VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS BAKALAURO STUDIJŲ PROGRAMA

Bakalauro baigiamasis darbas

Pasirinkimo sandorių premijos ir rizikos charakteristikų skaičiavimas

Option Premium and Risk Characteristics Calculations

Tautvydas Graževičius ir Vainius Mirskis

Darbo vadovas Doc. dr. Andrius Grigutis

Vilnius, 2021

Santrauka

Bakalauriniame darbe supažindinama su išvestinių priemonių prekyba užbiržinėse (*OTC*) ir griežtai reguliuojamose "Euronext“ ir "CME group“ biržose. Aptarsime ateities, išankstinių, apsikeitimo ir pasirinkimo sandorių keliamas rizikas bei įvykusias rinkos anomalijas (neigiami naftos kontraktai, "GameStop“ trumpųjų pozicijų išspaudimas), įvardijant ir instrumentų naudojimo priežastis. Šio darbo teorinėje dalyje kalbama apie arbitražinę rinką, rizikai neutralų matą ir Vynerio procesą. Tyrinėjame diskretaus laiko binominį modelį ir tolydaus laiko Black - Scholes modelį, kurį taikysime skaičiavimuose.

Praktinėje dalyje tyrinėsime "Micron Technology, Inc" (MU) įmonės pasirinkimo pirkti sandorių premijas, jų rizikos charakteristikas, remiantis pasirinkimo sandorio graikiškosiomis raidėmis (delta, gama, teta, vega, ro) ir Black - Scholes modeliu. Įvertinsime teorinius ir faktinius kontrakto rodiklius, jų panašumus skirtingose vykdymo kainose ir kontrakto galiojimo termine.

Raktiniai žodžiai:

Arbitražas, binominis modelis, Black - Scholes modelis, pasirinkimo sandorio graikiškos raidės, pasirinkimo sandoris, rizikai neutralus matas.

Abstract

In this article you are introduced with derivatives trading in OTC market and in strictly controlled "Euronext“ and "CME group“ market. It is discussed about risk characteristics in future, forward, swaps and options and provided past anomalies in the market (negative oil contracts, "GameStop" gamma short squeeze) explaining instruments and the reasons of their usage. This article includes arbitrage, risk-neutral measure, Wiener process, explore discrete binomial model and continuous Black - Scholes model.

In the practical part of this article it is discussed about "Micron Technology, Inc" (MU) option to buy transaction premium and their risk characteristics which will be evaluated using options greek letters (Delta, Gamma, Theta, Vega, Rho) and Black - Scholes model. Provide an explanation to the difference and similarity between theoretical and actual contract parameters in various execution prices.

Key words:

Arbitrage, Binomial model, Black - Scholes model, Options Greek letters, Option, Risk-neutral measure.

Turinys

1 Įvadas

Pasirinkimo sandoriai yra vieni iš plačiausiai naudojamų finansinių įrankių rinkoje. Opcionus galima rasti ateities kontraktuose, apsidraudimo strategijose, rizikos valdyme bei įvairiose turto valdymo strategijose. Ilgą laiką istorijoje nebuvo konkretaus matematinio metodo įvertinti pasirinkimo sandorio vertę. Prieš Black - Scholes modelį buvo prekiaujama iš intuicijos,tačiau modelis perteikė svarbias detales investuotojui į vieną bendrą formulę [22]. Black - Scholes modelis investuotojams sukuria galimybę pagal istorinius duomenis ir prielaidas įvertinti europietiško modelio pasirinkimo sandorių kainą. Šis modelis, įvertintas Nobelio premija, yra naudojamas ir vertinamas net ir šiomis dienomis, tačiau laikui bėgant buvo patobulintas ir pritaikytas rinkos pokyčiams. Robert C. Merton pritaikė Black - Scholes modelį šiuolaikinei finansų rinkai. Šiame darbe taikysime pasirinkimo sandoriams skirtą Black - Scholes modelį įvertinti opcionų rizikos charakteristikas (delta, gama, teta, vega, ro) ir kontrakto premijas. Graikiškos pasirinkimo sandorių raidės nurodo premijos jautrumą kintant aktyvo kainai, deltos kitimo pagreitį, laiko vertės įtaką, aktyvo kainos nepastovumo įtaką ir įvertina premijos pokyti pagal procentinį palūkanų normos kitimą. Pateiksime realius rinkos pavyzdžius ir vertinsime juos su teorinėmis, apskaičiuotomis reikšmėmis. Pasirinkome nagrinėti "Micron Technology, Inc" (MU) skirtingose vykdymo kainose ir analizuoti pasirinkimo sandorio kontrakto premijas ir rizikos charakteristikas galiojimo termine, naudojant Microsoft "excel", R programavimo kalbą, remiantis moksline literatūra, straipsniais, statistiniais finansinių institucijų duomenimis, rezultatus pateikiant vizualiai.

Darbo Uždaviniai:

- Tyrinėti arbitražo galimybę, binominį modelį, rizikai neutralų matą.
- Susipažinti ir praplėsti turimas žinias apie pasirinkimo sandorių graikiškas raides.
- Išanalizuoti Black - Scholes modelį ir jo ypatumus.
- Praplėsti turimas žinias apie pasirinkimo sandorius ir jų parametrus.
- Nagrinėti rinkoje įvykusius vienetinius atvejus.
- Išnagrinėti įmonės pasirinkimo pirkti sandorio premijas, palyginti faktines ir teorines kainas, paaiškinti skirtumus ar panašumus.
- Rezultatus pateikti grafiškai, juos apibūdinti.

2 Išvestinių priemonių rinka

Išvestinių priemonių rinka (angl. Derivatives market) yra finansų rinkos dalis, kurioje prekiaujama instrumentais, kurių vertė ir jos pokyčiai yra grindžiami konkrečių turto klasių kainų volatilumu (kintamumu) - akcijų, obligacijų, žaliavų, palūkanų normų ir indeksų tokių kaip S&P500, DJI ar DAX [14]. Aktyvi prekyba šiomis priemonėmis vyksta užbiržinėse rinkose (angl. *Over - the - counter (OTC)*) bei griežtai reguliuojamose biržose tokiose kaip "Euronext", Čikagos prekių biržoje "CME Group" [21]. Dažniausiai sutinkamos šių instrumentų rūšys yra išankstiniai sandoriai (angl. *forwards*), apsikeitimo sandoriai (angl. *swaps*), ateities sandoriai (angl. *futures*) bei pasirinkimo sandoriai arba opcionai (angl. *options*) [21]. Remiantis Tarptautinių atsiskaitymų banko (BIS) 2020 H2 (antrojo pusmečio) duomenimis išvestinių priemonių rinkos pagrindinė suma yra 582.06 trilijonų Amerikos dolerių [1]. Viena iš pagrindinių išvestinių priemonių paskirčių yra mažinti ir atsverti riziką (angl. Hedge risk). Kompanijos plėtodamos veiklą patiria rizikas susijusias su žaliavų kainomis, kurios daro įtaką pelno maržoms. Pavyzdžiui, oro linijų įmonės jautrios aviacinio kuro kainoms. Augančios kainos trendas gali būti atsvertas perkant ateities sandorio kontraktą ir fiksuojant esamą kainą [25]. Antrasis instrumentų tikslas yra spekuliacinis. Ne visi rinkos dalyviai yra suinteresuoti finansiniu turtu, kurio pagrindu grindžiamas derivatyvas, tačiau kainos volatilumas tampa sandorio pozicijos priėmimo priežastimi, tokiu būdu suteikiant likvidumo rinkai. Galimybė apeiti taisykles yra viena iš naudų, kodėl institucijos, kaip pensijų fondai, dalyvauja išvestinių priemonių rinkoje. Jungtinėse Amerikos Valstijose pensijų fondams buvo draudžiama investuoti į nekilnojamą turtą dėl rizikos lygio, tačiau į hipotekos obligacijas (angl. *mortage-backed security, MBS*), garantuotas agentūrų "Freddie Mac"(FNMA) ir "Fannie Mae"(FMCC), su mažesniu rizikos lygiu, draudimas nebuvo taikomas [26]. Paskutinis esminių derivatyvų tikslų - mažesni prekybos mokesčiai. Investicinių bankų, tarptautinių korporacijų bei finansų institucijų akivaizdus įsitraukimas rodo išvestinių priemonių teikiamą naudą, tačiau egzistuoja ir sandorio šalies, likvidumo, sujungimo bei sisteminės rizikos tikimybė [26]. Svarbu paminėti, kad išvestinės priemonės gali suteikti svertą leidžiantį smulkioms įmonėms sukurti itin didelį vertybinių popierių (toliau - VP) portfelį, kurio žlugimas gali sukelti rinką griaunančių įvykių grandinę. Išvestinių priemonių rinka sulaukia aktyvios kritikos dėl savo keliamos sisteminės rizikos grėsmės. Dar prieš investicinio banko "Lehman's brothers" griūtį investuotojas Warren Buffet metiniame "Berkshire Hathaway" akcininkų susirinkime 2002 metais, derivatyvus sulygino su "finansiniu, masiniu naikinimo ginklu", kurio įtaka per kredito rizikos apsikeitimo sandorius (angl. *Credit default swaps*, CDS) bei hipotekos obligacijas (MBS) leido įmonėms toleruoti iracionalią riziką nuvedusią į 2007-2008 m. finansų krizę [2].

2.1 Neigiami naftos kontraktai

Šiomis dienomis galima pastebėti anomalijų išvestinių priemonių rinkoje - 2020 m. balandžio 20 d. dėl trečdaliu (29 mln. Barelių per dieną) susitraukusios pasaulinės naftos paklausos Vakarų Teksaso terpinės naftos (angl. *West Texas Intermediate - WTI*) rūšies ateities sandoriai kainavę prekybos sesijos pradžioje 17.85 USD nukrito iki neigiamų 37.63 USD sesijos pabaigoje, nespėjus OPEC+ sureaguoti į mažėjančią paklausą ir perpildytus Oklahomos valstijos kušingo rezervus [11].

2.2 GME gama trumpųjų pozicijų išspaudimas

Retas įvykis susiformavo pasirinkimo sandorių rinkoje 2021 m. sausio mėnesį įvykus "GameStop" kompanijos (GME) "gama trumpųjų pozicijų išspaudimui" (angl. *Gamma short squeeze*). Ribotos rizikos draudimo fondai kaip "Melvin Capital", "Citron Capital" bei kiti rinkos dalyviai turėdami trumpųjų (*short*) pozicijų daugiau nei 140% nuo įmonės viešai prekiaujamų ir kotiruojamų akcijų kiekio NYSE biržoje - 56.89mln vnt. [19]. Patyrė staigų kainos kilimą (nuo 17 USD iki 483 USD, pokytis 2841%), kurio metu privalėjo uždarinėti trumpąsias pozicijas pirkdami tiesiogiai akcijas rinkoje ar opcionų grandinėje vykdant pasirinkimo pirkti sandorių (angl. *Call option*) pirkimus. Agresyvus pasirinkimo sandorių pirkimas įstūmė finansų institucijas pardavinėjančias opcionų kontraktus į delta neigiamą zoną (aptarsime **5-ame** skyriuje), kurioje institucijos nėra rizikai neutralios ir tampa "trumposios pozicijos" pusėje. Tai lemia nuolatinį opcionų pirkimų procesą ir nuolatinį kainos kilimą, norint apdrausti riziką perkant akcijas tiesiogiai rinkoje [15].

1 pav. "GameStop"(GME) kainos pokyčių grafikas. Autorių pav.

3 Pasirinkimo sandoriai, rūšys ir jų charakteristikos

3.1 Aprašymas

Remiantis [21] šaltiniu pasirinkimo sandoriai arba opcionai (angl. *Options*) - išvestinė finansinė priemonė, kurios kontraktas suteikia teisę, bet ne įsipareigojimą priimti ilgąją (angl. *long*) arba trumpąją (angl. *short*) poziciją pradiniame aktyve už iš anksto nustatytą vykdymo kainą (angl. *strike price*) sutartu metu, sumokant ar gaunant premijos mokestį (angl. *Premium*). Standartinis akcijų pasirinkimo sandorio kontrakto dydis yra vienas lotas (angl. *lot*), reiškiantis 100 vnt. tos pačios kompanijos akcijų. Pasirinkto aktyvo opcionų grandinėje, dar kitaip vadinamoje opcionų matricoje, kurioje yra listinguoti visi įmanomi pasirinkimo sandoriai, yra teikiama reikalinga informacija apie vykdymo kainas, premijos mokestį, konkrečios vykdymo kainos apyvartas bei numanomo nepastovumo (angl. *Implied volatility*), delta, gama, teta, vega, ro reikšmes. Opcionų grandinėje galima pasirinkti keturias pozicijas [17]:

- Ilgoji pozicija pasirinkimo pirkti sandoryje (angl. *Buy calls*),
- Trumpoji pozicija pasirinkimo pirkti sandoryje (angl. *Sell Calls*),
- Ilgoji pozicija pasirinkimo parduoti sandoryje (angl. *Buy put*),
- Trumpoji pozicija pasirinkimo parduoti sandoryje (angl. *Sell put*).

Esminiai skirtumai tarp pasirinkimo sandorių pirkėjų (angl. *holders*) ir pardavėjų (angl. *writers*) yra rizikos potencialas bei įsipareigojimai. Pirkėjai, turėdami galimybę nerealizuoti pasirinkimo sandorio, apsiriboja rizika prarasti tik sumokėtą premiją už kontraktą. Tačiau pardavėjų atveju, esant pelningam kontraktui pabaigos dieną, įsipareigojimas pirkti ar parduoti pradinį aktyvą yra būtinas. Dėl šios priežasties pasirinkimo sandorių pardavėjai turi potencialą patirti neribotą riziką uždirbant ribotą pelną - premijos mokestį. Pirkėjų scenarijuje asimetrinė grąža (angl. *asymmetric payoff*) yra akivaizdi. JAV rinkoje egzistuoja kliringo namai, pavyzdžiui, "Options Clearing Corporation" (OCC) , kurie užtikrina sklandų išvestinių priemonių apsikeitimą ir atsiskaitymą. Kompanija, kurios pasirinkimo sandoriais yra prekiaujama nėra atsakinga už opcionų prekybą, priežiūrą ir išleidimą [21].

Populiariausių standartizuotų opcionų rūšys yra amerikietiškieji, kurių įvykdymo laikotarpis yra bet kuris laiko momentas iki pasirinkimo sandorio galiojimo laiko pabaigos (angl. *expiration date*) bei europietiškieji, kuriuos galima realizuoti tik pasibaigus terminui. Egzistuoja egzotinių pasirinkimo sandorių rūšių plačiai prekiaujamų užbiržinėse rinkose (OTC) , tačiau jų kompleksiškumas lemia mažesnę paklausą nei pastarųjų.

3.2 Pasirinkimo sandorių kainos parametrai

Išankstinių ir ateities sandorių atveju pelnas ir nuostolis yra proporcingas. Užėmus ilgąją (angl. *long*) poziciją ateities kontrake bazinio aktyvo kainos pokytis per 10 USD suteikia 10 USD pelną ir atvirkščiai. Tačiau pasirinkimo sandorių rizika ir instrumento vertė tampa neproporcinga vykstant kainos pokyčiams dėl opcionų vertės kitimo netiesiniu būdu [21]. Opcionų kainos skaičiavimus bei išmoką apibūdina šie parametrai:

- Pasirinkimo sandorio bazinio instrumento rinkos kaina (angl. *Underlying spot price*) - S_0,
- Bazinio instrumento vertė kontrakto termino pabaigoje - S_T,
- Pasirinkimo sandorio vykdymo kaina (angl. *Strike, exercise price*) - X,
  - Kontrakte nurodyta kaina už kurią pirkėjas gali vykdyti opcioną ir įsigyti ar parduoti instrumentą.
- Kontrakto galiojimo pabaigos data (angl. *Expiration date*) - T,
- Nerizikinga palūkanų norma - r_f,
  - Nerizikinga palūkanų norma dažniausiai laikoma JAV iždo vertybinių popierių (angl. *Treasury notes*) palūkanų normą pagal pajamingumo kreivę (angl. *Yield curve*) arba LIBOR,EURIBOR tarpbankinę palūkanų normą.
- Dabartinis laiko momentas - t,
- Pirkimo opciono premija C ir pardavimo opciono premija P.

3.3 Europietiškųjų pasirinkimo sandorių vertė ir pelnas

Remiantis [17] šaltiniu ir nurodytais pasirinkimo sandorių kainos parametrais europietiškųjų opcionų kontrakto pelną galima apibrėžti pirkėjų ir pardavėjų šalims, kur S_T bazinio aktyvo kaina kintanti pagal atsitiktinį procesą (pavyzdžiui, geometrinį Vynerio procesą).

Pasirinkimo pirkti sandoris (*Call*) termino pabaigoje T gali būti vertas teigiamo skirtumo tarp S_T ir X arba 0, priklausomai ar bazinio instrumento kaina S_T viršija vykdymo kainą X. Jeigu $S_T \leq X$, tai opciono pirkėjas pagal kontrakto sąlygas neįsigys instrumento vienetų už kainą X, kai yra galimybė juos įsigyti VP rinkoje tiesiogiai už kainą S_T. Tokiu atveju, neišpildžius pasirinkimo sandorio kontrakto, pirkėjo nuostolis yra lygus sumokėtos opciono premijos kainai skaičiuojamos pagal įvertinimo modelio funkciją:

$$f(S_0, X, t, T, r_f, \sigma).$$

Pasirinkimo pirkti sandorio (*Call*) pardavėjo pelnas yra atvirkščias pirkėjo pelnui t.y. opciono pirkėjui patiriant nuostolį, sandorio pardavėjas patiria pelną lygų opciono premijos vertei. Kainų $S_T > X$ momentu, opciono pirkėjas kontraktą įvykdys - galęs nusipirkti už X kainą ir parduoti už S_T arba realizuoti trumpąją poziciją nuo S_T kainos atperkant instrumentą už X kainą. Taigi išmoka opciono pirkėjui momentu T yra lygi:

$$(S_T - X)^+ := max(S_T - X, 0),$$

kur pirkėjo pelnas šiuo atveju bus:

$$(S_T - X)^+ - f(S_0, X, t, T, r_f, \sigma).$$

Pasirinkimo sandorio pardavėjas šiuo atveju privalo išmokėti S_T ir X kainų skirtumą pasiliekant premijos mokestį. Pardavėjo šalies nuostolis yra lygus:

$$f(S_0, X, t, T, r_f, \sigma) + (X - S_T)^-, \text{ kur } -max(S_T - X, 0) = min(X - S_T, 0) = (X - S_T)^-.$$

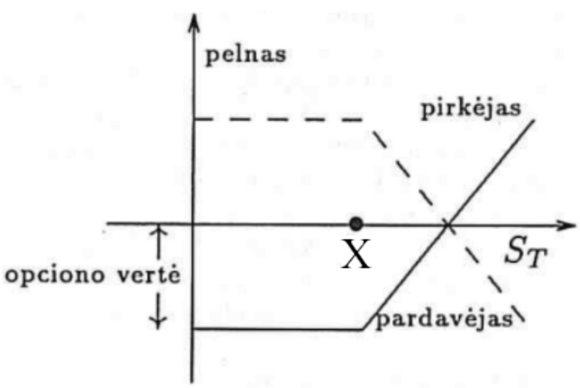
Pasirinkimo parduoti sandorių (*Put*) atveju, pirkėjo (*Buy Put*) pelną apibrėžti galima:

$$(X - S_T)^+ - f(S_0, X, t, T, r_f, \sigma),$$

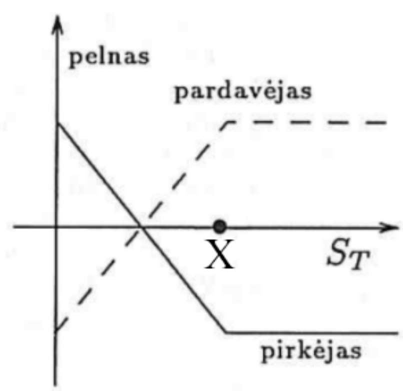
Pirkėjo pardavimo opcionas bus pelningas (*ITM* angl. *In-the-money,*) kainai $X > S_T$, kitu atveju pasirinkimo sandoris bus nepelningas (*OTM* angl. *Out-of-the-money*) ar beveik su pelnu (*ATM* angl. *At-the-money*) [21]. Pardavimo opcioną pardavusio rinkos dalyvio pelnas:

$$f(S_0, X, t, T, r_f, \sigma) + (S_T - X)^-.$$

Žemiau pateikti grafikai apibendrina europietiškųjų pirkimo bei pardavimo opcionų pirkėjų ir pardavėjų šalių pelnus kintant S_T bazinei instrumento kainai. X - pasirinkimo sandorio vykdymo kaina.



2 pav. Pirkimo opciono pelno diagrama[23].



3 pav. Pardavimo opciono pelno diagrama [23].

