VILNIAUS UNIVERSITETAS

Gediminas
BAGDONAS

Dvimačių kopulų transformacijos

DAKTARO DISERTACIJOS SANTRAUKA

Gamtos mokslai,
Matematika (N 001)

VILNIUS 2021

Disertacija rengta 2016 – 2021 metais (Vilniaus Universitetas).
Mokslinius tyrimus rėmė Lietuvos mokslo taryba (projektų nr. S-MIP-20-16 ir S-MIP-17-72).

Mokslinis vadovas:
Doc. Dr. Martynas Manstavičius (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika - N 001)

Gynimo taryba:
Pirmininkas – **prof. habil. dr. Vydas Čekanavičius** (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika - N 001).
Nariai:
prof. habil. dr. Piotr Jaworski (Varšuvos universitetas (Lenkija), gamtos mokslai, matematika - N 001).
prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika - N 001).
prof. habil. dr. Mindaugas Bloznelis (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika - N 001).
prof. habil. dr. Gintautas Dzemyda (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika - N 001).

Disertacija ginama viešame Gynimo tarybos posėdyje 2021 m. lapkričio mėn. 16 d. 16.00 val. VU Matematikos ir informatikos fakulteto 102 auditorijoje.
Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225, Vilnius, Lietuva, tel. +370 5 219 3050; el. paštas mif@mif.vu.lt.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu:
https://www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

VILNIUS UNIVERSITY

Gediminas
BAGDONAS

A class of bivariate copula mappings

SUMMARY OF DOCTORAL DISSERTATION

Natural sciences,
Mathematics (N 001)

VILNIUS 2021

This dissertation was written between 2016 and 2021 (Vilnius University). The research was supported by Research Council of Lithuania (Projects No. S-MIP-20-16 and No. S-MIP-17-72).

Academic supervisor:
Assoc. Prof. Dr. Martynas Manstavičius (Vilnius University, Natural sciences, Mathematics - N 001)

This doctoral dissertation will be defended in a public meeting of the Dissertation Defence Panel:
Chairman – **Prof. Habil. Dr. Vydas Čekanavičius** (Vilnius University, Life sciences, Mathematics - N 001). Members:
Prof. Habil. Dr. Piotr Jaworski (University of Warsaw, Life sciences, Mathematics - N 001).
Prof. Habil. Dr. Kęstutis Kubilius (Vilnius University, Life sciences, Mathematics - N 001).
Prof. Habil. Dr. Mindaugas Bloznelis (Vilnius University, Life sciences, Mathematics - N 001).
Prof. Habil. Dr. Gintautas Dzemyda (Vilnius University, Life sciences, Mathematics - N 001).

The dissertation shall be defended at a public meeting of the Dissertation Defence Panel at 4:00 PM on the 16th of November, 2021 in Room 102 of the Faculty of Mathematics and Informatics, Vilnius University.
Address: Naugarduko st. 24, LT-03225, Vilnius, Lithuania. Tel. +370 5 219 3050; e-mail: mif@mif.vu.lt.

The text of this dissertation can be accessed at the Library of Vilnius University, as well as on the website of Vilnius University:
https://www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

Summary

In this thesis we analyze one particular mapping in the set of bivariate copulas, which allows flexible construction of copulas. In particular, in Chapter 3 of the thesis, we provide necessary and sufficient conditions on a function $f : [0,1] \to R^+$ so that

$$H_f(C)(u,v) = C(u,v)f(1-u-v+C(u,v)), \quad (u,v) \in [0,1]^2$$

is a copula for any bivariate copula C. Then we discuss several important bivariate copula properties preserved or not by the mapping $C \mapsto H_f(C)$. The considered bivariate copula construction unifies many examples found in the literature and opens a qualitatively new way of obtaining new copulas by simply using a function f which must satisfy a few easily verifiable properties.

In Chapter 4 of the thesis we focus our attention on conditionally eligible functions f, in particular, the case of independence copula Π, i.e. we try to characterize all functions f such that

$$C_f(u,v) = uvf((1-u)(1-v)), \quad (u,v) \in [0,1]^2$$

is a bivariate copula. We provide a complete characterization for the two cases: (i) when C_f is, in addition, totally positive of order 2 (TP_2) and (ii) when f is twice continuously differentiable. In general, the function f need only be twice differentiable Lebesgue almost everywhere, as shown by investigation of necessary conditions for C_f to be a copula. The Chapter 4 also contains numerous examples illustrating obtained results and connections to known facts from the literature. Moreover, several properties of such copulas are described.

Santrauka

1 Tyrimo objektas ir aktualumas

Pastaraisiais metais kopulos (ypač dvimatės kopulos, galbūt tikslinga jas vadinti *jungtimis*), susilaukia vis daugiau dėmesio tiek literatūroje, tiek praktikoje. Toks susidomėjimas gali būti paaiškintas plačiu jų taikymu. Kopulos naudojamos sprendžiant daugiamates statistines problemas, nes jos leidžia supaprastinti atsitiktinių vektorių modeliavimą, atskiriant marginaliuosius skirstinius ir kopulą. Tai leidžia padaryti turbūt viena svarbiausių kopulų teorijos teoremų – Sklaro teorema. Praktikoje kopulos dažnai taikomos finansų matematikoje bei draudime, modeliuojant finansinių aktyvų priklausomybinę struktūrą. Dėl šios priežasties, yra reikalinga turėti kuo daugiau ir kuo įvairesnių kopulų šeimų. Susidomėjimas kopulomis arba, bendriau kvazikopulomis, ir jų konstravimo metodais auga ir tarp mokslininkų, dirbančių su neryškių aibių teorija, modeliuojant pasirinkimus ir panašumus bei aprašant agregacijos procesus. Daugiau informacijos šiomis temomis galima rasti [10, 18, 17, 24, 1, 11], ir nuorodose šiuose šaltiniuose. Bėgant metams buvo pasiūlyta daug parametrinių kopulų šeimų, kurių parametras (ar keli) dažnai reguliuoja tarpusavio priklausomybės stiprumą, bei įvairių kopulų konstravimo būdų. Pavyzdžių galima rasti Nelsen [25], Joe [15], Durante ir Sempi [9] knygose. Kartais keli kopulų konstravimo metodai gali būti sujungti ir apibendrinti, taip gaunant bendresnius rezultatas. Šioje disertacijoje mes nagrinėjame vieną tokį atvejį t.y. gan bendrą kopulų transformaciją, kuri apibendrina keletą literatūroje jau nagrinėtų bei siūlytų nagrinėjimui transformacijų [7, 10, 6, 13] bei kopulų šeimų. Ši transformacija apima didelę dalį kopulų aibės ir dažnai supaprastina optimalios kopulos paiešką iki vienmatės funkcijos f, atitinkančios tam tikrus ir iš anksto nusakytus reikalavimus, pasirinkimo. Šis atvaizdis taip pat leidžia, pasirenkant tam tikras vienmačių funkcijų šeimas, bet kuriai norimai kopulai papildomai įvesti vieną ar daugiau parametrų.

Pažymėkime $\mathcal{C}$ visų dvimačių kopulų klasę ir $\mathcal{G}$ visų tolydžių funkcijų $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ aibę. Imkime poaibius $\emptyset \neq \mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ ir $\emptyset \neq \mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$. Disertacijoje nagrinėjamas atvaizdis

$$H_f(C)(u, v) := C(u, v) f(\overline{C}(u, v)).$$

Čia $\overline{C}$ žymi išgyvenamumo funkciją atitinkančią kopulą C, t.y.

$$\overline{C}(u, v) := 1 - u - v + C(u, v).$$

Mus domina sąlygos, su kuriomis $H_f(C) \in \mathcal{C}$. Šiuo tikslu funkcijos f yra suskirstomos į *tinkamas*, *sąlygiškai tinkamas* ir *netinkamas* funkcijas.

Apibrėžimas 1. Sakome, kad funkcija $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ yra

- **tinkama**, jei $H_f(C) \in \mathcal{C}$ bet kuriai $C \in \mathcal{C}$; tinkamų funkcijų aibę žymėsime $\mathcal{G}_0$;

- **sąlygiškai tinkama**, jei egzistuoja $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tokios, kad $H_f(C_1) \in \mathcal{C}$, bet $H_f(C_2) \notin \mathcal{C}$;

- **netinkama**, jei $H_f(C) \notin \mathcal{C}$ bet kuriai $C \in \mathcal{C}$.

