VILNIAUS UNIVERSITETAS

Adelė
VAIGINYTĖ

# Analizinių funkcijų aproksimavimas parabolinių formų dzeta funkcijos postūmiais

**DAKTARO DISERTACIJOS SANTRAUKA**

Gamtos mokslai,
Matematika (N 001)

---

VILNIUS 2021

Disertacija rengta 2016 - 2020 metais Vilniaus universitete.

**Moksliniai vadovai:**
**prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas** (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001) – nuo 2018-03-15 iki 2020-09-30
**prof. dr. Ramūnas Garunkštis** (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001) – nuo 2016-10-01 iki 2018-03-14

**Moksliniai konsultantai:**
**prof. dr. Ramūnas Garunkštis** (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001) – nuo 2018-03-15 iki 2020-09-30
**prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas** (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001) – nuo 2016-10-01 iki 2018-03-14

**Gynimo taryba:**

Pirmininkas – **prof. dr. Jonas Šiaulys** (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001)
Nariai:
**doc. dr. Igoris Belovas** (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001)
**prof. dr. Paulius Drungilas** (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001)
**prof. dr. Roma Kačinskaitė** (Vytauto Didžiojo universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001)
**prof. dr. Aleksej Ustinov** (Rusijos mokslų akademija, Taikomosios matematikos institutas, gamtos mokslai, matematika – N 001)

Disertacija bus ginama viešame Gynimo tarybos posėdyje 2021 m. lapkričio mėn. 12 d. 12 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Jono Kubiliaus vardo (102 aud.) auditorijoje. Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225, Vilnius, Lietuva, el. paštas mif@mif.vu.lt

Disertaciją galima peržiūrėti Lietuvos nacionalinėje Martyno Mažvydo ir Vilniaus universiteto bibliotekose ir VU interneto svetainėje adresu: https://www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

VILNIUS UNIVERSITY

Adelė
VAIGINYTĖ

# Approximation of Analytic Functions by Shifts of Zeta-Functions of Certain Cusp Forms

**SUMMARY OF DOCTORAL DISSERTATION**

Natural Sciences,
Mathematics (N 001)

VILNIUS 2021

This dissertation was written between 2016 and 2020 at Vilnius University.

**Academic supervisors:**
**Prof. Habil. Dr. Antanas Laurinčikas** (Vilnius University, Natural Sciences, Mathematics – N 001) – from 2018-03-15 to 2020-09-30
**Prof. Dr. Ramūnas Garunkštis** (Vilnius University, Natural Sciences, Mathematics – N 001) – from 2016-10-01 to 2018-03-14

**Scientific advisors:**
**Prof. Dr. Ramūnas Garunkštis** (Vilnius University, Natural Sciences, Mathematics – N 001) – from 2018-03-15 to 2020-09-30
**Prof. Habil. Dr. Antanas Laurinčikas** (Vilnius University, Natural Sciences, Mathematics – N 001) – from 2016-10-01 to 2018-03-14

**Dissertation Defence Panel:**

Chairman – **Prof. Dr. Jonas Šiaulys** (Vilnius University, Natural Sciences, Mathematics – N 001)
Members:
**Doc. Dr. Igoris Belovas** (Vilnius University, Natural Sciences, Mathematics – N 001)
**Prof. Dr. Paulius Drungilas** (Vilnius University, Natural Sciences, Mathematics – N 001)
**Prof. Dr. Roma Kačinskaitė** (Vytautas Magnus University, Natural Sciences, Mathematics – N 001)
**Prof. Dr. Aleksej Ustinov** (Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division, Far-Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Natural Sciences, Mathematics – N 001)

The dissertation shall be defended at a public meeting of the Dissertation Defence Panel at 12AM EET on the 12th of November, 2021 in Room 102 of the Faculty of Mathematics and Informatics of Vilnius University.
Address: Naugarduko g. 24, LT-03225, Vilnius, Lithuania, e-mail: mif@mif.vu.lt

The text of this dissertation can be accessed at Martynas Mažvydas National Library of Lithuania and the library of Vilnius University, as well as on the website of Vilnius University:
www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

# Disertacinio darbo aprašymas

## 1 Problema ir tyrimo objektas

Analizinių funkcijų aproksimavimas paprastesnėmis ar bendresnio tipo funkcijomis yra aktualus matematinis uždavinys, kuriam nuolat ieškoma naujų sprendinių. Vienas iš dažniau sutinkamų tokių sprendimų pavyzdžių – S. Mergelyan'o pasiūlytas funkcijų aproksimavimas polinomais. Mergelyano teorema teigia, kad kiekvieną kompleksinio kintamojo $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ funkciją $f(s)$, kuri yra tolydi tam tikroje kompaktinėje aibėje $K \subset \mathbb{C}$ bei analizinė jos viduje, galima šioje srityje norimu tikslumu aproksimuoti polinomais.