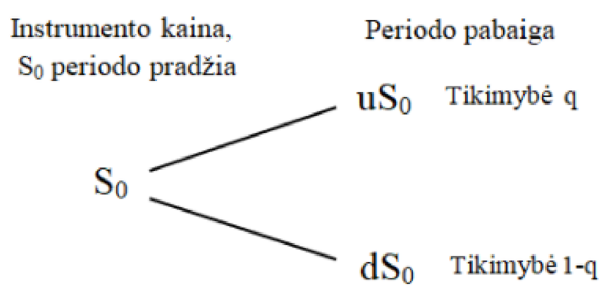
4 Pasirinkimo sandorių įkainojimo principai

4.1 Binominiai modeliai, sąlygos

Europietiškuosius opcionus galima įvertinti taikant Cox Ross - Rubinstein diskretaus laiko modelį žinomą, kaip binominį modelį, grindžiamą binarinių medžių (angl. *Binary trees (latters)*) sudarymu [3]. Šis modelis turi pranašumą prieš Black - Scholes modelį - tinka įvertinti amerikietiškiems opcionams. Binominio modelio pasirinkimo sandorių įkainojimo formulės sąlygos sutampa su Black- Scholes modelio reikalavimais, numatančiais prekybos komisinių ir mokesčių nebuvimą, tolygaus volatilumo bei palūkanų normų konstantą viso pasirinkimo sandorio galiojimo metu. Svertinės (angl. *leverage*) prekybos (su marža) apribojimų nebuvimą, įskaitant trumpųjų pozicijų (angl. *short selling*) neribojimą. Prekybiniai VP vienetai yra dalūs ir nėra fiksuoto sandorio dydžių, pavyzdžiui, 1 lotas. Rinka privalo būti be arbitražė.

4.2 Įkainojimo formulės ir pinigų srautus replikuojantis VP portfelis

Remiantis [3] ir [4] šaltiniais darome prielaidą, nusakančią bazinio instrumento S_0 kainos pokytį - kaina kinta pagal diskretaus laiko procesą vadinamą binominiu multiplikatyviuoju procesu. Aktyvo S_0 vertė per vieną periodą turi dvi galimas baigtis: S_0 pakilti iki $uS_0 = (1+u)S_0$ su tikimybe q arba nukristi iki $dS_0 = (1+d)S_0$ su tikimybe $1-q$. Čia u yra laikoma S_0 procentinis teigiamas pokytis, o d procentinis S_0 smukimas per vieną periodą. Rašomos u ir d raidės nuo žodžių angl. *upside* ir angl. *downside*. Binarinių medžių pavyzdys:

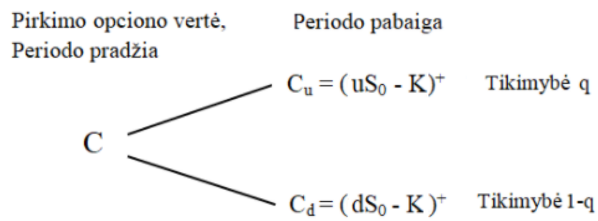


4 pav. Intsrumento kainos pokytis per vieną periodą. [3]

Binominio modelio sąlyga rinkos efektyvumui t.y. arbitražo nebuvimui apibrėžia nerizikingos palūkanų normos ribas tarp procentinio augimo u ir procentinio smukimo d reikšmių:

$$u > 1 + r_f > d.$$

Ši nelygybė teigia pelningų arbitražo strategijų nebuvimą, naudojant tik VP aktyvą ir nerizikingą skolinimąsi. Kitu atveju, rinka taptų arbitražinė ir pasirinkimo sandorių modelių sąlygos būtų pažeistos. Pirkimo opciono išmoka po vieno periodo yra pateikta **5 pav.** C_u yra pirkimo opciono išmoka periodo pabaigoje, kai bazinio instrumento kaina S_0 pasiekia uS_0 kainą. Priešingu atveju, aktyvo kainai smukus iki dS_0 kainos, pirkimo opciono išmoka žymima C_d. Remiantis **4.3** skyreliu pasirinkimo sandorių išmokos yra $C_u = max(0, uS_0 - X)$ ir atitinkamai $C_d = max(0, dS_0 - X)$.



5 pav. Pirkimo opciono vertė per vieną periodą. [3]

Pagal [4] šaltinį konstruodami pinigų srautus replikuojantį VP portfelį, turintį Δ vienetų akcijų, nemokančių dividendų, ir JAV doleriais denominuotų nerizikingų iždo popierių (pinigų rinkos instrumentai) sumą B, išmoka laiko $t = 0$ momentu yra verta $\Delta S_0 + B$. Periodo pabaigoje $t = 1$, VP portfelio vertė , priklausomai nuo rinkos sąlygų, galėjo pakilti ir būti $\Delta u S_0 + r_B$ vertės su tikimybe q ir $\Delta d S_0 + r_B$ su tikimybe $1 - q$. Sulygindami pasirinkimo sandorio ir VP portfelio vertę termino pabaigoje $t = 1$:

$$\Delta u S_0 + r_B = C_u,$$

$$\Delta d S_0 + r_B = C_b.$$

Išsprendę nelygybes, VP portfelį vadinsime rizikai apdraustu, jeigu akcijų skaičių Δ ir nerizikingų obligacijų sumą galima parinkti taip:

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{uS_0 - dS_0} = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S_0}, \tag{1}$$

$$B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r_f)}. \tag{2}$$

Δ galima interpretuoti kaip apsidraudimo koeficientą, rodantį opciono kainos pokytį, kur $(C_u - C_d)$ kainų skirtumas (angl. *spread*) ir aktyvo kainų $(uS_0 - dS_0)$ skirtumo santykis - optimalus (riziką mažinantis) koeficientas [4].

$$\Delta = \frac{Opciono\, kainos\, pokytis}{Aktyvo\, kainos\, pokytis} = \frac{dC}{dS}.$$

Tai primena opciono kainos išvestinę vertę, atsižvelgiančią į aktyvo kainą diskrečiame laike.

$B < 0$ reiškmė rodo,kad užimame skolinimosi poziciją, $B > 0$ užimame skolintojo poziciją. $B < 0$ įmanoma tik tada, kai $uC_d - dC_u < 0$. Galiojant rinkų efektyvumo sąlygai ir arbitražo galimybių nebuvimui pasirinkimo pirkti sandorio kontrakto vertė C bus lygi VP portfeliui $C = \Delta S_0 + B$. Opciono kontrakto vertė negali būti didesnė ar mažesnė, kitaip rinka taptų neefektyvi ir uždirbti nerizikingą pelną būtų galima - parduodami pasirinkimo pirkti sandorį (*Call sell*) ir pirkdami VP portfelį $(C < \Delta S_0 + B)$ bei pirkdami pasirinkimo pirkti sandorį (*Call long*) ir parduodami VP portfelį $(C > \Delta S_0 + B)$. Remiantis sąlygomis, europietiškojo ir amerikietiškojo (kai $C > S - X$, kitu atveju $C = S - X$) pasirinkimo sandorio kainą galima įvertinti per replikuojančio VP portfelio srautus, įstatant Δ ir B reikšmes į lygybę, $1 + r_f$ yra laikoma vieno periodo nerizikinga palūkanų norma:

$$C = \Delta S_0 + B = \frac{C_u - C_d}{(u-d)} + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r_f)}, \tag{3}$$

(3) formulė pertvarkoma į (4), įvedant tikimybių q ir $1-q$ išraiškas (4) formulėje.

$$C = \frac{(\frac{1+r_f-d}{u-d})C_u + (\frac{u-1-r_f}{u-d})C_d}{1+r_f}. \tag{4}$$

Tikimybių q ir $1-q$ išraiškas apibrėždami kaip:

$$q \equiv \frac{1+r_f-d}{u-d},$$

$$1-q \equiv \frac{u-(1+r_f)}{u-d}.$$

Pasirinkimo sandorio kontraktas visados yra didesnis nei bazinės kainos ir vykdymo kainos skirtumas $(S_0 - X)$, kai nėra mokami dividendai ir palūkanų norma yra teigiama. Pasinaudodami **4.2** skyrelio **5 pav.** įrašome C_u ir C_d išraiškas, (4) formulę pertvarkome į:

$$C = \frac{qC_u + (1-q)C_d}{1+r_f} = \frac{[(q)max(0, uS_0 - X) + (1-q)max(0, dS_0 - X)]}{1+r_f}. \tag{5}$$

Pasirinkimo pirkti sandorio kontrakto kaina $t = 0$ momentu yra opciono išmokų C_u ir C_d momentu $t = 1$ svertinis vidurkis $qC_u + (1-q)C_d$ diskontuotas nerizikinga palūkanų norma $1+r_f$. Tikimybės q išraiška $(0 < q < 1)$ nepriklauso nuo rinkos dalyvio subjektyvaus požiūrio į aktyvo S_0 kainos augimą u ar smukimą d, todėl kontrakto kainai C nedaro tiesioginės įtakos individo rizikos apetitui (rizikos vengiantis $U''(x) < 0$, rizikai neutralus $U'(x) = 0$, rizikos siekiantis $U''(x) > 0$, kur $U(x)$ naudingumo funkcija) bei kiti rinkos finansiniai aktyvams ar VP portfeliui. Opciono kaina priklauso nuo santykio tarp atsitiktinio dydžio S_0 ir u, d bei $1+r_f$.

4.3 Kelių periodų binominis modelis (N>1)

Įkainojant pasirinkimo sandorio premiją kelių periodų modelyje pagal [3] ir [4], sąlygos nesikeičia, tačiau $N = 1$ periodų koncepte nėra įtrauktas dinaminio apsidraudimo principas t.y. konstruodami pinigų srautus replikuojantį VP portfelį privalome Δ apsidraudimo koeficientą ir B obligacijų poziciją keisti pereinant iš vieno periodo į kitą. Nebegalioja statinio apsidraudimo principas , kada nereikia perbalansuoti VP portfelio aktyvų [4].

4.3.1 Periodų skaičius N=2

Δ apsidraudimo koeficiento ir B obligacijų pozicijos išraiškos nesikeičia, aktyvo kaina S_0 ir pasirinkimo sandorio premija turi $N + 1 = 3$ galimus rezultatus $t = 2$ momentu:

Veiksmas	Bazinio aktyvo S_0 elgesys	Pasirinkimo opciono kaina C
1. uu (augo,augo)	$S_{0uu}= u^2S_0$	$C_{uu}=C(S_{0uu}) = \max(0,u^2S_0\text{-}X)$
2. ud (augo,smuko)	$S_{0du}=udS_0=duS_0=S_{ud}$	$C_{du}=C(S_{0du})=C(S_{0ud})=C_{ud}=\max(0,duS_0\text{-}X)$
3. du (smuko, augo)		
4. dd (smuko,smuko)	$S0_{dd}=d^2S_0$	$C_{dd}=C(S_{0dd}) = \max(0,d^2S_0\text{-}X)$

Laiko momentu $t = 1$, apskaičiuosime pasirinkimo santorių C_u ir C_d premijas pagal būsimas C_{uu}, C_{ud}, C_{dd} išmokas kontrakto termino pabaigoje laiko momentu $t = 2$ naudodami (5) formulę:

$$C_u = \frac{([qC_{uu} + (1-q)C_{ud)}])}{1+r_f}, \tag{6}$$

$$C_d = \frac{([qC_{du} + (1-q)C_{dd}])}{1+r_f}. \tag{7}$$

Pasirenkame VP portfelį su ΔS_0 aktyve ir B obligacijų kiekį, kurio vertė periodo pabaigoje bus lygi C_u, jeigu aktyvo kaina pakinta iki uS_0 arba C_d , jeigu aktyvo kaina smunka iki dS_0. Norėdami gauti Δ ir B reikšmes reikia naudoti (1) ir (2) lygtis.
Pasirinkimo sandorio premiją C gausime (6) ir (7) lygybes įstatę į (5) formulės išraišką:

$$C = \frac{([q^2C_{uu} + 2q(1-q)C_{ud} + (1-q)^2C_{dd}])}{(1+r_f)^2} =$$

$$\frac{q^2\, max[0,\, u^2S_0 - X] + 2q(1-q)\, max[0,\, duS_0 - x] + (1-q)^2\, max[0,\, d^2S_0 - X]}{(1+r_f)^2}.$$

4.3.2 N-periodų binominis modelis

Remiantis [3] šaltiniu, bendra rekursinė funkcija skirta apskaičiuoti pirkimo opciono pinigų srautų termino pabaigoje dabartinę vertę t.y. opciono kontrakto vertė daugelio periodų momente yra:

$$C = \frac{\sum_{j=0}^{n}(\frac{n!}{j!(n-j)!})q^j(1-q)^{n-j}max[0,\, u^jd^{n-j}S_0 - X]}{(1+r_f)^n}, \tag{8}$$

$$P = \frac{\sum_{j=0}^{n}(\frac{n!}{j!(n-j)!})q^j(1-q)^{n-j}max[0,\, X - u^jd^{n-j}S_0]}{(1+r_f)^n}. \tag{9}$$

Įvedę kintamąjį k – mažiausią natūralųjį kainos S_0 augimo skaičių, kurį bazinis aktyvas privalo įvykdyti per ateinančius n periodų tam, kad pirkimo opcionas būtų pelningas (*ITM* angl. *in-the-money*). Apibendrintai:

$$u^kd^{n-k}S_0 > X.$$

Logaritmuodami abi puses, gauname mažiausią natūralųjį teigiamų žingsnių skaičių k:

$$k > \frac{ln(\frac{X}{(S_0)^n})}{ln\frac{u}{d}}.$$

Pasirinkimo pirkti sandorio vertės pagal k:

k>j	$\max[0, u^j d^{n-j} S_0 - X] = 0$
k$\leq j$	$\max[0, u^j d^{n-j} S_0 - X] = u^j d^{n-j} S_0 - X$

Nebūtina skaičiuoti pirkimo opciono atvejų, kai jis nėra pelningas (ATM/OTM), formulę (8) išvedame:

$$C = \frac{\sum_{j=k}^{n}(\frac{n!}{j!(n-j)!})q^j(1-q)^{n-j}max[0, u^j d^{n-j} S_0 - X]}{(1+r_f)^n}.$$

5 Graikiškos raidės (angl. *Option greeks*)

Šis skyrius parašytas pagal [17] ir [21] šaltinius. Remiantis [27] ataskaita 2020m. Q4 (IV ketvirčio) duomenimis komerciniai bankai "JPMorgan Chase Bank (JPM)", "Goldman Sachs Bank (GS)", "CitiBank National (C)" valdo atitinkamai 8,264 mlrd., 8,659 mlrd. ir 5.295mlrd. USD pasirinkimo sandorių portfelius, itin jautrius rinkos faktoriams, darantiems įtaką opciono premijai ir jos volatilumui. Įvertinti opciono rizikos charakteristikas (angl. *Option sensitivities*) yra naudojami pasirinkimo sandorio rodikliai - delta, gama, teta, vega, ro - vadinami graikiškosiomis raidėmis (angl. *option greeks*) kartu su numanomu opciono kontrakto kintamumu (angl. *Implied volatility*), nurodančiu rinkos požiūrį į VP aktyvo kainos pokyčius.

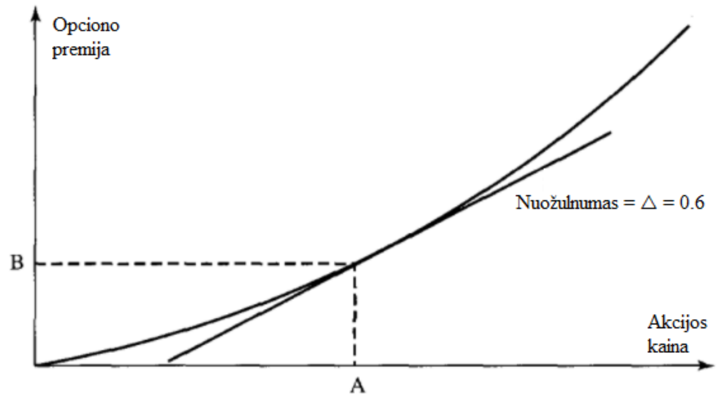
5.1 Delta - aktyvo kainos įtaka

Delta - pirmoji opciono kainos išvestinė, matuojanti pasirinkimo sandorio premijos procentinį jautrumą bazinio aktyvo kainos S_0 kintamumui, skaičiuojama kaip dešimtainis skaičius nuo -1 iki 1 reikšmės. Pirkimo opcionų ilgosios pozicijos delta svyruoja [0,1] intervale, kai pardavimo opcionų ilgoji pozicija priešingai - [-1;0]. Pavyzdžiui, jeigu pasirinkimo sandorio delta yra vienas ir bazinio aktyvo kaina pakinta per 1 USD, tai opciono premija pakyla per 1 USD. Tokią situaciją suformuoja opcionai, esantys arti termino pabaigos ir pelningi (*ITM* angl. *In-the-money*). Atvirkščiai, opciono, turinčio delta lygią 0, premija nekinta aktyvo kainai kylant per 1 USD. Deltos 0.5 reikšmė rodo premijos augimą per 0.5 USD kainai S_0 pakilus 1 USD. Opcionai turintys 0.5 delta dažniausai yra arti vykdymo kainos X (*ATM* angl. *At-the-money*) [21].

$$Delta_C = \frac{\delta C}{\delta S_0} = e^{-r_\delta t}N(d_1), \qquad Delta_P = \frac{\delta P}{\delta S_0} = e^{-r_\delta t}N(-d_1).$$

Kur C - pirkimo sandorio premija, P - pardavimo sandorio premija, S_0 - instrumento kaina, X- vykdymo kaina, - bazinio instrumento nepastovumas, r_δ-mokamų dividendų norma, t-opciono galiojimo terminas, $N(d)$ - rizikos faktoriai.

Delta nurodo tikimybę pasinaudoti pasirinkimo sandorio pelnu termino pabaigoje ir iš esmės yra opciono vertės iki periodo pabaigos liestinė.



6 pav. Deltos skaičiavimas. [17]

Delta neutralumas - pasirinkimo sandorių prekybos strategija, siekianti sumažinti ir užhedžuoti VP portfelio priklausomybę nuo tiesioginės rizikos susijusios su bazinio instrumento kainos svyravimais. Pavyzdys iš [17] šaltinio: Tarkime, S_0 = 100$ ir C=10$, delta = 0.6, rinkos dalyvis parduodamas 20 pasirinkimo pirkti sandorių vienetų, kurių vienas kontraktas lygus 1 lotui aktyvo vienetų (laikykime akcijų), gali išlaikyti rizikai neutralų portfelį apdrausdamas jį perkant $0.6 * 2,000 = 1200$ akcijų antrinėje rinkoje, kadangi 1 USD pokytis S_0 kainoje atsispindės tik 0.6 USD pokyčiu opciono premijoje. Uždarbį (nuostolį) pasirinkimo sandoriuje kompensuos praradimas (uždarbis) akcijų pozicijoje t.y. S_0 kainai pakilus per 1 USD ilgoji pozicija akcijose generuos 1200 USD pelną, tačiau 0.6 opciono premijos pokytis pardavimo pozicijoje generuos 1200 nuostolį ir atvirkščiai S_0 kainai smunkant. Akcijos delta yra lygi 1. Rinkos dalyvio siekiamybė išlyginti trumpųjų ir ilgųjų pozicijų deltas išlaikant VP portfelio deltos reišmę lygia 0, vadinamai - delta neutralia. Tačiau egzistuoja strategijos minusai:

- Aktyvų perbalansavimas - kintant kainoms, keičiasi ir deltos reikšmė. Akcijos kainai paaugus iki 110USD, laikykime delta pakinta per 0.05 į teigiamą pusę nuo 0.60 pradinės reikšmės iki 0.65. Tokiomis sąlygomis, siekiant delta neutralumo, privaloma $0.05 * 2000 = 100$ akcijų vienetų nusipirkti rinkoje - *dinaminio apsidraudimo principas* [4].

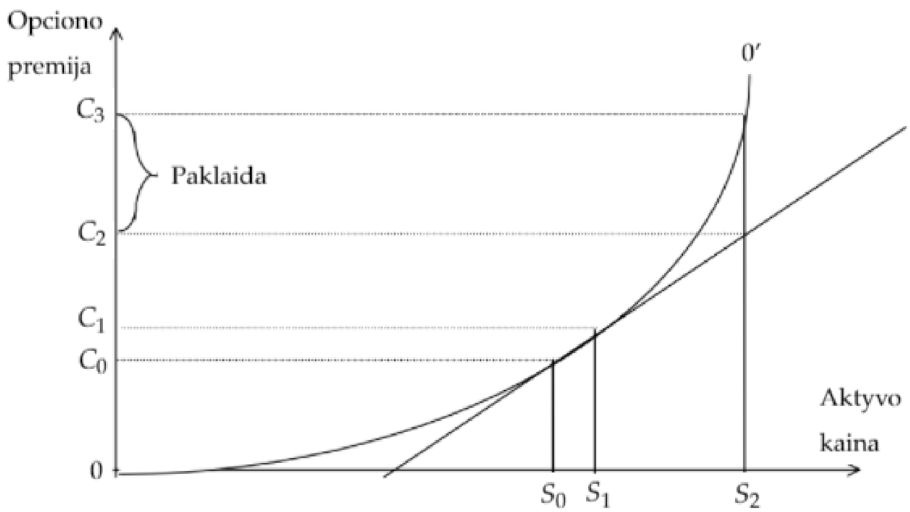
- Egzistuoja galimybė per daug apsidrausti dėl netikėto rinkų kintamumo ir deltos pokyčio.

- Praktikoje nuolatinis aktyvų perbalansavimas kainuoja komisinius.

