dažniausiai tikimės ir nuokrypio nuo "normalaus elgesio", kuris ir yra sukliamas tų pavienių dydžių. Šie skirstiniai ilgą laiką buvo laikomi išskirtinai keistais, nors akademikai intensyviai juos tyrė keletą dešimtmečių. Ir tik dvidešimto amžiaus pabaigoje tokie skirstiniai pradėti priimti kaip realistiški įvairių įvykių modeliai [1]. Tai gali būti draudimo išmokos, žmonių pajamos ar bet kokie kiti dydžiai, kurių pavienės reikšmės gali stipriai išsiskirti iš konteksto. Tokiu atveju galime naudoti sunkiauodegius skirstinius, apie kurių klases šiame darbe ir kalbėsime.

Sunkiauodegiai skirstiniai yra svarbūs stochastinėje analizėje - modeliuojant komunikacijos tinklų veiklą, epidemiologinę sklaidą, naudojami aprašant rizikos procesus, taip pat yra įrodymų, kad jie yra pritaikomi fizikoje, geomoksluose ir ekonomikos moksle. Keli pavyzdžiai, kuriuos vėliau aptarsime yra Pareto skirstinys, Lognormalusis skirstinys, Weibull skirstinys, Peter and Paul skirstinys.

Vienas iš pavyzdžių, kur gali praversti sunkiauodegių skirstinių modeliai yra žmonių pajamų pasiskirstymas. Nors daugumos žmonių pajamos dažniausiai yra pasiskirstę gana tolydžiai, tačiau smarkiai išsiskiria didžiausias pajamas gaunantys žmonės, kurios gali būti didesnės šimtus ar tūkstančius kartų. Tokiu atveju, vidurkis gali prarasti prasmę ir suteikti mažai informacijos apie atsitiktinį dydį. Sunkiauodegiams skirstiniams dažnai negalime taikyti centrinės ribinės teoremos, nes jų dėmenų dispersija gali būti begalinė. Taip pat kartais neegzistuoja kai kurie skirstinio momentai, todėl turime naudoti neparametrinės statistikos metodus. Praktikoje sunkiauodegiai skirstiniai dažnai yra ir ilgauodegiai bei turi stipresnę subekspONENTIŠKUMO savybę [2].

Sunkiauodegiai skirstiniai yra suskirstyti į klases, kurios ir bus šio darbo pagrindinė tema. Kalbėsime apie \mathcal{H} klasę, kuri apima visus sunkiauodegius skirstinius, taip pat jos poklasius \mathcal{L} , \mathcal{S} , \mathcal{D} ir \mathcal{C} . Kiekviena klasė turi sau būdingas savybes. Kai kurios klasės taip pat gali būti kitų klasių poklasiai.

2 Apibrėžimai ir žymėjimai

2.1 Bendri žymėjimai

Prieš aptariant klases, aptarsime šiame darbe naudojamus žymėjimus [3]. Funkcijos f ir g yra teigiamos. Bet kuriam atsitiktiniam dydžiui X , $F_X(x)$ žymi pasiskirstymo funkciją (p.f.), o $\overline{F}(x)$ žymi p.f. uodegos funkciją. Taip pat jei X_1, X_2, \dots, X_n yra nepriklausomos X kopijos, tada $F_X^{*n}(x)$ žymi n laipsnio p.f. F sąsuką, o $\overline{F_X^{*n}}(x)$ - tos sąsukos uodegos funkciją. Tada rašome:

- $f(x) \sim g(x)$, jei $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
- $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$
- $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$
- $F_X^{*n}(x) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x)$
- $\bar{F}_X^{*n}(x) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x)$

2.2 Skirstinių klasės

Sunkiauodegių skirstinių klasės bus pagrindinis šio darbo tyrimo objektas, todėl svarbu paminėti jų apibrėžimus [4], [3]. Pradėsime nuo \mathcal{H} klasės apibrėžimo, kadangi visos kitos tiriamos klasės bus šios klasės poklasiai.

p.f. F priklauso \mathcal{H} klasei, jei bet kuriam fiksuotam $\delta > 0$ turime

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x)e^{\delta x} = \infty.$$

Kitų klasių apibrėžimai:

- Sakome, kad p.f. F priklauso \mathcal{L} klasei, jei bet kuriam $y \in (0, \infty)$
 $\bar{F}(x+y) \sim \bar{F}(x)$, t.y. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = 1$.

- Sakome, kad p.f. F priklauso \mathcal{D} klasei, jei bet kuriam $y \in (0, 1)$
 $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} < \infty$.

- Sakome, kad p.f. F priklauso \mathcal{C} klasei, jei
 $\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} = 1$.

- Sakome, kad p.f. F priklauso \mathcal{S} klasei, jei
 $\bar{F}^{*2}(x) \sim 2\bar{F}(x)$, t.y. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}^{*2}(x)}{2\bar{F}(x)} = 1$.

Taip pat naudojantis [5], galime parodyti, kad jei $F \in \mathcal{D}$ ir bet kuriam $y \in (0, \infty)$

$$\bar{F}(x-y) \sim \bar{F}(x), \text{ t.y. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} = 1, \text{ tai } F \in \mathcal{S}.$$

Kitaip tariant jei $F \in \mathcal{D}$ ir $F \in \mathcal{L}$, tada ir $F \in \mathcal{S}$.

3 Klasių tarpusavio įdėjimai

Yra žinoma [6], kad

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{H}, \quad \mathcal{D} \subset \mathcal{H}, \quad \mathcal{D} \not\subset \mathcal{S} \text{ ir } \mathcal{S} \not\subset \mathcal{D}.$$

Šiame skyrelyje pateiksime to įrodymus.

3.1 Jei $F \in \mathcal{C}$, tada $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$

3.1.1 Jei $F \in \mathcal{C}$, tada $F \in \mathcal{L}$

Jeigu $F \in \mathcal{C}$, tai pagal apibrėžimą $\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1$. Bet kuriam $x \geq 1$ turime, $\frac{\overline{F}(x-1)}{\overline{F}(x)} \geq 1$, todėl

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-1)}{\overline{F}(x)} = 1 \quad (1)$$

Antra vertus, bet kuriam $\epsilon \in (0, 1)$,

$$\frac{\overline{F}(x-1)}{\overline{F}(x)} = \frac{\overline{F}(x(1 - \frac{1}{x}))}{\overline{F}(x)} \leq \frac{\overline{F}(x(1 - \epsilon))}{\overline{F}(x)}$$

Vadinasi

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x(1 - \epsilon))}{\overline{F}(x)}$$

Vadinasi

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-1)}{\overline{F}(x)} \leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x(1 - \epsilon))}{\overline{F}(x)} = \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1$$

Taigi,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-1)}{\overline{F}(x)} \leq 1 \quad (2)$$

Iš (1) ir (2) išplaukia, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-1)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(x+1)} = 1$$

Taigi, $F \in \mathcal{L}$ ir todėl $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}$.

