Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
62 tomas, 2021, 80–85
https://doi.org/10.15388/LMR.2021.25231

Pseudo Herono trikampiai, kurių vienos arba dviejų kraštinių ilgių kvadratai – pirminiai skaičiai

Edmundas Mazėtis[a], **Grigorijus Melničenko**[b]

[a] *Matematikos institutas, Vilniaus universitetas*
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius
[b] *Švietimo akademija, Vytauto Didžiojo universitetas*
K. Donelaičio g. 58, LT-44248 Kaunas
El. paštas: edmundas.mazetis@mif.vu.lt; gmelnicenko@gmail.com

Įteiktas 2021 birželio 17; publikuotas 2021 gruodžio 20

Santrauka. Autoriai [4] straipsnyje apibrėžė pseudo Herono trikampio, kurio kraštinių ilgių kvadratai yra sveikieji skaičiai, o dviguba ploto reikšmė – irgi sveikasis skaičius, sąvoką. Šiame darbe nagrinėjamas atskiras tokių trikampių atvejis, kai dviejų jo kraštinių ilgių kvadratai yra $4k+1$ pavidalo pirminiai skaičiai. Įrodoma, kad bet kuriems dviems duotiesiems pavidalo $4k+1$ pavidalo pirminiams skaičiams egzistuoja pseudo Herono trikampis, kurio viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškuose, o dviejų kraštinių ilgių kvadratai lygūs tiems duotiesiems skaičiams. Be to įrodyta, kad tokių trikampių yra baigtinis skaičius. Taip pat įrodoma, kad bet kuriam duotajam pavidalo $4k+1$ pirminiam skaičiui egzistuoja lygiašoniai pseudo Herono trikampiai, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškai, jų šoninių kraštinių ilgių kvadratai lygūs duotajam skaičiui, o tokių trikampių yra baigtinis skaičius.

Raktiniai žodžiai: Herono trikampis; pseudo Herono trikampis; pirminiai skaičiai; dviejų sveikųjų skaičių kvadratų suma
AMS: 97F50, 97F60, 97C70

1 Įvadas ir rezultatų formulavimas

Gerai žinoma Ferma teorema teigia, kad kiekvienas pavidalo $4k+1$ pirminis skaičius p išreiškiamas dviejų sveikųjų skaičių kvadratų suma $p = a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{Z}$, be to išraiška $p = a^2 + b^2$ yra vienintelė (jei nekreipiame dėmesio į skaičių a ir b sukeitimą vietomis ir jų ženklų kombinacijas). Ferma šį faktą pavadino „fundamentaliąja stačiųjų trikampių teorema“ (“the fundamental theorem on right-angled triangles”)

[2, 107 psl.], [1, 119 psl.], [5]. Iš šios teoremos seka, kad egzistuoja vienintelis statusis trikampis, kurio įžambinės ilgis lygus $\sqrt{p}$, o statinių ilgiai yra sveikieji skaičiai.

Apibrėšime pseudo Herono trikampių sąvoką, kurios atskiras atvejis yra Herono trikampiai.

1 apibrėžimas. Trikampis, kurio kraštinių ilgių kvadratai yra sveikieji skaičiai, o dviguba ploto reikšmė – irgi sveikasis skaičius, vadinamas pseudo Herono trikampiu.

Pažymėtina, kad mokyklinėje geometrijoje dažnai susiduriama su pseudo Herono trikampiais. Pavyzdžiui, trikampis, kurio kraštinės lygios Herono trikampio pusiaukraštinėms, arba trikampis, kurio viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškai, yra pseudo Herono trikampiai. Statusis trikampis, kurio statinių ilgiai – sveikieji skaičiai, irgi yra atskiras pseudo Herono trikampio atvejis.

Pagrindinius šio darbo rezultatus išreiškia dvi teoremos:

1 teorema. *Bet kuriems dviem duotiesiems $4k+1$ pavidalo pirminiams skaičiams egzistuoja lygiai aštuoni pseudo Herono trikampiai, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškuose, dviejų kraštinių ilgių kvadratai lygūs tiems duotiesiems skaičiams.*

2 teorema. *Bet kuriam duotajam pavidalo $4k+1$ pirminiam skaičiui egzistuoja lygiai penki lygiašoniai pseudo Herono trikampiai, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškai, jų šoninių kraštinių ilgių kvadratai lygūs duotajam skaičiui.*

2 Pagrindinių rezultatų įrodymas

3 teorema [Ferma]. *Bet kuriam duotajam pavidalo $4k+1$ pirminiam skaičiui p egzistuoja vienintelis statusis pseudo Herono trikampis, kurio įžambinės ilgio kvadratas lygus p, o statinių ilgiai yra sveikieji skaičiai. Tokio trikampio viršūnės gali būti patalpintos gardelės $\mathbb{Z}^2$ taškuose.*