2 Tikslai ir uždaviniai

Disertacijoje sprendžiami uždaviniai susiję su minėtu atvaizdžiu $C \mapsto H_f(C)$. Pirmoje dalyje randamos būtinos ir pakankamos sąlygos tinkamai funkcijai f bei nagrinėjamos atvaizdžio savybės. Toliau 2 teoremoje parodoma, kad minėta transformacija išlaiko konkordacinės tvarkos sąryšį, kas leidžia nesunkiai rasti Kendall τ, Spearman ρ, ir Gini γ (apibrėžimus galima rasti [25] 5.1 skyrelyje) priklausomybės matų rėžius. Taip pat randamos uodegų priklausomybės koeficientų išraiškos (su sąlyga, kad jie egzistuoja pasirinktai kopulai $C \in \mathcal{C}$). Taip pat parodome, kad atvaizdis neišlaiko kai kurių kopulos savybių, pvz. TP_2 savybės, ir atvaizdžio rezultatas bendru atveju nebėra Archimedo kopula (žr. 1 teiginį). Pirmojoje dalyje taip pat parodoma, kad iteruojant atvaizdį $C \mapsto H_f(C)$, bet kuria kopulai $C \in \mathcal{C}$, jis konverguoja, supremumo normos prasme, į vienintelį fiksuotą tašką – kontramonotoniškumo kopulą

$$W(u,v) := \max(u+v-1, 0)$$

(žr. 4 teoremą).

Kaip galima pastebėti pirmoje dalyje, apribojimai tinkamai funkcijai f gali būti gan griežti. Kita vertus, fiksavus konkrečią kopulą C, apribojimai funkcijai f gali būti gerokai atlaisvinti. Pavyzdžiui, Durante ir bendraautoriai [7, 10] šį uždavinį išsprendė komonotoniškumo kopulai

$$M(u,v) := \min(u,v).$$

Motyvuoti šio rezultato, antrojoje dalyje, nagrinėjame sąlyginį tinkamumą kitai svarbiai kopulai, nepriklausomumo kopulai $\Pi(u,v) = uv$. Taip pat, pasirinkus atitinkamą funkciją f, galima gauti kelias gerai žinomas kopulų šeimas (žr. 8, 9 ir 10 pavyzdžius).

3 Naujumas

Visi disertacijoje skelbiami rezultatai, jeigu nenurodyta kitaip, yra nauji. Atskiri apibendrinančių teoremų atvejai buvo nagrinėti [7, 10, 6, 13].

4 Disertacijos gautų rezultatų apžvalga

Disertacijos rezultatai gali būti suskirstyti į dvi dalis. Pirmoje dalyje randame būtinas ir pakankamas sąlygas tinkamoms funkcijoms bei nagrinėjame atvaizdžio $C \mapsto H_f(C)$ savybes. Antrojoje dalyje nagrinėjame sąlyginio tinkamumo uždavinį kopulai $\Pi(u, v)$.

Sąlygos tinkamoms funkcijoms

Šiame skyrelyje pristatomos sąlygos tinkamai funkcijai, t.y. nusakome funkcijas f, su kuriomis

$$H_f(C)(u,v) := C(u,v)f(\overline{C}(u,v)), \quad (u,v) \in [0,1]^2$$

yra dvimatė kopula bet kuriai $C \in \mathcal{C}$. Taip pat, pateikiami tiek žinomi pavyzdžiai, kuriuos galime gauti pasinaudoti nagrinėjamu atvaizdžiu, tiek naujų kopulų šeimų pavyzdžiai. Toliau nagrinėjamos atvaizdžio savybės, aptariama daugiamačio atvejo problematika bei literatūroje kitų autorių pasiūlyti atvaizdžio apibendrinimai.

Toliau pateikiame pagrindinę disertacijos 3 skyriaus teoremą, kuri nusako būtinas ir pakankamas sąlygas funkcijos f tinkamumui.

Teorema 1. *Funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ yra tinkama tada ir tik tada, kai* *(i)* f *yra nedidėjanti,*

(ii) $f(0) = 1$*,*

(iii) $f(x) \geq 1 - x$ *visiems* $x \in [0, 1]$*, ir*

(iv) f *yra iškila žemyn.*

Žemiau pateiksime kelis funkcijos f pavyzdžius. Pradėsime nuo pavyzdžio 1 teoremos (iv) sąlygos būtinumui.

Pavyzdys 1. Tarkime, $f(t) = \sin(\pi(1 - t)/2)$ (žr. [7, 5 pavyzdį]). Buvo parodyta, kad $H_f(M)$ yra kopula. Tačiau f yra iškila aukštyn ir todėl netenkina 1 teoremos (iv) sąlygos ir bendru atveju nėra tinkama. Iš tiesų, imkime $x_0 = 1/4$, $y_0 = 3/4$, $n_0 = 3$, $v_1 = 3/16$, $v_2 = 7/16$, $\alpha = 2/3$, $\beta = 14/9$, ir

$$\delta(t) = \begin{cases} 2t/3, & \text{jei } 0 \leq t \leq 3/16; \\ 1/8, & \text{jei } 3/16 < t \leq 7/16; \\ 1 + 14(t - 1)/9, & \text{jei } 7/16 < t \leq 1. \end{cases}$$

Imdami $\square = [3/16, 3/16] \times [7/16, 7/16]$ ir

$$C_\delta(u, v) = \min\left\{u, v, \frac{\delta(u) + \delta(v)}{2}\right\},$$

gauname, kad

$$V_{H_f(C_\delta)}(\square) = \frac{1}{16}\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} - 2\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}\right) \approx -0.01346$$

ir todėl $H_f(C_\delta)$ nėra kopula.

Kelios gerai žinomos kopulų šeimos gali būti gaunamos pasinaudojant mūsų nagrinėjamu atvaizdžiu. Toliau pateikiame kelis pavyzdžius.

Pavyzdys 2. Tarkime, $f_{\theta,\phi}(t) = 1 + \theta t + \frac{1}{2}\theta\phi t^2$, $\theta, \phi \in [-1, 0]$. Tada $H_{f_{\theta,\phi}}(\Pi)$ yra žinoma kaip Lin iteruotos FGM kopulų šeimos dalis

$$
\begin{aligned}
&H_{f_{\theta,\phi}}(\Pi)(u,v) \\
&= uv\left[1 + \theta(1-u)(1-v)\left\{1 + \frac{\phi}{2}(1-u)(1-v)\right\}\right].
\end{aligned}
$$

Daugiau apie Lin iteruotas FGM kopulas galima rasti [21].

Tarkime, $f_\alpha(t) = \exp\{((1-t)^\alpha - 1)/\alpha\}$ su $\alpha > 0$ (žr. [7, 4 pavyzdį]). Kaip jau minėjome, galima parodyti, kad $H_{f_\alpha}(M)$ yra kopula, tačiau f_α tenkina 1 teoremos savybes tada ir tik tada, kai $\alpha \geq 1$. Kai $\alpha \in (0, 1)$, funkcija f_α yra sąlygiškai tinkama.

Toliau pateiksime kelis naujų kopulų šeimų pavyzdžius.

Pavyzdys 3. Tarkime, $(a, b) \in \{(s,t) \in [0,1]^2 : t \geq 1 - s\}$ ir

$$
f_{(a,b)}(x) := b \vee \left(1 - \frac{1-b}{a}x\right),
$$

čia $x \vee y := \max(x, y)$. Pažymėkime $C_{a,b} := H_{f_{(a,b)}}(\Pi)$. Tada

$$
\begin{aligned}
C_{a,b}(u,v) &= uv\left[b \vee \left(1 - \frac{1-b}{a}(1-u)(1-v)\right)\right] \\
&= \begin{cases} uv\left(1 - \frac{1-b}{a}(1-u)(1-v)\right), & 0 \leq (1-u)(1-v) \leq a; \\ buv, & a < (1-u)(1-v) \leq 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Pastebėkime, kad parinkus $a = 1$, galime gauti dalį FGM kopulų šeimos su parametru $\theta = 1 - b \geq 0$.