3.1.2 Jei $F \in \mathcal{C}$, tada $F \in \mathcal{D}$

Jeigu $F \in \mathcal{C}$, tai pagal apibrėžimą $\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1$. Pagal ribos apibrėžimą \exists toks $\delta > 0$, kad

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \leq \frac{3}{2}, \text{ jeigu } y \in [1 - \epsilon, 1].$$

Iš čia

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}\left(\frac{2^N - 1}{2^N}x\right)}{\overline{F}(x)} \leq \frac{3}{2}, \text{ kažkokiam } N \in \mathbb{N}.$$

Iš to išplaukia, kad $\overline{F} \in \mathcal{D}$ ir $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. Galime daryti išvadą, kad $\mathcal{C} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$.

3.2 Jei $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$, tada $F \in \mathcal{S}$

[7][1.4.4 teiginys] Kai $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 2 \int_0^{x/2} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) + \frac{(\overline{F}(x/2))^2}{\overline{F}(x)} \\ &= 2 \int_0^{x/2} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) + o(1) \end{aligned} \quad (3)$$

Kur $o(1)$ yra pasekmė $F \in \mathcal{D}$. Visiems $0 \leq y \leq x/2$,

$$\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \leq \frac{\overline{F}(x/2)}{\overline{F}(x)}, \quad (4)$$

dėl to, kad $F \in \mathcal{D}$, galime pritaikyti dominuojamo konvergavimo teoremą ir gauti, kad integralas konverguoja į 1. Todėl $F \in \mathcal{S}$.

3.3 Jei $F \in \mathcal{S}$, tada $F \in \mathcal{L}$

[7][1.3.5(a) lema] Galime parodyti, kad jeigu $F \in \mathcal{S}$, tai

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1. \quad (5)$$

Tai yra analogiška mūsų \mathcal{L} klasės apibrėžimui.

Kai $x \geq y > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + \int_0^y \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) + \int_y^x \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) \\ &\geq 1 + F(y) + \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}(F(x) - F(y)). \end{aligned} \quad (6)$$

Pakankamai dideliems x , kad $F(x) - F(y) \neq 0$, todėl

$$1 \leq \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \leq \left(\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(y) \right) (F(x) - F(y))^{-1}.$$

Paskutiniame įvertiniame dešinė pusė artėja prie 1, kai $x \rightarrow \infty$. Todėl perėjus prie ribos, gaunam (5) savybę.

3.4 Jei $F \in \mathcal{L}$, tada $F \in \mathcal{H}$

[7][Pastaba 4 po 1.3.5(b)] Šis įrodymas išplaukia iš (5) savybės. Jei ji teisinga, tada visiems $\epsilon > 0$,

$$e^{\epsilon x} \overline{F}(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Ši lema kartu ir paaiškina, kodėl tokie skirstiniai vadinami subeksponentiniais. $\overline{F}(x)$ leidžiasi į 0 lėčiau nei bet kuri eksponentė $e^{-\epsilon x}$, $\epsilon > 0$. Taip pat, kadangi bet kuriam $\epsilon > 0$:

$$\int_y^\infty e^{\epsilon x} dF(x) \geq e^{\epsilon y} \overline{F}(y), \quad y \geq 0,$$

iš lemos (7) seka, kad $F \in \mathcal{S}$, $\hat{f}(-\epsilon) = \infty$ visiems $\epsilon > 0$. Todėl Laplace-Stieltjes subeksponentinio pasiskirstymo funkcijos transformacija turi esminį singuliarumą taške 0. Šis rezultatas pirmą kartą buvo įrodytas Chistyakov antrojo teoremoj.

3.5 Jei $F \in \mathcal{D}$, tada $F \in \mathcal{H}$

Jeigu $F \in \mathcal{D}$, tai pagal [8][2.2.7] reprezentacinę lygtį

$$\overline{F}(x) = \exp \left\{ -\eta(x) - \int_1^x \frac{\xi(t)}{t} dt \right\} \quad (x \geq 1) \quad (8)$$

Kur $\eta(x), \xi(x)$ yra aprėžtos ir mačios, $\beta \leq \xi(t) \leq \alpha, \alpha > 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{\delta x} &\geq \int_0^\infty e^{\delta x} dF(x) = \delta \int_0^\infty e^{\delta x} \overline{F}(x) dx = \delta \int_0^\infty e^{\delta x} \exp \left\{ -\eta(x) - \int_1^x \frac{\xi(t)}{t} dt \right\} dx \\ &\geq \delta e^{-\sup \eta(x)} \int_0^\infty e^{\delta x} \exp \left\{ -\alpha \int_1^x \frac{dt}{t} \right\} dx = \delta e^{-\sup \eta(x)} \int_0^\infty e^{\delta x} e^{\alpha \ln x} dx \\ &= \delta e^{-\sup \eta(x)} \int_0^\infty \frac{e^{\delta x}}{x^\alpha} dx = \infty \end{aligned}$$

Taigi, $F \in \mathcal{H}$ ir $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$.

3.6 $\mathcal{D} \not\subset \mathcal{S}$ ir $\mathcal{S} \not\subset \mathcal{D}$

[5] Jeigu $F \in \mathcal{D}$, gali būt, kad $F \notin \mathcal{S}$. Pateiksime pavyzdį.

Peter and Paul skirstinys parodo, kad $\mathcal{D} \not\subset \mathcal{S}$, nes šiam skirstiniui $\frac{\overline{F}(2^k - 1)}{\overline{F}(2^k)} = 2$ su visais $k = 1, 2, \dots$, todėl jis netenkinta Teugels (1975) 3 lemos. Kita vertus, $\frac{\overline{F}(\frac{1}{2}x)}{\overline{F}(x)} = 2$ visiems $x \geq 2$, todėl $F \in \mathcal{D}$.

Kad $\mathcal{S} \not\subset \mathcal{D}$ yra teisinga, galime įsitikinti, jeigu imsime pasiskirstymo funkciją $F(x) = 1 - \exp(-\sqrt{x}), x > 0$. Toks skirstinys priklauso \mathcal{S} dėl Teugels, išvadų 2(ii).

4 \mathcal{H} klasė

\mathcal{H} skirstinių klasė yra didžiausia iš šiame darbe aptariamų klasių ir visi skirstiniai, kuriuos tirsime, bus šios klasės nariai. \mathcal{H} klasė pavadinimas kilęs nuo pilno šios skirstinių grupės angliško pavadinimo „Heavy tailed“. Yra įrodymų, kad šios klasės skirstiniai realybėje pasitaiko dažniau nei galėtume pagalvoti pagal jų naudojimo modeliuojant retumą [9]. Pavyzdžiui, Mielke tirdamas kritulių duomenis, pastebėjo, kad jie labiau atitinka Kappa skirstinį su funkcija

$$F(x) = [x^{\alpha\theta}/(\alpha + x^{\alpha\theta})]^{1/\alpha}$$

nei Gamma skirstinį. Granger ir Orr pasiūlė naudoti begalinės dispersijos stabilius skirstinius įvairiems ekonominių duomenų tipams. Panašūs skirstiniai gali būti pritaikomi ir hidrologijoje.