5.2 Gama - deltos kitimo greitis

Gama - antros eilės opciono premijos išvestinė, matuojanti deltos pokyčio greitį kintant bazinio aktyvo S_0 kainai. Deltos apdraustam pasirinkimo sandorių portfeliui koregavimą atlikti reikia rečiau esant žemai gamai , deltai kintant lėtai, ir atvirkščiai - deltos staigus kitimas yra rizikingas deltos apdraustam portfeliui,o tai atsispindės aukštoje gamoje ir bus reikalingas aktyvesnis VP portfelio aktyvų perbalansavimas [21]. Delta nesikeičia tiesiškai, ji kinta su pagreičiu, todėl egzistuoja apsidraudimo paklaida [17]. Bazinei aktyvo kainai

S_0 augant iki S_1 kainos, pagal delta apdrausto portfelio prielaidą, pasirinkimo sandorio kaina kinta nuo C_0 iki C_1 ir delta gana tiksliai atspindi premijos prieaugį. Didėjant deltos pokyčiui, aktyvo kainai pakitus nuo S_1 iki S_2 atsiranda premijų paklaida, kadangi numatoma C_2 premijos kaina, kuri iš tikrųjų yra C_3 . Premijų C_2 ir C_3 skirtumas (angl. *spread*) portfelį atveria rizikai dėl hedžavimo paklaidos, o jos dydis priklauso nuo kreivės OO' išlenkimo, kurį matuoja gama [10]:



7 pav. Deltos apdrausto VP paklaida. [10]

Gama yra teigiama, kai opcionas yra perkamas ir dėl gama įtakos, rinkos sąlygoms keičiantis į palankias, pirkėjo pelnas iš opciono kontrakto auga greitėjančiai, o sąlygoms pasikeitus į nepalankią pusę, nuostolis didėja lėtėjančiai. Atvirkštinė situacija parduodant opcioną - gama neigiama. Esant palankioms rinkos sąlygoms, pardavėjo pelnas auga lėtėjančiai, nuostolis - greitėjančiai. Iš šios savybės kyla didžiausia rizika pasirinkimo sandorių pardavėjams. Be to, gamos priklausomybė nuo laiko yra labai aukšta ir paskutinis kontrakto termino mėnuo gamą augina ypač sparčiai. Dėl šių priežasčių opcionui tampant pelningu (*ITM*) artėjant termino pabaigai, pasirinkimo sandorio rizika išauga eksopentiškai [21].

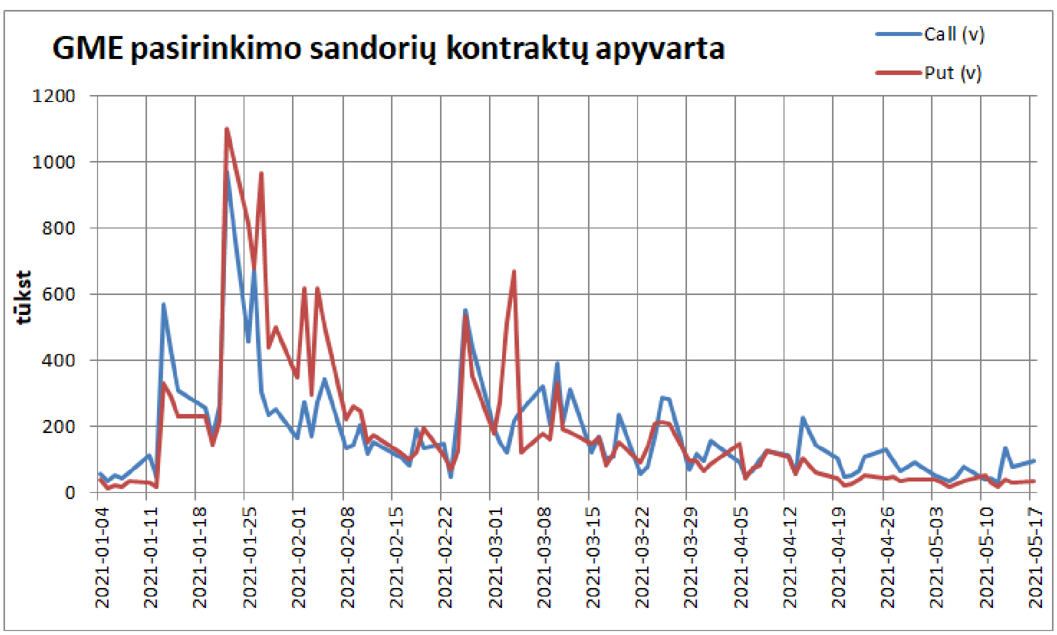
$$Gama_C = \frac{\delta delta_C}{\delta S} = \frac{N(d_1)e^{-r_\delta t}}{S\sigma\sqrt{t}},$$

$$Gama_P = \frac{\delta Delta_P}{\delta S} = \frac{N(d_1)e^{-r_\delta t}}{S\sigma\sqrt{t}},$$

$$Gama_{P,C} = \frac{\frac{e^{(-\frac{(-d_1)^2}{2})}}{\sqrt{2\pi}}}{S\sigma\sqrt{t}} xe^{(-ln(1+r_\delta)t)}.$$

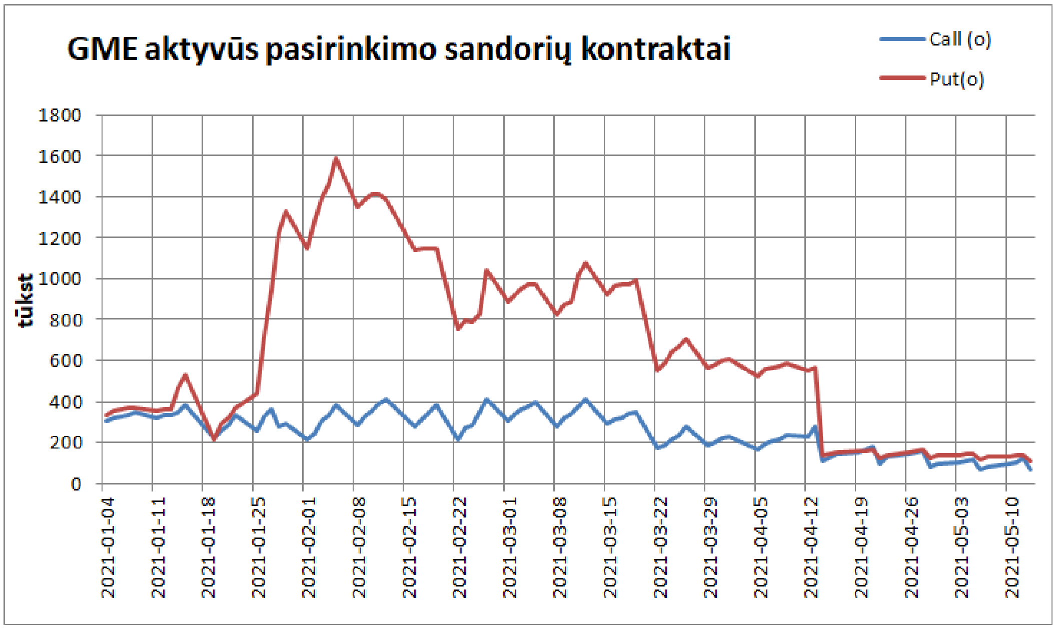
5.2.1 Gama ir GME trumpųjų pozicijų išspaudimas

Pasirinkimo sandorių prekyboje aktyviai dalyvauja finansų institucijos ar stambūs dalyviai vadinami rinkos formuotojais (angl. *Market makers*), suteikiančiais prekybos instrumentams likvidumo. Dažnu atveju, pasirinkimo sandorio pardavėjo šalis ir yra rinkos formuotojas, bandantis uždirbti iš pasirinkimo sandorio premijų C ir P pagal sudėtingus statistinius ir įkainojimo modelius kaip Black-Scholes (pelno/nuostolio diagramos pateiktos **3.3** skyrelio **2 pav.** ir **3 pav.**). Dalį potencialaus pelno rinkos formuotojas su papildomu kapitalu naudoja apdrausti sandorio pozicijas perkant akcijas (angl. *long side*) arba parduodant akcijas (angl. *short side*), priklausomai nuo pasirinkimo sandorio pozicijos (remiantis **5.1** delta neutralumu) . Kuo aukštesnė pasirinkimo sandorio delta, tuo didesnės akcijų pozicijos reikia išlaikyti atviroms pasirinkimo sandorių pozicijoms. Deltai keičiantis, rinkos formuotojas privalo pirkti ar parduoti akcijas su tikslu laikytis delta neutralumo, o deltos pokyčio pagreitis yra gama. “GameStop” prekiaujamų akcijų apyvartos šokas (Sausio 13-27d. Suprekiauta 1096.52 mln vnt., kai įmonės viešai kotiruojamų akcijų yra 56.89 mln vnt), sukėlę išaugusį kintamumą dėl kurio pradėta prekiauti dideliais pasirinkimo sandorių kontraktų kiekiais opcionų grandinėje [19]. Pasirinkimo sandorių pardavėjams - rinkos formuotojams - užimant pasirinkimo pirkti sandorių trumpąsias pozicijas (angl. Call short) ir akcijos kainai kylant paraboliškai į viršų, delta pokyčio greitis gama buvo itin aukštas. Akcijos kainai sparčiai tolstant nuo pasirinkimo sandorio vykdymo kainos X, delta artėjo prie 1 reikšmės pasirinkimo pirkti sandoriui. Rinkos formuotojui -1, kadangi jis užima pasirinkimo pirkti sandorio trumpąją poziciją. Reikšmė 1 rodo, jog akcijos kainai S_0 pasikeitus per 1 USD, pasirinkimo sandorio premija išauga per 1 USD. Remiantis 3.3 skyrelio 2 pav. tokioje situacijoje rinkos formuotojo nuostolis yra neribotas, todėl tiesioginis akcijų pirkimas rinkoje yra skubiai privalomas. “GameStop” akcijų paklausa iš rinkos formuotojų pusės stumė kainą pasiūlymais pirkti (angl. *bid*) aukštyn. Tokiu būdu akcijoms kylant dėl pasirinkimo sandorių hedžavimo ir rizikos fondų trumpųjų (angl. *short*) pozicijų likvidavimo, įvyksta grandininė reakcija dėl kurios naujai nupirkti pasirinkimo pirkti sandoriai vėl tampa pelningi rinkos dalyviams, o tai skatina išaugti kontraktų apyvartą, kol neįvyksta perkaitimas [31].



8 pav. Pasirinkimo pirkti (*call*) ir parduoti (*put*) sandorių apyvartos (angl. *volume*). Autorių pav.

Sulygindami **2.2** skyrelio **1 pav.** ir **5.2.1** skyrelio **8 pav.** pastebime pasirinkimo sandorių kontraktų apyvartos išaugimą padidėjus "GameStop" akcijų kainos svyravimams. Sukilęs instrumento kintamumas kaip cheminės reakcijos katalizatorius priverčia sparčiau kisti pasirinkimo sandorių premijoms.



9 pav. Aktyvūs pasirinkimo pirkti (*call*) ir parduoti (*put*) sandorių kontraktai (angl. *open interest*). Autorių pav.

Aktyvūs pasirinkimo sandorių kontraktai parodo, kiek yra nelikviduotų kontraktų įvykdant sandorį ar užimant priešingą sandorio poziciją. Remiantis **9 pav.** aktyvių pasirinkimo pirkti sandorių (angl. *Call*) žymimas "Call(o)" kiekis visą laikotarpį išliko stabilus - rinkos prekeiviai sparčiai likviduodavo savo pasirinkimo sandorių pozicijas, įvykdydami sandorį galiojimo termino pabaigoje ar užimdami priešingą poziciją, kadangi toks rinkos fenomenas yra trumpalaikis. Pasirinkimo parduoti sandorių (angl. *put*) žymimų "Put(o)" aktyvių kontraktų skaičius išliko aukštas per panikos išsipardavimą ir tolimesnį akcijų kainos kritimą - tikėtasi tolimesnio aktyvo kainos ir kintamumo mažėjimo, grįžimo prie normų.

5.3 Teta - laiko vertės įtaka

Teta - pirmos eilės pasirinkimo sandorio išvestinė su minusu, interpretuojama kaip pasirinkimo sandorio vertės pasikeitimas atsižvelgiant į laiko pokytį (angl. *Time decay*). Kadangi opcionai praranda vertę artėjant galiojimo termino pabaigai, tetos rodiklis rodo premijos mažėjimą su kiekviena termino diena, jeigu kiti faktoriai išlieka pastovūs. Tetos netiesiškas kitimas labiausiai pastebimas išaugant reikšmei termino pabaigoje opcionams esant pelningiems (*ITM*) ir arti pelningumo (*ATM*). Nepelningiems opcionams (*OTM*) reikšmė paprastai mažėja [21].

$$Teta_C = \frac{1}{365}(-(\frac{S_0 \sigma e^{(-r_\delta t)}}{2\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{\frac{-d_1^2}{2}}) - r_f X e^{-r_f t} N(d_2) + r_\delta S_0 e^{(-r_\delta t)} N(d_1)),$$

$$Teta_P = \frac{1}{365}(-(\frac{S_0 \sigma e^{(-r_\delta t)}}{2\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{\frac{-d_1^2}{2}}) + r_f X e^{-r_f t} N(-d_2) - r_\delta S_0 e^{(-r_\delta t)} N(-d_1)).$$

5.4 Vega - aktyvo kainos nepastovumo įtaka

Vega - rodiklis, matuojantis pasirinkimo sandorio premijos pokytį pagal instrumento kainos S_0 nepastovumą. Kintamumas vienas pagrindinių faktorių darančių įtaką opciono premijai: išaugęs kintamumas ir vegos augimas paprastai sukelia tiek pirkimo opcionų , tiek pardavimų opcionų premijos brangimą, kai vegos smukimas - premijų pigimą. Instrumento kainai S_0 esant arti vykdymo kainos ir pasirinkimo sandoriui esant beveik su pelnu (*ATM*), vegos reikšmė yra didžiausia. Tuo tarpu, didėjant skirtumui tarp S_0 ir X kainų, vega turi tendenciją mažėti. Rodiklio reikšmę galima apskaičiuoti naudojantis formule [21]:

$$Vega_{P,C} = \frac{\delta P\, arba \delta C}{\delta \sigma} = \frac{S_0 \sqrt{t} \frac{e^{(-\frac{(-d_1)^2}{2})}}{\sqrt{2\pi}} e^{-ln(1+r_\delta)t}}{100}.$$

Vegos reikšmės nestandartinis nuokrypis suteikia prekybos galimybių rinkos dalyviams. Pakankamai žemas reikšmės lygis suteikia progą pirkti pasirinkimo sandorius ir tikėtis nepastovumo didėjimo, kuris sukelia premijos augimą. Jei vega itin išauga, galima tikėtis nepastovumo smukimo, kuriuo pasinaudos rinkos dalyviai parduodami opcioną.

5.5 Ro - palūkanų normos įtaka

Ro - matuoja numanomą pasirinkimo sandorio premijos pokytį pagal procentinį palūkanų normos kitimą [21]. Rodiklis rodo kiek premija gali pasikeisti dėl rizikai neutralios palūkanų normos (pavyzdžiui, *U.S treasury notes*) pokyčio. Palūkanų normoms kylant pirkimo opcionų (*Calls*) premija auga, kai pardavimo opcionų (*put*) krenta. Tai nėra esminis faktorius darantis įtaką opciono premijoms, tačiau "Chase Bank (JPM)", "Goldman Sachs Bank (GS)", "CitiBank National (C)" , valdydami didelius išvestinių priemonių ir konkrečiai pasirinkimo sandorių VP portfelius, turi įvertinti šį faktorių prieš federalinio rezervų centro FOMC (angl. *Federal open market committee*) susitikimus, kurie vyksta 8 kartus į metus ir juose yra sprendžiama palūkanų norma (angl. *FED funds rate*) [5].

$$Ro_C = \frac{\delta C}{\delta r_f} = \frac{Xte^{(-ln(1+r_f)t)} N(d_2)}{100},$$

$$Ro_P = \frac{\delta P}{\delta r_f} = \frac{Xte^{(-ln(1+r_f)t)} N(-d_2)}{100}.$$

5.6 Numatomas kintamumas

Remiantis [30] numatomas kintamumas (angl. *implied volatility(IV)*) nėra vienas iš graikiškų raidžių rodiklių, tačiau šio kintamojo svarba pasirinkimo sandorio premijos vertei yra svarbi. Opcionų grandinėje kartu su rizikos charakteristikomis pateikiamas rodiklis reiškia numatomą aktyvo kainos S_0 kintamumą kontrakto galiojimo laikotarpiu. Rinkos dalyvių lūkėsčiai dėl aktyvo kainos krypties formuoja skirtingą paklausą ir pasiūlą, kurios turi tiesioginę įtaką numatomam kintamumui. Rinkos dalyvių lūkesčių ir paklausos augimas privers numatomo kintamumo rodiklį kilti, tuo tarpu lūkesčių ir paklausos mažėjimas atsispindės numatomo kintamumo kritime. Pasirinkimo sandorių premija su aukštu numatomo kintamumo rodikliu bus įvertinta brangiai, kitu atveju, mažas numatomo kintamumo rodiklis lems pigesnes pasirinkimo sandorio premijas.

5.6.1 S&P500 numatomo kintamumo instrumentas VIX

VIX instrumentas [33], žinomas dar kaip "baimės" ar "streso" indeksu, nurodo akcijų rinkos numatomo kintamumo lūkesčius dėl ateinančių 30 dienų periodo. VIX skaičiuojamas pagal S&P500 akcijų indekso trumpo laikotarpio pasirinkimo sandorius, o instrumento elgseną interpretuoti reikia kaip signalą apie galimą rinkos korekciją. Išaugusi numatomo kintamumo reikšmė priverčia rinkos dalyvius mažinti rizikingus VP portfelio aktyvus, pavyzdžiui, akcijas ir nukreipinėti į saugesnes klases - JAV obligacijas, kadangi rinkos kainų nepastovumas gali atnešti nuostolius.

10 pav. VIX instrumento grafikas. Autorių pav.

2020 kovo mėn. VIX vertės išaugimas siejamas su pasauline rinkų recesija, "S&P500" ir kitų svarbių indeksų kaip "DOW" ,"DAX", ir "Nasdaq" griūtimi bei 2.1 skyrelyje minėtu neigiamų naftos kainų įvykiu.

6 Arbitražas

Arbitražas [13] (angliškai - *arbitrage*), tai vertybinių popierių, derivatų formų, valiutų pirkimas tuo pačiu metu skirtingose biržose, išnaudojant skirtingas kainas esančias tame laiko momente. Arbitražo pagrindinė savybė, kad gaunamas garantuotas pelnas be jokios rizikos ar pradinės investicijos.

Nors realybėje arbitražas egzistuoja ir yra naudojamas pasipelnyti, dauguma modelių tokie kaip Black-Scholes modelis reikalauja, kad rinka būtų be arbitražinė. Modeliai remiasi principu, kad visi investuotojai turi tokią pačią informaciją ir ja gali naudotis, todėl atsiradus arbitražo galimybei, ji iškart išnyktų niekam nespėjus pasipelnyti. Arbitražo galimybė pakelia ar nuleidžia turto vertę, todėl modelių skaičiavimai tampa netikslūs. Be arbitražė rinka leidžia matyti aiškesnius ir tikslesnius modelio parametrus, kurie parodo turto realią vertę.

Šiuolaikinės technologijos leidžia automatizuotoms programoms pastebėti skirtingas kainas skirtingose biržose sekundės dalyje, kadangi tai yra nerizikingas pelnas. Biržos stengiasi apsisaugoti nuo arbitražo sekdami vieni kitas. Taip pat dėl egzistuojančio didelio likvidumo šiomis dienomis arbitražo galimybė yra maža, mažo pelno ar išvis neegzi, tuojanti akcijų, vertybinių popierių, ateities sandorių, valiutų ir kitose rinkose. Paskutinį dešimtį metų populiarėjant ir augant naujai kripto valiutų rinkai, atsirado galimybė vykdyti arbitražą naudojant senus bei naujus metodus, perkant ir parduodant skirtingų šalių valiutas, pritaikant cash-and-carry metodą [32].

Priežastys

Pagrindinės priežastys arbitražui atsirasti dažniausiai yra makroekonomikos padariniai. Dažniausiai tai: ekonominė apyvarta, nedarbingumas, taupymo ar investavimo tendencijos, infliacija, ekonominis augimas, palūkanų normos, tarptautinės gamybos apimtys.

6.1 Arbitražo įkainojimo teorija

Arbitražo įkainojimo teorija [12] (angl. *Arbitrage pricing theory [APT]*) sukūrė ekonomistas Stephen Ross, kaip alternatyvą CAPM modeliui, kuris paremtas, kad rinka yra tobulai efektyvi. Toks modelis nėra rizikai neutralus, analizuojant arbitražą, nors APT yra lankstesnis modelis, tačiau jis yra kur kas sudėtingesnis. APT apskaičiavimais remiantis, kad egzistuoja daugiau nei vienas sisteminis faktorius:

$$Er_i = r_f + \alpha_i - Er_i + \beta_{i,1}(r_{n,1} - r_f) + \beta_{i,n}(r_{n,m} - r_f)$$

Duomenys nurodyti šioje lygtyje yra:

r_i - pasirinkimo pirkti aktyvo grąža situacijoje i, r_f - nerizikinga palūkanų norma. Er_i - grąža, paskaičiuota CAPM modeliu. α_i - istorinė grąža. $\beta_{k,l}$ - Rodo koreliaciją tarp k situacijos ir n_l $r_{n,j}$ - n_l grąža Arbitražo negalimumas reikalauja, kad istorinės grąžos ir grąžos apskaičiuotos pagal CAPM skirtumas būtų lygus nuliui, kitu atveju egzistuoja arbitražas. Su sąlygą, kad $\alpha_i - Er_i = 0$, gauname[9]:

$$Er_i = r_f + \beta_{i,1}(Er_{n,1} - r_f) + \beta_{i,n}(r_{n,m} - r_f) = r_f + \sum_{m=1}^{n} \beta_{i,n}(Er_{n,m} - r_f)$$

Čia $(Er_{n,m} - r_f)$ yra aktyvo premija.

