VILNIAUS UNIVERSITETAS

Gytenis
LILEIKA

CKLS modelio silpnosios aproksimacijos diskrečiaisiais atsitiktiniais dydžiais

DAKTARO DISERTACIJOS SANTRAUKA

Gamtos mokslai,
matematika (N 001)

Vilnius 2021

Disertacija rengta 2016–2021 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:

prof. habil. dr. Vigirdas Mackevičius (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001)

Gynimo taryba:

Pirmininkas -

prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001).

Nariai:

prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001);
doc. dr. Martynas Manstavičius (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001);
prof. habil. dr. Yuliya Mishura (Kijevo nacionalinis Taraso Ševčenkos universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001);
prof. habil. dr. Jonas Šiaulys (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001).

Disertacija bus ginama viešame Gynimo tarybos posėdyje 2021 m. lapkričio 16 d. 14 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete, 102 auditorijoje. Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva, tel. + 370 521 93 050; el. paštas: mif@mif.vu.lt.

Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir Vilniaus universiteto interneto svetainėje adresu: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

VILNIUS UNIVERSITY

Gytenis
LILEIKA

Weak approximations of CKLS model by discrete random variables

SUMMARY OF DOCTORAL DISSERTATION

Natural sciences,
mathematics (N 001)

Vilnius 2021

Doctoral dissertation was written between 2016 and 2021 at Vilnius University.

Academic supervisor:

prof. habil. dr. Vigirdas Mackevičius
(Vilnius University, Natural sciences, Mathematics – N 001).

Dissertation Defence Panel:

Chairman:

prof. habil. dr. Remigijus Leipus
(Vilnius University, Natural sciences, Mathematics – N 001).

Members:

prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius
(Vilnius University, Natural sciences, Mathematics – N 001);
doc. dr. Martynas Manstavičius
(Vilnius University, Natural sciences, Mathematics – N 001);
prof. habil. dr. Yuliya Mishura
(Taras Shevchenko National University of Kyiv, Natural sciences, Mathematics – N 001);
prof. habil. dr. Jonas Šiaulys
(Vilnius University, Natural sciences, Mathematics – N 001).

The dissertation shall be defended at a public meeting of the Dissertation Defence Panel in Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, lecture room 102, on November 16$^{\text{th}}$, 2021, at 2.00 p.m.
Address: Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.

The text of this dissertation can be accessed at the Library of Vilnius University and on the website of Vilnius University:
www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

DISERTACINIO DARBO APRAŠYMAS

1 Tyrimo objektas

Disertacijos tyrimo objektas yra pirmos ir antros eilės silpnosios Čano–Karolyi'o–Longstafo–Sanderso (angl. Chan–Karolyi–Longstaff–Sanders, CKLS) modelio [2]:

$$\mathrm{d}X_t = (\theta - \beta\, X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma X_t^{\gamma}\,\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = x \geq 0, \tag{1.1}$$

čia parametrai $(\theta, \beta, \sigma, \gamma) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times [1/2, 1)$, $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$ ir $\overline{\mathbb{R}}_+ := [0, \infty)$, B – standartinis Brauno judesys (Vynerio procesas), aproksimacijos. Šios lygties atskiri atvejai yra svarbūs finansų matematikos modeliai. Pavyzdžiui, kai $\theta = 0$ ir $\beta < 0$, gauname pastovaus variacijos elastingumo (angl. the constant elasticity of variance, CEV) modelį [3]; kai $\gamma = 1/2$ ir $\beta \geq 0$, gauname gerai žinomą Kokso–Ingersolio–Roso (angl. Cox–Ingersoll–Ross, CIR) modelį [4]; kai $\gamma = 0$, gauname Vašičeko modelį; kai $\gamma = 0$ ir $\theta = 0$, gauname geometrinį Brauno judesį.

Žinoma, kad (1.1) lygtis turi vienintelį neneigiamą sprendinį ir, jei $x > 0$ ir $\gamma > 1/2$, tai $X_t > 0$ su visais $t \geq 0$ beveik tikrai [10].

2 Tyrimo tikslas ir problemos

Disertacijos tyrimo tikslas yra sukonstruoti paprastas ir efektyvias pirmos ir antros eilės CKLS lygties sprendinio aproksimacijas, kurių suskaičiavimui kiekviename aproksimacijos žingsnyje būtų generuojami tik diskretūs atsitiktiniai dydžiai. Taip pat svarbi šio tikslo dalis yra įrodyti sukonstruotų aproksimacijų konvergavimo eiles.