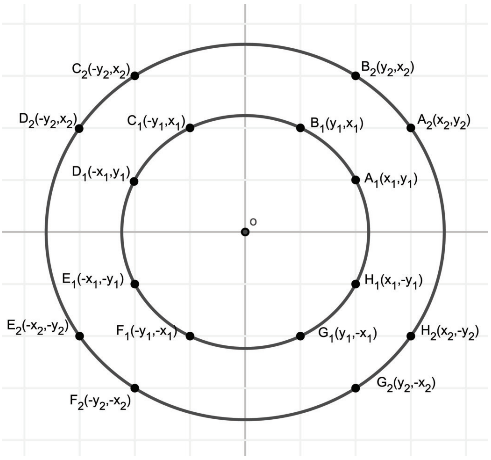
Teoremos įrodymą galima rasti [2] ir [1] darbuose.

Plokštumoje nagrinėkime stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą ir joje sveikaskaitę gardelę $\mathbb{Z}^2$.

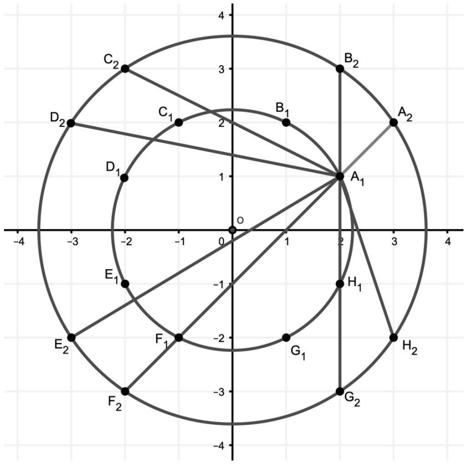
2 apibrėžimas. Sakykime, kad trikampio OAC viršūnės yra sveikaskaitės gardelės $\mathbb{Z}^2$ taškuose, o taškas O yra koordinačių sistemos pradžios taškas. Tuomet kraštinę AC vadinsime trikampio OAC pagrindu.

Teoremos 1 įrodymas. Pirmiausia teoremą įrodysime, kai viena trikampio viršūnė yra koordinačių pradžios taške O. Sakykime, kad p_1 ir p_2 yra du skirtingi pavidalo $4k+1$ pirminiai skaičiai, tai pagal Ferma teoremą teisingos lygybės $p_1 = x_1^2 + y_1^2$ ir $p_2 = x_2^2 + y_2^2$, čia $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, $x_2 > 0$, $y_2 > 0$ – sveikieji skaičiai. Sakykime, kad $p_1 < p_2$. Sveikaskaitėje gardelėje $\mathbb{Z}^2$ pažymėkime taškus, kuriuos pavadinkime žemutine grupe (1 pav. atitinka atvejį $p_1 = 5$):

$$A_1(x_1, y_1), B_1(y_1, x_1), C_1(-y_1, x_1), D_1(-x_1, y_1),$$
$$E_1(-x_1, -y_1), F_1(-y_1, -x_1), G_1(y_1, -x_1), H_1(x_1, -y_1).$$



1 pav.



2 pav.

Pastebėkime, kad

$$\sqrt{p_1} = OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1 = OE_1 = OF_1 = OG_1 = OH_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Toje pačioje gardelėje $\mathbb{Z}^2$ pažymėkime taškus, kuriuos pavadinsime viršutine grupe:

$$A_2(x_2, y_2), B_2(y_2, x_2), C_2(-y_2, x_2), D_2(-x_2, y_2),$$
$$E_2(-x_2, -y_2), F_2(-y_2, -x_2), G_2(y_2, -x_1), H_1(x_2, -y_2).$$

Akivaizdu, kad toje pačioje gardelėje $\mathbb{Z}^2$ pažymėkime taškus, kuriuos pavadinsime viršutine grupe:

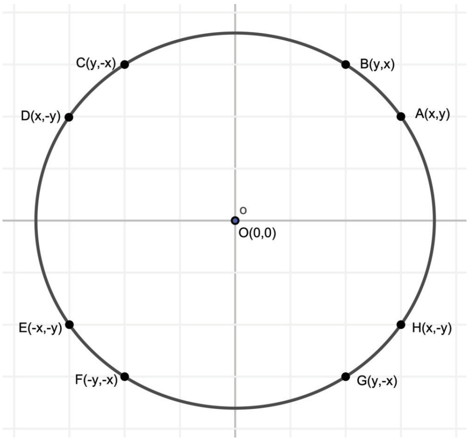
$$\sqrt{p_2} = OA_2 = OB_2 = OC_2 = OD_2 = OE_2 = OF_2 = OG_2 = OH_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

Pastebėkime, kad atstumai nuo bet kurio žemutinės grupės taško iki bet kurio viršutinės grupės taško yra lygūs vienam iš šių skaičių.