Praktiškai kalbant, sunkiauodegiai skirstiniai turi tankio funkcijas, kurios leidžiasi lėčiau nei eksponentinė funkcija. Iš apibrėžimų galime pamatyti, kaip toks apibūdinimas atsispindi ir teorijoje.

4.1 Savybės

4.1.1 Begalinė dispersija

[10] Tokia idėja buvo iškelta ir empiriškai patvirtinta XXa. 7 dešimtmetyje matematiko Benoit Mandelbrot. Jis parodė, kad dideli svyravimai atitinka Pareto pasiskirstymą su tankio funkcija $f(x) = A * x^{-\alpha}$, kai $x \geq x_0$ ir $\alpha \approx 2.7$. Šio skirstinio dispersija yra begalinė. Šis rezultatas kartu su kitais sunkiauodegių skirstinių dėsnių atradimais buvo fraktalų teorijos ištakos.

4.1.2 Sąlyginio vidurkio viršijimas

[9] Kalbant apie sunkiauodegius skirstinius dažnai minima, kad pavienės reikšmės savo verte "labai" išsiskiria iš konteksto ir yra nutolusios nuo daugumos. Tačiau būdami konkretesni, galime įvesti sąlyginio vidurkio viršijimo apibrėžimą:

$$SVV_x = \mathbb{E}(X - x | X \geq x)$$

Kitais žodžiais, SVV_x yra vidutinis skirtumas, kiek atsitiktinis dydis X viršija duotą x , su sąlyga, kad skirtumas yra neneigiamas. Kaip galime spėti, vidutinis skirtumas didėja, kai tolstame į skirstinio uodegą.

5 \mathcal{L} klasė

Dauguma praktikoje sutinkamų skirstinių, kurie priklauso \mathcal{H} klasei, taip pat priklauso ir \mathcal{L} klasei. Taip pat, kadangi \mathcal{L} yra didžiausias \mathcal{H} klasės poklasis, todėl jos dalinasi daugumataų pačių pritaikymų ir savybių. Šios klasės skirstiniai naudojami daugeliui interneto eros fenomenų modeliuoti, pavyzdžiui, elektroninių parduotuvių pardavimams - keletas prekių

bus nuperkamos daugybę kartų, o likusi dauguma daug mažiau. Dėl jų pritaikymo, tokie skirstiniai dabar išpopuliarėjo tarp statistikų ir duomenų analitikų.

5.1 Savybės

5.1.1 h -nejautrumas

[11] Svarbi \mathcal{L} klasės savybė, kuri apibrežiama taip:

Jeigu turime griežtai teigiamą nemažėjančią funkciją h , teigiama pakankamai dideliems x funkcija F vadinama h -nejautria, jeigu

$$\sup_{|y| \leq h(x)} |F(x+y) - F(x)| = o(F(x)), \text{ kai } x \rightarrow \infty, \text{ tolygiai, kai } |y| \leq h(x).$$

Iš apibrėžimo aišku, kad $F \in \mathcal{L}$ ir atvirkščiai, kad visos šios klasės funkcijos yra h -nejautrios bet kuriai funkcijai h . Ši savybė palengvina kai kurių teoremų įrodymą, nes leidžia sumažinti operacijų skaičių ir pati išraiška yra paprastesnė ir aiškesnė.

5.1.2 Kitos savybės

[11] Tarkime, kad funkcijos F_1, \dots, F_n priklauso klasei \mathcal{L} . Tada

- (i) Konstantoms c_1 ir c_2 , kur $c_2 > 0$, funkcija $F_1(c_1 + c_2x) \in \mathcal{L}$
- (ii) Jeigu $F \sim \sum_{k=1}^n c_k F_k$, kur $c_1, \dots, c_n > 0$, tada $F \in \mathcal{L}$
- (iii) Sandaugų funkcija $F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_n \in \mathcal{L}$
- (iv) Funkcija $\min(F_1, \dots, F_n) \in \mathcal{L}$
- (v) Funkcija $\max(F_1, \dots, F_n) \in \mathcal{L}$

6 \mathcal{S} klasė

Praktikoje taikomi sunkiauodegiai skirstiniai dažniausiai priklauso ne tik \mathcal{L} klasei, bet ir jos poklasiui \mathcal{S} . Iš esmės, tai reikalinga norint gauti geidžiamą uodegos elgesį atliekant sąsukos operacijas [2]. Nors ir iš pradžių nėra akivaizdu iš šios klasės apibrėžimo, bet subeksponentiškumas yra skirstinio uodegos savybė. Nors šiame darbe to detaliau ir neaptarsime, tačiau verta paminėti, kad ši klasė turi dažnai naudojamą poklasį, žymimą \mathcal{S}^* ir vadinamą stipriu subeksponentiniu. Praktikoje dažnai naudojami skirstiniai priklauso ir šiam poklasiui.

[12] \mathcal{S} klasės skirstiniai dažniausiai naudojami draudimo nuo gamtos stichijų modeliuose. Tokie draudiminiai įvykiai gali būti atsakingi už didelį viso įmonės portfelio svyravimą, didindami to portfelio riziką. Dėl to tikslūs modeliai tokiems įvykiams yra ypač svarbūs. Tokie skirstiniai taip pat taikomi eilių teorijoje. Situacijos, kai aptarnavimo laikas yra pasiskirstęs pagal subeksponentinį skirstinį, kraštutiniais atvejais turi įtakos dideliems laukimo laikams sistemoje.

6.1 Savybės

6.1.1 Uodega leidžiasi lėčiau nei bet kokios eksponentės uodega

[12] Iš šios savybės ir kyla šios klasės pavadinimas. Tokią savybę galime užrašyti taip:
$$\frac{\overline{F}(x)}{e^{-\epsilon x}} \rightarrow \infty, \quad \forall \epsilon > 0$$

6.1.2 Neturi eksponentinių momentų

[12] Ši savybė neleidžia taikyti metodų, kurie reikalauja eksponentinio momento egzistavimo. Ją užrašome taip:

$$\int_0^\infty e^{\epsilon x} dF(x) = \infty, \quad \forall \epsilon > 0$$

6.1.3 Kitos savybės

[7]

(i) Jeigu $F \in \mathcal{S}$, tai tolygiai pagal y visuose uždaruose intervaluose

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1.$$

(ii) Jeigu (i) teisinga, tada $\forall \epsilon > 0$,

$$e^{\epsilon x} \overline{F}(x) \rightarrow \infty, \text{ kai } x \rightarrow \infty.$$

(iii) Jeigu $F \in \mathcal{S}$ ir $\epsilon > 0$, egzistuoja baigtinė konstanta K tokia, kad $\forall n \geq 2$ turime

$$\frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq K(1+\epsilon)^n, \text{ kai } x \geq 0.$$

7 \mathcal{D} klasė

\mathcal{D} skirstinių klasė praktiniuose pritaikimuose yra naudojama rečiau negu anksčiau minėtos klasės. Šios klasės pavadinimas kilęs nuo angliško pavadinimo „Dominatedly varying“, tačiau kituose šaltiniuose galima rasti ir pavadinimą „O-regularly varying“ ir žymimą OR [8]. Tokie skirstiniai buvo tiriami ir aprašyti jau XX a. 4 deš. (Avakumović (1936), Karamata (1936)), bet tolimesni tyrimai tęsėsi tik nuo to paties amžiaus 7 deš. (Matuszewska (1965), Feller(1969), Seneta (1976), Aljančić ir Arandjelović(1977), Maller (1977)).

