Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2021. Том 62, № 6

УДК 511.32

УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩЕГОСЯ РЯДА НА КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ

А. Лауринчикас

Аннотация. Рассматривается ряд Дирихле, зависящий от параметра и абсолютно сходящийся в правой половине критической полосы. Доказано, что множество сдвигов этого ряда, приближающих данную аналитическую и не имеющую нулей функцию, имеет положительную плотность на промежутках типа $[T, T+H]$, где $T^{1/3}(\log T)^{26/15} \leq H \leq T$. Приводится явный вид этой плотности.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.609

Ключевые слова: дзета-функция Римана, мера Хаара, пространство аналитических функций, универсальность.

§ 1. Введение

Пусть $s = \sigma + it$ — комплексная переменная и $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Один из важнейших объектов аналитической теории чисел — дзета-функция Римана $\zeta(s)$ в полуплоскости $\sigma > 1$ — определяется рядом Дирихле или эйлеровым произведением

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

и мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость с единственным простым полюсом в точке $s = 1$ и вычетом 1. Знаменитое свойство универсальности функции $\zeta(s)$, открытое С. М. Ворониным в [1], гласит, что всякая аналитическая функция, не имеющая нулей в полосе $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$, равномерно на компактных подмножествах $K \subset D$ приближается сдвигами $\zeta(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Более точно, пусть $\mathscr{K}$ — класс компактных подмножеств полосы D, обладающих связными дополнениями, а $H_0(K)$ с $K \in \mathscr{K}$ — класс непрерывных, не имеющих нулей в K и аналитических внутри K функций. Тогда по теореме Воронина для всяких $K \in \mathscr{K}$, $f(s) \in H_0(K)$ и $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\{\tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Здесь $\operatorname{meas} A$ — мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$.

При сравнении функций $f(s)$ и $\zeta(s + i\tau)$ приходится пользоваться информацией о функции $\zeta(s + i\tau)$, которая в полосе D определяется при помощи

Исследование поддержано Европейским социальным фондом (проект No. 09.3.3–LMT–K–712–01–0037) по договору с Советом науки Литвы.

аналитического продолжения. Более удобно вместо сдвигов $\zeta(s+i\tau)$ работать со сдвигами функции, которая в полосе D задается абсолютно сходящимся рядом. Такой подход к универсальности функции $\zeta(s)$ был предложен в [2]. Пусть $\theta > 1/2$ — фиксированное число и для $u > 0$

$$v_u(m) = \exp\biggl\{-\Bigl(\frac{m}{u}\Bigr)^{\theta}\biggr\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тогда ряд

$$\zeta_u(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_u(m)}{m^s}$$

сходится абсолютно в полуплоскости $\sigma > 1/2$. Далее, пусть

$$\Omega = \prod_{p\in\mathbb{P}} \gamma_p,$$

где $\gamma_p = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ для всех $p \in \mathbb{P}$. С топологией произведения и операцией поточечного умножения тор Ω является компактной топологической абелевой группой. Через $\mathscr{B}(\mathbb{X})$ обозначим борелевское σ-поле пространства $\mathbb{X}$. Тогда на $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega))$ существует вероятностная мера Хаара m_H и получаем вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), m_H)$. Через $H(D)$ обозначим пространство аналитических в полосе D функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах, через $\omega(p)$ — p-ю компоненту элемента $\omega \in \Omega$, $p \in \mathbb{P}$, и на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), m_H)$ определим $H(D)$-значный случайный элемент

$$\zeta(s,\omega) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \Bigl(1 - \frac{\omega(p)}{p^s}\Bigr)^{-1}.$$

В [2] было получено следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Предположим, что $u_T \to \infty$ и $u_T \ll T^2$ при $T \to \infty$. Пусть $K \in \mathscr{K}$ и $f(s) \in H_0(K)$. Тогда, за исключением самое большее счетного множества значений $\varepsilon > 0$, существует предел*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta_{u_T}(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\}$$
$$= m_H\{\omega \in \Omega : \sup_{s\in K} |\zeta(s,\omega) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Неравенство теоремы 1.1 показывает, что существует $T_0 = T_0(f,K,\varepsilon) > 0$ такое, что при $T \geq T_0$ имеется бесконечно много сдвигов $\zeta_{u_T}(s+i\tau)$, приближающих данную функцию $f(s) \in H_0(K)$.