Kitas ne mažiau įdomus aproksimavimo būdas teigia, jog galima rasti tokią funkciją, kurios postūmiais įmanoma aproksimuoti visą klasę analizinių funkcijų. Tokios funkcijos buvo pavadintos universaliomis funkcijomis. Pirmąją universalią funkciją 1975 m. aptiko S.M. Voronin'as nagrinėdamas Riemann'o dzeta funkciją $\zeta(s)$, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlet eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s},$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinių skaičių plokštumą išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$. Jis įrodė, kad postūmiais $\zeta(s + i\tau), \tau \in \mathbb{R}$, galima norimu tikslumu aproksimuoti visą klasę analizinių funkcijų ir, maža to, tokių postūmių kiekvienai aproksimuojamai funkcijai yra be galo daug. Šiuolaikinė Voronin'o universalumo teorema formuluojama taip:

**Teorema A** *Tarkime, jog $K$ yra kompaktinė kompleksinės plokštumos juostos $\{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$ aibė su jungiu papildiniu, o $f(s)$ – nulių neturinti funkcija, kuri yra tolydi srityje $K$ ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Čia $\operatorname{meas} A$ žymi mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą.

Voronin'o rezultatai vėliau buvo išplėsti ir platesnei klasei dzeta ir $L$ funkcijų bei tam tikrai klasei Dirichlet eilučių. Analizinės skaičių teorijos kūrėjai intensyviai nagrinėja ir kitas universalumo teoremų formas bei apibendrinimus, tokius kaip diskretus, jungtinis ar mišrus universalumas bei apibendrintos postūmių klasės.

Ši disertacija yra skirta universalumo teoremoms parabolinių formų dzeta funkcijai.

Tegul

$$SL(2,\mathbb{Z}) := \left\{\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc = 1\right\}$$

yra pilnoji modulinė grupė. Kompleksinio kintamojo funkcija $F(z)$, $z \in \mathbb{C}$, yra vadinama holomorfine svorio $\kappa \in 2\mathbb{N}$ paraboline forma, jei ji tenkina sąlygas:

1. F(z) yra holomorfinė pusplokštumėje $\operatorname{Im}(z) > 0$,
2. $F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^\kappa F(z), \kappa \in 2\mathbb{N}$, su visais $\gamma \in SL(2,\mathbb{Z})$,
3. $F$ yra išskleidžiama Fourier eilute $F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m)e^{2\pi imz}$.

Tegul $T_m$, $m \in \mathbb{N}$, žymi Hecke's operatorių, apibrėžiamą formule

$$T_m F(z) = m^{\kappa-1} \sum_{\substack{a,d>0 \\ ad=m}} \frac{1}{d^\kappa} \sum_{b \pmod d} F\left(\frac{az+b}{d}\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Tuomet nenulinė modulinė forma $F(z)$ yra vadinama Hecke's operatoriaus $T_m$ tikrine forma, jei egzistuoja toks $\lambda(m) \in \mathbb{C}$, su kuriuo

$$T_m F = \lambda(m) F.$$

Jei $F(z)$ yra tikrinė forma visiems operatoriams $T_m$, $m \in \mathbb{N}$, ji vadinama vienalaike forma. Šiuo atveju funkcijos $F(z)$ koeficientas $c(1)$ yra nelygus nuliui, ir galime šią eilutę normalizuoti, t.y., gauti $c(1) = 1$.

Tegul $F(z)$ yra normalizuota vienalaikė tikrinė Hecke's parabolinė forma. Su funkcija $F(z)$ susieta dzeta funkcija $\zeta(s, F)$ pusplokštumėje $\sigma > (\kappa+1)/2$ yra apibrėžiama absoliučiai konverguojančia Dirichlet eilute

$$\zeta(s, F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s},$$

ir yra analiziškai pratęsiama į sveikąją funkciją visoje kompleksinių skaičių plokštumoje. Toliau trumpumo dėlei šią funkciją vadinsime tiesiog parabolinių formų dzeta funkcija.

Parabolinių formų dzeta funkcijos universalumą pirmą kartą įrodė A. Laurinčikas ir K. Matsumoto 2001 m. Jie atrado, jog funkcijai $\zeta(s, F)$ galioja Voronino tipo universalumo nelygybė.

Disertacijoje yra nagrinėjami trys šios teoremos apibendrinimai parabolinių formų dzeta funkcijai naudojant netiesinius postūmius – tolydus, diskretus bei jungtinis diskretus atvejai. Visose disertacijos teoremose $F$ suprantama kaip normalizuota vienalaikė tikrinė Hecke's parabolinė forma.

## 2 Tikslas ir uždaviniai

Disertacijos tikslas – apibendrinti universalumo teoremą parabolinių formų dzeta funkcijai $\zeta(s, F)$ naudojant netiesinius postūmius. Disertacija siekia išspręsti tris pagrindinius uždavinius:

1. Apibrėžti netiesinių postūmių aibę bei sąlygas, su kuriomis funkcija $\zeta(s, F)$ yra tolydžiai universali;

2. Apibrėžti netiesinių postūmių aibę bei sąlygas, su kuriomis funkcija $\zeta(s, F)$ yra diskrečiai universali;

3. Apibrėžti netiesinių postūmių aibę bei sąlygas, su kuriomis funkcija $\zeta(s, F)$ tenkina jungtinio diskretaus universalumo savybę.