Dabar pastebėkime, kad $H_f(\Pi)$ yra

$$
\Pi(u,v) = uv \quad \text{ir} \quad \overline{\Pi}(u,v) = (1-u)(1-v)
$$

funkcija. Todėl galime gauti naujas kopulų šeimas, naudodami kopulą Π bei atvaizdžių H_f ir H_g kompoziciją skirtingoms $f, g \in \mathcal{G}_0$:

Pavyzdys 4. Tarkime, $f_{\alpha_i}(t) = 1 - \alpha_i t$, $i = 1, 2$ ir $\alpha_i \in [0, 1]$. Tada

$$
\begin{aligned}
C_{\alpha_1,\alpha_2}(u,v) &:= \left(H_{f_{\alpha_1}} \circ H_{f_{\alpha_2}}\right)(\Pi)(u,v) \\
&= [H_{f_{\alpha_2}}(\Pi)(1 - \alpha_1 \overline{H_{f_{\alpha_2}}(\Pi)})](u,v) \\
&= uv(1 - \alpha_2(1-u)(1-v)) \\
&\quad \times [1 - \alpha_1(1-u)(1-v)(1-\alpha_2 uv)] \,.
\end{aligned}
$$

Gauname iteruotos FGM kopulos formą, kuri skiriasi nuo (a) Kotz ir Johnson [20] ir (b) Lin [21] pasiūlytų:

(a) $C_{\theta,\phi}(u,v) = uv\,\{1 + \theta(1-u)(1-v)[1 + \phi uv]\}$;

(b) $C_{\theta,\phi}(u,v) = uv\,\{1 + \theta(1-u)(1-v)[1 + \phi(1-u)(1-v)]\}$;

čia $\theta, \phi \in [-1, 1]$.

Tarkime,

$$f_\alpha(x) = 1 - \alpha x$$

ir

$$g_\lambda(x) = (1 + \lambda x)^{-1},$$

kai $\alpha, \lambda \in [0, 1]$, kurias nagrinėjo Dolati ir Úbeda-Flores [6]. Naudodami skirtingo eiliškumo šių funkcijų kompoziciją galime gauti:

$$
\begin{aligned}
C_{\lambda,\alpha}(u,v) &:= (H_{g_\lambda} \circ H_{f_\alpha})(\Pi)(u,v) = \frac{H_{f_\alpha}(\Pi)}{(1 + \lambda \overline{H_{f_\alpha}(\Pi)})}(u,v) \\
&= \frac{uv(1 - \alpha(1-u)(1-v))}{1 + \lambda(1-u)(1-v)[1 - \alpha uv]}
\end{aligned}
$$

ir

$$
\begin{aligned}
C_{\alpha,\lambda}(u,v) &:= \left(H_{f_\alpha} \circ H_{g_\lambda}\right)(\Pi)(u,v) \\
&= [H_{g_\lambda}(\Pi)(1-\alpha\overline{H_{g_\lambda}(\Pi)})](u,v) \\
&= \frac{uv}{(1+\lambda(1-u)(1-v))}\left[1-\frac{\alpha(1-u)(1-v)[1+\lambda(1-u-v)]}{1+\lambda(1-u)(1-v)}\right] \\
&= \frac{uv\,[1+(1-u)(1-v)[\lambda-\alpha-\lambda\alpha(1-u-v)]}{(1+\lambda(1-u)(1-v))^2}.
\end{aligned}
$$

Taip pat atkreipkime dėmesį, kad naudodami $f_\alpha(x)$ galime gauti

$$
\begin{aligned}
H_{f_\alpha}(C)(u,v) = -\alpha C^2(u,v) + \alpha u C(u,v) + \alpha v C(u,v) \\
+ (1-\alpha)C(u,v),
\end{aligned}
$$

kuri dalinai atkartoja rezultatą, gautą [19] (su parametru $d = 0$ jų uždavinio formoje).

Jei $f_{\lambda_i}(x) = (1+\lambda_i x)^{-1}, \lambda \in [0,1]$ ir $i = 1,2$, tada

$$
\begin{aligned}
C_{\lambda_1,\lambda_2}(u,v) &:= \left(H_{g_{\lambda_1}} \circ H_{g_{\lambda_2}}\right)(\Pi)(u,v) \\
&= \frac{uv}{(1+\lambda_1(1-u-v))(1+\lambda_2(1-u)(1-v)) + \lambda_1 uv}.
\end{aligned}
$$

Atkreipkime dėmesį, kad šiuose pavyzdžiuose visos dviejų parametrų kopulos yra polinominės arba racionalios Π ir $\overline{\Pi}$ funkcijos, kadangi

$$
1 - u - v = \overline{\Pi}(u,v) - \Pi(u,v).
$$

Nagrinėjamas atvaizdis $H_f(C)$ pasižymi keliomis naudingomis savybėmis. Toliau pateikiame keletą iš jų.

Teorema 2. *Bet kuriai $f \in \mathcal{G}_0$ ir bet kurioms $C, C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, atvaizdis $C \mapsto H_f(C)$*

(i) *turi vienintelį nejudamą tašką,* W*, kai* $f \not\equiv 1$*, t.y.* $H_f(C) = C$ *tada ir tik tada, kai* $C = W$*;*

(ii) *yra injekcija, t.y.* $H_f(C_1) = H_f(C_2)$ *tada ir tik tada, kai* $C_1 = C_2$*;*

(iii) *išlaiko konkordacinės tvarkos sąryšį, t.y., jei visiems* $(u, v) \in [0, 1]^2$, $C_1(u, v) < C_2(u, v)$*, tai ir*

$$H_f(C_1)(u, v) < H_f(C_2)(u, v);$$

(iv) *sumažina kairės ir dešinės uodegos priklausomumo indeksus (žr. [25, 5.4.1. apibrėžimą]), kai jie egzistuoja, t.y., jei kopula* C *turi kairės ir dešinės uodegos priklausomumo indeksus,* $\lambda_U = \lambda_U(C)$ *ir* $\lambda_L = \lambda_L(C)$*, tai*

$$\lambda_U(H_f(C)) = (1 + f'(0+))\lambda_U(C) \quad \textit{ir}$$
$$\lambda_L(H_f(C)) = f(1)\lambda_L(C);$$

(v) *jei* $C \in \mathcal{C}$ *yra simetrinė (t.y.,* $C(u, v) = C(v, u)$ *bet kuriam* $(u, v) \in [0, 1]^2$*), tai* $H_f(C)$ *yra taip pat simetrinė;*

(vi) *jei* C *yra radialiai simetrinė (t.y.,* $C = \widehat{C}$*) ir* $C > 0$*, kai* $(u, v) \in (0, 1]^2$*, tai* $H_f(C) = \widehat{H_f(C)}$ *tada ir tik tada, kai* $f(t) = 1 - \alpha t$, $\alpha \in [0, 1]$*.*

Išvada 3. *Bet kuriai* $f \in \mathcal{G}_0$, $C \in \mathcal{C}$*, ir bet kuriems atsitiktiniam dydžiam* X *ir* Y*, susietiems kopulos* $H_f(C)$*, galioja nelygybės:*

$$\begin{aligned}
-1 \leq &\tau_{X,Y}(H_f(C)) \leq 4\int_0^1 (1-x)f^2(x)dx - 1, \\
-1 \leq &\rho_{X,Y}(H_f(C)) \leq 12\int_0^1 (1-x)^2 f(x)dx - 3, \\
-1 \leq &\gamma_{X,Y}(H_f(C)) \leq 4\int_0^{1/2} \left(x(f(x) + f(1-x)) + f(x)\right) dx - 2.
\end{aligned}$$

Čia $\tau_{X,Y}$*,* $\rho_{X,Y}$*,* $\gamma_{X,Y}$ *atitinkamai žymi Kendall* τ*, Spearman* ρ*, ir Gini* γ *priklausomybės koeficientus (apibrėžimus galima rasti pvz. [25] 5.1 skyrelyje).*

Toliau pateikiame savybes, kurių, bendruoju atveju, atvaizdis H_f, neišlaiko.

Teiginys 1. *Atvaizdžiui* H_f *galioja:*

(a) *Imkime* $f \in \mathcal{G}_0$*. Atvaizdis* $H_f : \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}$ *nebūtinai yra siurjekcija.*

(b) *Imkime* $f \in \mathcal{G}_0$ *ir kopulą* $C \in \mathcal{C}$ *pasižyminčią* TP_2 *savybę, t.y. visiems* $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1,\ 0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$,

$$C(u_1, v_1)C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2)C(u_2, v_1) \geq 0.$$

Tada $H_f(C)$ *nebūtinai išlaiko šią savybę.*

(c) *Imkime* $f \in \mathcal{G}_0$ *ir Archimedo kopulą* $C \in \mathcal{C}$*. Tada* $H_f(C)$ *nebūtinai bus Archimedo kopula.*

Pažymėkime

$$H_f^0 := id \text{ (tapatus atvaizdis aibėje } \mathcal{C}), \quad H_f^k := H_f \circ H_f^{k-1},\ k \geq 1.$$

Išmetant trivialų atvejį $f \equiv 1$, kuriuo $H_f^k = id$ su visais $k \geq 0$, galime suformuluoti šią teoremą.