Теорема 1.1, как и теорема Воронина, имеет тот недостаток, что неизвестны значения τ в приближающих сдвигах $\zeta_{u_T}(s+i\tau)$. Такие значения τ легче найти в узких областях. Это замечание приводит к задаче переноса теоремы 1.1 на случай короткого промежутка, т. е. к описанию плотности множества приближающих сдвигов на промежутках длины $o(T)$ при $T \to \infty$. Между прочим, в беседах с автором сам первооткрыватель универсальности дзета-функций Сергей Михайлович Воронин настаивал на необходимости указать короткий промежуток, содержащий τ с приближающим свойством.

Легко видеть, что в условиях теоремы 1.1, за исключением самое большее счетного множества значений $\varepsilon > 0$, существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\{\tau \in [T, 2T] : \sup_{s\in K} |\zeta_{u_T}(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\} \\ = m_H\{\omega \in \Omega : \sup_{s\in K} |\zeta(s,\omega) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

В последнем неравенстве плотность множества приближающих сдвигов изучается на промежутке длины T. Имеет место более сильное следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Предположим, что* $T^{1/3}(\log T)^{26/15} \le H \le T$, $u_T \to \infty$ *и* $u_T \ll \exp\{o(T)\}$ *при* $T \to \infty$. *Пусть* $K \in \mathscr{K}$ *и* $f(s) \in H_0(K)$. *Тогда, за исключением самое большее счетного множества значений* $\varepsilon > 0$, *существует предел*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{H} \operatorname{meas}\{\tau \in [T, T+H] : \sup_{s\in K} |\zeta_{u_T}(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\} \\ = m_H\{\omega \in \Omega : \sup_{s\in K} |\zeta(s,\omega) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Доказательство теоремы 1.2 основано на применении оценки для второго момента дзета-функции Римана на коротких промежутках, а также на модификации теоремы универсальности в терминах плотности.

§ 2. Близость между $\zeta(s)$ и $\zeta_{u_T}(s)$

Лемма 2.1. *Предположим, что* $T^{1/3}(\log T)^{26/15} \le H \le T$. *Тогда при фиксированном* $\sigma \in (1/2, 1)$ *равномерно по* H *имеет место оценка*

$$\int_{T-H}^{T+H} |\zeta(\sigma+it)|^2\,dt \ll_\sigma H.$$

Лемма вытекает из общей оценки для второго момента в терминах экспоненциальных пар, полученной в [3], и использовалась в [4].

Лемма 2.2. *Предположим, что* $T^{1/3}(\log T)^{26/15} \le H \le T$, $u_T \to \infty$ *и* $u_T \ll \exp\{o(T)\}$ *при* $T \to \infty$. *Тогда для всякого компактного множества* $K \subset D$ *имеет место равенство*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{H} \int_{T}^{T+H} \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - \zeta_{u_T}(s+i\tau)|\,d\tau = 0.$$

Доказательство. Известно, что при фиксированном $\sigma \in (1/2, 1)$

$$\int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma+i\tau)|^2\,d\tau \ll_\sigma T. \tag{1}$$

Пусть $\tau \in \mathbb{R}$. Если $H + |\tau| > T$, то $T + H + |\tau| < 2(H + |\tau|)$ и $T - H - |\tau| > -2(H + |\tau|)$. Тем самым в силу (1)

$$\int\limits_{T-H}^{T+H} |\zeta(\sigma + it + i\tau)|^2 \, dt \ll \int\limits_{T-H-|\tau|}^{T+H+|\tau|} |\zeta(\sigma + it)|^2 \, dt$$

$$\ll \int\limits_{-2(H+|\tau|)}^{2(H+|\tau|)} |\zeta(\sigma + it)|^2 \, dt \ll_\sigma H + |\tau|. \quad (2)$$

Если $H + |\tau| \le T$, то из леммы 2.1 имеем

$$\int\limits_{T-H-|\tau|}^{T+H+|\tau|} |\zeta(\sigma + it)|^2 \, dt \ll_\sigma H + |\tau|.$$

Отсюда и из (2) получаем, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $H \ge 1$

$$\frac{1}{H} \int\limits_{T}^{T+H} |\zeta(\sigma + it + i\tau)| \, dt \le \left(\frac{1}{H} \int\limits_{T}^{T+H} |\zeta(\sigma + it + i\tau)|^2 \, dt \right)^{1/2} \ll_\sigma 1 + |\tau|. \quad (3)$$