Pagrindinė problema kuriant skaitinius sprendimo metodus šiems difuzijos modeliams yra tai, kad difuzijos koeficientas turi neaprėžtas išvestines nulio aplinkoje. Tai neleidžia pritaikyti klasikinių metodų, pavyzdžiui, aprašytų Milšteino ir Tretjakovo knygoje [11]. Diskretizacijos schemos taikant minėtus metodus, kurie išreikštai ar neišreikštai naudoja koeficientų išvestines, dažniausiai praranda aproksimavo tikslumą nulio aplinkoje, ypač jei difuzijos koeficientas σ yra didelis. CIR modeliui sprendžiant koeficientų problemą naudojamas diskretizacijos schemų keitimo metodas: nulio aplinkoje naudojama aproksimacija, kuri yra pakankamai reguliari ir priimtinos aproksimavimo eilės (žr., pvz., straipsnius [1, 8, 9] ir literatūros nuorodas juose).

Lanas ir kt. [5] tyrė CKLS ir CIR modelių sąryšį bei įrodė, kad keičiant tikimybinį matą galima transformuoti CKLS modelį, kai $1/2 < \gamma < 1$ arba $\gamma > 1$, į atitinkamą CIR modelį. Jiems netgi pavyko gauti CKLS modelio su nauju tikimybiniu matu išreikštinio pavidalo sprendinį ir pasiskirstymo funkciją bet kuriuo laiko momentu t. Deja, tokia transformacija negali būti pritaikyta pakeičiant CKLS silpnąją aproksimaciją CIR proceso aproksimacija.

3 Tyrimo metodai

Atliekant disertacijos tyrimą buvo panaudoti įvairūs tikimybių teorijos, matematinės, stochastinės ir funkcinės analizės metodai bei rezultatai. Kompiuterinės simuliacijos atliktos programavimo kalba C++. Paveikslėliai sugeneruoti naudojant skaičiavimo paketą Maple. Šis paketas panaudotas ir spendžiant lygtis bei nelygybes.

4 Moksliniai rezultatai

Apibrėžimai

Nagrinėkime vienmatę stochastinę diferencialinę lygtį

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \tilde{\sigma}(X_s^x)\,\mathrm{d}B_s, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}; \tag{4.1}$$

čia B yra standartinis Brauno judesys (Vynerio procesas).

S iekiant išvengti dviprasmybės, difuzijos koeficientą bendrojoje (4.1) lygtyje žymime simboliu $\tilde{\sigma}$, o simboliu σ – konstantą CKLS lygtyje (1.1).

Laikysime, kad lygtis turi vienintelį silpnąjį sprendinį X_t^x su trajektorijomis intervale $\mathbb{D}$, t.y. $\mathbb{P}(X_t^x \in \mathbb{D},\, t \geq 0) = 1$ su visais $x \in \mathbb{D}$. Pavyzdžiui, (1.1) lygtyje galime laikyti, kad $\mathbb{D} = \overline{\mathbb{R}}_+$.

Imkime fiksuoto laiko intervalo $[0, T]$ pastovaus žingsnio $h = T/n$, $n \in \mathbb{N}$, diskretizaciją $\Delta^h = \{ih, i = 0, 1, \dots, \lfloor T/h \rfloor, h \in (0, T]\}$; čia $\lfloor a \rfloor$ – sveikoji skaičiaus a dalis. (4.1) lygties diskretizacijos schema laikome diskretaus laiko homogeninių Markovo procesų šeimą $\hat{X}^h = \{\hat{X}^h(x, t), x \in \mathbb{D}, t \in \Delta^h\}$ su pradine reikšme $\hat{X}^h(x, 0) = x$ ir vienažingsne perėjimo tikimybe $p^h(x, \mathrm{d}z)$, $x \in \mathbb{D}$. Trumpumo dėlei kartais rašysime $\hat{X}_t^x$ ar $\hat{X}(x, t)$ vietoje $\hat{X}^h(x, t)$. Pastebėtina, kad dėl markoviškumo diskretizacijos schemos vienažingsnė aproksimacija $\hat{X}_h^x$ visiškai apibrėžia visos diskretizacijos schemos $\hat{X}_t^x$ tikimybinį pasiskirtymą, todėl užtenka konstruoti tik vienažingsnes aproksimacijas.