Teorema 4. *Jei* f *yra tinkama ir* $f \not\equiv 1$*, tada kiekvienai kopulai* $C \in \mathcal{C}$*,*

$$\lim_{k \to \infty} \left\| H_f^k(C) - W \right\|_\infty = 0.$$

Paskutinė savybė, kurią norime paminėti ir kuri dažnai reikalinga praktiniuose taikymuose, yra kopulos tankio egzistavimas. Tankis naudojamas pritaikant kopulą duomenims, naudojant didžiausio tikėtinumo ar Bajeso metodus. Dėl šios priežasties iškyla klausimas, kaip keičiasi tankio funkcija pritaikius atvaizdį $C \mapsto H_f(C)$ absoliučiai tolydžioms kopuloms. Toliau naudosime žymėjimus $\partial_u = \frac{\partial}{\partial u}$, $\partial_v = \frac{\partial}{\partial v}$ ir $\partial^2_{uv} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}$.

Teiginys 2. *Jei f yra tinkama ir tokia, kad f'' egzistuoja intervale $(0,1)$ bei C yra absoliučiai tolydi dvimatė kopula, tada $H_f(C)$ tankis yra*

$$\begin{aligned}\partial^2_{uv} H_f(C) = f'(\overline{C}) \cdot [\partial_u C \cdot (\partial_v C - 1) + \partial_v C \cdot (\partial_u C - 1)]\\ + C \cdot f''(\overline{C}) \cdot (\partial_u C - 1) \cdot (\partial_v C - 1)\\ + \partial^2_{uv} C \cdot \left[f(\overline{C}) + C \cdot f'(\overline{C}) \right].\end{aligned}$$

Dirbant su dvimatėmis kopulomis, visada kyla noras gautus rezultatus apibendrinti ir aukštesnio matavimo kopuloms. Šiuo atveju, deja, tai nėra lengvas uždavinys. Sekant galimą FGM kopulos apibendrinimą aukštesniems matavimams (žr. [9, 6.3. skyrių], [16]), t.y.

$$C_\theta(u_1, \ldots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i \left(1 + \theta \prod_{i=1}^n (1 - u_i) \right),$$

apibrėžkime

$$H^n_f(C)(u_1, \ldots, u_n) := C(u_1, ..., u_n) f(\overline{C}(u_1, ..., u_n)). \qquad (1)$$

Čia $\overline{C}$ yra n-matė išgyvenamumo funkcija, kuri apibrėžiama taip. Tarkime, $(X_1, \ldots, X_n)$ yra atsitiktinis vektorius kurio koordinatės susietos kopula C ir kurio marginaliosios pasiskirstymo funkcijos yra $\{F_i : i = 1, \ldots, n\}$, tada

$$\overline{C}(u_1, \ldots, u_n) = \mathbb{P}(X_1 > F_1^{(-1)}(x_1), \ldots, X_n > F_n^{(-1)}(x_n)).$$

Nesunku parodyti, kad $H^n_f(M)$ bus kopula tik trivialiu atveju, t.y. tada ir tik tada, kai $f(x) = 1$, $x \in [0,1]$. Kitaip tariant, tinkamų netrivialių funkcijų aibė yra tuščia. Kita vertus, sąlyginis tinkamumas (pvz., imant nepriklausomumo kopulą Π) išlieka atvira problema. Taip pat, be abejo, galimi ir kitokie atvaizdžio apibendrinimai n-matėms kopuloms.

Pagrindinį disertacijos 3 skyriaus rezultatą bandė apibendrinti S. Saminger-Platz, A. Kolesárová, R. Mesiar ir E. P. Klement [26]. Jie pasiūlė imti funkciją $g : [0,1] \to [0,1]$, dvimatę kopulą $D \in \mathcal{C}$ ir atvaizdį $D(C, g(C^*)) : [0,1]^2 \to [0,1]$ apibrėžtą lygybe

$$D(C, g(C^*))(u,v) = D(C(u,v), g(C^*(u,v))).$$

Akivaizdu, kad ši konstrukcija apibendrina mūsų nagrinėtą atvejį, nes, imdami $D = \Pi$ ir $g(t) = f(1-t)$, gauname atvaizdį $H_f(C)$. Nurodytame šaltinyje [26] yra suformuotos pakankamos sąlygos "išorinei" kopulai D (ultramoduliarumas ir Schur iškilumas aukštyn) ir funkcijai f, kad kiekvienai kopulai $C \in \mathcal{C}$, $D(C, f(C^*))$ taip pat būtų kopula. Deja, šios sąlygos nėra būtinos (skirtingai nei mūsų rezultatai 1 teoremoje).

Sąlyginis tinkamumas

Šiame skyrelyje nagrinėjame sąlyginį tinkamumą, vienai svarbiai kopulai, t.y. nepriklausomumo kopulai $\Pi(u,v)$. Ieškosime funkcijų f, kurioms

$$C_f(u,v) = uvf((1-u)(1-v)), \quad u,v \in [0,1], \tag{2}$$

yra dvimatė kopula. Tokia konstrukcija padengia nemažai svarbių kopulų šeimų, pavyzdžiui, FGM, AMH ir Çelebioğlu–Cuadras.

Pradėsime nuo būtinųjų sąlygų funkcijai f. Toliau, $\partial_u, \partial_v, \ldots$

žymėsime dalines išvestines, atitinkamai pagal $u, v, \ldots$.

Teiginys 3. *Tarkime, C_f apibrėžta* (2) *yra dvimatė kopula. Tada*

(i) *f yra neneigiama, tolydi intervale $[0, 1)$ ir $f(0) = 1$;*

(ii) *$f'(t)$ ir $f''(t)$ egzistuoja beveik visur (Lebego prasme), kai $t \in (0, 1)$;*

(iii) *Funkcija $t \mapsto (1-t)f(t)$ yra nedidėjanti intervale $[0, 1)$. Be to, f turi tenkinti šias nelygybes:*

$$\frac{\max\{1 - 2\sqrt{t}, 0\}}{(1 - \sqrt{t})^2} \leq f(t) \leq \frac{1}{1 - t}, \quad t \in [0, 1).$$

Viršutinis rėžis yra pasiekiamas.

(iv) *Galioja tokia riba:*

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - (1 + t)f(t)}{\sqrt{t}} = 0; \tag{3}$$

(v) *Bet kuriam $t \in [0, 1)$, pažymėkime C_f diagonalę δ, t.y. $\delta(t) = C_f(t, t)$. Tada*

$$f(t^2) = \frac{\delta(1 - t)}{(1 - t)^2} = \frac{\partial_v C_f(1 - t^2, v)\big|_{v=0}}{1 - t^2}; \tag{4}$$

(vi) *Bet kuriam $t \in [0, 1/4]$,*

$$tf(t) = C_f\Big(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - t}, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - t}\Big).$$

Pastaba 1. Iš (4) antros lygybės, imdami $1 - t^2 = s$, gauname

$$sf(1 - s) = \partial_v C_f(s, v)\big|_{v=0},$$

t.y., (ii) apriboja dalinę C_f išvestinę tik ant vienetinio kvadrato krašto. Kadangi kopulos dalinės išvestinės (arba bendriau Dini išvestinės; žr. [8, 2.3 teoremą]) turi būti nedidėjančios ir kitiems v, ne tik $v = 0$, tai parodo, kad 3 teiginio sąlyga (ii) negali būti pakankama, kad C_f būtų kopula.

Nors atrodo, kad (4) yra gan ribojanti sąlyga funkcijai f, ji nėra pakankama, kad C_f būtų kopula. Šį faktą iliustruosime pora pavyzdžių.