Sudarant pasirinkimo sandorio kainą, turime daryti prielaidą, kad arbitražas nėra įmanomas, kad rinka yra tobula bei visi investuotojai turi tokią pačią informaciją ir ja laisvai gali naudotis. Pateiksime pavyzdį kaip naudojantis portfeliu įkainoti pasirinkimo sandorius remiantis be arbitražine rinka.

Skaičiavimo pavyzdys

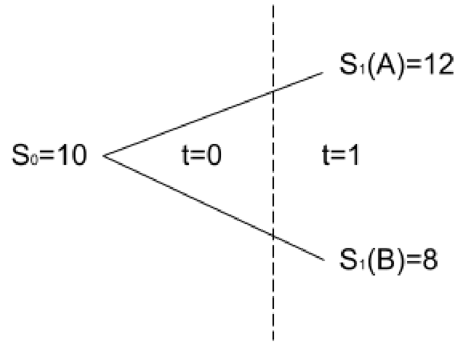
Binominio vieno laiko modelyje turime 2 laikus, pradinį laiko momentą ($t = 0$) ir galutinį pasirinkimo sandorio laiką ($t = 1$), kadangi laiko momentas yra diskretus, nes tyrinėjame europinę pasirinkimų sandorų rinką.

Portfelyje turime obligacijų (sąlyginai mažos rizikos vertybinis popierius) ir akcijų (sąlyginai didelės rizikos vertybinis popierius), kur obligacijų vertę žymėsime B_t, kuri priklauso nuo laiko momento ir akcijų vertę žymėsime S_t, kuri taip pat priklauso nuo laiko momento. Portfelyje esančių akcijų ir obligacijų skaičius nebūtinai turi sutapti ar būti tik teigiamas. Teigiamas akcijų ir obligacijų kiekis nurodo mūsų poziciją rinkoje, ar mes užimame ilgąją poziciją (angl. *long*), ar mes laikome trumpąja (angl. *short*) poziją (paskutinioji būtų neigiama). Ilgoji pozicija, tai akcijos ar obligacijos "paprastas" pirkimas momentu $t = 0$, kuriame tikime, kad ateityje sandorio vertė kils. Trumpasis laikotarpis, tai sandorio sudarymas, kai tikimės, kad mūsų stebimame periode akcijos ar obligacijos vertė kris. Taip pat, turime apibrėžti portfelį kaip sandorio vektorių $h = (x, y)$, kur x laikysime obligacijomis, o y laikysime akcijomis. Portfelio vertę V_t^h nustatysime paprasta lygtimi

$$v_t^h = x * B_t + y * S_t, \qquad t = 0, 1.$$

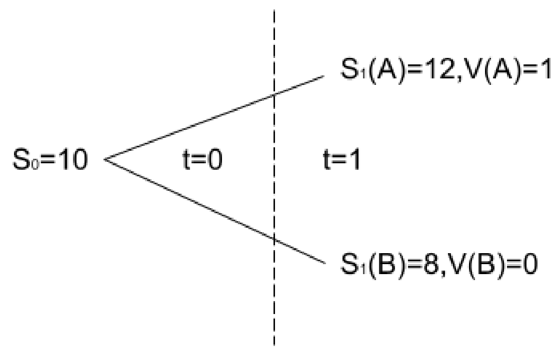
Jeigu nagrinėtumėme atvejį, kai rinka arbitražinė, gautume, kad momentu $t = 0$ portfelio vertė $V_0^h = 0$, nes arbitražo atveju mūsų pirkimas ir pardavimas yra momentinis ir nerizikingas, todėl $V_1^h > 0$ arbitražo atveju portfelio vertė būtų visais atvejais didesnė už nulį,kadangi finansiniai aktyvai rinkoje yra neteisingai įkainoti. Tokiu atveju sunku suformuoti sandorio įkainavimo vertę, todėl panagrinėsime pavyzdį su be arbitraže rinka.

Pavyzdžiui, imkime akciją, kaip vertybinį popierių, dėl jos didesnės rizikos ir vertės kintamumo. Tarkime, kad mūsų akcijos momentinė vertė investicijos pradiniame momente $t = 0$ yra $S_0 = 10$, binominiu atveju mes tariame, kad ateityje, t.y. momentu $t = 1$ galimi tik du variantai, kad $S_1(A) = 12$ arba $S_1(B) = 8$.



11 pav. Binominis medis, Autorių pav.

Sandorio vertė A situacijoje momentu $t = 1$ apskaičiuojama pagal formulę $V_1(A) = max\{S_i - X, 0\}$, kur S_i yra akcijos momentinė vertė laiko momentu i, o X yra sandorio įvykdymo kaina (angl. *Strike price* arba *exercise price*). Tarkime, kad šioje situacijoje mūsų įvykdymo kaina $X = 11$, tada pasirinkimo sandorio vertė A situacijoje yra lygi $V_1(A) = max\{12 - 11, 0\} = 1$, o situacijoje B : $V_1(B) = max\{8 - 11, 0\} = 0$. Svarbu paminėti, kad situacija yra apskaičiuojama europietiškame modelyje.



12 pav. Binominis medis su sandorio verte, Autorių pav.

Mum svarbu sužinoti pasirinkimo pirkti sandorio vertę V_0 pradiniu momentu $t = 0$, kad galėtume žinoti investicijos perspektyvas ateityje. Kad tai paskaičiuotumėme, turime sukurti pasirinkimo sandorių naują portfelį X ir apskaičiuoti jo vertę momentu $t = 1$, kai pirksime M_0 akcijų kiekį. Vėlgi turime dvi situacijas ateityje, kai laikas $t = 1$. Turime $X_1(A) = M_0 * S_1(A) + I_0 * (1 + r_f)$, čia $S_1(A)$ yra pirmo portfelio A situacijos sandorio vertė ir r_f yra tikėtina (garantuota) grąžą, o I_0 yra indėlis. Taip pat, B situacijoje sandorio vertė $X_1(B) = M_0 * S_1(B) + I_0 * (1 + r_f)$.

Tarkime, kad $r_f = 25\% = 0.25$ ir žinome iš anksčiau, kad $S_1(A) = 20$ ir $S_1(B) = 5$. Teigėme, jog neegzistuoja arbitražo galimybė, tai pasirinkimo sandorio portfelio vertės turi sutapti bet kokioje situacijoje, nes visi investuotojai turi tą pačią informaciją ir akcijos,ir obligacijos yra teisingai įkainotos (teisingai įkainoti vertybiniai popieriai nesuteikia galimybės egzistuoti arbitražui). Gauname lygybes - A ir B situacijos laiko momentu $t = 1$, portfelių vertės yra lygios.

$$X_1(A) = V_1(A),$$
$$X_1(B) = V_1(B).$$

Iš čia gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 12M_0 + I_0(1+0,25) = 1 \\ 8M_0 + I_0(1+0,25) = 0 \end{cases}$$

Ją išsprendę, gauname $M_0 = 0,25$ ir $I_0 = -1,6$. Su akcijų ir indėlio duomenimis sukūrėme portfelį, kurio vertė yra lygi pirminiam portfeliui. Kadangi mes sugebame sukurti tokį dubliuojantį portfelį su konstantomis, tai pagal APT apibrėžimą, portfelių kainos turi sutapti ir pradiniu laiko momentu $t = 0$. Kai $X_0 = V_0$, gauname:

$$V_0 = M_0 * S_0 + I_0 = 0,25 * 10 - 1,6 = 0,9.$$

Gavome pasirinkimo pirkti sandorio vertę momentu $t = 0$, kai rinka yra be arbitražė.

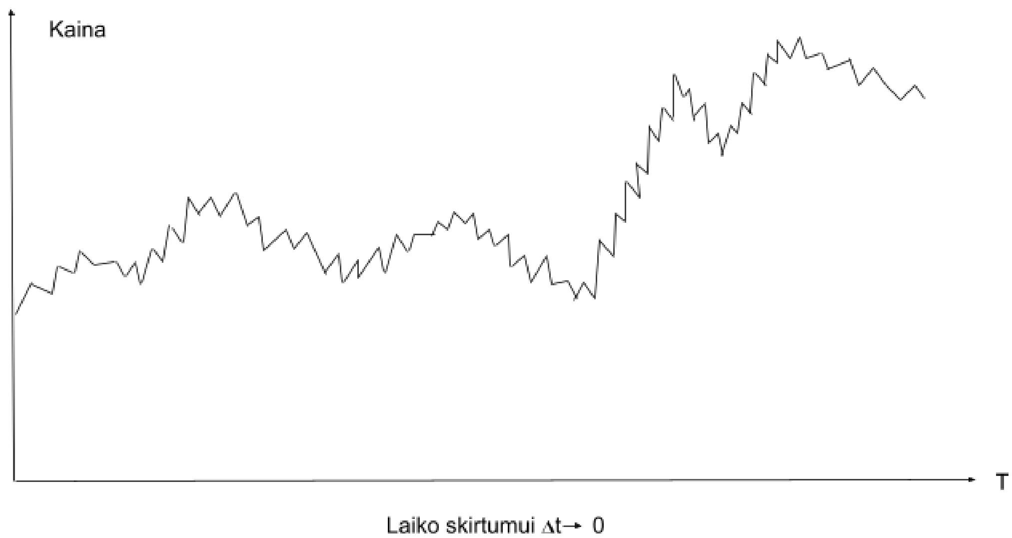
Tarkime, kad pasirinkimo pirkti opcioną kaina yra didesnė nei V_0, t.y. $V_a = 1,1$, o $S_1(A)$ ir $S_1(B)$ išlieka tokios pačios vertės, t.y. $S_1(A) = 12$ ir $S_1(B) = 8$. Nutarę parduoti pasirinkimo sandorį momente $t = 0$ gauname, kad A atveju prarandame $11 - 12 = -1$, o B atveju lygi 0. Iš finansinės institucijos pasiskolinus pinigų sumą $U_0 = 1,8$ su sąlyga, kad gražinsime $U_1 = 2$ (11, |1|% palūkanų normą). Tarkime, kad įmanoma nupirkti dalį pasirinkimo sandorio aktyvo. Tokiu atveju, nupirkus ketvirtadalį $(0,25)$ pasirinkimo sandorio paketo, prarandame $S^* = -2,5$, kurie A atveju tampa ${S_A}^* = 3$ ir ${S_B}^* = 2$. Šioje situacijoje gautume pelną lygų: $P = V_a + S^* + U_0 = 0.4$. Pastebime, kad nerizikuodami galime gauti pelną pasiskolinus iš finansinės institucijos ir grąžinus periodo pabaigoje. Kadangi pasirinkimo pirkti kaina nėra teisinga, atsiranda galimybė arbitražui ir taip galima pasipelnyti iš nerizikingo sandorio.

7 Geometrinis Vynerio procesas

Šis skyrius parašytas remiantis [18] šaltiniu ir [35] šaltiniu.

Vynerio procesas aprašo kainos pokytį laiko t skirtume Δt

13 pav. kainos pokytis didialiame laiko intervale Δt. Autorių pav.



14 pav. kainos pokytis mažame laiko intervale Δt. Autorių pav.

Vynerio procesas, dar vadinamas Brauno judesiu žymimas W_t yra stochastinis procesas indeksuojamas laiko atžvilgiu ir turi tokias savybes:

1. $W_0 = 0$
2. Kai tikimybė yra lygi vienetui, funkcija $t \to W_t$ yra nenutrūkstama laike t.
3. Stochastinis procesas $W_t,\ t \geq 0$ yra stacionarus ir nepriklausomas.
4. $W_{t+s} - W_s$ yra normaliai pasiskirstęs $N(0,t)$

Brauno judesys iš esmės parodo supaprastintų žingsnių ribą. Kai $e_1, e_2, ...$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su vidurkiu 0 ir dispersija 1, tada, kai $W_n(t)_{t\geq 0}$: $W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{1\leq i \leq [nt]}^{\infty} \zeta_i$

Atsitiktinis procesas $X_t = \mu t + \sigma W_t$ vadinamas bendruoju Vynerio procesu, kur W_t yra Vynerio procesas, vidurkis ir dispersija yra konstantos, tokiu atveju turime lygybę, kai atsitiktinis procesas yra $ln(\frac{S_t}{S_0})$:

$$ln(\frac{S_t}{S_0}) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t$$

Čią formulę gauname iš geometrinio Vynerio formulės, kuri yra:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

Gavus lygybę galime pastebėti, kad akcijos kainos pokyčiai pasiskirstę remiantis normaliuoju skirstiniu N su duomenimis:

$$ln(\frac{S_t}{S_0}) \sim N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$$

Ieškant akcijos kainos S_t, gauname:

$$\frac{S_t}{S_0} = e^{N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)} \to S_t = S_0 e^{N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)}$$

8 Rizikai neutralus matas

Remiantis [23] ir [34] šaltiniu, galime pakeisti tikimybinį matą P jo ekvivalentui P^*, kuris yra rizikai neutralus. Rizikai neutralus matas yra be arbitražės rinkos pagrindas. Rizikai neutralus įvertinimas leidžia lyginti skirtingos rizikos aktyvus, akcijas, obligacijas, apibrėžiant, kad jos turės tokia pat tikėtiną grąžą. Rizikai neutralus matą vadiname tokį matą P^*, kuris pirmiausia tenkina tokias sąlygas aibėje Ω:

1. $E^*\Delta\tilde{S}^i = 0(i = 1, ..., d)$
2. $P^* > 0(\forall\omega \in \Omega)$.

Čia $\Delta\tilde{S}^i$ yra $\Delta S^i = S_1^i - S_0^i$ aktyvo pokytis, ω yra rinkos elementas , $\Omega = \omega_1, ..., \omega_m$ ω apibūdina rinkoje esančius vertybinio popieriaus kitimus įvykusius periode nuo $t = 0$ ir $t = 1$. E^*X yra $E^*X = E_{P^*}X = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P^*(\omega)$a.d. X vidurkis erdvėje (Ω, F, P^*)

Svarbu paminėti, kad arbitražo galimybė neegzistuoja, kai egzistuoja bent vienas rizikai neutralus matas. Pagal [23] šaltinį, galime išvesti rizikai neutralaus mato formulę remiantis Ito stochastine diferencialine Lygtimi.

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$$

iš formulės $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$

Grąžos vidurkis μ yra priklausomas nuo rizikos. Kuo didesnė rizika, tuo didesnis μ rodiklis. Tačiau ieškodami rizikai neutralaus mato teigiame, kad asmenys yra rizikos vengiantys, o grąža yra nerizikinga palūkanų norma r_f. Todėl formulėje galime pastebėti, kad dėl rizikos vengimos mūsų grąžos vidurkis μ yra prilygintas augimo greičiui r_f.

Šią savybę galima pritaikyti ir $E(S_t) = S_0 e^{\mu t}$ formulei, prilyginus $\mu = r_f$, gauname, kad $E^*(S_t^*) = S_0 e^{r_f t}$, kaip jau žinome, S_0 yra vertybinio popieriaus kaina periodo pradžioje (pradiniu laiko momentu, kai $t = 0$).

Toliau nagrinėsime vertybinio popieriaus vertę laiko momentu $t = 1$ nagrinėjant europietišką modelį pasirinkimo sandoryje. Taigi, S_t^* yra lygi $max\{S_t - X, 0\}$, todėl gauname tokią lygybę: $K = e^{-r_f t}E^*(max(S_t - X, 0))$, kur X yra pasirinkimo sandorio vykdymo kaina. Egzistuoja galimi du variantai, kai $S_t > X$ ir $S_t < X$. Panagrinėkime $S_t < X$. Galime pastebėti, jog dėl max gauname vidurkį iš nulio, kas veda prie $S_0 = 0$. Iš to galime interpretuoti - investicija nėra pelninga. Panagrinėkime $S_t > X$, tada:

$$K = e^{-r_f t}E^*(max(S_t - X, 0)) = e^{-r_f t}E^*(S_t - X) = e^{-r_f t}E^*(S_t) - e^{-r_f t}X = S_0 - e^{-r_f t}X$$

9 Black - Scholes modelis

9.1 Black - Scholes modelio prielaidos

Black - Scholes modelis modelis [17], dar vadinamas, kaip Black - Scholes Merton modelis yra skirtas apskaičiuoti europietiško pasirinkimo sandoriaus premiją. Šis modelis buvo pirmas realus būdas apskaičiuoti opcionų įkainius, todėl 1997 metais tapo ekonomikos mokslų Nobelio laureatų. Šiame modelyje keliamos prielaidos apie vertybinius popierius:

1. Rinkoje yra bent vienas rizikingas vertybinis popierius, tarkime akcija ir bent vienas nerizikingas vertybinis popierius - obligacija.
2. Egzistuoja rizikai neutrali palūkanų norma ir ji yra pastovi investicijos laikotarpyje ar nuspėjama.
3. Mūsų pasirinktas vertybinis popierius investicijos laikotarpiu nemoka dividendų. Dividendai, tai yra procentinė dalis įmonės pelno, sumokama įmonės akcininkams proporciškai pagal jų turimą akcijų kiekį.
4. Galimybė arbitražui neegzistuoja.
5. Rinkoje neturime pervedimų, transakcijų ar kito tipo mokesčių, tokią rinka vadinama rinka, kuri neturi trinties (angl. *Frictionless market*).
6. Investuotojas turi prieigą pasiskolinti nelimituota dydžio sumą ar ją paskolinti už nerizikingą palūkanų normą.
7. Investuotojas gali pirkti vertybinius popierius nelimituotai, net ir dalį akcijos vieneto. Taip pat, rinkoje visada yra galimybė parduoti ar pirkti bet kokį kiekį vertybinių popierių, t.y. Norint parduoti akciją, visada bus pirkėjas t.y. paklausa. Neribojami trumpieji pirkimai (angl. *short*)
8. Vertybinis popieriaus kainos kitimas aprašomas geometriniu Brauno procesu, dar žinomu kaip Vynerio procesu.
9. Vertybinio popieriaus volatilumas yra pastovus.

Black - Scholes modelis naudojamas, kai laikas yra tolydus. Toks laiko modelis nurodo, kad kainos kitimas gali įvykti bet kokiam Δt, nebūtinai kai $t = 1$. Diskretus laiko modelis nurodo, jog kainos kitimas gali įvykti tik stebimo laikotarpio pabaigoje, kai $t = 1$. Taip pat laikotarpio pabaigoje galimos ne kelios vertybinio popieriaus vertės, kaip Binominiame modelyje, bet didesnis kiekis, kuris yra baigtinis ir pasiskirstęs pagal normalųjį skirstinį.

9.2 Lognormalusis skirstinys ir jo savybės vertybinio popieriaus kainai

Akcijos grąžos trumpajame laikotarpyje Δt yra pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį, o norėdami sužinoti Black - Scholes modelio veikimą, turime išsiaiškinti, kaip lognormalusis skirstinys veikia vertybinio popieriaus vertę. Iš anksčiau žinome, kad μ yra tikėtina vertybinio popieriaus grąža, o σ yra vertybinio popieriaus volatilumas (kainos kintamumas). Procentinis pokytis vidurkyje laiko skirtume Δt yra lygus $\mu\Delta t$ ir standartinis nuokrypis yra lygus $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Tokiu atveju turime kainos aproksimaciją:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}),$$

Čia: ΔS kainos S pokytis laiko intervale Δt ir $\phi(\mu, \sigma)$ - lognormalusis skirstinys.

Toliau nagrinėsime lognormaliojo skirstinio kainų skirtumą tarp momento t ($t \in \mathbb{N}$) ir $t = 0$. $lnS_t - lnS_0$, pritaikę formulę viršuje turime:

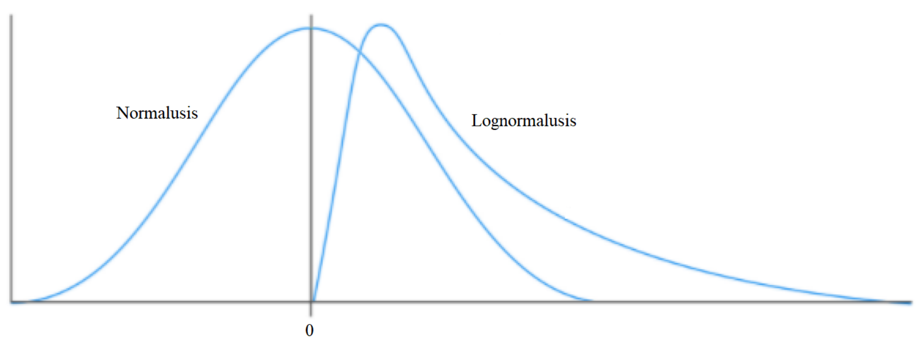
$$lnS_t - lnS_0 \sim \phi((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma\sqrt{t}) \sim ln\frac{S_t}{S_0}$$

galime supaprastinti formulę: $lnS_t \sim \phi(lnS_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma\sqrt{t})$

Lognormaliojo skirstinio ir normaliojo skirstinio pagrindiniai skirtumai

Remiantis [16] šaltiniu :

1. Lognormalusis skirstinys nėra simetriškas, o normalusis yra.
2. Lognormalusis skirstinio pradžia lygi nuliui, o normalusis turi neigiamą pusę.