Žymėsime $C_0^\infty(\mathbb{D})$ klasę funkcijų $f \in C^\infty(\mathbb{D})$ su kompaktiška atrama aibėje $\mathbb{D}$, o $C_{\mathrm{pol}}^\infty(\mathbb{D})$ – klasę tokių funkcijų $f \in C^\infty(\mathbb{D})$, kad

$$|f^{(n)}(x)| \leq C_n(1 + |x|^{k_n}), x \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\},$$

su tam tikra seka $(C_n, k_n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}_0$. Vadovaudamiesi Alfonsi [1], sakysime, kad $\{(C_n, k_n), n \in \mathbb{N}_0\}$ yra *gera* seka funkcijai f.

Rašysime $g(x,h) = O(h^n)$, jei su tam tikrais $C > 0$, $k \in \mathbb{N}$ ir $h_0 > 0$,

$$|g(x,h)| \le C(1 + |x|^k)h^n, \quad x \ge 0, \quad 0 < h \le h_0.$$

Atskiru atveju, kai funkcija g yra išreiškiama kita funkcija $f \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{pol}}(\mathbb{R})$ ir konstantos C, k ir h_0 priklauso tik nuo *geros* sekos funkcijai f, rašysime $g(x,h) = \mathcal{O}(h^n)$.

4.1 apibrėžimas. Sakoma, kad diskretizacijos schema $\hat{X}^h$ yra silpnoji ν-ios eilės (4.1) lygties sprendinio $(X^x_t, t \in [0,T])$ aproksimacija, jei kiekvienai funkcijai $f \in C^\infty_0(\mathbb{D})$ egzistuoja toks $C > 0$, kad

$$|\mathbb{E}f(X^x_T) - \mathbb{E}f(\hat{X}^x_T)| \le Ch^\nu, \ h > 0.$$

4.2 apibrėžimas. Tarkime, kad (4.1) lygties sprendinio generatorius yra $Lf = bf' + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 f''$ ir $Lf \in C^\infty_{\mathrm{pol}}(\mathbb{D})$ su kiekviena funkcija $f \in C^\infty_{\mathrm{pol}}(\mathbb{D})$, t. y. $b, \tilde{\sigma}^2 \in C^\infty_{\mathrm{pol}}(\mathbb{D})$. Proceso X^x_t diskretizacijos schemos $\hat{X}^x_t$ ν-ios eilės liekana vadinsime operatorių $R^h_\nu : C^\infty_{\mathrm{pol}}(\mathbb{D}) \to C(\mathbb{D})$, apibrėžiamą lygybe

$$R^h_\nu f(x) := \mathbb{E}f(\hat{X}^x_h) - \left[f(x) + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{L^k f(x)}{k!} h^k\right], \ x \in \mathbb{D}, \ h > 0. \tag{4.2}$$

Diskretizacijos schemą $\hat{X}^x_t$ vadinsime lokalia ν-ios eilės silpnaja (4.1) lygties aproksimacija, jei

$$R^h_\nu f(x) = O(h^{\nu+1}), \ h \to 0,$$

su visomis $f \in C^\infty_{\mathrm{pol}}(\mathbb{D})$ ir visais $x \in \mathbb{D}$.

4.3 apibrėžimas. Diskretizacijos schemą $\hat{X}_t^x$ vadinsime potencialiąja ν-ios eilės silpnąja (4.1) lygties aproksimacija, jei su kiekviena $f \in C_{\mathrm{pol}}^{\infty}(\mathbb{D})$

$$|R_\nu^h f(x)| = \mathcal{O}(h^{\nu+1}).$$

4.4 apibrėžimas. Sakysime, kad diskretizacijos schemos $\hat{X}_t^x = \hat{X}^h(x,t)$, $h>0$, momentai yra tolygiai aprėžti, jei egzistuoja toks $h_0 > 0$, kad

$$\sup_{0<h\le h_0} \sup_{t\in\Delta^h} \mathbb{E}(|\hat{X}^h(x,t)|^n) < +\infty, \ n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{D}.$$

Sakysime, kad potenciali ν-ios eilės silpnoji aprokismacija yra *stipriai* potenciali ν-ios eilės silpnoji aprokismacija, jei jos momentai yra tolygiai aprėžti.