7.1 Savybės

7.1.1 Tolygus konvergavimas

[8] Jeigu $F \in \mathcal{D}$, tada yra teisinga

$$0 < 1/\Psi_-(\Lambda, F) \leq \Psi(\Lambda, F) < \infty, \quad \forall \Lambda > 1$$

kur $\Psi(\Lambda, F) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \sup_{\mu \in [1, \Lambda]} F(\mu x)/F(x)$

ir $\Psi_-(\Lambda, F) = \Psi(\Lambda, 1/F)$.

7.1.2 Kitos savybės

[8]

- (i) Jeigu tenkinama [8] 2.0.1 ir $F_*(\lambda_0) > 0$ kai kuriems $\lambda_0 > a_0^2$, tada $F \in \mathcal{D}$ ir $\lambda^d/C \leq F(\lambda x)/F(x) \leq C\lambda^c$ ($\lambda \geq 1, x \geq x_0$) kai kurioms konstantoms $C > 1, c, d, x_0$.
Čia $F_*(\lambda_0) = \liminf_{x \rightarrow \infty} F(\lambda_0 x)/F(x)$, ($\lambda_0 > 0$).
- (ii) Jeigu (teigiama) F yra nedidėjanti, $F_*(\lambda_0)$ teigiamumas taške $\lambda_0 > 1$ reiškia, kad $F \in \mathcal{D}$.
Čia $F_*(\lambda_0) = \liminf_{x \rightarrow \infty} F(\lambda_0 x)/F(x)$.
- (iii) Jeigu $F \in \mathcal{D}$, tai $F_*(\lambda) \leq \lambda^{\beta(f)} \leq \lambda^{\alpha(f)} \leq F^*(\lambda)$, $\forall \lambda \geq 1$
kur $\alpha(f), \beta(f)$ - Matuszewska indeksai.

8 \mathcal{C} klasė

\mathcal{C} yra \mathcal{D} klasės poklasis, todėl jos dalinasi dauguma tų pačių savybių bei jos taikomos tose pačiose srityse. Šios klasės pavadinimas kilęs nuo angliško pavadinimo „Consistently varying“, bet galima rasti ir pavadinimą „Intermediate regular varying“ bei žymėjimą IR [13]. Ši klasė buvo naudojama tiriant nepriklausomų atsitiktinių dydžių sandaugas Cline ir Samorodnitsky darbe, taip pat tiriant didelius nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų ir maksimumų nukrypimus Cline ir Hsing darbe.

8.1 Savybės

[2]

- (i) $F \in \mathcal{C}$ tada ir tik tada, kai bet kuriai teigiamai funkcijai h tokiai, kad $h(x) = o(x)$, kai $x \rightarrow \infty$,
 $\overline{F}(x + h(x)) \sim \overline{F}(x)$,
t.y. tada ir tik tada, kai F yra $o(x)$ -nejautri.
- (ii) $F \in \mathcal{C}$ tada ir tik tada, kai bet kokia nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių ξ_1, ξ_2, \dots su baigtiniu teigiamu vidurkiu seka,
 $\frac{\overline{F}(S_n)}{\overline{F}(n\mathbb{E}\xi_1)} \rightarrow 1$, kai $n \rightarrow \infty$
su tikimybe 1, kur $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

9 Skirstinių pavyzdžiai

Šiame skyrelyje pateiksime keletą pasirinktų skirstinių pavyzdžių ir bandysime jas priskirti klasei, kuriai jie priklauso. Pradėsime nuo H klasės ir tikrinsim pagal apibrėžimus tol, kol pasieks mažiausią iš anksčiau aptartų klasių.

9.1 Pareto skirstinys

Pareto skirstinio tankio funkcija:

$$f(x) = \frac{k\lambda^k}{x^{k+1}}, \quad x > \lambda > 0; \quad k, \delta > 0,$$

pasiskirstymo funkcija:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\lambda}{x}\right)^k, & \text{kai } x > \lambda \\ 0 & \text{kai } x \leq \lambda \end{cases},$$

pasiskirstymo funkcijos uodegos funkcija:

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{x}\right)^k, & \text{kai } x > \lambda \\ 1 & \text{kai } x \leq \lambda \end{cases}$$

9.1.1 \mathcal{H} klasė

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x)e^{\delta x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda}{x}\right)^k e^{\delta x} = \lambda^k \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\delta x}}{x^k} = \infty$$

Tai priklauso \mathcal{H} klasei.

9.1.2 \mathcal{L} klasė

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{x+y}\right)^k}{\left(\frac{\lambda}{x}\right)^k} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+y}\right)^k = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+y}\right)^k = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{y}{x}}\right)^k = \left(\frac{1}{1+0}\right)^k = 1^k = 1 \end{aligned}$$

Tai priklauso \mathcal{L} klasei.

9.1.3 \mathcal{D} klasė

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{xy}\right)^k}{\left(\frac{\lambda}{x}\right)^k} = \limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{xy}\right)^k = \frac{1}{y^k} < \infty$$

Tai priklauso \mathcal{D} klasei.

9.1.4 \mathcal{C} klasė

$$\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{xy}\right)^k}{\left(\frac{\lambda}{x}\right)^k} = \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{xy}\right)^k = \lim_{y \uparrow 1} \frac{1}{y^k} = \frac{1}{1^k} = 1$$

Tai priklauso \mathcal{C} klasei.

9.1.5 \mathcal{S} klasė

Kadangi $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$, tada $F \in \mathcal{S}$, tai Pareto skirstinys priklauso \mathcal{S} klasei.