15 pav. Normalusis ir lognormalusis skirstiniai. Autorių pav.

Lognormalusis skirstinys yra iškreiptas, todėl žinome, kad vidurkis, mediana ir moda nėra lygios. Apskaičiuojant S_t vidurkį naudojant prieš tai naudotą formulę turime, kad: $E(S_t) = S_0e^{\mu t}$

9.3 Black - Scholes kainos formulė

Black - Scholes formulė remiasi anksčiau minėtomis prielaidomis ir yra lygi pasirinkimo sandorio rinkos kainos padaugintos iš kumuliacinio tikimybinio pasiskirstymo standartizuoto normaliajo skirstinio ir pasirinkimo sandorio vykdymo kainos padauginus iš kumuliacinio standartizuoto normaliojo pasiskirstymo skirtumui, kai $t = 0$, t.y. Pradiniu laiko momentu. Black - Scholes formulė, kuri yra plačiai naudojama yra:

$C = S_0N(d_1) - Xe^{-r_ft}N(d_2)$ - *call* opciono kaina
$P = Xe^{-r_ft}N(-d_2) - S_0N(-d_1)$ - *put* opciono kaina,

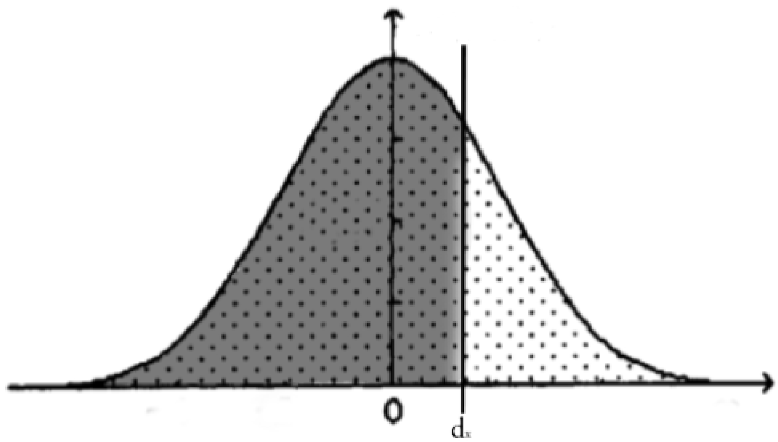
Čia: S_0 - pradinė vertybinio popieriaus kaina, $N(x)$ - kumuliacinis tikimybinis pasiskirstymas standartizuotam normaliajame skirstinyje, X - sandorio įvykdymo kaina, T - pasirinkimo pirkti susitarimo termino ilgis, r_f

- nerizikinga palūkanų norma, tačiau palūkanų normos terminas turi būti ilgesnis ar sutapti su pasirinkimo sandorio terminu.

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S_0}{X}) + (r_f + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = \frac{ln(\frac{S_0}{X}) + (r_f - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}} = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

d_1 ir d_2 galime interpretuoti kaip piningumo (angl. *moneyness*) rodiklis normaliajame skirstinyje. Piningumas, tai dažnai *call* ir *put* opcionų reliatyvi vertės pozicija atsižvelgiant į derivatų sandorio vykdymo kainą. $N(d_x)$ parodo tikimybę, kad elementas d_x standartiniame normaliajame skirstinyje $N(0,1)$ bus mažesnis už jo poziciją grafike.



16 pav. Normalusis skirstinys, [17] Šaltinis

Puikiai iliustruotame brėžinyje matome $N(d_x)$ lygybę pilkam plotui esančiam kairėje iki d_x tiesės.

9.4 Black - Scholes - Merton kainos formulė

Skyrelyje pasiremta [24] ir [17] šaltiniais.

Akcijos nepastovumas įvardijamas kaip vertybinio popieriaus standartinis nuokrypis, kurio reikšmę dažnai įvertiname per istorinius vertybinio popieriaus duomenis. Volatilumas dažnai sutinkamas portfelių rizikos vertinime, rizikos skaičiavimuose ar pačio portfelio valdyme. Numanomas volatilumas turi didelę įtaką pasirinkimo sandorių kainai, nes Vynerio procesas, pagal kurį yra gridžiamas Black - Scholes modelis tvirtina, kad vertybinio popieriaus kaina yra pasiskirsčiusi pagal normalųjį skirstinį. Realioje situacija, galime pastebėti, kad mūsų moda, mediana, vidurkis nesutampa, todėl atsiranda volatilumo asimetrija. Jeigu grąžos dažnis yra pasiskirstęs normaliajame skirstinyje, tai jos ateities rinkos kainos lygis yra lognormaliai pasiskirstęs. Detalesniam skaičiavimui galima naudoti logaritminį normalųjį skirstinį:

$$E(max(Y - X, 0)) = EY\phi(d_1) - X\phi(d_2) = \int_X^\infty (Y - X)g(Y)dC,$$

$$d_1 = \frac{ln(\frac{EY}{X}) + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma},$$

$$d_2 = \frac{ln(\frac{EY}{X}) - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}.$$

Tariame, kad atsitiktinis dydis C pasiskirstęs lognormaliame skirstinyje, o jo tankis.

$$g(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

σ^2 yra mūsų pasirinkta dispersija, tokiu atveju vidurkis $EY = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$. Iš anksčiau žinome, kad $\mu = ln(EY) - \frac{1}{2}\sigma^2$. Panagrinėsime $E(max(Y - X, 0))$ ir jos išraišką bei iš kur ši formulė išsiveda. Atsitiktinis dydis Y yra pasiskirstęs pagal normalųjį skirstinį, t.y. $\phi(Y)$. Atsitiktinį dydį apibrėžkime kaip: $X = \frac{lnY - \mu}{\sigma}$, Tęsiant $E(max(Y - X, 0))$ formulę turime:

$$E(max(Y - X, 0)) = \int_{Y}^{\infty} (Y - X) g(Y) dx = \int_{\frac{lnY - \mu}{\sigma}}^{\infty} (e^{x\sigma + \mu} - X) g(Y) dx =$$

$$\int_{\frac{lnX - \mu}{\sigma}}^{\infty} e^{x\sigma + \mu} g(Y) dx - X \int_{\frac{lnX - \mu}{\sigma}}^{\infty} g(Y) dx.$$

Toliau panagrinėkime pointegralines funkcijų reikšmes, jas prastindami ir pritaikydami jų reikšmes:

$$E(max(Y - X, 0)) = \int_{\frac{lnX - \mu}{\sigma}}^{\infty} e^{x\sigma + \mu} g(Y) dx - X \int_{\frac{lnX - \mu}{\sigma}}^{\infty} g(Y) dx =$$

$$\int_{\frac{lnX - \mu}{\sigma}}^{\infty} e^{x\sigma + \mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - X \int_{\frac{lnX - \mu}{\sigma}}^{\infty} g(Y) dx =$$

$$\int_{\frac{lnX - \mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\sigma)^2 + 2\mu + \sigma^2}{2}} dx - X \int_{\frac{lnX - \mu}{\sigma}}^{\infty} g(Y) dx =$$

$$\int_{\frac{lnX - \mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\sigma)^2}{2}} dx - X \int_{\frac{lnX - \mu}{\sigma}}^{\infty} g(Y) dx =$$

$$\int_{\frac{lnX - \mu}{\sigma}}^{\infty} e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} g(Y - \sigma) dx - X \int_{\frac{lnX - \mu}{\sigma}}^{\infty} g(Y) dx.$$

Žinome, kad $\phi(Y)$ yra standartizuoto normaliojo skirstinio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija, todėl:

$$E(max(Y - X, 0)) = \int_{\frac{lnX - \mu}{\sigma}}^{\infty} e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} g(Y - \sigma) dx - X \int_{\frac{lnX - \mu}{\sigma}}^{\infty} g(Y) dx =$$

$$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \int_{\frac{lnX - \mu}{\sigma}}^{\infty} g(Y - \sigma) dx - X \int_{\frac{lnX - \mu}{\sigma}}^{\infty} g(Y) d = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \phi(Y - \sigma) - X\phi(Y) =$$

$$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \phi(-(\frac{lnX - \mu}{\sigma} - \sigma)) - X\phi(-(\frac{lnX - \mu}{\sigma})) =$$

$$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \phi(-(\frac{lnX - ln(EY) - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} - \sigma)) - X\phi(-(\frac{lnX - ln(EY) - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma})) =$$

$$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\phi(\frac{ln(\frac{EY}{X})+\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma})-X\phi(\frac{ln(\frac{EY}{X})+\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma})=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\phi(d_1)-X\phi(d_2).$$

Galime pastebėti, kad įrodėme pradinę formulę $E(max(Y-X,0))$. Toliau žinant, kad europietiško pasirinkimo sandorio pirkimo rinkos formulė lygi: $c = e^{-r_fT}E(max(Y-X,0))$, galime išvesti lognormaliajame skirstinyje pasiskirsčiusios pasirinkimo pirkti ir parduoti kainą.

$$C = e^{-r_ft}E(max(Y-X,0)) = e^{-r_ft}EY\phi(d_1) - X\phi(d_2) = S_0\phi(d_1) - e^{-r_fT}X\phi(d_2)$$

$$P = e^{-r_fT}X\phi(-d_2) - S_0\phi(-d_1)$$

čia $d_1 = \frac{ln(\frac{S_0}{X})+\frac{\sigma^2T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$ ir $d_2 = \frac{ln(\frac{S_0}{X})+-\frac{\sigma^2T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$.

10 Pasirinkimo sandorių premijų ir rizikos charakteristikų skaičiavimas

Pasirinkimo sandorių parinkimas

Šioje praktinėje dalyje nagrinėsime "Micron Technology, Inc" (MU) kompanijos opcionų grandinės faktines pirkimo pasirinkimo sandorių (angl. *call*) premijas bei rizikos charakteristikas - delta, gama, teta, vega, ro - lygindami su teorinėmis kontraktų kainomis ir rodiklių reikšmėmis, apskaičiuotas Black - Scholes modeliu. Skaičiavimais iš skirtingų pjūvių, stengsimės patikrinti kaip elgiasi opciono parametrai prie skirtingų vykdymo (angl. *strike*) kainų ir koks yra rizikos charakteristikų pokytis opciono kontraktui artėjant prie galiojimo termino pabaigos. "Micron Technology, Inc" (MU) tarptautinė kompanija viešai listinguojama Niujorko (NASDAQ) bei Frankfurto (FRA) vertybinių popierių biržose. Kompanija būdama 86.81mlrd USD kapitalizacijos yra technologijų sektoriaus, puslaidininkių (ang. *semiconductors*) industrijos narė įtraukta į S&P500 indeksą, kurios vidutinė dieninė akcijų prekybos apyvarta NASDAQ biržoje siekia - 21.14mln vnt. Bendrovė kuria, gamina ir parduoda kompiuterinės atminties ir duomenų saugojimo produktus. Fundamentiniai įmonės duomenys yra išskirti pagal "Finviz"[6] tinklapį, akcijų prekybos sesijos uždarymo kainos parsisiųstos iš "Yahoo Finance" [20], o opcionų grandinės duomenys, su premijomis, rizikų charakteristikomis, apyvartomis bei numatytais kontraktų galiojimo terminais, iš "Optionistics" [28] oficialaus tinklalapio. Nerizikinga palūkanų norma ir palūkanų kreivės duomenys naudoti remiantis Jungtinių Amerikos Valstijų iždo departamento dieninėmis pajamingumų kreivės reikšmėmis pagal terminą [36]. Faktinių ir teorinių premijų bei rizikų charakteristikų palyginimui pagal skirtingas vykdymo kainas, naudojome 2021-05-03 fiksuotus pasirinkimo sandorio rodiklius, kurio kontrakto termino pabaiga yra 2021-05-14 data. Analizuoti, kaip keičiasi faktinės ir teorinės reikšmės, artėjant kontrakto termino pabaigai, fiksavome pradžios tašką 2021-04-13 prekybos sesiją su kontrakto pabaigos tašku 2021-05-14 (1 mėnesio galiojimo terminas) kartu laikydami fiksuotą kontrakto vykdymo kainą - 85. Skaičiuodami istorinį aktyvo kintamumą naudojome dienos uždarymo kainas laikotarpyje nuo 2021-03-12 iki 2021-05-14.

Pasirinkimo sandorių parametrų skaičiavimas

Teorinių premijų ir rizikos charakteristikų palyginimui taikomas Black - Scholes modelis aprašytas **9 skyriuje**. Reikšmių skaičiavimui pasitelkiama pasirinkimo pirkti sandorio (angl. *Call*) premijos vertės skaičiavimo formulė su reikalingais parametrais:

$$C = S_0 N(d_1) - Xe^{-r_f T} N(d_2),$$

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S_0}{X}) + (r_f - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{ln(\frac{S_0}{X}) - (r_f - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Kur S_0 - aktyvo kaina, X - pasirinkimo sandorio vykdymo kaina, T - kontrakto metinis terminas, r_f - nerizikinga palūkanų norma, C - pirkimo opciono premija, $N(x)$ - kaupiamoji standartinio tankio funkcija.

Teorines pasirinkimo sandorio rizikos charakteristikos apskaičiuotos naudojantis **5 skyriuje** apibrėžtomis formulėmis [21]:

$$Delta(Call) : Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S_0} = e^{-r_\delta T} N(d_1),$$

$$Gama(Call/Put) : Gama_{P,C} = \frac{\frac{e^{(-\frac{(-d_1)^2}{2})}}{\sqrt{2\pi}}}{S_0 \sigma \sqrt{T}} e^{(-ln(1+r_\delta)T)},$$

$$Teta(Call) : Teta_C = \frac{1}{365}(-(\frac{S_0 \sigma e^{(-r_\delta T)}}{2\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{\frac{-d_1^2}{2}}) - r_f X e^{-r_f T} N(d_2) + r_\delta S_0 e^{(-r_\delta T)} N(d_1)),$$

$$Vega(Call/Put) : Vega_{P,C} = \frac{S_0 \sqrt{T} \frac{e^{(-\frac{(-d_1)^2}{2})}}{\sqrt{2\pi}} e^{(-ln(1+r_\delta)T)}}{100},$$

$$Ro(Call) : Ro_C = \frac{\partial_C}{\partial r_f} = \frac{XTe^{(-ln(1+r_f)T)} N(d_2)}{100}.$$

Pastaba: Kompanija "Micron Technology, Inc(MU)" nemoka dividendų, tad formulėse nurodytas r_δ kintamasis reiškiantis nuolatinių dividendų normą yra lygus 0. Žodžiai Call/Put nurodo formulės išraišką pirkimo/pardavimo opcionams.

"Micron Technology, Inc" (MU) akcijų kainos kintamumas

Empiriškai įvertinti aktyvo kainų dieninį kintamumą standartiniu nuokrypiu naudosime formules[17]:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2},$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n}u_i)^2}.$$

Čia n - stebėtos prekybos dienos, S_i - aktyvo uždarymo kaina pabaigoje i-ojo intervalo $(i = 0, 1, ..., n)$, u_i - logaritminės grąžos ir $\bar{u}$ logaritminių grąžų vidurkis. Logaritminių grąžų ir jų vidurkio skaičiavimo formulės [17]:

$$u_i = ln(\frac{S_i}{S_{i-1}}),$$

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i.$$

Didesnė duomenų imtis lemia tikslesnį kintamumo įvertį, tačiau per seni duomenys gali būti nereikšmingi nustatyti būsimam kainos kintamumui, tad egzistuoja standartinio nuokrypio paklaida, kurią galima apskaičiuoti naudojantis $\hat{\sigma}\sqrt{2n}$. Metinis aktyvo kainos kintamumas apskaičiuojamas dauginant dieninį kainos kintamumą iš $\sqrt{252}$ t.y. kvadratinės šaknies iš metinio prekybos sesijų skaičiaus.

Kontrakto metinis galiojimo terminas T išreiškiamas kaip santykis tarp kontrakto galiojimo laiko dienomis ir metinio dienų skaičiaus: $T = \frac{Galiojimo\ terminas}{365}$. Pirmoje praktinėje dalyje analizuojamas kontraktas galioja 10 dienų, tai $T = \frac{10}{365} = 0,02739726$. Nerizikinga palūkanų norma laikome JAV iždo obligacijų 10-ies metų palūkanas - 1.63% [36].

Išvestinės priemonės teorinių ir faktinių charakteristikų rezultatai

Šiame skyrelyje pateiksime teorinius premijų ir graikiškų raidžių rezultatus bei skaičiavimus, kuriuos lygindami su faktinėmis reikšmėmis grafiškai vizualizuosime. Praktinė dalis skaidoma į du etapus:

1. Teorinių rodiklių skaičiavimas pagal skirtingas vykdymo kainas,
2. Teorinių rodiklių skaičiavimas ir elgsena artėjant kontrakto galiojimo termino pabaigai.

Primename, jog pirmuoju atveju yra fiksuojami faktiniai pasirinkimo sandorio rodikliai 2021-05-03 prekybos sesija su kontrakto galiojimo termino pabaiga 2021-05-14. Antruoju, laiko įtaka rizikos charakteristikoms stebima nuo 2021-04-13 prekybos sesijos (imtinai) iki to paties kontrakto su galiojimo termino pabaiga 2021-05-14 (1 mėnuo).

10.1 Teorinių rodiklių skaičiavimas pagal skirtingas vykdymo kainas

Dieninis kintamumas	2,52%
Metinis kintamumas	40,06%
Sandorio galiojimo metinis terminas	0,027397
Nerizikinga palūkanų norma (JAV 10m. obligacijos)	0,0163
Pabaigos data	2021-05-14

10.1.1 Lentelė "Micron Technology,Inc" pasirinkimo pirkti sandorio parametrai.

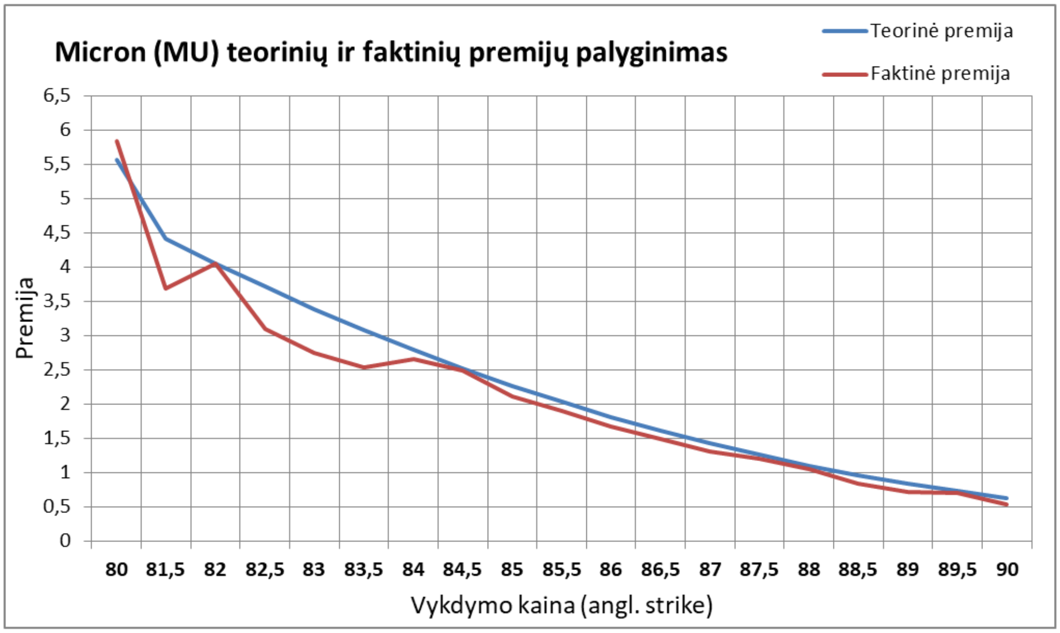
Akcijos kaina	Vykdymo kaina	d_1	d_2	$N(d_1)$	$N(d_2)$	Teorinė premija	Faktinė premija
	80	0,95595	0,88965	0,83045	0,81317	5,57	5,85
	81,5	0,6758	0,60949	0,75042	0,7289	4,41	3,7
	82	0,58356	0,51725	0,72024	0,69751	4,06	4,05
	82,5	0,49188	0,42557	0,6886	0,66479	3,72	3,1
	83	0,40076	0,33445	0,6557	0,63098	3,39	2,75
	83,5	0,31018	0,24387	0,62179	0,59633	3,09	2,54
	84	0,22014	0,15383	0,58712	0,56113	2,80	2,67
	84,5	0,13064	0,06433	0,55197	0,52565	2,53	2,49
	85	0,04166	-0,02464	0,51662	0,49017	2,27	2,11
85,01	85,5	-0,04679	-0,1131	0,48134	0,45498	2,04	1,9
	86	-0,13473	-0,20104	0,44641	0,42034	1,82	1,68
	86,5	-0,22215	-0,28846	0,4121	0,3865	1,62	1,5
	87	-0,30908	-0,37539	0,37863	0,35369	1,43	1,32
	87,5	-0,3955	-0,46181	0,34624	0,32211	1,26	1,21
	88	-0,48144	-0,54774	0,3151	0,29193	1,11	1,05
	88,5	-0,56688	-0,63319	0,2854	0,2633	0,97	0,84
	89	-0,65185	-0,71815	0,25725	0,23633	0,84	0,72
	89,5	-0,73634	-0,80264	0,23076	0,21109	0,73	0,7
	90	-0,82035	-0,88666	0,20601	0,18763	0,63	0,54