Pavyzdys 5. Tarkime, kad $f \not\equiv 1$ ir $\delta(t) = t^\beta$, kai $\beta \in [1, 2)$. Tada egzistuoja Archimedo kopula su tokia diagonale, būtent kopula iš Gumbel–Hougaard šeimos (žr. [25, (4.2.4) šeimą]) su generatoriumi $\phi(s) = (-\ln s)^\theta$, čia $s \in [0, 1]$ ir $\theta = \ln 2/\ln\beta$:

$$C(u, v) = \exp\Big\{ - ((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta)^{1/\theta}\Big\}.$$

Visgi, tokiai diagonalei funkcija f, apibrėžta (4), nėra sąlygiškai tinkama, t.y. funkcija

$$C_f(u, v) = xy\big(1 - \sqrt{(1-u)(1-v)}\big)^{\beta-2}$$

nėra kopula, nes $\frac{\partial^2 C_f(u,v)}{\partial u \partial v} < 0$, kai (u, v) šalia $(1, 0)$ arba $(0, 1)$. Iš tikrųjų, imkime $0 < \varepsilon < 1$ ir $u = \varepsilon$, $v = 1 - \varepsilon$. Tada

$$\frac{\partial^2 C_f}{\partial u \partial v}(\varepsilon, 1-\varepsilon) = \frac{(1-z)^{\beta-4}}{4z}\Big[\beta^2 z^3 + (2-5\beta)z^2 + (8-2\beta)z + (2\beta-4)\Big],$$

čia $z = \sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}$. Reiškinys akivaizdžiai įgyja neigiamas reikšmes, kai $z \downarrow 0$, o $\beta < 2$.

Pavyzdys 6. Nagrinėkime $f(t) = 1 + \mu t^2$. Žinoma, kad (žr. [2]; arba 14 pavyzdį žemiau)

$$C_f(u, v) = uv(1 + \mu(1-u)^2(1-v)^2), \quad u, v \in [0, 1],$$

yra dvimatė kopula bet kuriai $\mu \in [-1, 3]$. Čia nagrinėsime tik $\mu \in (0, 3]$. Tada diagonalė $\delta_\mu(t) = C_f(t,t) = t^2(1 + \mu(1-t)^4)$ tenkina [11, 5 išvados] (3.4) sąlygą, t.y.

$$\delta(t) \le t\delta'(t) \le 2\delta(t),$$

ir todėl funkcija

$$\begin{aligned} S_{\delta_\mu}(u,v) &= \min\{u,v\} \max\left\{\frac{\delta_\mu(u)}{u}, \frac{\delta_\mu(v)}{v}\right\} \\ &= uv\Big(1 + \mu(1 - \max(u,v))^4\Big) \end{aligned}$$

taip pat yra kopula, kitokia nei C_f, kuri tenkina (4). Šis pavyzdys parodo, kad net, jei (4) tenkinama, kopula neturi būti (2) formos.

Toliau pereisime prie pakankamų sąlygų – pagrindinių šio skyrelio rezultatų.

Teorema 5. *Tarkime, $f : [0,1] \to [1, +\infty]$ yra tolydi intervale $[0,1)$ ir $f(0) = 1$. Taip pat pažymėkime*

$$C_f(u,v) := uvf((1-u)(1-v)), \quad u, v \in [0,1].$$

Tada šie teiginiai yra ekvivalentūs:

(a) Funkcija C_f yra dvimatė kopula pasižyminti TP_2 savybe, t.y.

$$C_f(x_1,y_1)C_f(x_2,y_2) - C_f(x_1,y_2)C_f(x_2,y_1) \ge 0$$

visiems $0 \le x_1 \le x_2 \le 1,\ 0 \le y_1 \le y_2 \le 1$.

(b) Funkcija f turi šias dvi savybes:

(i) $t \mapsto tf(1-t)$ yra nedidėjanti intervale $(0,1)$,

(ii) f *yra geometriškai Jensen prasme iškila žemyn intervale* $[0,1)$, *t.y.*

$$f(\sqrt{xy}) \le \sqrt{f(x)f(y)}, \quad x, y \in [0,1).$$

Pasinaudodami [12, 3.5 išvada], galime gauti tokią išvadą.

Išvada 6. *Tarkime,* $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ *yra tolydi, geometriškai Jensen prasme iškila žemyn funkcija ir tokia, kad* $f(0) = 1$*. Tarkime,* $\gamma > 0$ *yra tokia, kad* $t \mapsto t^{1/\gamma} f(1-t)$ *yra nemažėjanti intervale* $(0,1]$*. Tada bet kuriam* $\alpha > 0$ *funkcija*

$$C_{\alpha,\gamma}(u,v) = uv\Big(f\big((1-u^{1/\alpha})(1-v^{1/\alpha})\big)\Big)^{\gamma\alpha}, \quad u, v \in [0,1], \tag{5}$$

yra dvimatė kopula pasižyminti TP_2 *savybe.*

Žinoma, kad dviejų kopulų C_1 ir C_2 pataškinis maksimumas $C_3(u,v) := \max\{C_1(u,v), C_2(u,v)\}$, bendruoju atveju, neprivalo būti kopula (bendruoju atveju jis yra tik kvazikopula; žr. [25, 6.3 pavyzdį ir 6.2.5 teoremą]), bet, jei C_1 ir C_2 yra (2) lygtimi nusakytos formos ir turi TP_2 savybę, tada C_3 visada bus kopula su TP_2 savybe. Tai nusako sekanti išvada.

Išvada 7. *Tarkime,* $\mathcal{C} = \{C_f, f \in \mathcal{F}\}$ *yra dvimačių kopulų šeima kaip 5 teoremoje. Tada*

$$C_{\sup}(u,v) = \sup_{C \in \mathcal{C}} C(u,v) = uv \sup_{f \in \mathcal{F}} f((1-u)(1-v))$$

taip pat yra kopula su TP_2 *savybe.*

Pavyzdys 7. 7 išvados iliustracijai, nagrinėkime

$$\begin{aligned} C_{\alpha,\beta}(u,v) &:= \max\{\mathrm{AMH}(\beta)(u,v), \mathrm{FGM}(\alpha)(u,v)\} \\ &= uv f_{\alpha,\beta}((1-u)(1-v)), \end{aligned}$$

čia

$$f_{\alpha,\beta}(t) := \max\{(1-\beta t)^{-1}, 1+\alpha t\}, \quad \beta \in [0,1),\ \alpha \in (\beta, \beta/(1-\beta)).$$

Tokia α parinkta, kad abi funkcijos, kurių maksimumą nagrinėjame, kirstųsi vienetiniame intervale. Tada $C_{\alpha,\beta}$ yra kopulų šeima pasižyminti TP_2 savybe.

Norėdami pristatyti antrą pagrindinį disertacijos 4 skyriaus rezultatą, bet kuriai dukart diferencijuojamai funkcijai $g : [0,1) \to \mathbb{R}_+$, apibrėžkime

$$\begin{aligned}
A_1(g) &:= \{t \in (0,1) :\ (tg(t))'' \geq 0,\ g(t) + (t-1)g'(t) \geq 0\},\\
A_2(g) &:= \{t \in (0,1) :\ (tg(t))'' < 0,\\
&\qquad g(t) + (1-\sqrt{t})\big((1-3\sqrt{t})g'(t) + t(1-\sqrt{t})g''(t)\big) \geq 0\}.
\end{aligned}$$

Atkreipkime dėmesį, kad $A_1(g) \cap A_2(g) = \emptyset$.

Tada kita teorema nusako sąlygas du kartus diferencijuojamai funkcijai f, kad C_f būtų kopula.

Teorema 8. *Tarkime, $f : [0,1] \to [0,+\infty]$ yra du kartus diferencijuojama funkcija, su absoliučiai tolydžia f' intervale $(0,1)$ ir tokia, kad*

$$f(0) = 1, \quad \lim_{t\downarrow 0} tf'(t) = 0, \quad \text{ir} \quad (1-t)f(t) \leq 1 \text{ visiems } t \in [0,1). \tag{6}$$

Tada $C_f(u,v) = uvf((1-u)(1-v))$, apibrėžta visiems $u,v \in [0,1]$, yra dvimatė absoliučiai tolydi kopula, jei $A_1(f) \cup A_2(f) = (0,1)$. Jeigu, be to, laikysime, kad f'' yra absoliučiai tolydi, tada aukščiau įvardintos sąlygos yra būtinos.

Teiginys 4. *Tarkime, $f : [0,1] \to [0,+\infty]$ yra du kartus* *diferencijuojama intervale* $(0,1)$ *tokia, kad*

$$f(0) = 1 \quad ir \quad \lim_{t\downarrow 0} tf'(t) = 0. \tag{7}$$

Tada

(i) jei $A_1(f) = (0,1)$, *tai funkcija* f *yra nemažėjanti;*

(ii) jei $A_2(f) = (0,1)$, *tai funkcija* f *yra mažėjanti.*

Atkreipkime dėmesį, kad f neprivalo būti iškila žemyn arba tenkinti apatinį rėžį $f(t) \geq 1 - t$, ko reikalauja 1 teorema (žr. 14 ir 15 pavyzdžius).