9.2 Diskretusis Weibull skirstinys

Diskretaus Weibull skirstinio tankio funkcija:

$$f(x) = (1-p)^{x^\beta} - (1-p)^{(x+1)^\beta}, \text{ kai } x = 0, 1, \dots; 0 < p < 1, \beta > 0,$$

pasiskirstymo funkcija:

$$F(x) = 1 - (1-p)^{[x+1]^\beta}, \text{ kur } [\dots] \text{ yra sveikoji dalis,}$$

pasiskirstymo funkcijos uodegos funkcija:

$$\overline{F}(x) = (1-p)^{[x+1]^\beta}.$$

9.2.1 \mathcal{H} klasė

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \overline{F}(x)e^{\delta x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1-p)^{[x+1]^\beta} e^{\delta x} \geq \lim_{x \rightarrow \infty} (1-p)^{(x+1)^\beta} e^{\delta x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln((1-p)^{(x+1)^\beta})} e^{\delta x} =$$

$$e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln((1-p)^{(x+1)^\beta}) + \delta x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} ((x+1)^\beta \ln(1-p) + \delta(x+1) - \delta)} =$$

$$e^{\lim_{x \rightarrow \infty} ((x+1)(\delta + (x+1)^{\beta-1} \ln(1-p)) - \delta)} =$$

$$\begin{cases} \infty, & \text{kai } \beta < 1 \\ \infty, & \text{kai } \beta = 1 \text{ ir } \delta > -\ln(1-p) \\ e^{-\delta}, & \text{kai } \beta = 1 \text{ ir } \delta = -\ln(1-p) \\ 0, & \text{kai } \beta = 1 \text{ ir } \delta < -\ln(1-p) \\ 0, & \text{kai } \beta > 1 \end{cases}$$

Tai priklauso \mathcal{H} klasei, kai $\beta < 1$.

9.2.2 \mathcal{L} klasė

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-p)^{[x+y+1]^\beta}}{(1-p)^{[x+1]^\beta}} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-p)^{[x+y+1]}}{(1-p)^{[x+1]}} \right)^\beta \leq$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-p)^{[x+1]}(1-p)^{y-1}}{(1-p)^{[x+1]}} \right)^\beta = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} (1-p)^{y-1} \right)^\beta = (1-p)^{(y-1)\beta} < 1, \text{ nes } 1-p < 1$$

Tai nepriklauso \mathcal{L} klasei.

9.2.3 \mathcal{D} klasė

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} &= \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-p)^{[xy+1]^\beta}}{(1-p)^{[x+1]^\beta}} = \left(\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-p)^{[xy+1]}}{(1-p)^{[x+1]}} \right)^\beta \geq \\ &= \left(\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-p)^{xy+2}}{(1-p)^x} \right)^\beta = \left(\limsup_{x \rightarrow \infty} (1-p)^{xy+2-x} \right)^\beta = \\ &= \left(\limsup_{x \rightarrow \infty} (1-p)^{x(y-1)+2} \right)^\beta = \infty, \text{ nes } 1-p < 1, y-1 < 0 \end{aligned}$$

Tai nepriklauso \mathcal{D} klasei.

9.2.4 \mathcal{C} klasė

$$\begin{aligned} \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} &= \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-p)^{[xy+1]^\beta}}{(1-p)^{[x+1]^\beta}} = \left(\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-p)^{[xy+1]}}{(1-p)^{[x+1]}} \right)^\beta = \\ &= \left(\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} (1-p)^{[(x+1)y-y+1]-[x+1]} \right)^\beta = \\ &= \left(\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} (1-p)^{(x+1)y-y+1-(x+1)} (1-p)^{\langle x+1 \rangle - \langle (x+1)y-y+1 \rangle} \right)^\beta = \\ &= \left(\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} (1-p)^{(x+1)(y-1)-y+1} (1-p)^{\langle x+1 \rangle - \langle (x+1)y-y+1 \rangle} \right)^\beta = \\ &= \left(\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-p)^{(x+1)(y-1)}}{(1-p)^{y-1}} (1-p)^{\langle x+1 \rangle - \langle (x+1)y-y+1 \rangle} \right)^\beta = \\ &= \left(\frac{\lim_{y \uparrow 1} (\limsup_{x \rightarrow \infty} (1-p)^{x+1})^{y-1}}{\lim_{y \uparrow 1} (1-p)^{y-1}} \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} (1-p)^{\langle x+1 \rangle - \langle (x+1)y-y+1 \rangle} \right)^\beta = \\ &= \left(\frac{\lim_{y \uparrow 1} (0)^{y-1}}{\lim_{y \uparrow 1} (1-p)^{y-1}} \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} (1-p)^{\langle x+1 \rangle - \langle (x+1)y-y+1 \rangle} \right)^\beta = \\ &= \left(1 \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} (1-p)^{\langle x+1 \rangle - \langle (x+1)y-y+1 \rangle} \right)^\beta = ((1-p)^{-1})^\beta > 1, \text{ čia } \langle \dots \rangle \text{ yra liekana.} \end{aligned}$$

Tai nepriklauso \mathcal{C} klasei.

9.2.5 \mathcal{S} klasė

Kadangi $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ ir $F \notin \mathcal{L}$, tai F nepriklauso \mathcal{S} .

9.3 Cauchy skirstinys

Cauchy skirstinio tankio funkcija:

$$f(x) = \frac{1}{\pi \gamma \left(1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma} \right)^2 \right)}, \text{ kai } x \in \mathbb{R}; \gamma > 0, x_0 - \text{vietos parametras,}$$

pasiskirstymo funkcija:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-x_0}{\gamma} \right) + \frac{1}{2},$$

pasiskirstymo funkcijos uodegos funkcija:

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right).$$

9.3.1 \mathcal{H} klasė

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x) e^{\delta x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right) \right) e^{\delta x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right) \right)'}{(e^{-\delta x})'} = \\ &= \frac{1}{\pi \gamma \delta} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma} \right)^2} = \frac{1}{\pi \gamma \delta} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\delta x}}{1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma} \right)^2} = \\ &= \frac{1}{\pi \gamma \delta} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\delta x}}{1 + \frac{x^2 - 2xx_0 + x_0^2}{\gamma^2}} = \infty \end{aligned}$$

Tai priklauso \mathcal{H} klasei.

9.3.2 \mathcal{L} klasė

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x+y-x_0}{\gamma}\right) \right)'}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) \right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \left(\frac{x+y-x_0}{\gamma} \right)^2}}{\frac{1}{1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma} \right)^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma} \right)^2}{1 + \left(\frac{x+y-x_0}{\gamma} \right)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\gamma^2 + x^2 - 2xx_0 + x_0^2}{\gamma^2 + x^2 + 2xy + y^2 - 2xx_0 - 2yx_0 + x_0^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\gamma^2}{x^2} + 1 - \frac{2x_0}{x} + \frac{x_0^2}{x^2}}{\frac{\gamma^2}{x^2} + 1 + \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{2x_0}{x} - \frac{2yx_0}{x^2} + \frac{x_0^2}{x^2}} = 1 \end{aligned}$$

Tai priklauso \mathcal{L} klasei.