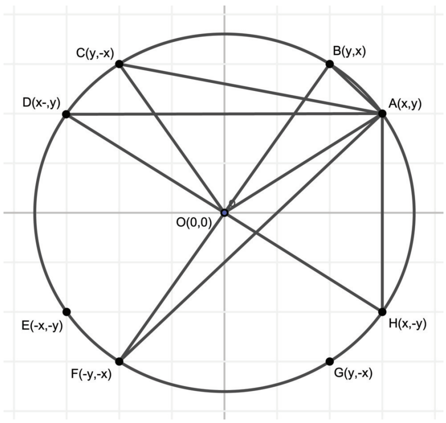
$$\begin{aligned}
\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2},\\
\sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2x_1x_2 - 2y_1y_2},\\
\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 + 2y_1y_2},\\
\sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2},\\
\sqrt{(x_2 - y_1)^2 + (y_2 - x_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + y_1^2 + x_2^2 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2},\\
\sqrt{(x_2 + y_1)^2 + (y_2 - x_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_1 - 2x_1y_2},\\
\sqrt{(x_2 - y_1)^2 + (y_2 + x_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + y_1^2 + x_2^2 - 2x_2y_1 + 2x_1y_2},\\
\sqrt{(x_2 + y_1)^2 + (y_2 + x_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Nesunkiai patikriname, kad visi šie 8 atstumai yra skirtingi. Iš čia seka, kad jungdami atkarpomis žemutinės grupės taškus su viršutinės grupės taškais, gauname trikampių pagrindus (2 pav. nubrėžti tie pagrindai, kai $p_1 = 5$, $p_2 = 13$, o visi pagrindai išeina iš taško $A_1(x_1, y_1)$). Iš (1) lygybių gauname, kad visi tie 8 trikampiai yra skirtingi. Taigi gavome 8 skirtingus trikampius, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės $\mathbb{Z}^2$ taškai, o duotieji pirminiai skaičiai p_1 ir p_2 yra tų trikampių kraštinių ilgių kvadratai. Šie 8 trikampiai yra pseudo Herono trikampiai [4].

Dabar sakykime, kad MNK yra trikampis, kurio viršūnės yra sveikaskaitės gardelės $\mathbb{Z}^2$ taškuose, $MN = \sqrt{p_1}$, $MK = \sqrt{p_2}$, o viršunė M nesutampa su koordinačių sistemos pradžios tašku O. Atlikime tiesioginį plokštumos judesį, kuriuo taškai M ir N atvaizduojami atitinkamai į taškus O ir A_1. Kadangi $MN = OA_1 = \sqrt{p_1}$, tai toks judesys egzistuoja ir yra vienintelis. Sakykime, kad taško K vaizdas yra sveikaskaitės gardelės taškas $L(x, y)$. Kadangi $x^2 + y^2 = p_2$, tai iš Ferma teoremos išplaukia, kad taškas L sutampa su vienu iš viršutinės grupės taškų. $\square$



3 pav.



4 pav.

Teoremos 2 įrodymas. Iš Ferma teoremos seka, kad bet kuriam pavidalo $4k + 1$ pirminiam skaičiui p teisinga lygybė $p = x^2 + y^2$, čia $x > 0$, $y > 0$ – sveikieji skaičiai, ir $x > y$. Sveikaskaitėje gardelėje $\mathbb{Z}^2$ pažymėkime taškus

$$\begin{gathered} A(x, y), B(y, x), C(-y, x), D(-x, y), \\ E(-x, -y), F(-y, -x), G(y, -x), H(x, -y). \end{gathered} \tag{2}$$

(3 pav. brėžinys atliktas, kai $p = 13$). Akivaizdu, kad

$$\sqrt{p} = OA = OB = OC = OD = OE = OF = OG = OH = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3}$$

Nesunkiai randame, kad skirtingi atstumai tarp bet kurių dviejų iš taškų (2) yra lygūs vienam iš šių skaičių:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(y-x)^2+(x-y)^2} &= \sqrt{2}(x-y),\\
\sqrt{(y-x)^2+(x+y)^2} &= \sqrt{2(x^2+y^2)},\\
\sqrt{(y+x)^2+(x+y)^2} &= \sqrt{2}(x+y),\\
\sqrt{(x+x)^2+(y+y)^2} &= 2\sqrt{(x^2+y^2)},\\
\sqrt{(x+x)^2+(y-y)^2} &= 2x,\\
\sqrt{(x-x)^2+(y+y)^2} &= 2y.
\end{aligned} \tag{4}$$