Pavyzdys 8. Tarkime, $f_\delta(t) = e^{\delta t}$ ir $\delta > 0$. Tada nesunku parodyti, kad f_δ yra geometriškai Jensen prasme iškila žemyn ir, kadangi ji taip pat yra tolydi, geometriškai iškila žemyn. Vadinasi, 5 teoremos (b) dalies (i) sąlyga yra tenkinama, kai $0 < \delta \leq 1$. Taigi, gavome gerai žinomą faktą, kad

$$C_{f_\delta}(u,v) = uve^{\delta(1-u)(1-v)}, \quad u,v \in [0,1]$$

yra dvimatė kopula. Ji taip pat žinoma kaip Çelebioğlu–Cuadras kopula [4, 5]. Taip pat parodėme, kad ši kopula turi TP_2 savybę.

Pavyzdys 9. Tarkime, kad $f_\alpha(t) = 1 + \alpha t$, kai $\alpha \in [0,1]$. Tada nesunkiai galima parodyti, kad f_α geometriškai iškila žemyn. Vėlgi 5 teoremos (b) dalies (i) sąlyga yra tenkinama bet kuriai $\alpha \in (0,1]$. Taigi, pasinaudojant 5 teorema,

$$C_{f_\alpha}(u,v) = xy(1 + \alpha(1-u)(1-v))$$

yra dvimatė kopula, žinoma kaip Farlie–Gumbel–Morgenstern $\mathrm{FGM}(\alpha)$ kopula, pasižyminti TP_2 savybe.

Jei $\gamma \in (0, 1/\alpha]$, tai $t^{1/\gamma}(1+\alpha(1-t))$ yra nemažėjanti intervale $(0, 1)$ ir todėl, pasinaudojant 6 išvada,

$$C_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v) = uv\Big(1+\alpha(1-u^{1/\beta})(1-v^{1/\beta})\Big)^{\beta\gamma}, \quad u,v \in [0,1];\ \beta > 0$$

yra kopula, pasižyminti TP_2 savybe. Be to, jei $\gamma = 1$, gauname Durante ir bendraautorių rezultatą [12, 3.6 pavyzdys]. Kita vertus, jei $\gamma = 1/\alpha \geq 1/\beta$, gauname Huang ir Kotz [14] nagrinėtą kopulų šeimą. Kai $\beta\gamma \in \mathbb{N}$, gauname Bekrizadeh ir bendraautorių [3] nagrinėtą kopulų šeimą.

Pavyzdys 10. Tarkime, $f_\lambda(t) = (1 - \lambda t)^{-1}$, čia $\lambda \in [0, 1]$. Galima nesunkiai parodyti, kad f_λ yra geometriškai iškila žemyn. Todėl 5 teoremos (b) dalies (i) sąlyga yra tenkinama, kai $\lambda \in (0, 1]$. Vėlgi, pasinaudojant 5 teorema,

$$C_{f_\lambda}(u,v) = \frac{uv}{1 - \lambda(1-u)(1-v)}$$

yra dvimatė kopula, dar žinoma kaip Ali–Mikhail–Haq AMH(λ) kopula, pasižyminti TP_2 savybe.

Jei $\gamma \in (0, 1/\lambda]$, tai $t^{1/\gamma}/(1 - \lambda(1 - t))$ yra nemažėjanti intervale $(0, 1)$, ir todėl, pasinaudojant 6 išvada, kai $\beta > 0$

$$C_{\lambda,\beta,\gamma}(u,v) = \frac{uv}{\Big(1 - \lambda(1-u^{1/\beta})(1-v^{1/\beta})\Big)^{\beta\gamma}}, \quad u,v \in [0,1]$$

yra kopula, pasižyminti TP_2 savybe. Taigi gavome AMH kopulų šeimos apibendrinimą.

Pavyzdys 11. Nagrinėkime funkciją f

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x).$$

Galima parodyti, kad ji geometriškai iškila žemyn Jensen prasme.

Todėl 5 teoremos (b) dalies (i) sąlyga yra tenkinama, nes

$$tf(1-t) = t(1+\ln(2-t))$$

ir

$$(tf(1-t))' = \frac{2(1-t)}{2-t} + \ln(2-t) \geq 0,$$

visiems $t \in [0,1]$. Todėl, pasinaudoję 5 teorema, gauname, kad

$$C_f(u,v) = uv\big(1+\ln(1+(1-u)(1-v))\big) \tag{8}$$

yra dvimatė kopula, pasižyminti TP_2 savybe.

Iliustruoti 8 teoremai pateikiame kitą pavyzdį.

Pavyzdys 12. Tarkime, funkcija f yra tokia, kad

$$f(t) = 1+\ln(1+t).$$

Nesunku patikrinti, kad visiems $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} 2f'(t)+tf''(t) &= \frac{2+t}{(1+t)^2} > 0, \\ f(t)+(t-1)f'(t) &= \frac{2t}{1+t} + \ln(1+t) \geq 0, \end{aligned}$$

t.y., $A_1(f) = (0,1)$. Taigi, pasinaudojus 8 teorema, $C_f(u,v)$ aprašyta (8) lygtimi yra dvimatė kopula, ką gavome ir 11 pavyzdyje.

Kita vertus, jei imsime $f(t) = 1+\sin(\pi t/4)$, tada visiems $t \in [0,1]$,

$$2f'(t)+tf''(t) = \frac{\pi}{4}\cos\Big(\frac{\pi t}{4}\Big)\Big(2-\frac{\pi t}{4}\tan\Big(\frac{\pi t}{4}\Big)\Big) \geq \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\Big(2-\frac{\pi}{4}\Big) > 0$$

ir

$$f(t) + (t-1)f'(t) = 1 + \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + (t-1)\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$$
$$> \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \frac{\pi t}{4}\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) \geq 0.$$

Taigi, vėlgi, $A_1(f) = (0,1)$ ir pasinaudojus 8 teorema,

$$C_f(u,v) = uv\Big(1 + \sin\left(\frac{\pi}{4}(1-u)(1-v)\right)\Big)$$

yra dvimatė kopula. Atkreipkime dėmesį, kad šį kartą negalime panaudoti 5 teoremos, nes

$$g(t) = (\ln \circ f \circ \exp)(t) = \ln\left(1 + \sin\left(\pi e^t/4\right)\right)$$

yra iškila aukštyn bent jau, kai $t \in [-0.05, 0]$, t.y. f nėra geometriškai Jensen prasme iškila aukštyn.

Pavyzdys 13. Prisiminkime funkciją f iš 9 pavyzdžio, t.y. $f_\alpha(t) = 1 + \alpha t$, bet šį kartą imkime $\alpha \in [-1, 0)$. Tada

$$2f'(t) + tf''(t) = 2\alpha < 0$$

ir

$$\begin{aligned} & f(t) + (1-\sqrt{t})\big((1-3\sqrt{t})f'(t) + t(1-\sqrt{t})f''(t)\big) \\ &= 1 + \alpha t + (1-\sqrt{t})(1-3\sqrt{t})\alpha \\ &= 1 + \alpha - 4\alpha(\sqrt{t} - t) \geq 0. \end{aligned}$$

Todėl, $A_2(f) = (0,1)$ ir, pasinaudojus 8 teorema,

$$C_f(u,v) = uv\Big(1 + \alpha(1-u)(1-v)\Big)$$

yra dvimatė kopula. Kartu su 9 pavyzdžiu gauname pilną FGM kopulų šeimą.

Panašiai galima parodyti, kad $f_\delta(t) = e^{\delta t}$ iš 8 pavyzdžio, kai $\delta \in [-1, 0)$, ir $f_\lambda(t) = (1 - \lambda t)^{-1}$ iš 10 pavyzdžio, kai $\lambda \in [-1, 0)$, yra tokios, kad $A_2(f) = (0, 1)$.