Aproksimacijos

Mums pavyko sukonstruoti paprastas ir efektyvias pirmosios ir antrosios eilės silpnąsias CKLS lygties sprendinio aproksimacijas. Šių aproksimacijų suskaičiavimui kiekviename aproksimacijos žingsnyje generuojami tik diskretieji atsitiktiniai dydžiai. Aproksimacijos apibrėžiamos žemiau pateiktomis teoremomis.

4.1 teorema. *Tarkime, kad*

$$D_t^x = D(x,t) := \begin{cases} x\mathrm{e}^{-\beta t} + \frac{\theta}{\beta}(1-\mathrm{e}^{-\beta t}), & \beta \neq 0, \\ x + \theta t, & \beta = 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

ir atsitiktinis dydis $\hat{S}_h^x$ $(\hat{S}_h^0 = 0)$ *įgyja reikšmes*

$$\begin{cases} x_1 = x + x^{2\gamma-1}\sigma^2 h - \sqrt{(x^{2\gamma} + x^{2(2\gamma-1)}\sigma^2 h)\sigma^2 h} > 0, & x > 0, \\ x_2 = x + x^{2\gamma-1}\sigma^2 h + \sqrt{(x^{2\gamma} + x^{2(2\gamma-1)}\sigma^2 h)\sigma^2 h} > 0, & x > 0, \end{cases}$$

su (atitinkamomis) tikimybėmis

$$\mathbb{P}\{\hat{S}_h^x = x_{1,2}\} = p_{1,2} = \frac{x}{2\,x_{1,2}}, \quad x > 0.$$

Tada vienažingsnė aproksimacija $\hat{X}_h^x$*, apibrėžiama kompozicija*

$$\hat{X}_h^x := D(\hat{S}_h^x, h),\ x \geq 0,\ h > 0,$$

yra stipriai potenciali pirmosios eilės CKLS lygties (1.1) *sprendinio diskretizacijos schema.*

4.2 teorema. *Tarkime, kad* $D_t^x = D(x,t)$ *apibrėžta* (4.3) *lygybe ir atsitiktinis dydis* $\hat{S}_h^x = \hat{S}(x,h)$ ($\hat{S}_h^0 = 0$) *įgyja reikšmes*

$$\begin{aligned} x_{1,3} =& x + (A + \tfrac{3}{4})\sigma^2 h \mp \sqrt{\big(3x + (A+\tfrac{3}{4})^2\sigma^2 h\big)\sigma^2 h}, \\ x_2 =& x + A\,\sigma^2 h, \quad A \in [3/4, 3/2], \end{aligned}$$

su (atitinkamomis) tikimybėmis

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{m_1 x_2 x_3 - m_2(x_2+x_3) + m_3}{x_1(x_3-x_1)(x_2-x_1)}, \\ p_2 &= \frac{m_2(x_1+x_3) - m_1 x_1 x_3 - m_3}{x_2(x_2-x_1)(x_3-x_2)}, \\ p_3 &= \frac{m_1 x_1 x_2 - m_2(x_1+x_2) + m_3}{x_3(x_3-x_2)(x_3-x_1)}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Tarkime, kad vienažingsnė aproksimacija $\hat{X}_h^x$ *apibrėžiama kompozicija*

$$\hat{X}^h(x,h) := \begin{cases} D\Big(\hat{S}\big(D(x,h/2),h\big),h/2\Big), & h > 0, \\ x, & h = 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

Tada aproksimacija $\hat{X}_h^x$ *yra stipriai potenciali antros eilės CIR lygties sprendinio diskretizacijos schema.*

Mes taip pat sukonstravome vienažingsnę $\hat{S}^x_h$, kuri įgyja keturias reikšmes ir yra potencialioji trečiosios eilės stochastinės lygties $\mathrm{d}S^x_t = \sigma\sqrt{S^x_t}\,\mathrm{d}B_t$ (CIR lygties stochastinė dalis) sprendinio aproksimacija.