9.3.3 \mathcal{D} klasė

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} &= \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{xy - x_0}{\gamma}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)\right)'} = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{y}{1 + \left(\frac{xy - x_0}{\gamma}\right)^2}}{\frac{1}{1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)^2}} = \\ &= \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{y \left(1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)^2\right)}{1 + \left(\frac{xy - x_0}{\gamma}\right)^2} = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{y(\gamma^2 + x^2 - 2xx_0 + x_0^2)}{\gamma^2 + x^2y^2 - 2xyx_0 + x_0^2} = \\ &= \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{y\gamma^2}{x^2} + y - \frac{2x_0y}{x} + \frac{x_0^2y}{x^2}}{\frac{\gamma^2}{x^2} + y^2 - \frac{2yx_0}{x} + \frac{x_0^2}{x^2}} = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y} < \infty \end{aligned}$$

Tai priklauso \mathcal{D} klasei.

9.3.4 \mathcal{C} klasė

$$\begin{aligned} \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} &= \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{xy - x_0}{\gamma}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)\right)'} = \\ &= \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{y}{1 + \left(\frac{xy - x_0}{\gamma}\right)^2}}{\frac{1}{1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)^2}} = \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{y \left(1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)^2\right)}{1 + \left(\frac{xy - x_0}{\gamma}\right)^2} = \\ &= \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{y(\gamma^2 + x^2 - 2xx_0 + x_0^2)}{\gamma^2 + x^2y^2 - 2xyx_0 + x_0^2} = \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{y\gamma^2}{x^2} + y - \frac{2x_0y}{x} + \frac{x_0^2y}{x^2}}{\frac{\gamma^2}{x^2} + y^2 - \frac{2yx_0}{x} + \frac{x_0^2}{x^2}} = \\ &= \lim_{y \uparrow 1} \frac{y}{y^2} = \lim_{y \uparrow 1} \frac{1}{y} = 1 \end{aligned}$$

Tai priklauso \mathcal{C} klasei.

9.3.5 \mathcal{S} klasė

Kadangi $F \in \mathcal{L}$ ir $F \in \mathcal{D}$, todėl skirstinys priklauso \mathcal{S} klasei.

9.4 Lognormalusis skirstinys

Lognormaliojo skirstinio tankio funkcija:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2}, \text{ kai } x > 0, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R},$$

pasiskirstymo funkcija:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right), \text{ kur } \operatorname{erf} \text{ yra error funkcija,}$$

pasiskirstymo funkcijos uodegos funkcija:

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right).$$

9.4.1 \mathcal{H} klasė

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x)e^{\delta x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right) e^{\delta x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right)'}{(e^{-\delta x})'} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sigma}\sqrt{\pi}\delta} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma}}}{e^{-\delta x}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sigma}\sqrt{\pi}\delta} \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left\{ \frac{2\sigma\delta x + \ln x(2\mu - 2\sigma) - (\ln x)^2 - \mu^2}{2\sigma} \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sigma}\sqrt{\pi}\delta} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma}} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \exp\{2\sigma\delta x + \ln x(2\mu - 2\sigma) - (\ln x)^2\} \right)^{\frac{1}{2\sigma}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sigma}\sqrt{\pi}\delta} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma}} \left(\exp\left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sigma\delta x + \ln x(2\mu - 2\sigma) - (\ln x)^2}{(\ln x)^2} (\ln x)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2\sigma}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sigma}\sqrt{\pi}\delta} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma}} \left(\exp\left\{ \left(2\sigma\delta \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{((\ln x)^2)'} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\mu - 2\sigma}{\ln x} - \lim_{x \rightarrow \infty} 1 \right) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2\sigma}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sigma}\sqrt{\pi}\delta} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma}} \left(\exp\left\{ \left(2\sigma\delta \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \ln x \frac{1}{x}} + 0 - 1 \right) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2\sigma}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sigma}\sqrt{\pi}\delta} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma}} \left(\exp\left\{ \left(2\sigma\delta \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(2 \ln x)'} - 1 \right) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2\sigma}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sigma}\sqrt{\pi}\delta} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma}} \left(\exp\left\{ \left(2\sigma\delta \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \frac{1}{x}} - 1 \right) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2\sigma}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sigma}\sqrt{\pi}\delta} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma}} \left(\exp\left\{ \left(2\sigma\delta \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} - 1 \right) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2\sigma}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sigma}\sqrt{\pi}\delta} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma}} (\exp\{\infty \cdot \infty\})^{\frac{1}{2\sigma}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sigma}\sqrt{\pi}\delta} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma}} (e^\infty)^{\frac{1}{2\sigma}} = \infty \end{aligned}$$

Tai priklauso \mathcal{H} klasei.

9.4.2 \mathcal{L} klasė

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\ln(x+y) - \mu}{\sqrt{2\sigma}}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2\sigma}}\right)\right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+y} e^{-\frac{(\ln(x+y) - \mu)^2}{2\sigma}}}{\frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma}}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(\ln x - \mu)^2}{x e^{\frac{2\sigma}{2\sigma}}}}{\frac{(\ln(x+y) - \mu)^2}{(x+y) e^{\frac{2\sigma}{2\sigma}}}} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma} ((\ln x - \mu)^2 - (\ln(x+y) - \mu)^2) \right\} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma} (\ln x - \mu - \ln(x+y) + \mu) (\ln x - \mu + \ln(x+y) - \mu) \right\} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma} \left(\ln \left(\frac{x}{x+y} \right) (\ln x(x+y) - 2\mu) \right) \right\} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma} \ln \left(\frac{x}{x+y} \right) \ln x(x+y) - \frac{2\mu}{2\sigma} \ln \left(\frac{x}{x+y} \right) \right\} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma} \ln \left(\frac{x}{x+y} \right) \ln x(x+y) - \frac{2\mu}{2\sigma} \ln \left(\frac{x}{x+y} \right) \right\} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma} \ln \left(\frac{x}{x+y} \right) \ln x(x+y) \right\} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma} (\ln x - \ln(x+y)) (\ln x + \ln(x+y)) \right\} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\ln x}{\ln(x+y)} - 1 \right) \left(\frac{\ln x}{\ln(x+y)} + 1 \right) \right\} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma} \left(\left(\frac{\ln x}{\ln(x+y)} \right)^2 - 1^2 \right) \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma} (1 - 1) \right\} = e^0 = 1
\end{aligned}$$

Tai priklauso \mathcal{L} klasei.