Пусть $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера и

$$l_u(s) = \frac{s}{\theta} \Gamma\left(\frac{s}{\theta}\right) u^s.$$

Тогда для функции $\zeta_{u_T}(s)$, $s \in D$, имеет место интегральное представление [5]

$$\zeta_{u_T}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\theta - i\infty}^{\theta + i\infty} \zeta(s + z) l_{u_T}(z) \frac{dz}{z}.$$

Отсюда и из теоремы о вычетах (полюса в точках $z = 0$ и $z = 1 - s$) находим, что при $\theta_1 < 0$

$$\zeta_{u_T}(s) - \zeta(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\theta_1 - i\infty}^{\theta_1 + i\infty} \zeta(s + z) l_{u_T}(z) \frac{dz}{z} + R_{u_T}(s), \quad (4)$$

где $R_{u_T}(s) = \frac{l_{u_T}(1-s)}{1-s}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ такое, чтобы для всех $s = \sigma + it \in K$ выполнялись неравенства $1/2 + 2\varepsilon \le \sigma \le 1 - \varepsilon$. Полагая

$$\theta_1 = 1/2 + \varepsilon - \sigma,$$

имеем $\theta_1 < 0$ для всех $s \in K$. Тогда из равенства (4) следует, что для всех $s \in K$

$$\zeta_{u_T}(s + i\tau) - \zeta(s + i\tau)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \zeta(\sigma + it - \sigma + 1/2 + \varepsilon + i\tau + iv) \frac{l_{u_T}(1/2 + \varepsilon - \sigma + iv)}{1/2 + \varepsilon - \sigma + iv} \, dv + R_{u_T}(s + i\tau).$$

Отсюда, заменяя $t+v$ на v, получаем, что для всех $s \in K$

$$\zeta_{u_T}(s+i\tau) - \zeta(s+i\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(1/2+\varepsilon+i\tau+iv)\frac{l_{u_T}(1/2+\varepsilon-s+iv)}{1/2+\varepsilon-s+iv}\,dv + R_{u_T}(s+i\tau)$$
$$\ll \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta(1/2+\varepsilon+i\tau+iv)| \sup_{s\in K}\left|\frac{l_{u_T}(1/2+\varepsilon-s+iv)}{1/2+\varepsilon-s+iv}\right| dv + \sup_{s\in K}|R_{u_T}(s+i\tau)|.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{H}\int_T^{T+H} \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau)-\zeta_{u_T}(s+i\tau)|\,d\tau$$
$$\ll \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{H}\int_T^{T+H}|\zeta(1/2+\varepsilon+i\tau+iv)|\,d\tau\right)\sup_{s\in K}\left|\frac{l_{u_T}(1/2+\varepsilon-s+iv)}{1/2+\varepsilon-s+iv}\right| dv$$
$$+ \frac{1}{H}\int_T^{T+H}\sup_{s\in K}|R_{u_T}(s+i\tau)|\,d\tau \overset{\mathrm{def}}{=} I_1+I_2. \tag{5}$$

Известно, что для гамма-функции имеет место оценка

$$\Gamma(\sigma+it) \ll \exp\{-c|t|\}, \quad c>0,$$

равномерная в любой полосе $\sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2$, поэтому из определения функции $l_{u_T}(s)$ следует, что для $s \in K$

$$\frac{l_{u_T}(1/2+\varepsilon-s+iv)}{1/2+\varepsilon-s+iv} \ll_\theta u_T^{1/2+\varepsilon-\sigma}|\Gamma((1/\theta)(1/2+\varepsilon-\sigma-it+iv))|$$
$$\ll_\theta u_T^{-\varepsilon}\exp\{-(c/\theta)|t-v|\} \ll_{\theta,K} u_T^{-\varepsilon}\exp\{-c_1|v|\}, \quad c_1>0. \tag{6}$$

Аналогично находим, что для $s \in K$

$$\frac{l_{u_T}(1-s-i\tau)}{1-s-i\tau} \ll_\theta u_T^{1-\sigma}\exp\{-(c/\theta)|t+\tau|\} \ll_{\theta,K} u_T^{1/2-2\varepsilon}\exp\{-c_2|\tau|\}, \quad c_2>0. \tag{7}$$

Из оценок (3) и (6) получаем

$$I_1 \ll_{\varepsilon,\theta,K} u_T^{-\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-c_1|v|\}(1+|v|)\,dv \ll_{\varepsilon,\theta,K} u_T^{-\varepsilon},$$

а из (7) —

$$I_2 \ll_{\theta,K} u_T^{1/2-2\varepsilon}\frac{1}{H}\int_T^{T+H}\exp\{-c_2|\tau|\}\,d\tau \ll_{\theta,K} u_T^{1/2-2\varepsilon}\exp\{-c_2T\}.$$

Поскольку $u_T \ll \exp\{o(T)\}$, последние две оценки и (5) дают утверждение леммы.