10.1.2 Lentelė "Micron Technology,Inc" pasirinkimo pirkti sandorio teorinės ir faktinės premijos.

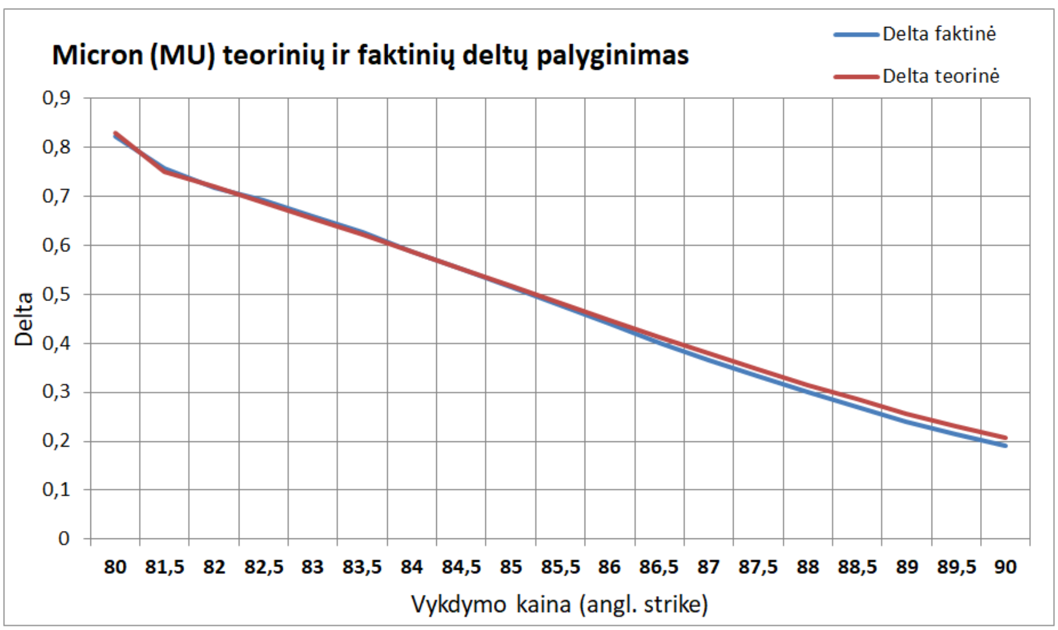
Delta faktinė	Gama faktinė	Teta faktinė	Vega faktinė	Ro faktinė
0,82182	0,04475	-0,06906	0,03848	0,01937
0,756674	0,05783	-0,07711	0,04623	0,01808
0,717599	0,05962	-0,08711	0,04989	0,01717
0,69263	0,06477	-0,0867	0,05188	0,01665
0,660137	0,06833	-0,08929	0,05407	0,01593
0,625842	0,07158	-0,09119	0,05593	0,01515
0,588345	0,07274	-0,09463	0,05743	0,01427
0,551466	0,07439	-0,09564	0,05839	0,01341
0,51387	0,07572	-0,09542	0,05885	0,01253
0,476682	0,07474	-0,09646	0,05878	0,01164
0,43965	0,07413	-0,09537	0,05821	0,01076
0,400083	0,07467	-0,09087	0,05703	0,00982
0,365117	0,07211	-0,08907	0,05548	0,00898
0,33274	0,06888	-0,08713	0,05363	0,00819
0,300324	0,06586	-0,08352	0,05134	0,0074
0,269003	0,06259	-0,0791	0,04871	0,00664
0,239506	0,05899	-0,07431	0,04583	0,00592
0,213763	0,055	-0,07009	0,04298	0,00529
0,189887	0,05099	-0,0656	0,04004	0,0047

Delta teorinė	Gama teorinė	Teta teorinė	Vega teorinė	Ro teorinė
0,83045	0,04482	-0,0741	0,03555	0,01781
0,75042	0,05633	-0,09214	0,04467	0,01627
0,72024	0,05969	-0,09739	0,04735	0,01566
0,6886	0,06271	-0,10208	0,04974	0,01502
0,6557	0,06531	-0,1061	0,0518	0,01434
0,62179	0,06745	-0,10938	0,0535	0,01364
0,58712	0,06908	-0,11185	0,05479	0,01291
0,55197	0,07017	-0,11347	0,05566	0,01216
0,51662	0,07071	-0,1142	0,05609	0,01141
0,48134	0,0707	-0,11405	0,05607	0,01065
0,44641	0,07013	-0,11304	0,05563	0,0099
0,4121	0,06905	-0,11119	0,05477	0,00916
0,37863	0,06747	-0,10857	0,05352	0,00843
0,34624	0,06545	-0,10524	0,05191	0,00772
0,3151	0,06303	-0,10128	0,04999	0,00704
0,2854	0,06027	-0,09679	0,0478	0,00638
0,25725	0,05723	-0,09186	0,04539	0,00576
0,23076	0,05397	-0,08658	0,04281	0,00517
0,20601	0,05055	-0,08107	0,0401	0,00462

10.1.3 ir 10.1.4 Lentelės "Micron Technology,Inc" pasirinkimo pirkti sandorio teorinės ir faktinės rizikos charakteristikos.



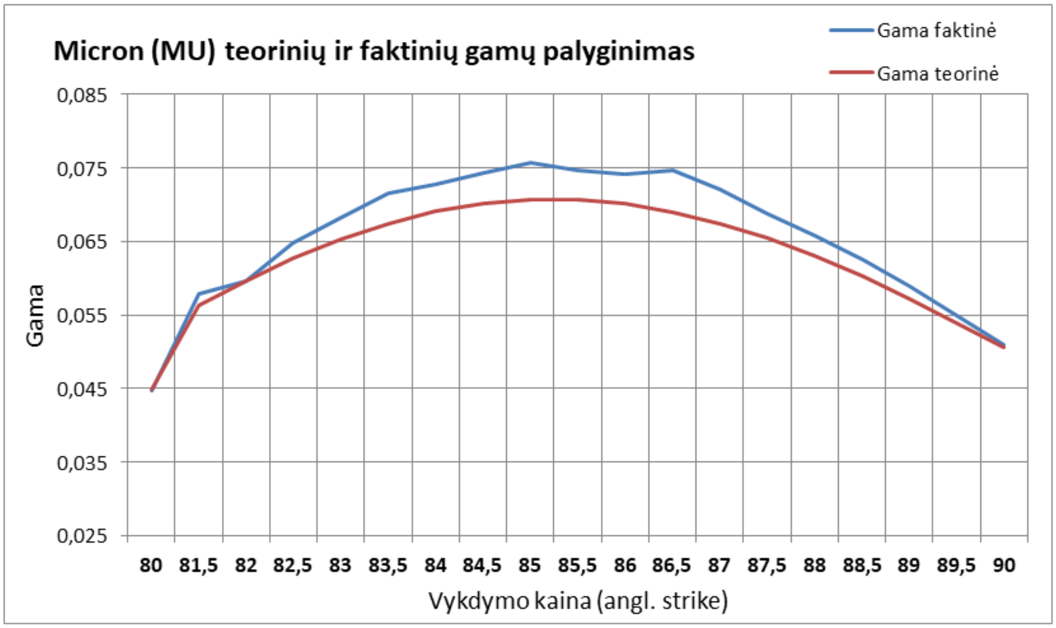
16 pav. Faktinių ir teorinių premijų grafikas.



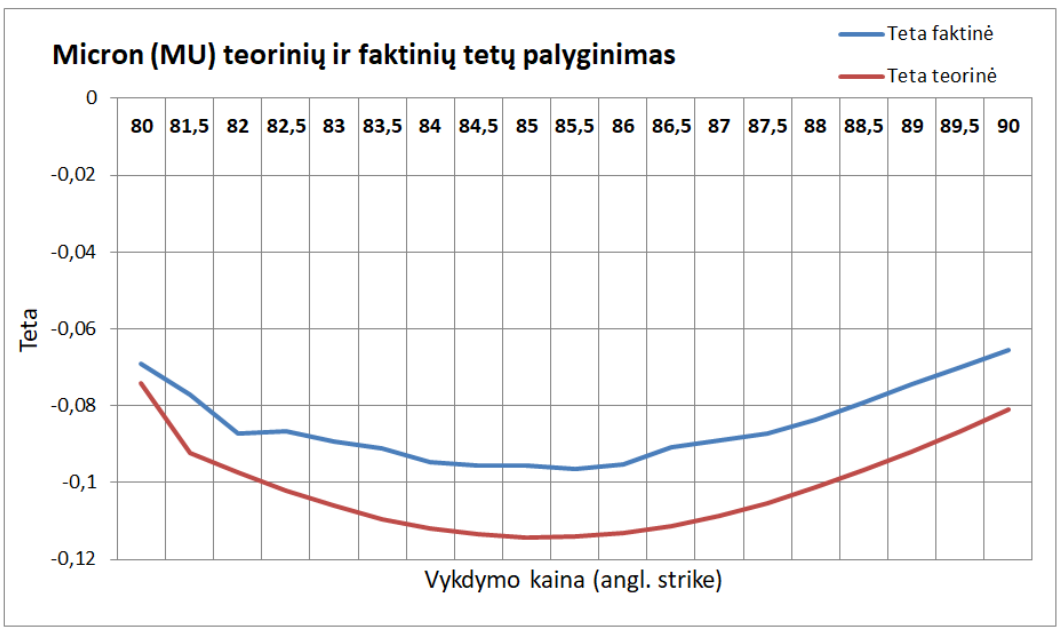
17 pav. Faktinių ir teorinių deltų grafikas.

Grafiškai vizualizavus **10.1.2 lentelės** premijų reikšmes 16 pav., pastebime, jog teorinė premija yra $[81,5;90]$ intervale aukštesnė nei faktinė premija. Nuožulni premijų trajektorija rodo vertės mažėjimą vykdymo kainai tolstant nuo aktyvo kainos S_0 ir opcionui tampant (*OTM*).

Remiantis **5.1 skyreliu**, deltos reikšmė atspindi tikimybę pasinaudoti pasirinkimo sandorio pelnu termino pabaigoje. Pasirinkimo sandoriui esant pelningam (*ITM*) ir tolstant nuo vykdymo kainos X, deltos reikšmė artėja prie 1, kadangi toks pasirinkimo sandoris bus įvykdytas, tai premija C turi itin aukštą koreliaciją su aktyvo kainos S_0 pokyčiu. Nepelningas pasirinkimo sandoris (*OTM*) turės mažą delta, nes tikimybė jį įvykdyti - maža.

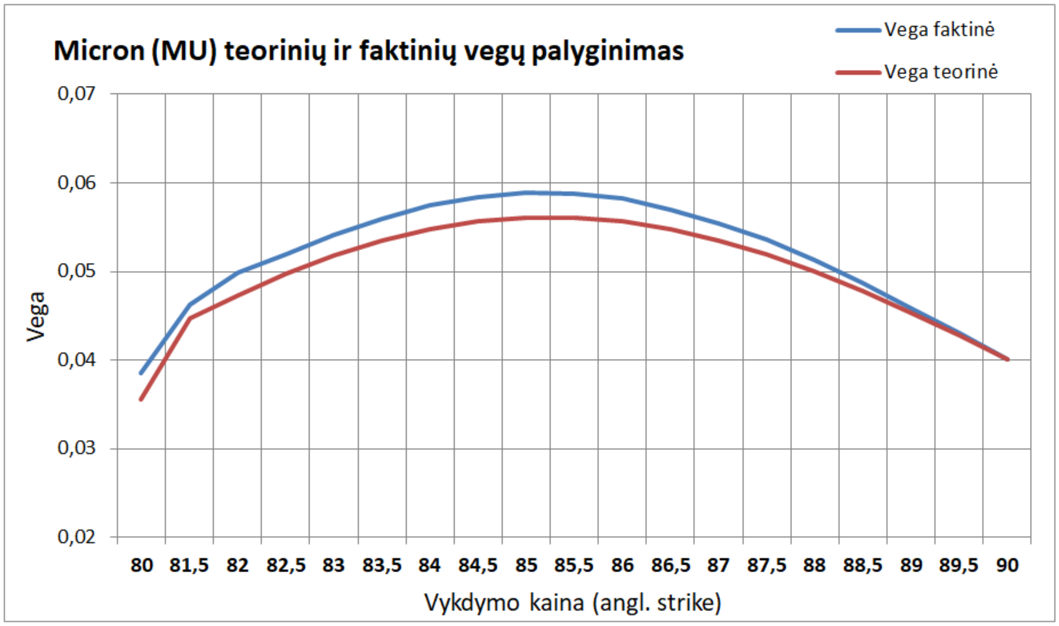


18 pav. Faktinių ir teorinių gamų grafikas.

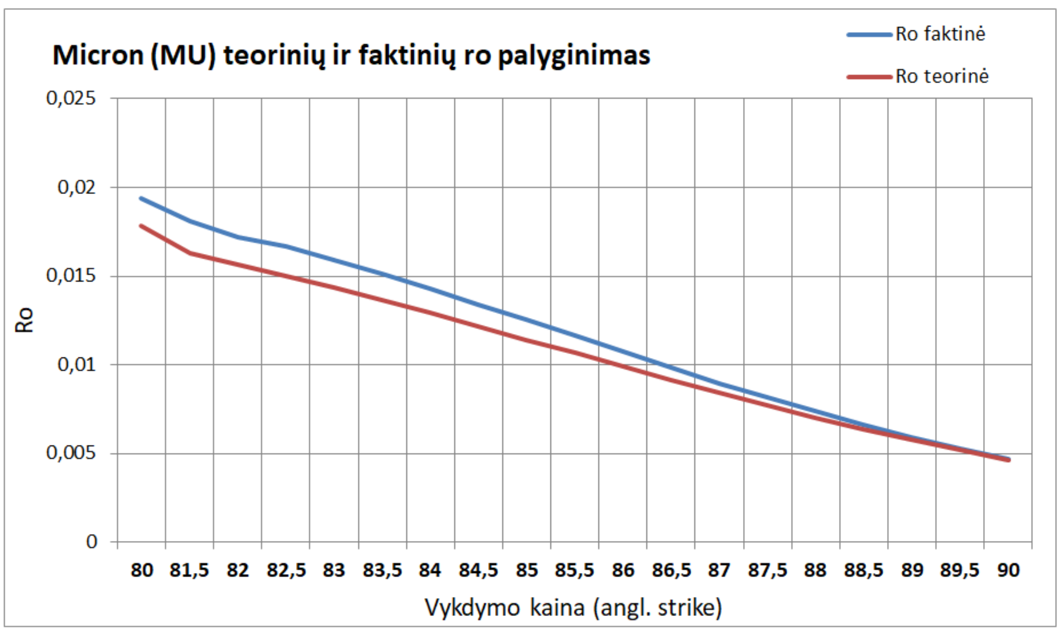


19 pav. Faktinių ir teorinių tetų grafikas.

Remiantis **11 skyriaus** "call gama" bei "call teta" grafikais, "Micron Technology, Inc" kompanijos pasirinkimo sandorių gamų ir tetų faktinės su teorinės reikšmės pavaizduotos **18 pav**. ir **19 pav.** atitinka Black-Scholes modelio numatytas šių rizikos charakteristikų variacijas. Gama žinoma, kaip kitimo pagreitis, **18 pav.** iškilumu aukštyn parodo, jog deltos kitimo greitis yra didžiausias esant vykdymo kainai X arčiausiai aktyvo kainos S_0, kitaip tariant pasirinkimo sandoriui esant arti pelingumo (ATM). Gamos faktinės reikšmės visame intervale aukščiau nei teorinės. Tetų palyginimo atveju, situacija priešinga - 19 pav. vaizduojamas iškilumas žemyn, parodo didžiausią pasirinkimo sandorio premijos vertės mažėjimą, esant vykdymo kainai X arčiausiai aktyvo kainos S_0. Primename teta reiškia kiek opcionas praranda vertės su kiekviena diena.



20 pav. Faktinių ir teorinių tetų grafikas.

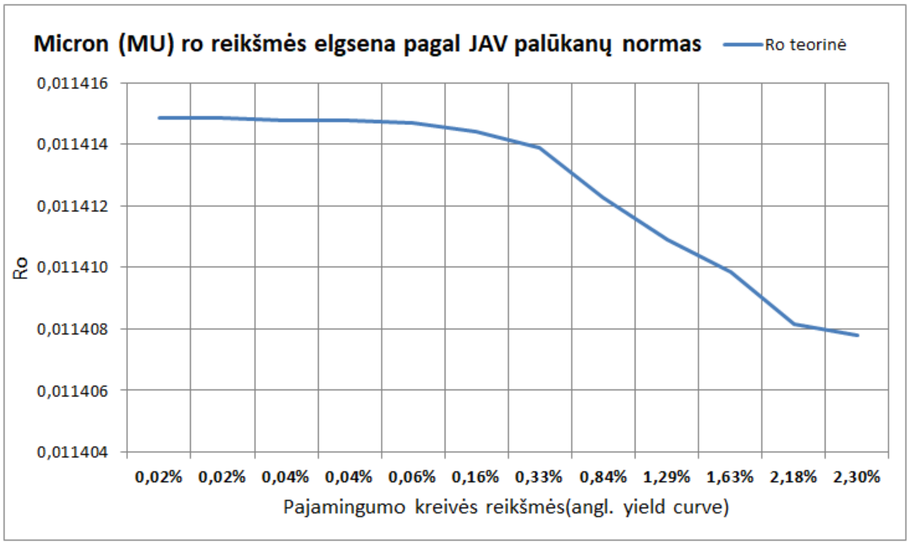


21 pav. Faktinių ir teorinių ro grafikas.

20 pav. vaizduojamas iškilumas aukštyn, parodo didžiausią santykį tarp pasirinkimo sandorio premijos pokyčio ir nepastovumo pokyčio, esant vykdymo kainai X arčiausiai aktyvo kainos S_0. Kitais žodžiais tariant, arti pelningumo (*ATM*) pasirinkimo sandorio premija yra jautriausia aktyvo kainos S_0 kintamumui, tą įrodo **11 skyriaus** "Call vega" grafikas. Palūkanų normų įtaka ro rodikliui mažėja pasirinkimo sandoriui tampant nepelningam (*OTM*) ir aktyvo kainai S_0 tolstant nuo vykdymo kainos X.

Date	1 Mo	2 Mo	3 Mo	6 Mo	1 Yr	2 Yr	3 Yr	5 Yr	7 Yr	10 Yr	20 Yr	30 Yr
2021-05-03	0,02%	0,02%	0,04%	0,04%	0,06%	0,16%	0,33%	0,84%	1,29%	1,63%	2,18%	2,30%
Ro reikšmė	0,011415	0,011415	0,011415	0,011415	0,011415	0,011414	0,011414	0,011412	0,011411	0,011410	0,011408	0,011408

10.1.5 Lentelė. JAV iždo popierių pajamingumo kreivės normos ir ro reikšmės.



22 pav. Faktinių ir teorinių ro grafikas.

10.1.5 Lentelėje yra nurodytos JAV iždo popierių pajamingumo kreivės normos, rodančios palūkanų normų priklausomybę nuo skirtingų terminų. **22 pav.** grafikas parodo kaip skirtingos nerizikingos palūkanų normos veikia pasirinkimo sandorio kontraktą arti pelningumo (ATM) t.y. kontrakto vykdymo kaina yra $X = 85$ ir Aktyvo kaina - $S_0 = 85,01$. Remiantis **22 pav.** grafiku, matome, jog augant pajamingumo kreivės argumentams, pasirinkimo sandorio premijos pokytis dėl nerizikingos palūkanų normos mažėja.

10.2 Teorinių rodiklių skaičiavimas ir elgsena artėjant kontrakto galiojimo termino pabaigai

Dieninis kintamumas	2,52%
Metinis kintamumas	40,06%
Sandorio galiojimo metinis terminas	0,027397
Nerizikinga palūkanų norma (JAV 10m. obligacijos)	0,0163
Pradžios data	2021-04-13
Pabaigos data	2021-05-14

10.2.1 Lentelė pasirinkimo pirkti sandorio parametrai.

Šioje dalyje, kontrakto galiojimo laikotarpiu pasirinkimo sandorio premijai ir rizikos charakteristikoms didžiausią įtaką daro aktyvo kainos S_0 svyravimai, kurie lemia pasirinkimo sandorio (ITM),(ATM),(OTM) situacijas. Pagal skirtingus momentus priklausomai kinta ir rizikos rodikliai. Sekantis faktorius nuo kurio priklauso reikšmės yra laikas. Stebimu laikotarpiu nuo 2021-04-13 iki 2021-05-14 yra 24 rinkos prekybos sesijos, todėl kontrakto metinis galiojimo terminas T mažės su kiekviena prekybos sesija. Vykdymo kaina $X = 85$ ir metinis kintamumas $\sigma = 40,06\%$ laikomi fiksuotais.