4.3 teorema. *Tarkime, kad $\hat{X}^x_h$ yra vienažingsnė diskretizacijos schema su kompozicija (4.5); čia $D^x_t = D(x,t)$ apibrėžiama (4.3) lygybe. Tarkime, kad $\hat{S}^x_h$ įgyja reikšmes*

$$\begin{aligned} x_{1,3} &= x + \tfrac{5}{2}\,x^{1/2}\sigma^2 h + \tfrac{15}{64}\,(\sigma^2 h)^2 \\ &\quad \mp \sqrt{\big(3\,x^{3/2} + \tfrac{103}{16}\,x\sigma^2 h + \tfrac{75}{64}\,x^{1/2}(\sigma^2 h)^2 + \tfrac{225}{4096}\,(\sigma^2 h)^3\big)\sigma^2 h}, \\ x_2 &= x + \tfrac{11}{8}\,x^{1/2}\sigma^2 h + \tfrac{15}{64}\,(\sigma^2 h)^2, \end{aligned}$$

jei $\gamma = 3/4$, arba

$$\begin{aligned} x_{1,3} &= x + \tfrac{3}{2}\,x^{2/3}\sigma^2 h + \tfrac{485}{816}\,x^{1/3}(\sigma^2 h)^2 + \tfrac{1681}{22032}\,(\sigma^2 h)^3 \\ &\quad \mp \Big((3\,x^{5/3} + \tfrac{2077}{612}\,x^{4/3}\sigma^2 h + \tfrac{125695}{66096}\,x(\sigma^2 h)^2 + \tfrac{1162907}{1997568}\,x^{2/3} \\ &\quad \times (\sigma^2 h)^3 + \tfrac{815285}{8989056}\,x^{1/3}(\sigma^2 h)^4 + \tfrac{2825761}{485409024}(\sigma^2 h)^5)\sigma^2 h\Big)^{1/2}, \\ x_2 &= x + \tfrac{1}{4}\,x^{2/3}\sigma^2 h + \tfrac{5}{72}\,x^{1/3}(\sigma^2 h)^2 + \tfrac{1}{72}(\sigma^2 h)^3, \end{aligned}$$

jei $\gamma = 5/6$, su (atitinkamomis) tikimybėmis p_1, p_2 ir p_3, apibrėžtomis (4.4) lygybėmis ($\hat{S}^0_h = 0$). Tada $\hat{X}^x_h$ yra stipriai potenciali antrosios eilės CKLS lygties sprendinio diskretizacijos schema, kai atitinkamai $\gamma = 3/4$ ar $\gamma = 5/6$.

5 Mokslinis aktualumas ir naujumas

CKLS modelio, kaip ir daugelio kitų stochastinių finansų matematikos modelių, sprendinys nėra žinomas išreikštiniu pavidalu. Todėl yra svarbu kurti ir tobulinti skaitinius sprendimo metodus. Klasikiniai skaitinio sprendimo metodai netinka dėl neglodžių difuzijos koeficientų; be to, juos naudojant, sukonstruotos aproksimacijos gali įgyti neigiamas reikšmes, nors procesas įgyja tik neneigiamas.

Dažniausiai pirmosios eilės silpnosios aproksimacijos nulio aplinkoje konstruojamos ieškant jų pirmųjų dviejų ar trijų momentų sutapimo su lygties sprendinio atitinkamais momentais. Disertacijoje aprašoma aproksimacijų radimo metodika nežinant šių momentų.

Panaudotas antrosios eilės silpnosios aproksimacijos radimo kelias iš esmės skiriasi nuo naudoto ieškant pirmosios eilės silpnosios aproksimacijos. Kita šių aproksimacijų ypatybė yra tai, kad skirtingai nuo $[1, 9]$, išvengta perėjimo prie kitos diskretizacijos schemos nulio aplinkoje, o tai supaprastina konstrukcijos pritaikymą.

Disertacijoje naudota ir aprašyta aproksimacijų konstravimo metodika gali būti pritaikyta konstruojant diskretizacijos schemas ir kitiems modeliams su singuliarias difuzijos koeficientais.

6 Darbo struktūra ir apimtis

Disertaciją sudaro tikslus ir uždavinius apžvelgiantis įvadas (1 skyrius), trumpa susijusių tyrimų apžvalga (2 skyrius), pagrindiniai apibrėžimai, teoremos ir naudojamų metodikų aprašymai (3 skyrius), disertacijos tyrimai (4 ir 5 skyriai), išvados (6 skyrius), priedas (7 skyrius) ir literatūros sąrašas.