## 3 Aktualumas ir naujumas

Universalumo savybė yra vienas iš itin svarbių ir aktualių analizinės skaičių teorijos uždavinių, turinčių plačias pritaikymo galimybes. Pirmiausia įdomus ir daug žadantis yra pats analizinių funkcijų aproksimavimo uždavinys. Tačiau jo nagrinėjimas atveria ir kitas galimybes. Universalumo tyrimai stipriai prisideda prie naujų analizinės skaičių teorijos metodų vystymo, o taip pat yra taikomi ir kitoms problemoms spręsti. Voronin'o tipo teoremos yra naudojamos dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymo tyrimams. Dzeta funkcijos $\zeta(s)$ universalumas taip pat naudojamas hypertranscendentalumo savybei tirti – jis galėtų padėti įrodyti, jog $\zeta(s)$ negali būti jokios netrivialios algebrinės diferencialinės lygties sprendiniu. Taip pat yra žinoma, jog Riemann'o hipotezė, viena iš neišspręstų Tūkstantmečio problemų, teigianti, jog Riemann'o dzeta funkcija $\zeta(s)$ neturi nulių pusplokštumėje $\sigma > 1/2$, yra ekvivalenti teiginiui, jog funkciją $\zeta(s)$ galima aproksimuoti ja pačia juostoje $1/2 < \sigma < 1$.

Universalumo tyrimų aktualumas nemenksta jau daugiau kaip keturis dešimtmečius. Šią sritį yra nagrinėję tokie mokslininkai kaip B. Bagchi's, R. Garunkštis, J. Genys, S.M. Gonek'as, R. Kačinskaitė, J. Kaczorowski's, A. Laurinčikas, Y. Lee, R. Macaitienė, K. Matsumoto, H. Mishou, H. Nagoshi's, T. Nakamura, Ł. Pánkowski's, A. Reich'as, J. Sander'is, W. Schwarz'as, J. Steuding'as, R. Steuding'as, D. Šiaučiūnas ir kiti. Nepaisant intensyvių tyrimų, šis tyrimų laukas vis dar turi neatsakytų klausimų.

Parabolinių formų dzeta funkcija pasirinkta dėl jos aktualumo. Funkcijos $\zeta(s, F)$ (kai kuriuose šaltiniuose dar žymima $L(s, F)$) tyrimus itin paskatino 1995 metų A. Wiles'o rezultatai, kai šis pritaikė ją paskutiniosios Fermat teoremos įrodymui. Ji taip pat gali būti pritaikyta modulinių formų analizei bei kitiems algebros bei grupių teorijos uždaviniams spręsti.

Netiesinių postūmių atvejis buvo pasirinktas kaip visiškai nauja tyrimų kryptis, 2016 m. Ł. Pánkowski'o pasiūlyta priklausomų $L$ funkcijų analizei.

Disertacijoje pristatomi nauji teoriniai rezultatai, pirmą kartą pristatyti publikacijose bei konferencijose jos rengimo metu.

# 4 Tyrimų metodika

Visi disertacijos rezultatai yra teoriniai, paremti analizinės skaičių teorijos metodais. Įrodymuose galima išskirti du pagrindinius žingsnius – ribines teoremas funkcijai $\zeta(s, F)$ bei teoremas apie tikimybinių matų atramas. Įrodymai yra paremti Euler'io sandaugos savybėmis, Mergelyan'o teorema, aproksimavimu pagal vidurkį bei silpnojo matų konvergavimo teorija. Diskrečių atvejų nagrinėjimui naudojamas Weyl'o kriterijus bei Gallagher'io lema. Modifikuotų universalumo teoremų įrodymui naudojamas L. Meškos ir A. Laurinčiko pasiūlytas metodas, kai taikomas silpnojo mato konvergavimo ekvivalentas tolydumo aibių terminais.

# 5 Darbo struktūra

Disertacija parašyta anglų kalba. Ją sudaro įvadas, trys skyriai, išvados, literatūros sąrašas bei žymėjimai. Kiekvienas universalumo apibendrinimo atvejis yra nagrinėjamas atskirame skyriuje, kur pateikta tiksli formuluotė bei detalūs teoremų įrodymai. Įvade pristatyta istorinė universalumo teorijos vystymosi bei parabolinių formų dzeta funkcijos universalumo savybės analizės apžvalga. Bendra disertacijos apimtis – 78 puslapiai.

# 6 Problemos istorija

Disertacijoje trumpai apžvelgiami pagrindinai tyrimai, įkvėpę joje pristatomus rezultatus.

Tolydaus universalumo teoremos kildinamos iš Voronin'o teoremos (Teorema A). Tuo tarpu diskretaus tolydumo idėją 1980 m. pasiūlė A. Reich'as. Šiuo atveju postūmiai, kuriais aproksimuojamos funkcijos, imamos jau ne iš tolydžios, bet iš diskrečios aibės, ir tiriamas tokios aibės tankis. Reich'as savo darbe įrodė diskretaus tolydumo teoremą Dedekindo dzeta funkcijai. Jis savo teoremoje postūmius $\tau$ ėmė iš aritmetinės progresijos $\{kh : k \in \mathbb{N}_0\}$.

Tegul $\#A$ žymi diskrečios aibės $A$ galią (elementų skaičių). $M$ žymėsime skaičių kūną, $d_M = [M : \mathbb{Q}]$, o $\zeta_M(s)$ – su $M$ susietą Dedekindo dzeta funkciją.