§ 3. Предельные теоремы

Пусть P и P_n, $n \in \mathbb{N}$, — вероятностные меры на $(\mathbb{X}, \mathscr{B}(\mathbb{X}))$. Напомним, что P_n при $n \to \infty$ слабо сходится к P, если для всякой действительной непрерывной ограниченной функции g на $\mathbb{X}$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{X}} g\, dP_n = \int\limits_{\mathbb{X}} g\, dP.$$

Также напомним одно полезное свойство слабой сходимости мер. Пусть P — вероятностная мера на $(\mathbb{X}, \mathscr{B}(\mathbb{X}))$ и $h : \mathbb{X} \to \mathbb{X}_1$ — $(\mathscr{B}(\mathbb{X}), \mathscr{B}(\mathbb{X}_1))$-измеримое отображение. Тогда мера P индуцирует единственную меру Ph^{-1} на $(\mathbb{X}_1, \mathscr{B}(\mathbb{X}_1))$, определяемую равенством

$$Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A), \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1).$$

Имеет место следующее утверждение [5].

Лемма 3.1. *Пусть P и P_n, $n \in \mathbb{N}$, — вероятностные меры на $(\mathbb{X}, \mathscr{B}(\mathbb{X}))$, а $h : \mathbb{X} \to \mathbb{X}_1$ — непрерывное отображение. Предположим, что P_n при $n \to \infty$ слабо сходится к P. Тогда $P_n h^{-1}$ при $n \to \infty$ слабо сходится к Ph^{-1}.*

Пусть P — вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Тогда соответствующая функция распределения $F(x)$ определяется равенством

$$F(x) = P(-\infty, x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функция распределения $F_n(x)$ при $n \to \infty$ слабо сходится к функции распределения $F(x)$, если

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

для всех точек непрерывности x функции $F(x)$. Известно, что слабая сходимость вероятностных мер на $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ эквивалентна слабой сходимости соответствующих функций распределения.

Для множеств $A \in \mathscr{B}(H(D))$ определим

$$P_{T,H}(A) = \frac{1}{H} \operatorname{meas}\{\tau \in [T, T+H] : \zeta(s + i\tau) \in A\}.$$

Пусть P_ζ — распределение случайного элемента $\zeta(s, \omega)$, т. е.

$$P_\zeta(A) = m_H\{\omega \in \Omega : \zeta(s, \omega) \in A\}, \quad A \in \mathscr{B}(H(D)).$$

В [4] была получена такая предельная теорема.

Лемма 3.2. *Предположим, что $T^{1/3}(\log T)^{26/15} \le H \le T$. Тогда $P_{T,H}$ при $T \to \infty$ слабо сходится к P_ζ.*

При применении предельных теорем в доказательстве универсальности также требуется некоторая информация о предельной мере. Пусть $\mathbb{X}$ — сепарабельное пространство, а P — вероятностная мера на $(\mathbb{X}, \mathscr{B}(\mathbb{X}))$. Напомним, что носителем меры P называется минимальное замкнутое множество $S_P \subset \mathbb{X}$ такое, что $P(S_P) = 1$. Множество S_P состоит из всех точек $x \in \mathbb{X}$, для всякой открытой окрестности G которых имеет место неравенство $P(G) > 0$.

Пусть $S = \{g \in H(D) : g(s) \ne 0 \text{ или } g(s) \equiv 0\}$.

Лемма 3.3. *Носителем меры P_ζ является множество S.*

Доказательство леммы можно найти, например, в [6].

§ 4. Модификация универсальности функции $\zeta(s)$

Для доказательства теоремы 1.2 нужна аналогичная теорема для самой функции $\zeta(s)$. Такая теорема содержится в [4], но мы предложим новое простое ее доказательство.