Disertacija parašyta anglų kalba ir ją sudaro 104 puslapiai.

7 Publikacijos

Disertacijos rezultatai publikuoti šiuose moksliniuose straipsniuose:

1. G. Lileika and V. Mackevičius, *Weak approximation of CKLS and CEV processes by discrete random variables.* Lithuanian Mathematical Journal 60: 208–224 (2020).

2. G. Lileika and V. Mackevičius, *Second-order weak approximations of CKLS and CEV processes by discrete random variables.* Mathematics, 9(12), 1337 (2021).

8 Rezultatų sklaida

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti šiose mokslinėse konferencijose:

- 12-toji tarptautinė Vilniaus konferencija „Tikimybių teorija ir matematinė statistika“, Vilnius, Lietuva, 2018–07–03.

- 58-oji Lietuvos matematikų draugijos (LMD) konferencija, Vilnius, Lietuva, 2017–06–21.

- 59-oji LMD konferencija, Kaunas, Lietuva, 2018–06–19.

- 60-oji LMD konferencija, Vilnius, Lietuva, 2019–06–19.

- 61-oji LMD konferencija, Šiauliai, Lietuva, 2020–12–04.

- 62-oji LMD konferencija, Vilnius, Lietuva, 2021–06–16.

9 Išvados

Disertacijoje konstruojamos pirmosios ir antrosios eilės CKLS lygties sprendinio silpnosios aproksimacijos, naudojant aproksimuojamos lygties išskaidymo (angl. split-step), aproksimacijos ir lygties sprendinio momentų sutapimo (angl. moment matching) ir apytikslių momentų sutapimo metodus. Lygties išskaidymo metodas aproksimuojamai lygčiai priskiria vadinamąsias stochastinę ir deterministinę lygties dalis. Deterministinės dalies išreikštinis sprendinys lengvai randamas naudojant diferencialinių lygčių sprendimo metodus, o stochastinė dalis aproksimuojama silpnosiomis aproksimacijomis. Stochastinės dalies aproksimacijos konstravimui, siekiant norimo tikslumo, naudojami aproksimacijos ir lygties sprendinio momentų bei apytikslių momentų sulyginimo metodai. Tam tikra deterministinės ir stochastinės dalių aproksimacijų kompozicija sudaro pradinės lygties aproksimaciją.

Pagrindiniai disertacijos rezultatai:

- Sukonstruota potencialioji pirmosios eilės dviejų reikšmių stochastinės dalies aproksimacija, kurios radimui nereikia žinoti lygties sprendinio baigtinių momentų.

- Sukonstruota stipriai potenciali pirmosios eilės CKLS lygties sprendinio aproksimacija.

- Sukurtas naujas antrosios eilės stochastinės dalies sprendinio silpnosios aproksimacijos radimo metodas, kuriame naudojama fiksuota diskrečiojo atsitiktinio reikšmių struktūra ir ieškoma sprendinio bei aproksimacijos momentų sutapimo.

- Sukonstruota stipriai potenciali antrosios eilės CIR lygties sprendinio aproksimacija be diskretizavimo schemų keitimo nulio aplinkoje.

- Sukonstruota stipriai potenciali antrosios eilės CKLS lygties sprendinio aproksimacija.

- Sukonstruota potencialioji trečiosios eilės CIR lygties stochastinės dalies sprendinio aproksimacija be diskretizavimo schemų keitimo nulio aplinkoje.

Idėjos tolimesniems tyrimams:

- Ištirti pirmosios eilės dviejų reikšmių stochastinės dalies aproksimacijos, kurios radimui nereikia žinoti lygties sprendinio baigtinių momentų, apribojimus ir apibendrinimo galimybes bendrų stochastinių diferencialinių lygčių atveju.

- Ištirti antrosios eilės stochastinės dalies aproksimacijos radimo metodo, kuriame naudojama fiksuota diskrečiojo atsitiktinio reikšmių struktūra ir ieškoma sprendinio bei aproksimacijos momentų sutapimo, apribojimus ir apibendrinimo galimybes.

- Pritaikyti Hestono modeliui stipriai potencialią antrosios eilės CIR lygties sprendinio aproksimaciją be schemos keitimo.