9.4.3 \mathcal{D} klasė

$$\begin{aligned}
\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} &= \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\ln(xy) - \mu}{\sqrt{2\sigma}} \right) \right)'}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2\sigma}} \right) \right)'} = \\
&= \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{(\ln(xy) - \mu)^2}{2\sigma}}}{e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma}}} = \left(\limsup_{x \rightarrow \infty} e^{(\ln x - \mu)^2 - (\ln xy - \mu)^2} \right) \frac{1}{2\sigma} = \\
&= \left(\limsup_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x (\ln x - 2\mu) - \ln xy (\ln xy - 2\mu)} \right) \frac{1}{2\sigma} = \left(\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\ln x - 2\mu}}{x^{\ln xy - 2\mu}} \right) \frac{1}{2\sigma} = \\
&= \left(\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\ln x - 2\mu}}{x^{\ln x - 2\mu} x^{\ln y} y^{\ln xy - 2\mu}} \right) \frac{1}{2\sigma} = \\
&= \left(\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\ln y} y^{\ln xy - 2\mu}} \right) \frac{1}{2\sigma} = \infty, \text{ nes } y \in (0, 1), \ln y < 0
\end{aligned}$$

Tai nepriklauso \mathcal{D} klasei.

9.4.4 \mathcal{C} klasė

$$\begin{aligned}
\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} &= \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\ln(xy) - \mu}{\sqrt{2\sigma}}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2\sigma}}\right)\right)'} = \\
\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{(\ln(xy) - \mu)^2}{2\sigma}}}{e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma}}} &= \left(\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} e^{(\ln x - \mu)^2 - (\ln xy - \mu)^2}\right) \frac{1}{2\sigma} = \\
\left(\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x (\ln x - 2\mu) - \ln xy (\ln xy - 2\mu)}\right) \frac{1}{2\sigma} &= \left(\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\ln x - 2\mu}}{x^{\ln xy - 2\mu}}\right) \frac{1}{2\sigma} = \\
\left(\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\ln x - 2\mu}}{x^{\ln x - 2\mu} x^{\ln y} y^{\ln xy - 2\mu}}\right) \frac{1}{2\sigma} &= \\
\left(\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\ln y} y^{\ln xy - 2\mu}}\right) \frac{1}{2\sigma} &= \left(\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{y^{2\mu}}{x^{\ln y} y^{\ln x} y^{\ln y}}\right) \frac{1}{2\sigma} = \\
\left(\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{y^{2\mu}}{y^{\ln y} x^{\ln y} y^{\ln x}}\right) \frac{1}{2\sigma} &= \left(\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{y^{2\mu}}{y^{\ln y} x^{\ln y} x^{\ln y}}\right) \frac{1}{2\sigma} = \\
\left(\lim_{y \uparrow 1} \frac{y^{2\mu}}{y^{\ln y}} \limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{2 \ln y}\right) \frac{1}{2\sigma} &= \left(\lim_{y \uparrow 1} \frac{y^{2\mu}}{y^{\ln y}} \left(\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}\right)^{2 \ln y}\right) \frac{1}{2\sigma} = \\
\left(\lim_{y \uparrow 1} \frac{y^{2\mu}}{y^{\ln y}} (0)^{2 \ln y}\right) \frac{1}{2\sigma} &= \infty, \text{ nes } \ln y < 0
\end{aligned}$$

Tai nepriklauso \mathcal{C} klasei.

9.4.5 \mathcal{S} klasė

[2] parodyta, kad šis skirstinys tenkina 3.30 teoremos sąlygas ir priklauso klasei \mathcal{S}^* . Kadangi $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$, tai skirstinys priklauso \mathcal{S} .

9.5 Generalizuoto Peter and Paul skirstinys

Generalizuoto Peter and Paul skirstinio pasiskirstymo funkcija:
 $F(x) = 1 - (5^a)^{-\lfloor \ln x / \ln 2^a \rfloor}$, kur $[\dots]$ yra sveikoji dalis, $x \geq 1$, $a > 0$,
pasiskirstymo funkcijos uodegos funkcija:
 $\overline{F}(x) = (5^a)^{-\lfloor \ln x / \ln 2^a \rfloor}$.

9.5.1 \mathcal{H} klasė

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x) e^{\delta x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{-\left[\frac{\ln x}{\ln 2^a}\right]} e^{\delta x} \geq \lim_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{-\left(\frac{\ln x}{\ln 2^a}\right)} e^{\delta x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{-\left(\frac{\ln x}{a \ln 2}\right)} e^{\delta x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} 5^{-\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)} e^{\delta x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(5^{-\frac{\ln x}{\ln 2}}\right)'}{(e^{-\delta x})'} = \frac{\ln 5}{\ln 2 \delta} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\delta x}}{x 5^{\ln x / \ln 2}} = \frac{\ln 5}{\ln 2 \delta} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\delta x}}{x \exp\{\ln 5^{\ln x / \ln 2}\}} = \\
&= \frac{\ln 5}{\ln 2 \delta} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\delta x}}{x \exp\left\{\frac{\ln x}{\ln 2} \ln 5\right\}} = \frac{\ln 5}{\ln 2 \delta} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\delta x}}{x \exp\left\{\frac{\ln 5}{\ln 2} \ln x\right\}} = \\
&= \frac{\ln 5}{\ln 2 \delta} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\delta x}}{x \exp\{\ln x^{\ln 5 / \ln 2}\}} = \frac{\ln 5}{\ln 2 \delta} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\delta x}}{x x^{\ln 5 / \ln 2}} = \frac{\ln 5}{\ln 2 \delta} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\delta x}}{x^{(\ln 5 / \ln 2) + 1}} = \infty
\end{aligned}$$

Tai priklauso \mathcal{H} klasei.

9.5.2 \mathcal{L} klasė

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5^a)^{-\left[\frac{\ln x+y}{\ln 2^a}\right]}}{(5^a)^{-\left[\frac{\ln x}{\ln 2^a}\right]}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{\left[\frac{\ln x}{\ln 2^a}\right] - \left[\frac{\ln x+y}{\ln 2^a}\right]} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{\frac{\ln x}{\ln 2^a} - \frac{\ln x+y}{\ln 2^a} - \left\langle \frac{\ln x}{\ln 2^a} \right\rangle + \left\langle \frac{\ln x+y}{\ln 2^a} \right\rangle} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{\frac{1}{\ln 2^a} \ln\left(\frac{x}{x+y}\right) + \left\langle \frac{\ln x+y}{\ln 2^a} \right\rangle - \left\langle \frac{\ln x}{\ln 2^a} \right\rangle} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 (5^a)^{\left\langle \frac{\ln x+y}{\ln 2^a} \right\rangle - \left\langle \frac{\ln x}{\ln 2^a} \right\rangle} \\
&= \begin{cases} \limsup_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{\left\langle \frac{\ln x+y}{\ln 2^a} \right\rangle - \left\langle \frac{\ln x}{\ln 2^a} \right\rangle} = 5^a \\ \liminf_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{\left\langle \frac{\ln x+y}{\ln 2^a} \right\rangle - \left\langle \frac{\ln x}{\ln 2^a} \right\rangle} = 5^{-a} \end{cases}, \text{ čia } \langle \dots \rangle \text{ yra liekana.}
\end{aligned}$$

Riba neegzistuoja, tai nepriklauso \mathcal{L} .