**Teorema B** *Tegul $K$ yra kompaktinė aibė su jungiu papildiniu iš kompleksinės plokštumos juostos $\{s \in \mathbb{C} : 1 - (\max\{2, d_M\})^{-1} < \sigma < 1\}$, o $f(s)$ – nuliu nevirstanti funkcija, tolydi aibėje $K$ ir analizinė jos viduje. Tada kiekvienam realiajam $h \neq 0$ ir kiekvienam $\varepsilon > 0$ galioja nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K}|\zeta_M(s+ikh) - f(s)|< \varepsilon\right\} > 0.$$

Analizinės skaičių teorijos tyrėjai pastebėjo, jog kai kurios dzeta ir $L$ funkcijos pasižymi jungtinio universalumo savybe, t.y., kad vienu metu galima keletą analizinių funkcijų aproksimuoti rinkiniu dzeta ar $L$ funkcijų. Pirmasis jungtinio universalumo rezultatas taip pat priklauso Voroninui, kuris įrodė šią savybę Dirichlet $L$ funkcijoms $L(s, \chi_1), ..., L(s, \chi_r)$ su poromis neekvivalenčiai Dirichlet charakteriais. Moderni šios teoremos formuluotė skamba taip:

**Teorema C** *Tegul $K_1, ..., K_r$ yra kompaktinės juostos $\{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$ aibės su jungiaisiais papildiniais, $f_j$, $j = 1, ..., r$, – nuliu nevirstančios funkcijos, tolydžios atitinkamose aibėse $K_j$ ir* *anlizinės jų viduje. Tegul $\chi_1, ..., \chi_r$ yra poromis neekvivalentūs Dirichlet charakteriai, o $L(s,\chi_1), ..., L(s,\chi_r)$ – juos atitinkančios Dirichlet L funkcijos. Tada kiekvienam $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\Big\{\tau \in [0,T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |L(s+i\tau,\chi_j) \\ -f_j(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Pirmoji diskreti jungtinio universalumo teorema buvo įrodyta B. Baghi'o. Joje taip pat buvo naudojama Dirichlet $L$ funkcija bei postūmiai iš aritmetinės progresijos.

Nagrinėjant skirtingo tipo dzeta ir $L$ funkcijas, diskretaus universalumo rezultatai dažnai yra priklausomi ir nuo parametro $h$ aritmetinės prigimties. Iššūkių kelia ir mėginimas apibendrinti diskrečiąsias teoremas kitoms postūmių sekoms nei tiesinė aibė $\{kh : k \in \mathbb{N}_0\}$. Pirmieji tokius rezultatus 2016 m. pademonstravo A. Dubickas ir A. Laurinčikas. Jie nagrinėjo Riemann'o dzeta funkciją ir aibę $\{k^\alpha h : k \in \mathbb{N}_0\}$ su fiksuotu parametru $\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Ł. Pánkowski's praplėtė minėtą rezultatą visiems ne sveikiesiems skaičiams $\alpha > 0$ bei bendresnio pobūdžio aibėms $\{hk^\alpha \log^\beta k : k = 2,3,\ldots\}$, čia

$$\beta \in \begin{cases} \mathbb{R}, & \textbf{kai} \quad \alpha \notin \mathbb{Z}, \\ (-\infty,0] \cup (1,\infty), & \textbf{kai} \quad \alpha \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Disertacijoje nagrinėjamas tam tikras Ł. Pánkowski'o pasiūlytos postūmių aibės apibendrinimas.

Visais anksčiau minėtais atvejais universalumo teoremos buvo formuluojamos naudojant apatinę ribą. Tokio tipo teiginiai yra gan stiprūs, nes leidžia tvirtinti, jog apatinis aproksimacijai naudojamų postūmių tankis yra teigiamas. Ilgą laiką buvo abejojama, ar tokį tvirtinimą galima sustiprinti apatinę ribą pakeičiant į ribą. 2012 m. pats S.M. Voronin'as paminėjo, jog šis perėjimas yra galimas beveik visiems $\varepsilon > 0$. 2014 m. šį teiginį pagrindė L. Meška ir A. Laurinčikas Riemann'o dzeta funkcijai. Jie įrodė tokią teoremą:

**Teorema D** *Tarkime, jog $K$ yra kompaktinė kompleksinės plokštumos juostos $\{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$ aibė su jungiu papildiniu, o $f(s)$ – nulių neturinti funkcija, kuri yra tolydi srityje $K$ ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ nelygybė*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau) - f(s)|< \varepsilon\right\} > 0$$

*galioja visiems $\varepsilon > 0$, galbūt išskyrus skaitų jų skaičių.*

Savo įrodyme L. Meška ir A. Laurinčikas silpnąjį mato konvergavimą atvirųjų aibių terminais pakeitė ekvivalentu tolydumo aibių terminais ir taip gavo norimą rezultatą. Nors šis įrodymas galioja ne visiems $\varepsilon > 0$, tačiau jie įrodė, jog toks teiginys gali būti pritaikytas ir kitoms dzeta funkcijoms, apibrėžtoms Dirichlet eilutėmis ir tenkinančioms tam tikras augimo sąlygas. Disertacijoje įrodomos Voronin'o tipo teoremos ir kiekvienos jų modifikacijos, kai apatinė riba yra pakeičiama į ribą.