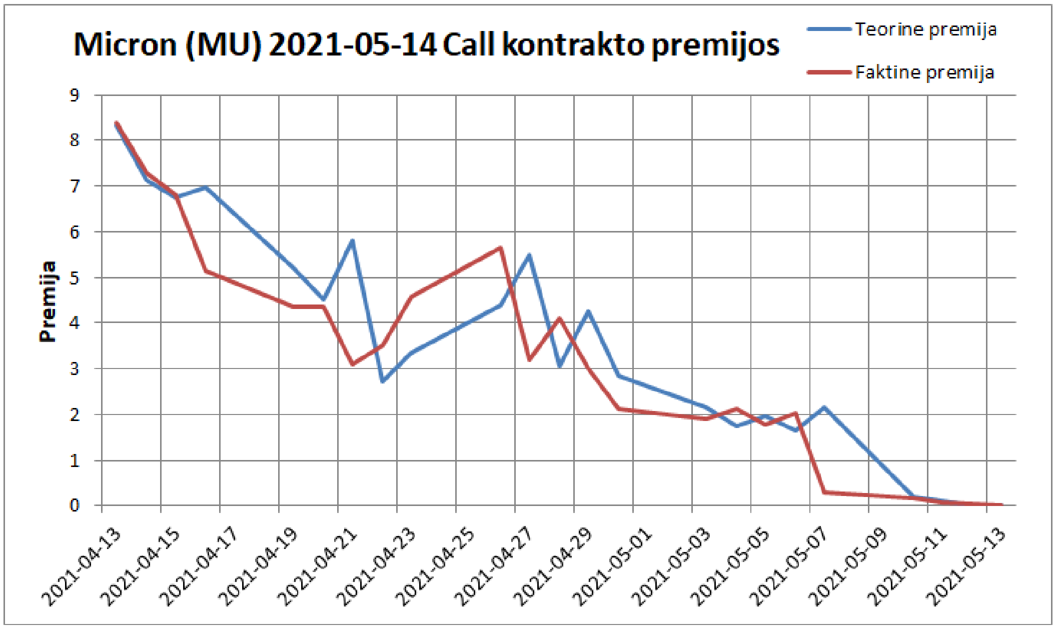
Akcijos kaina	Vykdymo kaina	d_1	d_2	$N(d_1)$	$N(d_2)$	Teorinė premija	Faktinė premija
92,15	85	0,84805	0,74532	0,80179	0,77196	8,34	8,4
90,67	85	0,69243	0,59187	0,75567	0,72303	7,12	7,3
90,27	85	0,6608	0,56245	0,74563	0,7131	6,75	6,82
90,66	85	0,71893	0,62284	0,76391	0,73331	6,98	5,15
88,41	85	0,47605	0,38465	0,68298	0,64975	5,20	4,35
87,48	85	0,36776	0,27879	0,64347	0,6098	4,50	4,35
89,49	85	0,63863	0,55218	0,73847	0,70959	5,82	3,1
84,71	85	0,00119	-0,08268	0,50047	0,46705	2,72	3,5
86,03	85	0,18892	0,10771	0,57492	0,54289	3,35	4,58
87,84	85	0,45813	0,37968	0,67657	0,64791	4,39	5,65
89,46	85	0,71424	0,63864	0,76246	0,73847	5,48	3,2
86,03	85	0,20214	0,1295	0,5801	0,55152	3,05	4,1
88,06	85	0,54333	0,47378	0,70655	0,68217	4,26	3
86,07	85	0,22181	0,15551	0,58777	0,56179	2,86	2,11
85,02	85	0,03519	-0,02771	0,51404	0,48895	2,16	1,9
84,41	85	-0,08779	-0,1471	0,46502	0,44153	1,74	2,12
85,15	85	0,05952	0,00404	0,52373	0,50161	1,97	1,77
84,80	85	-0,02018	-0,07155	0,49195	0,47148	1,65	2,03
85,98	85	0,26794	0,22105	0,60563	0,58747	2,15	0,3
80,85	85	-1,17263	-1,21457	0,12047	0,11227	2,0E-01	0,17
80,68	85	-1,41805	-1,45437	0,07809	0,07292	1,0E-01	0,06
76,80	85	-3,40621	-3,43586	0,00033	0,0003	1,9E-04	0,03
77,19	85	-4,58603	-4,607	2,3E-06	2E-06	7,4E-07	0,02

10.2.2 Lentelė "Micron Technology,Inc" pasirinkimo pirkti sandorio teorinės ir faktinės premijos.

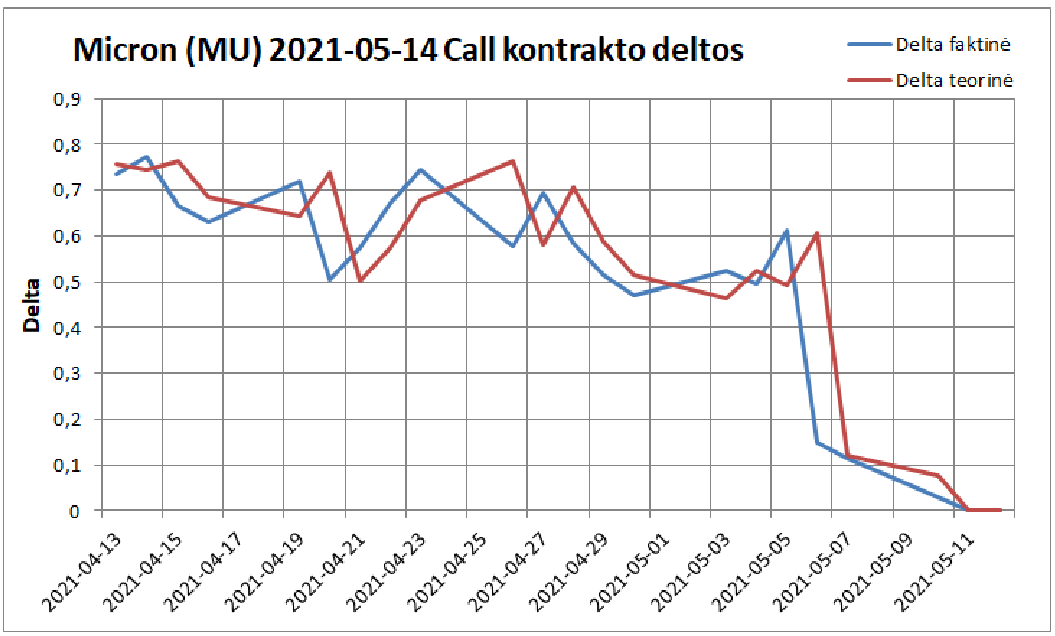
Delta faktinė	Gama faktinė	Teta faktinė	Vega faktinė	Ro faktinė
0	0	0	0	0
0,733562	0,03178	-0,05658	0,08538	0,04854
0,771779	0,03613	-0,04518	0,07592	0,04844
0,664914	0,0391	-0,06792	0,0843	0,03643
0,63205	0,04302	-0,06879	0,08454	0,03318
0,719271	0,03895	-0,06342	0,07572	0,03673
0,5049	0,04914	-0,0736	0,08296	0,02391
0,573333	0,05397	-0,06786	0,08093	0,02641
0,672996	0,05098	-0,07094	0,07038	0,02697
0,744517	0,04326	-0,07024	0,06206	0,02839
0,576814	0,0585	-0,08189	0,07052	0,02035
0,693082	0,05264	-0,07814	0,0627	0,02326
0,583713	0,0637	-0,08533	0,06576	0,01812
0,51387	0,07572	-0,09542	0,05885	0,01253
0,469895	0,07296	-0,10845	0,05558	0,01035
0,523681	0,07764	-0,11348	0,05325	0,01047
0,493971	0,08527	-0,11663	0,05008	0,00879
0,611945	0,10206	-0,10274	0,04562	0,0097
0,148438	0,06102	-0,10981	0,0196	0,00128
0,113312	0,05615	-0,1095	0,01405	0,00074
0,029253	0,01641	-0,06766	0,00379	0,00012
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Delta teorinė	Gama teorinė	Teta teorinė	Vega teorinė	Ro teorinė
0,80179	0,04557	-0,08811	0,04247	0,01797
0,75567	0,05221	-0,09723	0,04711	0,01683
0,74563	0,05358	-0,09881	0,04792	0,0166
0,76391	0,05125	-0,0955	0,04623	0,01707
0,68298	0,06076	-0,107	0,05213	0,01512
0,64347	0,06428	-0,11058	0,05399	0,01419
0,73847	0,05483	-0,09933	0,04819	0,01652
0,50047	0,07102	-0,11394	0,05594	0,01087
0,57492	0,0687	-0,11396	0,0558	0,01264
0,67657	0,06167	-0,10717	0,05223	0,01508
0,76246	0,05211	-0,09458	0,04577	0,01719
0,5801	0,06852	-0,11369	0,05566	0,01284
0,70655	0,05895	-0,10317	0,05017	0,01588
0,58777	0,0682	-0,1133	0,05545	0,01308
0,51404	0,07072	-0,11433	0,05611	0,01138
0,46502	0,071	-0,11298	0,05552	0,01028
0,52373	0,07053	-0,11441	0,05613	0,01168
0,49195	0,07094	-0,114	0,05598	0,01097
0,60563	0,06751	-0,11201	0,05477	0,01367
0,12047	0,03742	-0,05423	0,02684	0,00261
0,07809	0,02729	-0,03934	0,01949	0,0017
0,00033	0,00024	-0,00031	0,00015	6,9E-06
2,3E-06	2,1E-06	-2,8E-06	1,4E-06	4,8E-08

10.2.3 ir 10.2.4 Lentelės "Micron Technology,Inc" pasirinkimo pirkti sandorio teorinės ir faktinės rizikos charakteristikos.

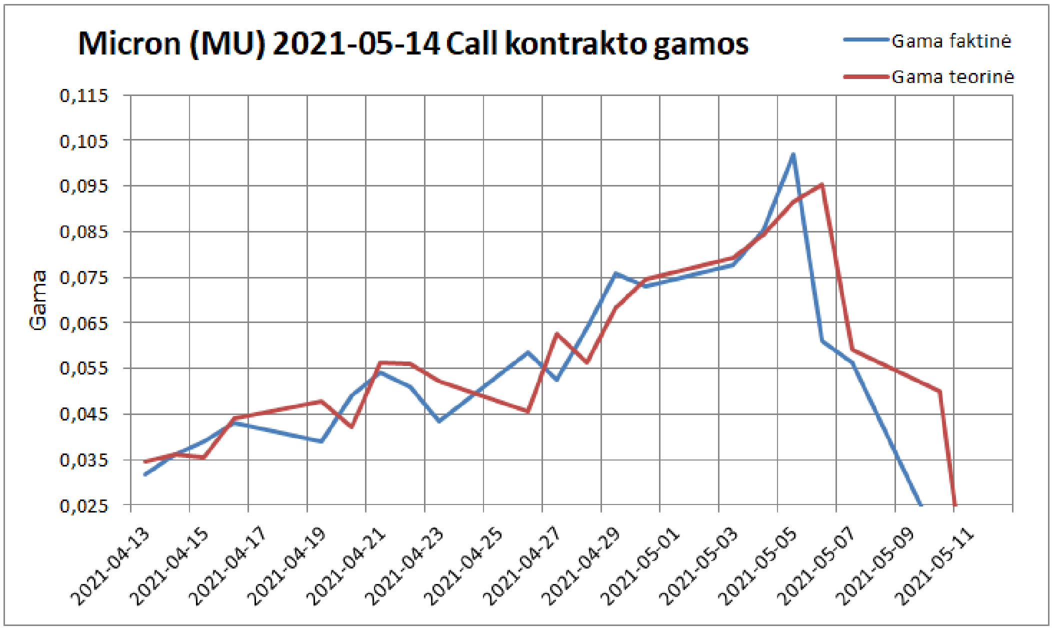


23 pav. Faktinių ir teorinių premijų grafikas.

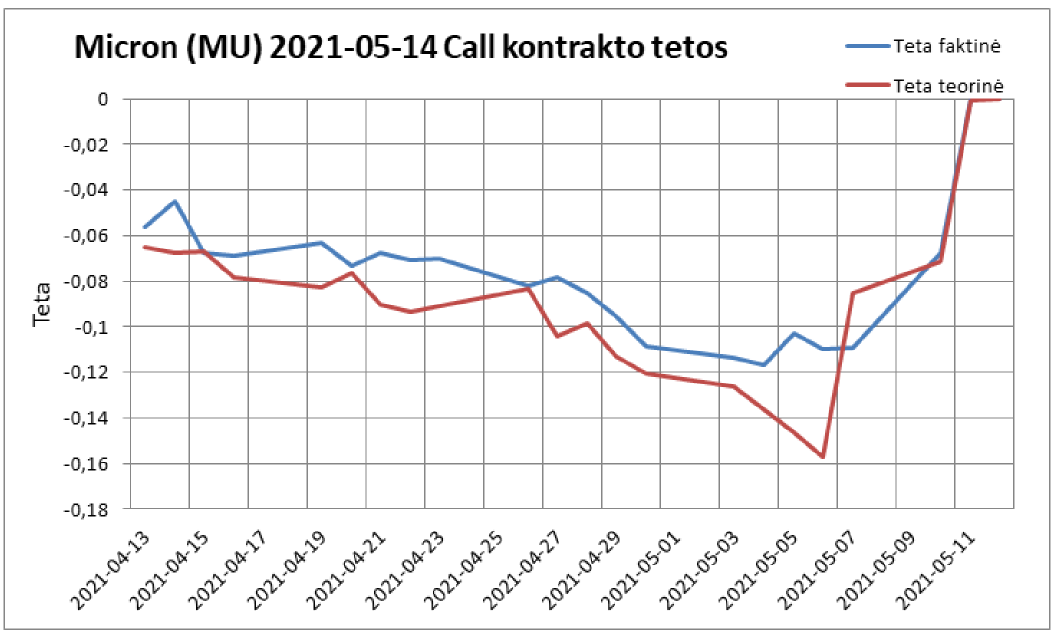


24 pav. Faktinių ir teorinių deltų grafikas.

Remiantis **10.2.2** lentelės duomenimis, pradines prekybos sesijas pasirinkimo sandoris yra pelningas (*ITM*) ir turintis aukštą delta rodiklio reikšmę pagal **10.2.3** ir **10.2.4** lenteles, todėl aktyvo kainai S_0 krentant žemyn, teorinės ir faktinės premijos įgauna žemėjančią tendenciją matomą **23 pav.** Pasirinkimo sandoriui išliekant nežymiai pelningam (*ITM*) arti vykdymo kainos $X = 85$ premijų ir deltų rodiklių svyravimų amplitudė sumažėja. Tačiau dėl bendros rinkų nuotaikų "Micron Technology,Inc" viešai prekiaujamų akcijų kaina S_0 užsidaro ties 80,85 riba, paversdama pasirinkimo sandorį nepelningu (*OTM*). Dėl šios priežasties premijos galutinai atpinga, kadangi nelieka daug laiko ir tikimybės iki kontrakto termino pabaigos pasirinkimo sandoriui būti pelningu (*ITM*). Teorinės premijos ir deltos artimai atspindi faktinių rodiklių kitimą.

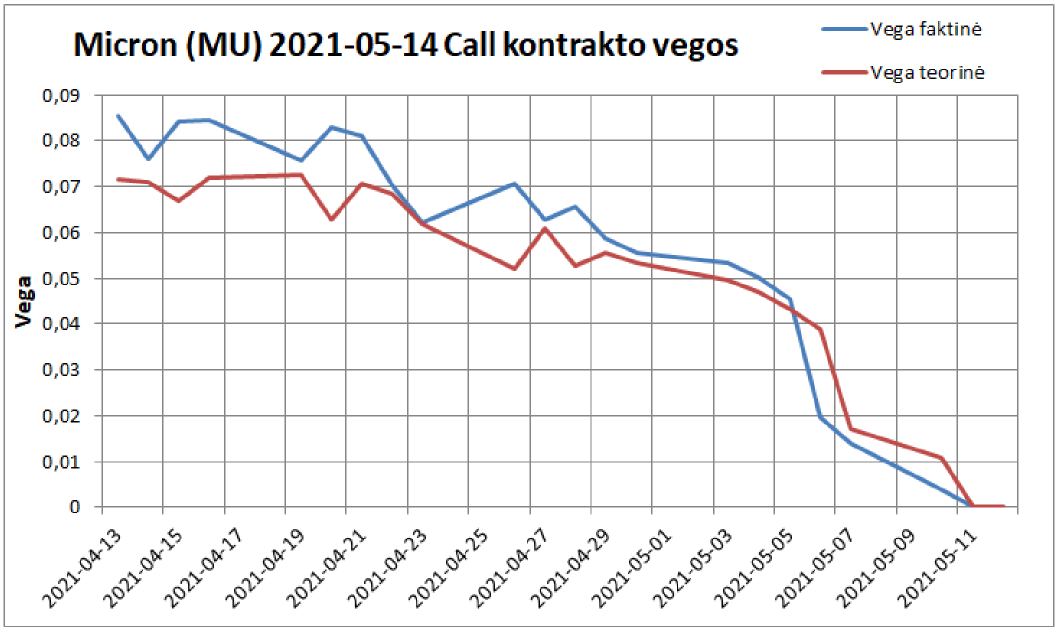


25 pav. Faktinių ir teorinių gamų grafikas.

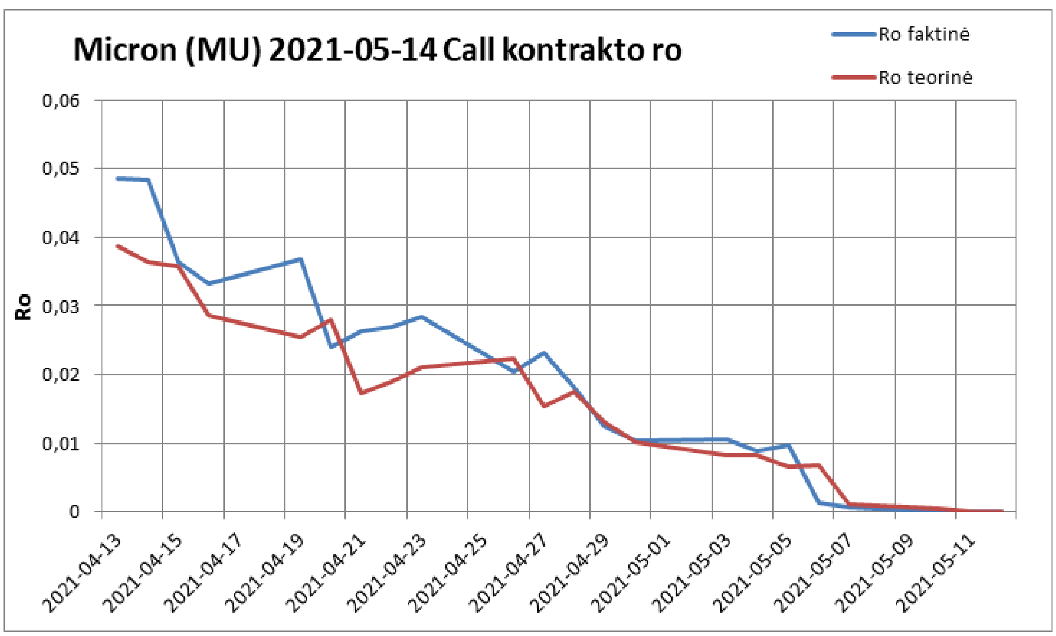


26 pav. Faktinių ir teorinių tetų grafikas.

Pagal pirmos praktinės dalies **18 pav.** gavome rezultatą - gama reikšmė yra didžiausia aktyvo kainai S_0 esant prie vykdymo kainos X. **25 pav.** galime pastebėti gamos reikšmės augimą akcijos kainai S_0 artėjant prie vykdymo kainos X (remtis **10.2.2**, **10.2.3** ir **10.2.4** lentelėmis). Lūžio taškas - pasirinkimo sandoris tampa nepelningas (*OTM*) - $S_0 = 80,85$ ir $X = 85$. Tetos įtaką pasirinkimo sandorio premijai galime pastebėti **26 pav.** rodančiam tetos neigiamą reikšmės didėjimą artėjant galiojimo termino pabaigai. Tačiau, staigus pokytis aukštyn rodo bendrą pasirinkimo sandorio premijos nuvertėjimą artimą 0. Laiko atimama teta vertė negali būti didesnė nei pačios premijos dydis C.



27 pav. Faktinių ir teorinių vegų grafikas.



28 pav. Faktinių ir teorinių ro grafikas.

Galime pastebėti **27 pav.** grafike, teorinių ir faktinių vegų reikšmės įgavusios kritimo tendenciją. Vega iš prigimties pasižymi mažėjančia įtaka artėjant kontrakto galiojimo termino pabaigai, be to, akcijos kainos S_0 ir vykdymo kainos X skirtumas didėja, o šie du kintamieji yra esminiai faktoriai darantys įtaką vegos reikšmei. Rodiklio ro teorinės ir faktinės reikšmės **28 pav.** rodo palūkanų normų mažėjančia įtaką pasirinkimo sandorio premijos vertei C, kadangi visos premijos vertė iš esmės mažėja.