Sujungę koordinačių pradžios tašką $O(0,0)$ atkarpomis su taškais (2), gauname lygiašonius trikampius, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės $\mathbb{Z}^2$ taškai, o jų dviejų šoninių kraštinių kvadratai lygūs duotajam pirminiam skaičiui p. Atstumas, lygus skaičiui $2\sqrt{x^2+y^2}$, negali būti lygiašonio trikampio pagrindu, nes iš (3) lygybės gauname, kad jo viršūnės yra vienoje tiesėje. Iš (4) lygybių išplaukia, kad yra 5 skirtingi lygiašoniai trikampiai, kurių šoninių kraštinių kvadratai lygūs p, o viršūnės yra gardelės $\mathbb{Z}^2$ taškai. 4 pav. parodyti tie penki trikampiai, kurių pagrindai, išeina iš gardelės taško $A(x,y)$, kai $p=13$. Šie 5 trikampiai yra pseudo Herono trikampiai [4].

Analogiški samprotavimai kaip ir 1 teoremos įrodyme leidžia daryti išvadą, kad bet kuris lygiašonis trikampis, kurio viršūnės yra gardelės $\mathbb{Z}^2$ taškai, o dviejų šoninių kraštinių ilgiai lygūs $\sqrt{p}$, yra lygus vienam iš gautųjų penkių trikampių. □

Iš 1 teoremos įrodymo neišplaukia, kad pseudo Herono trikampiai, kurių dviejų kraštinių kvadratai yra duotieji pirminiai skaičiai, yra tik tie 8 trikampiai, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškuose. Gali būti pseudo Herono trikampių, kurie pasižymi minėtomis savybėmis, bet nėra tokios sveikaskaitės gardelės, kurios taškai būtų tų trikampių viršūnės. Analogiškai iš 2 teoremos įrodymo neišplaukia, kad lygiašonių pseudo Herono trikampių, kurių šoninių kraštinių ilgio kvadratas yra duotasis pirminis skaičius, yra tik 5 trikampiai, kurių viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškuose, nes gali būti trikampių, tenkinančių šią salygą, kurių viršūnės nėra sveikaskaitės gardelės taškuose.

Autoriai [4] darbe įrodė, kad bet kuriam pseudo Herono trikampiui egzistuoja panašus jam trikampis, kurio viršūnės yra gardelės $\mathbb{Z}^2$ taškuose. Yra žinoma, kad bet kurio Herono trikampio viršūnes galima patalpinti sveikaskaitės gardelės taškuose [3, 6]. Analogiška prielaida pseudo Herono trikampiams (žr. [4] darbo 1 problemą) yra neįrodyta. Jei šios prielaidos teiginys būtų teisingas, tuomet bet kuriems duotiems $4k+1$ pavidalo pirminiams skaičiams p_1 ir p_2 ($p_1 \neq p_2$) egzistuotų tik 8 pseudo Herono trikampiai, kurių dviejų kraštinių ilgių kvadratai būtų lygūs duotiesiems skaičiams. Taip pat bet kuriam $4k+1$ pavidalo pirminiam skaičiui p egzistuotų tik 5 skirtingi lygiašoniai pseudo Herono trikampiai, kurių šoninių kraštinių ilgių kvadratai būtų lygūs tam pirminiam skaičiui.

Literatūra

[1] H. Davenport. *Vysshaya Arifmetika.* FML, Moscow, 1965 (in Russian).

[2] H. Davenport. *Higher Arithmetic.* 8th ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[3] J.S. Marshall, A.R. Perlis. Heronian tetrahedra are lattice tetrahedra. *Amer. Math. Monthly*, **120**(2):140–149, 2013.

[4] E. Mazetis, G. Melničenko. Trikampio kampų kotangentų racionaliosios reikšmės. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **55**:84–89, 2014.

[5] D. Vella, A. Vella, J. Wolf. An extension of the fundamental theorem on rightangled triangles. *Math. Gazette*, **89**:237–244, 2005.

[6] P. Yiu. Heronian triangles are lattice triangles. *Amer. Math. Monthly*, **108**(3):261–263, 2001.

SUMMARY

Pseudo-Heronian triangles whose squares of the lengths of one or two sides are prime numbers

E. Mazėtis, G. Melnichenko

The authors introduced the concept of a pseudo-Heron triangle, such that squares of sides are integers, and the area is an integer multiplied by 2. The article investigates the case of pseudo-Heron triangles such that the squares of the two sides of the pseudo-Heron triangle are primes of the form $4k+1$. It is proved that for any two predetermined prime numbers of the form $4k+1$ there exist pseudo-Heron triangles with vertices on an integer lattice, such that these two primes are the sides of these triangles and such triangles have a finite number. It is also proved that for any predetermined prime number of the form $4k+1$, there are isosceles triangles with vertices on an integer lattice, such that this prime is equal to the values of two sides and there are only a finite number of such triangles.

Keywords: Heronian triangles; pseudo-Heronian triangles; prime numbers; sum of squares of two numbers