# 7 Pagrindiniai disertacijos rezultatai

## 7.1 Tolydi universalumo teorema

Pažymėkime kompleksinės plokštumos juostą $D = \{s \in \mathbb{C} : \kappa/2 < \sigma < (\kappa+1)/2\}$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_F$ – klasę šios juostos kompaktinių poaibių su jungiaisiais papildiniais, $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, – klasę nuliu nevirstančių funkcijų, tolydžių aibėje $K$ ir analizinių jos viduje. Tuomet A. Laurinčikas ir K. Matsumoto 2001 m. įrodė tokį teiginį:

**Teorema E** (Laurinčiko-Matsumoto universalumo teorema). *Tegul* $K \in \mathcal{K}$, $f(s) \in H_0(K)$. *Tuomet kiekvienam* $\varepsilon > 0$, *yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau, F) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Ši teorema, kaip ir jos pirmtakė Voronin'o teorema, skirta funkcijų aproksimavimui Riemann'o dzeta funkcijos postūmiais, įrodo, jog nuliu nevirstančias analizines funkcijas galima norimu tikslumu aproksimuoti funkcijos $\zeta(s, F)$ postūmiais, be to, tokių postūmių yra be galo daug (jie turi teigiamą apatinį tankį).

Laurinčiko-Matsumoto teoremoje analizinių funkcijų aproksimavimui yra naudojami tiesiniai tolydūs funkcijos $\zeta(s + i\tau, F)$ postūmiai. Vėliau gauta ir kitų šios teoremos modifikacijų. Disertacijoje įrodoma universalumo teorema naudojant netiesinius funkcijos $\zeta(s, F)$ postūmius.

Sakysime, jog realaus kintamojo funkcija $\varphi(\tau)$ priklauso klasei $U(\tau_0)$, $\tau_0 > 0$, jei ji tenkina šias sąlygas:

1. $\varphi(\tau)$ intervale $[\tau_0, \infty)$ yra reali, diferencijuojama, teigia-

ma ir didėjanti,

2. išvestinė $\varphi'(\tau)$ intervale $[\tau_0, \infty)$ yra monotoniška ir teigiama bei tenkina sąlygą $\frac{1}{\varphi'(\tau)} = o(\tau)$, $\tau \to \infty$,
3. galioja įvertis $\varphi(2\tau) \max\limits_{\tau \leqslant t \leqslant 2\tau} \frac{1}{\varphi'(t)} \ll \tau, \quad \tau \to \infty.$

Tuomet pirmajame disertacijos skyriuje yra įrodoma ši teorema.

**Teorema 1.1** *Tegul* $\varphi(\tau) \in U(\tau_0), \quad K \in \mathcal{K}, \quad f(s) \in H_0(K)$. *Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$ *yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T-\tau_0} \operatorname{meas}\Big\{\tau \in [\tau_0, T] : \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\varphi(\tau), F) \\ -f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Disertacijoje taip pat įrodoma ir šios teoremos modifikacija, kai apatinė riba pakeičiama į ribą.

**Teorema 1.2** *Tegul* $\varphi(\tau) \in U(\tau_0), \quad K \in \mathcal{K}, \quad f(s) \in H_0(K)$. *Tuomet nelygybė*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T-\tau_0} \operatorname{meas}\Big\{\tau \in [\tau_0, T] : \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\varphi(\tau), F) \\ -f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0$$

*galioja su visai* $\varepsilon > 0$*, galbūt išskyrus skaitų jų skaičių.*

## 7.2 Diskreti universalumo teorema

Pirmuosius diskretaus universalumo rezultatus parabolinių formų dzeta funkcijoms įrodė A. Laurinčikas, K. Matsumoto ir J. Steuding'as 2005 m. Jie nagrinėjo naująsias formas $\hat{F}$, apibrėžtas Hecke's pogrupyje

$$\Gamma_0(q) := \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod q \right\},$$

čia $q \in \mathbb{Z}$, bei su jomis susietas dzeta funkcijas $\zeta(s,\hat{F})$. Jų teoremoje buvo reikalaujama, jog žingsnis $h$ tenkintų sąlygą, jog kiekvienam $k \neq 0$ skaičius $\exp(2\pi k/h)$ būtų iracionalus. 2016 m. tie patys autoriai pasiekė rezultatatų jau be minėto apribojimo.

**Teorema F** *Tegul $K \in \mathcal{K}$, $f(s) \in H_0(K)$, o $h > 0$ yra fiksuotas skaičius. Tuomet kiekvienam $\varepsilon > 0$ galioja nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \#\Big\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K}|\zeta(s+ikh,\hat{F}) \\ -f(s)|< \varepsilon\Big\} > 0.$$

Disertacijoje įrodomas šios teoremos apibendrinimas netiesiniams postūmiams. Šiuo atveju mums prireiks tolygaus pasiskirstymo moduliu 1 sąvokos.