10.3 Faktinių ir teorinių duomenų paklaidos

Pirmos dalies vidutinės kvadratinės paklaidos (VKP)	
Premija	0,0965014
Delta	0,0001104
Gama	0,0000107
Teta	0,0002823
Vega	0,0000044
Ro	0,0000012

Antros dalies vidutinės kvadratinės paklaidos (VKP)	
Premija	1,1948866
Delta	0,0196700
Gama	0,0001500
Teta	0,0004600
Vega	0,0001090
Ro	0,0000360

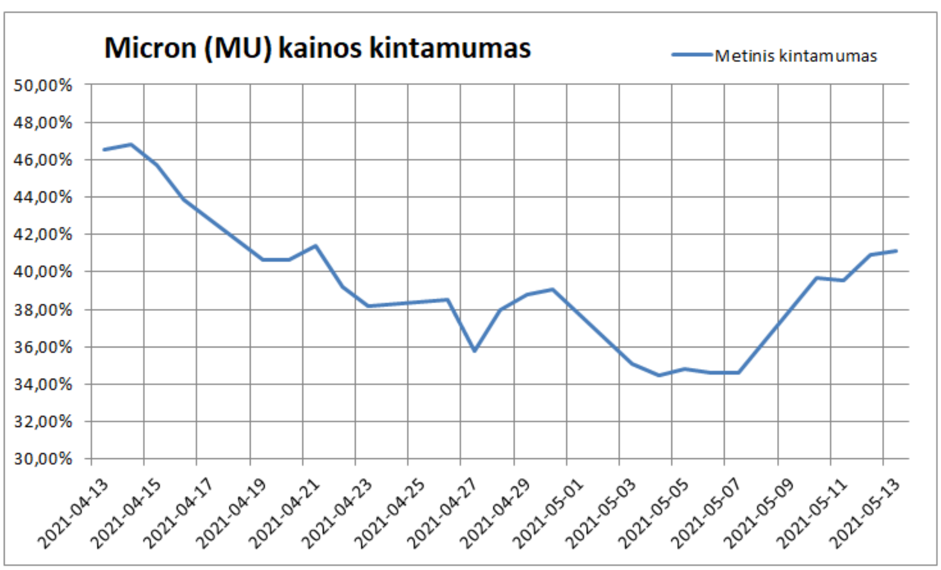
10.3.1 ir 10.3.2 Lentelės. Praktinių dalių vidutinės kvadratinės paklaidos.

Norėdami įvertinti premijos ir rodiklių paklaidas, naudojome vidutines kvadratines paklaidas - VKP (angl. *Mean Squared Error*) skaičiuojamas pagal formulę

$$VKP = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - Y_i)^2$$

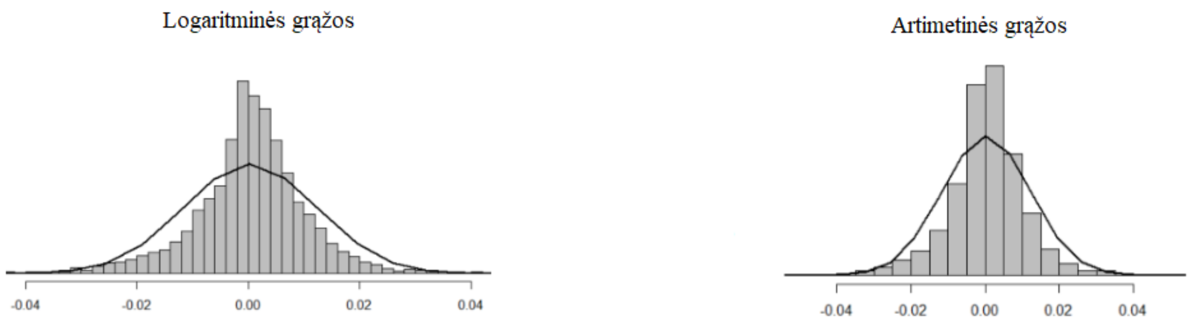
Kur $\hat{Y}_i$ - teorinė reikšmė rodiklio, Y_i - faktinė reikšmė.
Remiantis **10.3.1** ir **10.3.2** lentelėmis, antros praktinės dalies skaičiuota pasirinkimo pirkti sandorio visų rodiklių vidutinė kvadratinė paklaida yra didesnė nei pirmos praktinės dalies. Kalbėdami apie rizikos charakteristikas, pastebime, jog pirmos praktinės dalies antras rodiklis, turintis didžiausią paklaida, yra teta (laiko įtaką pasirinkimo sandoriui atspindintis rodmuo), tačiau antroje praktinėje dalyje šiuo atveju yra delta (aktyvo kainos S_0 įtaka pasirinkimo sandoriui). Bendru požiūriu, rizikų charakterisitkų paklaidos yra nedidelės.

10.4 Teorinių reikšmių paklaidų priežastys



29 pav. Metinis kainos kintamumas.

Viena pagrindinių Black-Scholes modelio prielaidų yra fiksuotas instrumento metinis kintamumas, tačiau remiantis skyrelio 5.6.1 pavyzdžiu apie VIX ir atliktais skaičiavimais, kuriuos vizualizavome **29 pav.**, galime pastebėti, jog "Micron Technology, Inc" kaip ir kitų akcijų, indeksų, žaliavų ar kitų instrumentų kainos kintamumas nėra pastovus. Prielaida kintamumą laikyti konstanta nėra teisinga, todėl ši priežastis lemia skirtumą tarp teorinių ir faktinių premijų bei delta,gama,teta,vega, ro rodiklių.

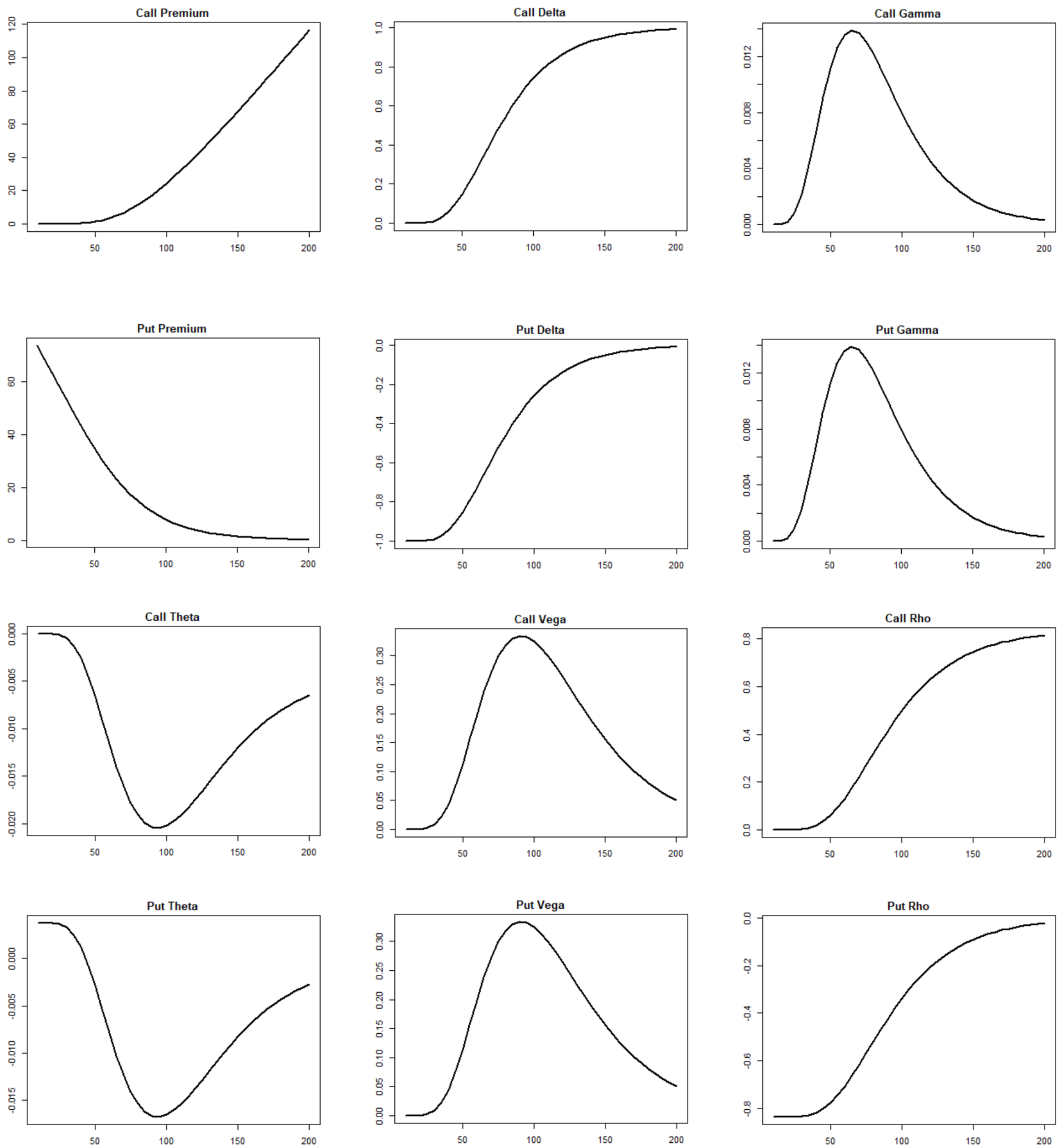


30 pav. Logaritminių ir aritmetinių grąžų pasiskirstymas. Autorių pav.

Kita priežastis galinti privesti prie teorinių reikšmių paklaidų yra realių rinkos ir instrumentų aritmetinių ir logaritminių grąžų pasiskirstymas ne pagal normalujį skirstinį, naudotą praktinėse dalyse apskaičiuoti analizuotiems rodikliams. Pateiktame **30 pav.** yra nurodytos Standart & Poor's 500 (S&P500) indekso grąžų pasiskirstymas, matuojant nuo 1993-ių metų. Instrumentas yra vienas svarbiausių JAV akcijų biržos rodiklių, apimantis apie 75% rinkos kapitalizacijos [7]. Indekso grąžų pasiskirstymas yra nukrypęs daugiau į teigiamą pusę, kadangi instrumento kainos vertė yra auganti. "Micron Technology, Inc" yra šio indekso komponentė, turinti 1.26 beta koeficiento reikšmę, reiškiančią kiek kartų kompanijos akcijų vertės svyravimai yra didesni su lyginamo indekso vertės svyravimais. Be to, matuojant paskutinių 60-ies dienų "S&P500" ir "Micron Technology, Inc" koreliaciją 2021-05-26 data, reikšmė siekė 0.75 [29]. Priedo, kompanijos akcijų trendas yra agresyviam augime,be žymių korekcijų. Todėl dėl šių visų priežasčių "Micron Technology, Inc" kompanijos grąžų pasiskirstymas nebus panašus į normaliojo skirstinio.

Pasirinkimo sandorių paklausa ir suprekiauta apyvarta (angl. *volume*) daro įtaką premijų vertėms ir rizikos charakteristikų reikšmėms. Augantys lūkesčiai priverčia pirkėjus statyti atidėtus pirkimo orderius (angl. *buy limit*) aukštesne kaina, kai pasirinkimo sandorių pardavėjai siekia parduoti aukštesne kaina atidėtus pardavimo orderius (angl. *sell limit*) ir atvirkščiai, lūkesčių nebuvimo atveju. Tokiu būdų rinkų dalyviai daro įtaką pasirinkimo sandorių kainoms ir dėl suprekiautų apyvartų kinta numatomo kintamumo reikšmė ir delta, gama, vega, teta, ro reikšmės.

11 Pasirinkimo sandorių teorinių premijų ir rizikos charakteristikų grafikai



31 pav. "Micron Technology,Inc" teoriniai rodiklių grafikai. Autorių pav.

Nubraižyti pasirinkimo pirkti ir pasirinkimo parduoti sandorių premijų ir rizikos charakteristikų teorinės reikšmės naudojantis statistinės programavimo kalbos "R" paketu "derivmkts". Aktyvo kaina $S = 85$, vykdymo kaina $K = 85$, metinis kintamumas $v = 0.406$, nerizikinga palūkanų norma $r_f = 0.0163$, kontrakto galiojimo terminas metais $tt = 1$, metinis dividendų pajamingumas $d = 0$.

12 Gautų rezultatų apibendrinimas

1. Išvestinės priemonės turi aukštesnį rizikos lygį nei obligacijų ar akcijų turto klasės ir nereguliuojama šių instrumentų prekyba gali privesti prie finansų rinkų griūties. Tačiau išvestinės priemonės yra vienos pagrindinių įrankių mažinti ir atsverti potencialią riziką su mažesniais kaštais.
2. Diskretaus laiko binominis modelis, grindžiamas binarinių medžių sudarymu, gali apskaičiuoti amerikietiškojo opciono vertę, tuo tarpu tolydaus laiko Black- Scholes modelis šios savybės neturi.
3. Black - Scholes modelis nėra kompleksiškas ir naudodamas parametrus skaičiavimui iš istorinių aktyvo duomenų, pateikia teorines premijų ir rizikos charakteristikų reiškmes artimas (apart antros praktinės dalies premijos, VKP-1,195) faktinėms reikšmėms, kurių kitimo tendencijos sutampa.
4. Skaičiuodami kompanijos "Micron Technology, Inc" pasirinkimo pirkti sandorio rodiklius pirmoje praktinėje dalyje, pastebėjome, jog teorinės premijos yra aukštesnės nei faktinės. Delta ir ro mažėja vykdymo kainai tolstant nuo aktyvo kainos, gamos ir vegos reikšmė didžiausia ir tetos mažiausia opcionui esant (*ATM*).
5. Analizuodami antros praktinės dalies pasirinkimo pirkti sandorį, teorinių ir faktinių premijų vertė tendencingai mažėjo artėjant kontrakto termino pabaigai, o opcionui tapus (*OTM*) reikšmės tapo artimos 0. Rizikos charakteristikų reikšmėse lūžio taškas yra (*OTM*) opcionas, dėl kurio rodikliai priartėjo prie 0, kadangi pačio opciono vertė tapo maža, tai ir jų įtaka privalo sumažėti.
6. Teorinių ir faktinių reikšmių paklaidą lemia Black-Scholes modelio prielaida apie pradinio aktyvo kintamumą laikomą konstanta. Tačiau analizuodami "Micron Technology, Inc" akcijų vertės kintamumą nuo 2021-04-13 iki 2021-05-13, šią prielaidą paneigėme. Kintamumas - vienas pagrindinių skaičiavimo parametrų.
7. Black-Scholes prielaida apie grąžų normalųjį pasiskirstymą nėra visados teisinga, kadangi diversifikuoto indekso, atspindinčio visos rinkos nuotaikas, grąžos nėra normaliai pasiskirsčiusios, o individualios įmonės turi tendenciją turėti didesneses uodegas ir grąžų nuokrypį nuo normaliojo skirstinio vidurkio.
8. Black - Scholes tolydaus laiko modelis yra naudingas įrankis skaičiuoti pasirinkimo sandorių premijas ir delta, gama, teta, vega, ro rodiklius su nedidelėmis paklaidomis.
9. Lognormalusis skirstinys yra plačiau naudojamas įvertinti vertybinių popierių rinką, nes neturi neigiamos pusės bei turi iškreipimą. Tokios savybės labiau atitinka realybę, nes turtas negali būti neigiamas ir vertybinis popierius turi tam tikras tendencijas.

13 Literatūra

[1] Bank for International Settlements https://www.bis.org/publ/otc_hy2105.htm

[2] Warren Buffet, Berkshire Hathaway Inc, 2002 annual report https://www.berkshirehathaway.com/2002ar/2002ar.pdf

[3] John C. Cox, Stephen A. Ross, Mark Rubinstein, Option pricing: A Simplified Approach, 1979 http://static.stevereads.com/papers_to_read/option_pricing_a_simplified_approach.pdf

[4] David H.Goldenberg, Derivatives Markets, Published 2016 by Routledge

[5] Federal Open Market Commite, The Federal Reserve. *https://www.federalreserve.gov/monetarypolicy/fomc.htm*

[6] Financial visualizations - Finviz https://finviz.com/

[7] FRED economic data, Federal Reserve Bank, St.Louis, S&P500 indeksas https://fred.stlouisfed.org/series/SP500

[8] Georgia Tech Mathematics College of Science, http://people.math.gatech.edu/ shenk/OptionsClub/vegaTalk.pdf

[9] Grigaliūnienė, Žana & Cibulskienė, Diana. "Arbitražo įkainojimo teorijos taikymo prielaidos." Ekonomika ir vadyba: aktualijos ir perspektyvos, 2008, Nr. 3 (12)

[10] Hong Kong monetary authority, https://www.hkma.gov.hk/media/eng/publication-and-research/reference-materials/banking/ch11.pdf

[11] International Energy Agency, Oil Market Report - April 2020 https://www.iea.org/reports/oil-market-report-april-2020

[12] Investopedia, APT https://www.investopedia.com/terms/a/apt.asp

[13] Investopedia, Arbitražas https://www.investopedia.com/terms/a/arbitrage_free_valuation.asp

[14] Investopedia, Derivatai, https://www.investopedia.com/terms/d/derivative.asp

[15] Investopedia, "GameStop" trumpųjų pozicijų išspaudimas https://www.investopedia.com/short-sellers-lose-usd5-05-billion-in-bet-against-gamestop-5097616

[16] Investopedia, Lognormalusis skirstinys https://www.investopedia.com/articles/investing/102014/lognormal-and-normal-distribution.asp
https://finance.yahoo.com/quote/MU/history?p=MU

[17] J. C. Hull, Options, Futures, and Other Derivatives, fifth edition, Prentice Hall, New Jersey, 2002

[18] J. C. Hull, Options, Futures, and Other Derivatives, sixth edition. Prentice Hall, New Jersey, 2006.

[19] Yahoo finance, "GameStop" statistika. https://finance.yahoo.com/quote/GME/key-statistics?p=GME

[20] Yahoo finance, Istorinės "Micron Technology,Inc" kainos.

[21] Gitanas Kancerevyčius, Finansai ir investicijos, Smaltijos leidykla, 2009m.

[22] Khan academy, Introduction to the Black-Scholes formula.
https://www.youtube.com/watch?v=pr-u4LCFYEYt=26sab_channel=KhanAcademyKhanAcademyOfficialArtistChannel

[23] Remigijus Leipus, Finansų matematiniai modeliai, 1996
http://web.vu.lt/mif/v.stakenas/a+o/1996-2/1996-2-11-30.pdf?fbclid=IwAR3Kj2TrfN6dz0f5hhNHCq6W-Y4o8NsTEJxymeRxgB8gZg_X3__3f0fpsW8

[24] Analyst prep, Lognormal Black Scholes Option Pricing Model
https://analystprep.com/study-notes/actuarial-exams/soa/ifm-investment-and-financial-markets/black-scholes-option-pricing-model/

[25] Morrell Peter and Swan William, Airline Jet Fuel Hedging: Theory and practice
https://financetrainingcourse.com/education/wp-content/uploads/2012/10/Airline-fuel-aviation-case-study-one.pdf

[26] Management Study Guide, https://www.managementstudyguide.com/what-are-derivatives.htm

[27] Office of the Comptroller of the Currency, Quartly report on bank trading and derivatives activities
http://static.stevereads.com/papers_to_read/option_pricing_a_simplified_approach.pdf

[28] "Optionistics", pasirinkimo sandorių duomenys. https://www.optionistics.com/s/download_historical_data

[29] Portfolio Visualizer, koreliacija MU ir S&P500 https://www.portfoliovisualizer.com/asset-correlations

[30] Najmi Ismail Murad Samsudin, Implied Volatility Forecasting in the Options Market: A Survey
https://www.researchgate.net/publication/303739858_Implied_Volatility_Forecasting_in_the_Options_Market_A_Survey?fbclid=IwAR23zD-Sw6kgE6LmHhkP7M0EvV-l2mK0FggoqiZrvEiIbwMBN2iz-MMwPhE

[31] Smartasset, "Gamma squeeze" *smartasset.com/investing/gamma-squeeze*

[32] sfox, Kripto valiutų arbitražas,
https://www.sfox.com/blog/bitcoin-arbitrage-is-possible-but-not-the-way-youre-doing-it/

[33] The options industry council, The CBOE volatility index - VIX.
https://www.optionseducation.org/referencelibrary/white-papers/page-assets/vixwhite.aspx

[34] Donatas Surgailis, Finansų matematika, Paskaitų konspektas.
https://docplayer.gr/97429000-Donatas-surgailis-finansu-matematika.html

[35] Uchicago.edu,
https://galton.uchicago.edu/~lalley/Courses/313/BrownianMotionCurrent.pdf

[36] U.S Department Of The Treasury, pajamingumo kreivės normos.
https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=yield

14 Priedai

Python programavimo kalba

```
import plotly.graph_objects as go
import pandas as pd
from google.colab import files
uploaded = files.upload()
df=pd.read_csv('GME1.csv')
df=df.set_index(pd.DatetimeIndex(df['Date'].values))
Df
chart
figure=go.Figure(
data= [
go.Candlestick(
x = df.index,
low = df['Low'],
high = df['High'],
close =df['Close'],
open = df['Open'],
increasing_line_color = 'dark green',
decreasing_line_color = 'dark red'
chart
figure=go.Figure(
data= [
go.Candlestick(
x = df.index,
low = df['Low'],
high = df['High'],
close =df['Close'],
open = df['Open'],
increasing_line_color = 'dark green',
decreasing_line_color = 'dark red'
) ] )
figure.update_layout(
title= 'Gamestop',
yaxis_title = 'GameStop akcijų kaina USD ($)',
xaxis_title = 'Data')
figure.show()
```