- Pritaikyti kitoms stochastinių diferencialinių lygčių klasėms stipriai potencialios antrosios eilės CKLS lygties sprendinio aproksimacijos konstravimo metodiką.

10 Summary

The aim of research was to construct simple and effective first- and second-order weak approximations for the solution of the CKLS model which would use only generation of discrete random variables at each approximation step. Also, it was important to provide proofs of accuracy order. The main results presented in Chapters 4 and 5 were published in papers [6] and [7].

The main problem in developing numerical methods for such a diffusion equation/model is that the diffusion coefficient has unbounded derivatives near zero, and therefore standard methods (see, e.g., Milstein and Tretyakov [11]) are not applicable: discretization schemes that (explicitly or implicitly) involve the derivatives of the coefficients usually lose their accuracy near zero, especially, for large σ. This problem for the CIR processes was solved by modifying the scheme considered by switching near zero to another scheme, which (i) is sufficiently regular and (ii) enough accurate near zero; we refer, for example, to [1,8,9] and references therein.

In Chapter 2, we give an overview of related results obtained by other authors. Preliminaries and definitions are provided in Chapter 3. In Section 4.2, we discuss a general construction for potential first-order approximations of the stochastic part. In Section 4.3, we construct a strongly potential first-order weak approximation of the CKLS model, and in Sections 5.2 and 5.4, we construct a strongly potential second-order weak approximation of the CKLS model. We summarize the constructed algorithms of first- and second-order in Sections 4.4 and 5.5, respectively. In Sections 4.5 and 5.6, we illustrate the accuracy of the first- and second-order schemes by numerical simulation results. We provide conclusions of the thesis in Chapter 6, and in the Appendix 7, we provide additional calculations.

Literatūra

[1] A. Alfonsi. High order discretization schemes for the CIR process: Application to Affine Term Structure and Heston models. *Mathematics of Computation, American Mathematical Society*, 79(269):209–237, 2010.

[2] K. C. Chan, G. A. Karolyi, F. A. Longstaff, and A. B. Sanders. An empirical investigation of alternative models of the short-term interest rate. *Journal of Finance*, (47):1209–1227, 1992.

[3] J. C. Cox. Notes on option pricing I: Constant elasticity of variance diffusions. *Working Paper, Stanford University, 1975 Reprinted in The Journal of Portfolio Management*, (23):15–17, 1996.

[4] J. C. Cox, J. E. Ingersoll, and S. A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, (53):385–407, 1985.

[5] G. Lan, Y. Hu, and Ch. Zhang. The explicit solution and precise distribution of ckls model under girsanov transform. *International Journal of Statistics and Probability*, 4, 10 2014.

[6] G. Lileika and V. Mackevičius. Weak approximation of CKLS and CEV processes by discrete random variables. *Lithuania Mathematical Journal*, 60(2):208–224, 2020.

[7] G. Lileika and V. Mackevičius. Second-order weak approximations of CKLS and CEV processes by discrete random variables. *Mathematics*, 9(12), 2021.

[8] V. Mackevičius. On approximation of CIR equation with high volatility. *Mathematics and Computers in Simulation*, 80(5):959–970, 2010.

[9] V. Mackevičius. Weak approximation of CIR equation by discrete random variables. *Lith. Math. J.*, 51(3):385–401, 2011.

[10] X. Mao. *Stochastic Differential Equations and Applicatons.* Woodhead Publishing, 2 edition, 2007.

[11] G. Milstein and M. V. Tretyakov. *Stochastic Numerics for Mathematical Physics.* Scientific Computation. Springer-Verlag, 1 edition, 2004.

Trumpai apie disertantą

Gimimo data ir vieta:

1983–10–15 Raseiniuose.

Išsilavinimas:

1990–2002 Telšių „Kranto“ vidurinė mokykla

2002–2006 Vilniaus universiteto statistikos bakalauras

2006–2008 Vilniaus universiteto matematikos magistras

2015–2020 Vilniaus universiteto matematikos doktorantas

Darbo patirtis

2006– Draudimo įmonė Mandatum Life Insurance Company Limited Lietuvos filialas

Vilniaus universiteto leidykla
Saulėtekio al. 9, III rūmai, LT-10222 Vilnius
El. p.: info@leidykla.vu.lt, www.leidykla.vu.lt
Tiražas 20 egz.