9.5.3 \mathcal{D} klasė

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} &= \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{(5^a)^{-\left[\frac{\ln xy}{\ln 2^a}\right]}}{(5^a)^{-\left[\frac{\ln x}{\ln 2^a}\right]}} = \limsup_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{\left[\frac{\ln x}{\ln 2^a}\right] - \left[\frac{\ln xy}{\ln 2^a}\right]} = \\ &= \limsup_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{\left[\frac{\ln x}{\ln 2^a}\right] - \left[\frac{\ln x + \ln y}{\ln 2^a}\right]} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{\left(\frac{\ln x - \ln x - \ln y}{\ln 2^a} + 1\right)} = \\ &= \limsup_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{\left(\frac{-\ln y}{\ln 2^a} + 1\right)} \leq \infty \end{aligned}$$

Tai priklauso \mathcal{D} klasei.

9.5.4 \mathcal{C} klasė

$$\begin{aligned} \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} &= \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{(5^a)^{-\left[\frac{\ln xy}{\ln 2^a}\right]}}{(5^a)^{-\left[\frac{\ln x}{\ln 2^a}\right]}} = \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{\left[\frac{\ln x}{\ln 2^a}\right] - \left[\frac{\ln xy}{\ln 2^a}\right]} = \\ &= \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{\left[\frac{\ln x}{\ln 2^a}\right] - \left[\frac{\ln x + \ln y}{\ln 2^a}\right]} = \\ &= \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{\frac{\ln x}{\ln 2^a} - \frac{\ln x + \ln y}{\ln 2^a}} = \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{-\left\langle \frac{\ln x}{\ln 2^a} \right\rangle + \left\langle \frac{\ln x + \ln y}{\ln 2^a} \right\rangle} = \\ &= \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{\frac{\ln y}{\ln 2^a} \ln\left(\frac{x}{x}\right)} = \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{\left\langle \frac{\ln x + \ln y}{\ln 2^a} \right\rangle - \left\langle \frac{\ln x}{\ln 2^a} \right\rangle} = \\ &= 1 \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{\frac{\ln y}{\ln 2^a} \ln\left(\frac{x}{x}\right)} = \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{\left\langle \frac{\ln x + \ln y}{\ln 2^a} \right\rangle - \left\langle \frac{\ln x}{\ln 2^a} \right\rangle} = \\ &= \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} (5^a)^{\left\langle \frac{\ln x + \ln y}{\ln 2^a} \right\rangle - \left\langle \frac{\ln x}{\ln 2^a} \right\rangle} = 5^a > 1, \text{ čia } \langle \dots \rangle \text{ yra liekana.} \end{aligned}$$

Tai nepriklauso \mathcal{C} .

9.5.5 \mathcal{S} klasė

Kadangi $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ ir $F \notin \mathcal{L}$, tai F nepriklauso \mathcal{S} .

10 Išvados

Šiame darbe atskleidėme, kad sunkiauodegiai skirstiniai yra tinkami modeliuoti įvykius srityse, kur rizikos valdymas yra vienas iš esminių prioritetų. Tačiau dėl savo matematinių

išraiškų, su jais atlikti veiksmus gali būti gana sudėtinga. Visgi mūsų pasirinktus skirstinius pavyko priskirti atitinkamoms klasėms. Taip pat aptarėme skirtingas klases ir įrodėme jų tarpusavio įdėjimus.

Pareto skirstinys atitiko visus mūsų pasirinktų klasių apibrėžimus, todėl jis priklauso visoms joms. Mažiausia iš jų yra klasė \mathcal{C} . Šio skirstinio išraiška yra gana paprasta, todėl ir skaičiavimai nebuvo sudėtingi.

Diskretusis Weibull skirstinys atitiko tik \mathcal{H} klasės apibrėžimą su parametru $\beta < 1$. Nors kitoms klasėms ji ir nepriklauso, tačiau tai įrodyti buvo gana paprasta.

Cauchy skirstinio tyrimas taip pat nebuvo sudėtingas ir jis, kaip ir Pareto, priklauso klasėms \mathcal{H} , \mathcal{L} , \mathcal{D} , \mathcal{C} , \mathcal{S} , iš kurių mažiausia yra \mathcal{C} klasė.

Lognormaliojo skirstinio tyrimas buvo kiek sudėtingesnis. Šis skirstinys priklauso tik \mathcal{H} , \mathcal{L} ir \mathcal{S} klasėms.

Generalizuotas Peter and Paul sudėtingas savo išraiška, nes laipsnyje yra sveika trupmenos dalis. Tačiau jį ištyrus paaiškėjo, kad jis priklauso \mathcal{H} ir \mathcal{D} klasėms.

Tęsiant šį darbą būtų galima patikrinti ir kitus skirstinius ar įtraukti kitas sunkiauodegių skirstinių klases, praplečiant tyrimą ir išsamiau aprašant skirstinių savybes.

Literatūra

- [1] Mikosch, Thomas. Regular variation, subexponentiality and their applications in probability theory. Vol. 99. Eindhoven, The Netherlands: Eindhoven University of Technology, 1999.
- [2] Foss, Sergey, Dmitry Korshunov, and Stan Zachary. An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions. Vol. 6. New York: Springer, 2011.
- [3] Dirma, Mantas, Saulius Paukštys, and Jonas Šiaulyš. "Tails of the Moments for Sums with Dominatedly Varying Random Summands." *Mathematics* 9.8 (2021): 824.
- [4] Leipus, Remigijus, and Jonas Šiaulyš. "Closure of some heavy-tailed distribution classes under random convolution." *Lithuanian mathematical journal* 52.3 (2012): 249-258.
- [5] Goldie, Charles M. "Subexponential distributions and dominated-variation tails." *Journal of Applied Probability* (1978): 440-442.
- [6] Embrechts, Paul, and Edward Omey. "A property of longtailed distributions." *Journal of Applied Probability* (1984): 80-87.
- [7] Embrechts, Paul, Claudia Klüppelberg, and Thomas Mikosch. Modelling extremal events: for insurance and finance. Vol. 33. Springer Science & Business Media, 2013.
- [8] Bingham, Nicholas H., et al. Regular variation. No. 27. Cambridge university press, 1989.
- [9] Bryson, Maurice C. "Heavy-tailed distributions: properties and tests." *Technometrics* 16.1 (1974): 61-68.
- [10] Kreinovich, Vladik, and Olga Kosheleva. "How to Define Mean, Variance, etc., for Heavy-Tailed Distributions: A Fractal-Motivated Approach." (2012).
- [11] Foss, Sergey, Dmitry Korshunov, and Stan Zachary. "Heavy-tailed and long-tailed distributions." *An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions*. Springer, New York, NY, 2013. 7-42.
- [12] Goldie, Charles M., and Claudia Klüppelberg. "Subexponential distributions." *A practical guide to heavy tails: statistical techniques and applications* (1998): 435-459.
- [13] Cline, Daren BH. "Intermediate regular and Π variation." *Proceedings of the London Mathematical Society* 3.3 (1994): 594-616.