Skaičiaus $u \in \mathbb{R}$ trupmeninę dalį pažymėkime $\{u\}$ ir imkime aibės $I$ indikatoriaus funkciją $\chi_I$. Sakome, jog seka $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1, jei kiekvienam intervalui $I = [a,b) \subset [0,1)$ galioja lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_I(\{x_k\}) = b - a.$$

Tegu $k_0 \in \mathbb{N}$. Sakysime, jog realaus kintamojo funkcija $\varphi(\tau)$ priklauso klasei $U(k_0)$, $\quad k_0 > 0$, jei ji tenkina šias sąlygas:

1. $\varphi(\tau)$ intervale $[k_0 - \frac{1}{2}, \infty)$ yra reali, diferencijuojama, teigiama ir didėjanti,

2. išvestinė $\varphi'(\tau)$ intervale $\tau \in [k_0 - \frac{1}{2}, \infty)$ tenkina sąlygą

$$\varphi(2\tau)\left(\max_{\tau \leqslant t \leqslant 2\tau} \frac{1}{\varphi'(t)} + \max_{\tau \leqslant t \leqslant 2\tau} \varphi'(t)\right) \ll \tau, \quad \tau \to \infty,$$

3. seka $\{a\varphi(k) : k \geqslant k_0\} \subset \mathbb{R}$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1 su kiekvienu $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Antrajame disertacijos skyriuje yra įrodoma ši teorema.

**Teorema 2.1** *Tegul* $\varphi \in U(k_0), \quad K \in \mathcal{K}, \quad f(s) \in H_0(K)$. *Tuomet kiekvienam* $\varepsilon > 0$ *yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N - k_0 + 1} \# \Big\{ k_0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\varphi(k), F) - f(s)| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

Kaip ir tolydžiu atveju, įrodoma ir šios teoremos modifikuota versija.

**Teorema 2.2** *Tegul* $\varphi \in U(k_0), \quad K \in \mathcal{K}, \quad f(s) \in H_0(K)$. *Tuomet nelygybė*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N - k_0 + 1} \# \Big\{ k_0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\varphi(k), F) - f(s)| < \varepsilon \Big\} > 0$$

*galioja su visai* $\varepsilon > 0$, *galbūt išskyrus skaitų jų skaičių.*

## 7.3 Jungtinė diskreti universalumo teorema

Jungtinio universalumo savybę parabolinių formų dzeta funkcijų porai įrodė H. Mishou. Tegul $F_1$ ir $F_2$ yra dvi skirtingos normalizuotos Hecke's tikrinės parabolinės formos, apibrėžtos pilnojoje modulinėje grupėje, jų svoriai yra $\kappa_1$ ir $\kappa_2$, o $c_1(m)$ ir $c_2(m)$ – atitinkami Fourier koeficientai. Apibrėžkime

$$\hat{c}_j(m) = c_j(m)m^{-(\kappa_j-1)/2}, \quad j = 1, 2,$$

ir

$$\hat{\zeta}(s, F_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\hat{c}_j(m)}{m^s}, \quad \sigma > 1, \quad j = 1, 2.$$

Tuomet Mishou teorema formuluojama taip.

**Teorema G** *Imkime kompleksinės plokštumos juostos* $\{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$ *kompaktines aibes* $K_j$*,* $j = 1, 2$*, su jungiaisiais papildiniais ir funkcijas* $f_j(s)$*,* $j = 1, 2$*, kurios yra tolydžios aibėse* $K_j$ *bei analizinės jų viduje. Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$ *galioja nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\Big\{\tau \in [0, T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant 2} \sup_{s\in K_j} |\hat{\zeta}(s + i\tau, F_j) \\ - f_j(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Diskretų jungtinį parabolinių formų dzeta funkcijų universalumą A. Laurinčikas įrodė 2020 m. Tegul $F_1, ..., F_r$ yra skirtingos normalizuotos Hecke's tikrinės parabolinės formos su svoriais $\kappa_1, ..., \kappa_r$ ir Fourier koeficientais $c_1(m), ..., c_r(m)$. Jas atitinkančias dzeta funkcijas žymėsime

$$\zeta(s, F_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_j(m)}{m^s}, \quad \sigma > (\kappa_j + 1)/2, \quad j = 1, \dots, r.$$

Teigiamiems $h_j$, $j = 1, ..., r$, apibrėžkime aibę

$$L(\mathbb{P}; h_1, ..., h_r; \pi) = \{(h_1 \log p : p \in \mathbb{P}), ..., (h_r \log p : p \in \mathbb{P}), 2\pi\}.$$

Tegul $D_j = \Big\{ s \in \mathbb{C} : \kappa_j/2 < \sigma < (\kappa_j + 1)/2 \Big\}$, $\mathcal{K}_j$ – klasė $D_j$ kompaktinių aibių su jungiaisiais papildiniais, o $H_0(K_j), K_j \in \mathcal{K}_j$, žymi klasę nuliu nevirstančių funkcijų, tolydžių aibėse $K_j$, $j = 1, ..., r$, ir analizinių jų viduje. Tuomet A. Laurinčikas įrodė tokią teoremą.