Pavyzdys 14. Nagrinėkime $f(t) := f_\mu(t) = 1 + \mu t^2$, $t \in [0, 1]$, $\mu \in \mathbb{R}$. Pritaikysime 8 teoremą ir rasime kuriems μ, $\widehat{C}_{f_\mu}$ (ir tuo pačiu C_{f_μ}) yra dvimatė absoliučiai tolydi kopula. Akivaizdu, kad

$$2f'(t) + tf''(t) = 6\mu t \begin{cases} \geq 0, & \text{jei } \mu \geq 0; \\ < 0, & \text{jei } \mu < 0. \end{cases}$$

Kai $\mu \geq 0$, norint parodyti, kad $t \in A_1(f)$, turime patikrinti

$$f(t) + (t - 1)f'(t) = 1 - 2\mu t + 3\mu t^2 \geq 0.$$

Tai galioja visiems $t \in [0, 1]$ tada ir tik tada, kai $\mu \leq 3$.

Kita vertus, jei $\mu < 0$, tada, norint parodyti, kad $t \in A_2(f)$, reikia patikrinti

$$\begin{aligned} &f(t) - (1 - \sqrt{t})((1 - 3\sqrt{t})f'(t) + t(1 - \sqrt{t})f''(t)) \\ &\quad = 1 + \mu t^2 + 4\mu t(1 - 3\sqrt{t} + 2t) \geq 0. \end{aligned}$$

Tai galioja visiems $t \in [0, 1]$ tada ir tik tada, kai $\mu \geq -1$.

Apjungę abu atvejus, gauname, kad $\mu \in [-1, 3]$, kas atkartoja [2] rezultatus. Iš tikrųjų, μ intervalas negali būti praplėstas, nes jei $\mu > 3$ arba $\mu < -1$ tada yra bent vienas taškas $t \in (0, 1) \setminus (A_1(f) \cup A_2(f))$, kuris dėl $f''(t) = 2\mu$ tolydumo, pasinaudojus 8 teorema, reiškia, kad C_f nėra kopula.

Norint gauti funkcijos f, kad $A_i(f) \neq (0, 1)$, kai $i = 1, 2$, pavyzdį, nagrinėkime

$$f(t) = 1 - t/2 + t^2/2 = (1 - t)/2 + (1 + t^2)/2,$$

t.y. dviejų galimų funkcijų iškilą kombinaciją. Tokiai $f(t)$, $2f'(t) + tf''(t)$ yra neneigiama, kai $0 \le t \le a$, ir neigiama, kai $a < t \le 1$, kai $a \approx 0.33$.

Pavyzdys 15. Tarkime, $f(t) = 1 - t - \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{4}$. Tada

$$f(t) < 1 - t, \quad x \in (0,1),$$

taigi, ji netenkina 1 teoremos (iii) sąlygos. Kita vertus, galima parodyti, kad $A_2(f) = (0,1)$, ir todėl

$$\begin{aligned} C_f(u,v) = uv\Big(&1 - (1-u)(1-v) - \frac{1}{4}(1-u)^2(1-v)^2 \\ &+ \frac{1}{4}(1-u)^3(1-v)^3\Big) \end{aligned}$$

yra dvimatė kopula.

Dabar panagrinėsime kai kurias C_f savybes. Pradėsime nuo dalinės tvarkos sąryšio, tada panagrinėsime uodegų priklausomybės matus, ir galiausiai panagrinėsime simetriškumo savybes.

Teiginys 5. *Tarkime, C_f ir C_g kopulos, apibrėžtos (2) lygybe. Tada $C_f \preceq C_g$ tada ir tik tada, kai $f(t) \le g(t)$ visiems $t \in [0,1]$.*

Reiktų akcentuoti, kad, jei $f(t) \ge 1$, $t \in [0,1]$ (pvz., jei $A_1(f) = (0,1)$), tai gauname, kad $C_f \succeq \Pi$, ir panašiai, jei $g(t) \le 1$, $t \in [0,1]$, tai gauname, kad $C_g \preceq \Pi$.

Kitas teiginys nusako dažnai kopuloms naudojamų priklausomybės savybių ($LTD(Y|X)$, $RTI(Y|X)$, $RTI(Y|X)$, $SI(Y|X)$, $LCSD(X,Y)$) ir funkcijos f sąryšius. Priklausomybės savybių apibrėžimus galima rasti [25, 5.2. skyrelyje].

Teiginys 6. *Tarkime, (X,Y) yra pora atsitiktinių dydžių susietų kopula C_f. Tada* *(i) $LTD(Y|X)$ tada ir tik tada, kai $f(t)$ yra nemažėjanti $t \in [0,1)$ atžvilgiu;*

(ii) $RTI(Y|X)$ tada ir tik tada, kai

$$f(t) \geq 1 + t(1-t)\max\{f'(t), 0\}, \quad \textit{bet kuriam } t \in (0,1);$$

(iii) $SI(Y|X)$ tada ir tik tada jei bet kuriam $a \in [0,1]$, funkcija

$$t \mapsto tf(a(1-t))$$

yra iškila aukštyn intervale $[0,1]$.

Pastaba 2. Pastebėkime, kad, jei X ir Y yra tolydūs atsitiktiniai dydžiai susieti kopula C_f, tada, pasinaudoję [25, 5.2.16 išvada], gauname, kad $LCSD(X,Y)$ galioja tada ir tik tada, kai C_f pasižymi TP_2 savybe, ir todėl būtinos ir pakankamos f sąlygos, kad galiotų $LCSD(X,Y)$, yra nusakytos 5 teoremos.

Teiginys 7. *Tarkime, (X,Y) yra atsitiktinis vektorius, kurio koordinatės yra susietos kopula C_f. Tada*

$$-0.8636 \approx C_1 \leq \rho \leq 4\pi^2 - 39 \approx 0.4784$$

ir

$$\frac{2\pi^2 - 21}{3} + 4(J_2 - J_1) \leq \tau \leq \frac{1}{3},$$

čia

$$J_1 := \int_0^1 \int_0^1 u^2 v^2 (1-u)(1-v)(f'((1-u)(1-v)))^2 dudv$$
$$J_2 := \int_0^1 \int_0^1 C_f(u,v)[u+v-2uv]f'((1-u)(1-v))dudv.$$

Pastaba 3. Pristatytas 7 teiginys parodo nagrinėjamo kopulų konstravimo metodo trūkumus. Iš tiesų, naudodamiesi šiuo konstravimo metodu, negalime modeliuoti labai stiprios (teigiamos) priklausomybės.

Teiginys 8. *Tarkime, C_f yra kopula apibrėžta* (2) *lygybe. Tada C_f dešinės uodegos priklausomybės koeficientas lygus nuliui, t.y. $\lambda_U = 0$, o kairės uodegos priklausomybės koeficientas*

$$\lambda_L = \lim_{t\uparrow 1}(1-\sqrt{t})f(t) = \frac{1}{2}\lim_{t\uparrow 1}(1-t)f(t) \in [0, 1/2],$$

ir abi ribos egzistuoja.

Pavyzdys 16. Šiuo pavyzdžiu iliustruosime, kad galime sukonstruoti C_f kopulą fiksuotam $\lambda_L \in [0, 1/2]$. Nagrinėkime

$$f_\beta(t) = \frac{1-\beta t}{1-t}, \quad t \in [0,1),\ \beta \in [0,1].$$

Norint įsitikinti, kad $C_{f_\beta}(u,v) = uvf_\beta((1-u)(1-v))$ yra dvimatė kopula bet kuriam $\beta \in [0,1]$, užtenka parodyti, kad f_β yra geometriškai Jensen prasme iškila žemyn. Tam užtenka parodyti, kad bet kuriems $u, v \in [0,1)$ ir $\beta \in [0,1]$,

$$\left(\frac{1-\beta\sqrt{uv}}{1-\sqrt{uv}}\right)^2 \leq \frac{(1-\beta u)(1-\beta v)}{(1-u)(1-v)}$$

arba

$$\begin{aligned} 0 &\leq (1-\sqrt{uv})^2(1-\beta u)(1-\beta v) - (1-\beta\sqrt{uv})^2(1-u)(1-v) \\ &= (1-\beta)(\sqrt{u}-\sqrt{v})^2(1-\beta uv). \end{aligned}$$

Akivaizdu, kad nelygybė galioja, kai $u, v \in [0,1)$ jei $\beta \in [0,1]$.

Dabar, pasinaudoję 8 teiginiu, gauname, kad C_{f_β} kairės uodegos priklausomybės koeficientas yra

$$\lambda_L = \frac{1}{2}\lim_{t\uparrow 1}(1-t)f_\beta(t) = \frac{1-\beta}{2},$$

kas leidžia gauti bet kurią reikšmę iš intervalo $[0, 1/2]$, nes $\beta \in [0, 1]$.