Теорема 4.1. *Предположим, что* $T^{1/3}(\log T)^{26/15} \leq H \leq T$. *Пусть* $K \in \mathscr{K}$ *и* $f(s) \in H_0(K)$. *Тогда, за исключением самое большее счетного множества значений* $\varepsilon > 0$, *существует предел*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{H} \operatorname{meas}\{\tau \in [T, T+H] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\}$$
$$= m_H\{\omega \in \Omega : \sup_{s\in K} |\zeta(s,\omega) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Доказательство. Положительность предела уже известна, можно воспользоваться, например, теоремой 1.1, поэтому остается доказать только существование этого предела.

Пусть отображение $h : H(D) \to \mathbb{R}$ определено формулой

$$h(g) = \sup_{s\in K} |g(s) - f(s)|, \quad g \in H(D).$$

Тогда h непрерывно, поэтому из лемм 3.2 и 3.1 следует, что $P_{T,H}h^{-1}$ при $T \to \infty$ слабо сходится к $P_\zeta h^{-1}$. Однако выше мы заметили, что слабая сходимость мер на $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ эквивалентна слабой сходимости соответствующих функций распределения, т. е. получаем равенство теоремы. Поскольку функция распределения может иметь не более чем счетное множество точек разрыва, теорема доказана.

При доказательстве положительности предела в теореме 4.1 используется теорема Мергеляна о приближении аналитических функций многочленами [7], из которой следует, что если $K \subset \mathbb{C}$ — компактное множество, обладающее связным дополнением, а $g(s)$ — непрерывная в K и аналитическая внутри K функция, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $p_\varepsilon(s)$ такой, что

$$\sup_{s\in K} |g(s) - p_\varepsilon(s)| < \varepsilon.$$

В теореме 4.1 рассматривается функция $f(s)$ только на множестве K. Если потребовать, чтобы функция $f(s)$ была аналитической и не имела нулей в D, то можно отказаться от принадлежности множества K классу $\mathscr{K}$. Действительно, в этом случае $f(s)$ в силу леммы 3.3 является элементом носителя меры P_ζ. Следовательно, для любого компактного множества $K \subset D$ множество

$$\{g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon\}$$

является открытой окрестностью элемента носителя, поэтому

$$m_H\{\omega \in \Omega : \sup_{s\in K} |\zeta(s,\omega) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Таким образом, имеем следующую модификацию теоремы 4.1.

Теорема 4.2. *Предположим, что* $T^{1/3}(\log T)^{26/15} \leq H \leq T$. *Пусть* $K \subset D$ *— компактное подмножество, а* $f(s)$ *— функция, аналитическая и не имеющая нулей в* D. *Тогда имеет место утверждение теоремы* 4.1.

§ 5. Доказательство теоремы 1.2

Теорему 1.2 выведем из теоремы 4.1, используя при этом лемму 2.2. Для этой цели применим метод характеристических функций. Напомним, что характеристическая функция $\varphi(v)$ функции распределения $F(x)$ определяется интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ivx}\,dF(x), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Известна непрерывная связь между функциями распределения и соответствующими характеристическими функциями. Более точно, имеет место следующее хорошо известное утверждение. Характеристическую функцию функции распределения $F(x)$ будем обозначать через $\varphi(v)$.

Лемма 5.1. *Предположим, что $F_n(x)$ при $n \to \infty$ слабо сходится к $F(x)$. Тогда $\varphi_n(v)$ при $n \to \infty$ сходится к $\varphi(v)$. Эта сходимость равномерна в каждом конечном интервале.*

Обратно, пусть $\varphi_n(v)$ при $n \to \infty$ сходится к функции $\varphi(v)$, непрерывной в точке $v = 0$. Тогда существует такая функция распределения $F(x)$, что $F_n(x)$ при $n \to \infty$ слабо сходится к $F(x)$. В этом случае $\varphi(v)$ является характеристической функцией функции распределения $F(x)$.

Доказательство теоремы 1.2. Определим функции распределения

$$F_{T,H}(\varepsilon) = \frac{1}{H}\,\mathrm{meas}\{\tau \in [T, T+H] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\},$$

$$\widehat{F}_{T,H}(\varepsilon) = \frac{1}{H}\,\mathrm{meas}\{\tau \in [T, T+H] : \sup_{s\in K} |\zeta_{u_T}(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\},$$

$$F(\varepsilon) = m_H\{\omega \in \Omega : \sup_{s\in K} |\zeta(s,\omega) - f(s)| < \varepsilon\}.$$