**Teorema H** *Tarkime, kad aibė* $L(\mathbb{P}; h_1, ..., h_r; \pi)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno* $\mathbb{Q}$. *Kiekvienam* $j = 1, ..., r$ *imkime* $K_j \in \mathcal{K}_j$ *ir* $f_j(s) \in H_0(K_j)$. *Tuomet kiekvienam* $\varepsilon > 0$ *galioja nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \Big\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{1 \leqslant j \leqslant r} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + ikh_j, F_j) - f_j(s)| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

Disertacijos rezultatai gauti naudojant funkcijų klasę $U_r(k_0)$, $k_0 \in \mathbb{N}$. Sakysime, jog funkcijos $\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_r(\tau)$ priklauso klasei $U_r(k_0)$, jei jos tenkina šias sąlygas:

1. funkcijos $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ intervale $[k_0 - \frac{1}{2}, \infty)$ yra realios, teigiamos, didėjančios ir tolydžiai diferencijuojamos,

2. išvestinės $\varphi'_1(\tau), \dots, \varphi'_r(\tau)$ intervale $[k_0 - \frac{1}{2}, \infty)$ tenkina

sąlygą

$$\varphi_j(2\tau)\left(\max_{\tau\leqslant t\leqslant 2\tau}\frac{1}{\varphi_j'(t)}+\max_{\tau\leqslant t\leqslant 2\tau}\varphi_j'(t)\right)\ll\tau,\quad \tau\to\infty,$$
$$j=1,\dots,r,$$

3. seka $\{a_1\varphi_1(k)+\ldots+a_r\varphi_r(k):k\geqslant k_0\}\subset\mathbb{R}$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1 su kiekvienu $a_1,\dots,a_r\in\mathbb{R}$, kur nors vienas iš $a_j, j=1,\dots,r$, nėra lygus nuliui.

Tegul $D_j=\Big\{s\in\mathbb{C}:\kappa_j/2<\sigma<(\kappa_j+1)/2\Big\}$, $j=1,\dots,r$, $\mathcal{K}_j$ – klasė juostos $D_j$ kompaktinių poaibių su jungiaisiais papildiniais, $H_0(K_j), K_j\in\mathcal{K}_j$, – klasė nuliu nevirstančių funkcijų, tolydžių aibėje $K_j$ ir analizinių jos viduje.

Tuomet trečiasis disertacijos skyrius yra skirtas šiai teoremai įrodyti:

**Teorema 3.1** *Tegul* $(\varphi_1,\dots,\varphi_r)\in U_r(k_0)$. *Kiekvienam* $j=1,\dots,r$, *tegul* $K_j\in\mathcal{K}_j$ *ir* $f_j(s)\in H_0(K_j)$. *Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon>0$ *yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N-k_0+1}\#\Big\{k_0\leqslant k\leqslant N:\sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sup_{s\in K_j}|\zeta(s+i\varphi_j(k),F_j)$$
$$-f_j(s)|<\varepsilon\Big\}>0.$$

Disertacijoje įrodoma ir tokia šios teoremos modifikacija:

**Teorema 3.2** *Tegul galioja 3.1 teoremos sąlygos. Tuomet nelygybė*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N-k_0+1} \# \Big\{ k_0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s+i\varphi_j(k), F_j) \\ -f_j(s)| < \varepsilon \Big\} > 0$$

*galioja su visai* $\varepsilon > 0$*, galbūt išskyrus skaitų jų skaičių.*

Šios teoremos gali būti laikomos vienmatės diskrečiosios teoremos apibendrinimu. Svarbu paminėti, jog, kitaip nei dažnai reikalinga kitose jungtinio universalumo teoremose, parabolinės formos $F_1, \dots, F_r$ yra nebūtinai skirtingos.

# 8 Išvados

Disertacijoje įrodoma, jog dzeta funkcijai $\zeta(s, F)$, susietai su normalizuota vienalaike Hecke's tikrine svorio $\kappa$ paraboline forma $F(z)$, galima apibrėžti netiesinių postūmių aibę taip, jog jai galiotų šios universalumo savybės:

1. Imant realias funkcijas $\varphi \in U(\tau_0)$, tenkinančias tam tikras augimo sąlygas, ir tolydžius postūmius $\zeta(s+i\varphi(\tau), F)$ galima norimu tikslumu tolygiai aproksimuoti nuliu nevirstančias analizines funkcijas;

2. Imant realias funkcijas $\varphi \in U(k_0)$, tenkinančias tam tikras augimo sąlygas bei tolygiai pasiskirsčiusias moduliu 1, ir diskrečius postūmius $\zeta(s+i\varphi(k), F)$ galima norimu tikslumu tolygiai aproksimuoti nuliu nevirstančias analizines funkcijas;

3. Imant realias funkcijas $(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \in U_r(k_0)$, tenkinančias tam tikras augimo sąlygas bei tolygiai pasiskirsčiusias moduliu 1, ir diskrečius postūmius $\zeta(s + i\varphi_j(k), F_j)$, $j = 1, \dots, r$, galima norimu tikslumu tolygiai aproksimuoti aibę nuliu nevirstančių analizinių funkcijų $f_1(s), \dots, f_r(s)$. Parabolinės formos $F_1, \dots, F_r$ neprivalo būti skirtingos.

# 9 Aprobacija

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti šešiuose pranešimuose – 5 konferencijose bei Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto seminare:

1. A. Vaiginytė. Apie parabolinių formų dzeta funkcijų universalumą, VU MIF Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros seminaras, Vilnius, 2018-05-28.

2. A. Vaiginytė. On the extension of universality for zeta-function of certain cusp forms, The 23th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis (MMA2018), Sigulda, Latvija, 2018-05-31.

3. A. Vaiginytė. Viena sekų klasė parabolinių formų teorijoje, Lietuvos matematikų draugijos 59-oji konferencija, Kaunas, 2018-06-18.