Teiginys 9. *Tarkime, (X, Y) yra atsitiktinis vektorius, kurio koordinatės yra susietos kopula C_f.*

(i) Jei X yra simetriškai pasiskirstęs apie tašką a ir Y yra simetriškai pasiskirstęs apie tašką b, tai (X, Y) yra radialiai simetrinis (žr. [25, 2.7.1 apibrėžimą]) apie tašką (a, b) tada ir tik tada, kai

$$f(t) = 1 - \alpha t,\ \alpha \in [-1, 1].$$

(ii) Jei X yra simetriškai pasiskirstęs apie tašką a ir Y yra simetriškai pasiskirstęs apie tašką b, tai (X, Y) yra kaip vektorius simetrinis apie tašką (a, b) tada ir tik tada, kai $f(t) = 1$, t.y. $C_f = \Pi$.

5 Rezultatų sklaida

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti šiose mokslinėse konferencijose:

- Dvimačių kopulų transformacijos. *Lietuvos matematikų draugijos 59-oji konferencija*, birželio 18-19, 2018, Kaunas, Lietuva.
- Dvimatės nepriklausomumo kopulos transformacijos, *Lietuvos matematikų draugijos 60-oji konferencija*, birželio 19–20 d., 2019, Vilnius, Lietuva.
- Some transformations of bivariate independence copula. *CFE-CMStatistics*, gruodžio 14–16 d., 2019, Londonas, Didžioji Britanija.
- Dvimatės nepriklausomumo kopulos transformacijos II. Būtinosios sąlygos, *Lietuvos matematikų draugijos 61-oji konferencija*, gruodžio 4 d., 2020, Šiauliai, Lietuva.
- Certain copula transformations: From 2D to 3D. *CFE-CMStatistics*, gruodžio 19–21 d., 2020, Londonas, Didžioji Britanija.

6 Publikacijos

Disertacijos rezultatai yra publikuoti šiuose straipsniuose:

- M. Manstavičius and G. Bagdonas. A class of bivariate copula mappings. *Fuzzy Sets and Systems*, 354:48–62, 2019
- M. Manstavičius and G. Bagdonas. A class of bivariate independence copula transformations. *Fuzzy Sets and Systems*, 2021.

7 Išvados

Disertacijoje pateikėme būtinas ir pakankamas sąlygas tinkamai funkcijai f, kad

$$H_f(C)(u,v) = C(u,v)f(\overline{C}(u,v))$$

būtų kopula bet kuriai $C \in \mathcal{C}$. Daug nagrinėtų pavyzdžių, ypač naudojančių kopulą $C = \Pi$, parodė, kad $H_f(C_0)$ gali būti kopula fiksuotai $C_0 \in \mathcal{C}$ net jei f nėra tinkama, t.y. f yra sąlygiškai tinkama. Todėl vėliau sutelkėme dėmesį į šį atvejį, t.y. bandėme nusakyti visas funkcijas f tokias, kad C_f, apibrėžta (2) lygybe, būtų kopula. Šioje aibėje yra ne tik *tinkamos* funkcijos, bet ir daug *sąlygiškai tinkamų* funkcijų. Uždavinys pasirodė gerokai sunkesnis nei Durante ir bendraautorių nagrinėtas [7, 10] komonotoniškumo kopulos M atveju. Mes pilnai nusakėme tokių kopulų poaibį, konkrečiau, tas kopulas kurios pasižymi TP_2 savybe. Taip pat pilnai nusakėme atvejį, kai f yra du kartus tolydžiai diferencijuojama. Bendruoju atveju funkcija f yra du kartus diferencijuojama beveik visur intervale $(0,1)$, taigi mūsų rezultatai neapima pilnos šių funkcijų aibės. Tokio atvejo pavyzdys pateiktas 7 pavyzdyje, kuriame pateikta tik dalimis glodi funkcija f.

Literatūra

[1] E. Alvoni, P. L. Papini, and F. Spizzichino. On a class of transformations of copulas and quasi-copulas. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(3):334–343, 2009.

[2] I. Bairamov and S. Kotz. Dependence structure and symmetry of Huang–Kotz FGM distributions and their extensions. *Metrika*, 56:55–72, 2002.

[3] H. Bekrizadeh, G. Parham, and M. Zadkarmi. The new generalization of Farlie–Gumbel–Morgenstern copulas. *Appl. Math. Sci.*, 6(71):3527–3533, 2012.

[4] S. Çelebioğlu. A way of generating comprehensive copulas. *Journal of the Institute of Science and Technology of Gazi University*, 10(1):67–62, January 1997.

[5] C. M. Cuadras. Constructing copula functions with weighted geometric means. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(11):3766–3772, 2009.

[6] A. Dolati and M. Úbeda-Flores. Constructing copulas by means of pairs of order statistics. *Kybernetika*, 45(6): 992–1002, 2009.

[7] F. Durante. A new class of symmetric bivariate copulas. *Nonparametric Statistics*, 18(7–8):499–510, 2006.

[8] F. Durante and P. Jaworski. A new characterization of bivariate copulas. *Communication in Statistics – Theory and Methods*, 39(16):2901–2912, 2010.

[9] F. Durante and C. Sempi. *Principles of copula theory*. CRC Press/ Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2016.

[10] F. Durante, J. J. Quesada-Molina, and M. Úbeda-Flores. On a family of multivariate copulas for aggregation processes. *Information Sciences*, 177:5715–5724, 2007.

[11] F. Durante, A. Kolesárová, R. Mesiar, and C. Sempi. Semilinear copulas. *Fuzzy sets and systems*, 159:63–76, 2008.

[12] F. Durante, R. Foschi, and P. Sarkoci. Distorted copulas: constructions and tail dependence. *Comm. Statist. Theory Methods*, 39(12):2288–2301, 2010.

[13] F. Durante, J. Fernández-Sánchez, and W. Trutschnig. Solution to an open problem about a transformation on the space of copulas. *Dependence Modeling*, 2(1), 2014.

[14] J. Huang and S. Kotz. Modifications of the Farlie–Gumbel–Morgenstern distributions, a tough hill to climb. *Metrika*, 49:135–145, 1999.

[15] H. Joe. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall, London, 1997.

[16] N. L. Johnson and S. Kotz. On some generalized Farlie–Gumbel–Morgenstern distributions. *Communications in Statistics*, 4(5):415–427, 1975.

[17] E. P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. Transformations of copulas and quasicopulas. In M. López-Díaz, M. A. Gil, P. Grzegorzewski, O. Hryniewicz, and J. Lawry, editors, *Soft Methodology and Random Information Systems*, pages 181–188. Springer, Berlin, 2004.

[18] A. Kolesárová, R. Mesiar, and J. Kalická. On a new construction of 1-Lipschitz aggregation functions, quasi-copulas and copulas. *Fuzzy Sets and Systems*, 226:19–31, 2013.

[19] A. Kolesárová, G. Mayor, and R. Mesiar. Quadratic constructions of copulas. *Information Sciences*, 310:69–76, 2015.

[20] S. Kotz and N. L. Johnson. Propriétés de dépendance des distributions itérées, généralisées à deux variables Farlie–Gumbel–Morgenstern. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math*, 285:277–280, 1977.

[21] G. D. Lin. Relationships between two extensions of Farlie–Gumbel–Morgenstern distributions. *Ann Inst Statist Math*, 39(1):129–140, 1987.

[22] M. Manstavičius and G. Bagdonas. A class of bivariate copula mappings. *Fuzzy Sets and Systems*, 354:48–62, 2019.

[23] M. Manstavičius and G. Bagdonas. A class of bivariate independence copula transformations. *Fuzzy Sets and Systems*, 2021. .

[24] R. Mesiar, M. Komorníková, and J. Komorník. Perturbation of bivariate copulas. *Fuzzy Sets and Systems*, 268:127–140, 2015.

[25] R. B. Nelsen. *An Introduction to Copulas*. Springer, New York, 2006. 2nd edition.

[26] S. Saminger-Platz, A. Kolesárová, R. Mesiar, and E. P. Klement. The key role of convexity in some copula constructions. *European Journal of Mathematics*, pages 1–28, 2019.

UŽRAŠAMS

UŽRAŠAMS

Vilniaus universiteto leidykla
Saulėtekio al. 9, III rūmai, LT-10222 Vilnius
El. p. info@leidykla.vu.lt,
www.leidykla.vu.lt
Tiražas 35 egz.