Тогда из теоремы 4.1 (и ее доказательства) имеем, что $F_{T,H}(\varepsilon)$ при $T \to \infty$ слабо сходится к $F(\varepsilon)$. Отсюда и леммы 5.1 следует, что

$$\varphi_{T,H}(v) = \varphi(v) + o(1), \quad T \to \infty, \tag{8}$$

равномерно для $|v| \le C$ при любом $0 < C < \infty$. Из определения функций распределения $F_{T,H}(\varepsilon)$ и $\widehat{F}_{T,H}(\varepsilon)$ находим

$$\widehat{\varphi}_{T,H}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varepsilon v}\,dF_{T,H}(\varepsilon) = \frac{1}{H}\int_{T}^{T+H} \exp\{iv \sup_{s\in K} |\zeta_{u_T}(s+i\tau) - f(s)|\}\,d\tau$$

и

$$\varphi_{T,H}(v) = \frac{1}{H}\int_{T}^{T+H} \exp\{iv \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)|\}\,d\tau.$$

Отсюда

$$\widehat{\varphi}_{T,H}(v) = \varphi_{T,H}(v) + \frac{1}{H}\int_{T}^{T+H} \Bigl(\exp\{iv \sup_{s\in K} |\zeta_{u_T}(s+i\tau) - f(s)|\} - \exp\{iv \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)|\}\Bigr)\,d\tau.$$

Следовательно, в силу неравенства $|e^{iv}-1| \le |v|$, справедливого для всех $v \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\varphi}_{T,H}(v) - \varphi_{T,H}(v)$$
$$\le \frac{1}{H} \int\limits_T^{T+H} \left| \exp\{iv(\sup_{s\in K} |\zeta_{u_T}(s+i\tau) - f(s)| - \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)|)\} - 1\right| d\tau$$
$$\le \frac{|v|}{H} \int\limits_T^{T+H} \left| \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| - \sup_{s\in K} |\zeta_{u_T}(s+i\tau) - f(s)|\right| d\tau.$$

Используя неравенство $\big|\sup|a| - \sup|b|\big| \le \sup|a-b|$, $a,b \in \mathbb{C}$, и лемму 2.2, отсюда получаем, что равномерно для $|v| \le C$

$$\widehat{\varphi}_{T,H}(v) = \varphi_{T,H}(v) + o(1), \quad T \to \infty,$$

что вместе с (8) доказывает, что

$$\widehat{\varphi}_{T,H}(v) = \varphi(v) + o(1), \quad T \to \infty,$$

равномерно для $|v| \le C$, поэтому лемма 5.1 показывает, что $\widehat{F}_{T,H}(\varepsilon)$ при $T \to \infty$ слабо сходится к $F(\varepsilon)$. Теорема доказана.

Если вместо теоремы 4.1 воспользоваться теоремой 4.2, то получим следующий вариант теоремы 1.2.

Теорема 5.2. *Предположим, что* $T^{1/3}(\log T)^{26/15} \le H \le T$, $u_T \to \infty$ *и* $u_T \ll \exp\{o(T)\}$ *при* $T \to \infty$. *Пусть* $K \subset D$ *— компактное подмножество, а* $f(s)$ *— функция, аналитическая и не имеющая нулей в* D. *Тогда имеет место утверждение теоремы* 1.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воронин С. М.* Теорема об «универсальности» дзета-функции Римана // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1975. Т. 39, № 3. С. 475–486.
2. *Laurinčikas A.* Approximation of analytic functions by an absolutely convergent Dirichlet series // Arch. Math. 2021. V. 117, N 1. P. 53–63.
3. *Ivič A.* The Riemann zeta-function. New York: John Wiley & Sons, 1985.
4. *Laurinčikas A.* Universality of the Riemann zeta-function in short intervals // J. Number Theory. 2019. V. 204. P. 279–295.
5. *Laurinčikas A.* Limit theorems for the Riemann zeta-function. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1996.
6. *Billingsley P.* Convergence of probability measures. New York: Wiley, 1975.
7. *Мергелян С. Н.* Равномерное приближение функций комплексной переменной // Успехи мат. наук. 1952. Т. 7, № 2. С. 31–122.

Поступила в редакцию 11 июля 2021 г.
После доработки 8 августа 2021 г.
Принята к публикации 11 августа 2021 г.

Лауринчикас Антанас
Институт математики, факультет математики и информатики,
Вильнюский университет,
Наугардуко 24, LT-03225 Вильнюс, Литва
antanas.laurincikas@mif.vu.lt