4. A. Vaiginytė. On some properties of zeta-function of certain cusp forms, International conference on Number Theory dedicated to the 70th birthdays of professors Antanas Laurinčikas and Eugenijus Manstavičius, Palanga, 2018-09-13.

5. A. Vaiginytė. A short review on the universality for zeta-function of certain cusp forms, The Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, Kijevas, Ukraina, 2018-09-25.

6. A. Vaiginytė, A. Laurinčikas, D. Šiaučiūnas. On joint universality of zeta-functions of certain cusp forms, Value distribution of zeta and $L$-functions and related topics

(stendinis pranešimas), Tokijas, Japonija, 2019-03-21 – 2019-03-27.

# 10 Publikacijos

Disertacijos rezultatai yra pristatomi trijose pagrindinėse publikacijose:

1. A. Laurinčikas, D. Šiaučiūnas, A. Vaiginytė, Extension of the discrete universality theorem for zeta-functions of certain cusp forms, *Non-linear analysis: modelling and control*, 23(6), 2018, 961–973.

2. A. Vaiginytė, Extension of the Laurinčikas-Matsumoto theorem, *Chebyshevskii Sbornik*, 20(1), 2019, 82–93.

3. A. Laurinčikas, D. Šiaučiūnas, A. Vaiginytė, On joint approximation of analytic functions by non-linear shifts of zeta-functions of certain cusp forms, *Non-linear analysis: modelling and control*, 25(1), 2020, 108-125.

# 11 Summary

In 1975, S.M. Voronin proved a wondrous property of universality for the Riemann zeta function $\zeta(s)$, which is defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s},$$

and is analytically continued to the whole complex plane except for the simple pole at $s = 1$. He showed that any analytic function in the complex plane can be approximated with a given accuracy by shifts $\zeta(s + i\tau), \tau \in \mathbb{R}$. Voronin's discovery inspired further investigations in the field. It turned out that some other zeta and $L$-functions as well as certain classes of Dirichlet series, such as Dirichlet $L$-functions, Dedekind, Hurwitz, Lerch zeta-functions and others, are universal in the Voronin sense.

During several decades of research, other types of universality were introduced, such as continuous, discrete, weighted, joint and others, when the composition or different combinations of functions are taken for the approximation of analytic functions. In some cases, shifts can be taken from different types of sets, such as subsets of the real numbers, arithmetic progressions or non linear sequences. In each case, there are still numerous limitations that prevent from extension of the universality property for more general function classes.

In 2001, A. Laurinčikas and K. Matsumoto obtained the universality for zeta-functions $\zeta(s, F)$ attached to certain cusp forms $F(z)$. Let $F(z)$ be the Hecke-eigen cusp form, i.e., $F(z)$ is a holomorphic cusp form of weight $\kappa \in 2\mathbb{N}$ and it is a simultaneous Hecke-eigen form. Let $c(m), m \in \mathbb{N}$, be the Fourier series coefficients of $F(z)$. Then $\zeta(s, F)$ is defined by the series

$$\zeta(s, F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}, \quad \sigma > (\kappa + 1)/2,$$

and by analytic continuation elsewhere. With such conditions, the universality theorem for $\zeta(s, F)$ is stated as follows.

**Theorem A** (Laurinčikas-Matsumoto universality theorem). *Suppose that $K$ is a compact subset of a strip $\{s \in \mathbb{C} : \kappa/2 < \sigma < (\kappa + 1)/2\}$ with connected complement and $f(s)$ is a continuous non-vanishing function on $K$ which is analytic in its interior. Then, for every $\varepsilon > 0$, the following inequality holds*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s + i\tau, F) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

This thesis is devoted to the extension of Laurinčikas-Matsumoto theorem and different modifications of the universality theorems for approximation of analytic functions taking non-linear shifts $\zeta(s + i\varphi(\tau), F)$, where function $\varphi$ satisfies some natural growth conditions. In particular, continuous universality, discrete universality and joint discrete universality cases are considered.

# 12 Trumpos žinios apie disertantę

## Išsilavinimas

1998-2010 – Vilniaus šv. Kristoforo gimnazija
2010-2014 – Vilniaus universitetas, matematikos bakalauras (Matematika ir matematikos taikymai)
2014-2016 – Vilniaus universitetas, matematikos magistras (Matematika)

## Darbo patirtis

2014 – Lietuvos socialinių tyrimų centras (praktikantė)
2016 – Seimo rinkimų Rinkiminės komisijos narė
2018 – Vilniaus universitetas (tyrimų asistentė)
2016-dabar – Baltijos pažangių technologijų institutas (jaunesnioji mokslo darbuotoja, direktoriaus pavaduotoja, programos vadovė)

## Kita patirtis

2011-2019 – Vilniaus universiteto folkloro ansamblio *Ratilio* narė
2011-2015 – Vilniaus šv. Kryžiaus atradimo bažnyčios šv. Cecilijos ansamblio įkūrėja ir narė
2014-2017 – tradicinių giesmių (kantičkų) grupės vadovė
2015-dabar – sakralinės muzikos choro *Adoramus* narė

Užrašams

Vilniaus universiteto leidykla
Saulėtekio al. 9, III rūmai, LT-10222 Vilnius
El. p.: info@leidykla.vu.lt, www.leidykla.vu.lt
Tiražas 30 egz.