Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
62 tomas, 2021, 94–100
https://doi.org/10.15388/LMR.2021.xx

Dydis, skaičius ir mokyklinė matematika*

Rimas Norvaiša

Matematikos ir informatikos fakultetas, Vilniaus universitetas
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius
El. paštas: rimas.norvaisa@mif.vu.lt

Įteiktas 2021 rugsėjo 1; publikuotas 2021 gruodžio 20

Santrauka. Akademinėje matematikoje naudojami dydžio ir skaičiaus sąvokų apibrėžimai nėra tinkami mokyklinėje matematikoje dėl savo sudėtingumo mokinio kognityviniams gebėjimams. Straipsnyje svarstomi dydžių ir skaičių traktavimo būdai matematiniu samprotavimu grįstame mokyklinės matematikos turinyje.

Raktiniai žodžiai: mokyklinės matematikos turinys; dydis; skaičius; matavimai

AMS: 97F10

Įvadas

Šis tekstas apie sąvokų „dydis“ ir (realusis) „skaičius“ naudojimą mokyklinėje matematikoje. Svarstomi klausimai: kokia yra šių sąvokų svarba mokyklinės matematikos turinyje ir kaip šios sąvokos apibrėžiamos? Klausimai kyla rūpinantis matematikos sąvokų apibrėžimų tikslumu mūsų vadovėliuose.

Apskritai sąvokų svarbą matematikoje lemia ne tik tai, kad jomis nusakomi abstraktūs objektai. Dar svarbiau yra tai, kad matematikos objektai sąvokomis nusakomi vienareikšmiškai, o sąvokų rinkinys sudaro loginiais ryšiais susijusią hierarchinę struktūrą. Šie mokyklinės matematikos aspektai reikšmingi tada, kai siekiama vaikus supažindinti su matematinio mąstymo specifika. Tokia yra šio svarstymo prielaida.

Visų klasių mūsų matematikos vadovėliuose žodžiai „dydis“ ir „skaičius“ minimi ypač dažnai. Tačiau jų reikšmės paaiškinimą vargu ar rasime, o tuo labiau apibrėžimo. Dydis kartais laikomas ne matematine sąvoka. Tačiau matematiniame kontekste

* Finansavimą skyrė Lietuvos mokslo taryba (LMTLT), sutarties Nr. S-DNR-20-7.

„dydis“ ir „skaičius“ yra traktuojami sinonimiškai. Tausodami vietą tokias situacijas iliustruojančių pavyzdžių čia nepateikiame.

Akademinėje matematikoje skaičiaus ir dydžio sąvokos apibrėžiamos aksiomų pagalba bei konstruojamos naudojant ekvivalentumo klases. Mokyklinėje matematikoje tokios šių sąvokų apibrėžimo priemonės nėra tinkamos dėl jų kognityvinio sudėtingumo. Siekiant mokyklinę matematiką grįsti matematiniu samprotavimu, visos matematinės savokos turėtų būti aiškiai ir logiškai tvarkingai apibrėžiamos, bei suderintos su turiniu.

Straipsnyje primenamas sąvokų „dydis“ ir „skaičius“ vaidmuo matematikos evoliucijos eigoje siekiant pagrįsti jų svarbą mokyklinėje matematikoje. Po to aptariami jų apibrėžimo variantai.

1 Dydis ir skaičius matematikoje

Matematikos evoliucijos eigos, pradedant senovės graikų matematika ir baigiant šiuolaikine matematika, pagrindiniu bruožu laikyčiau matematikos objektų sampratos kaitą. Euklido „Pradmenų“ aksiomos buvo grindžiamos jų intuityviu akivaizdumu, suderinamu su realiame pasaulyje matomomis geometrinių objektų (dydžių) savybėmis. Šiuolaikinės matematikos aksiomos nutraukė šio tipo ryšį su realiuoju pasauliu ir matematinių objektų savybes grindžia tik tomis savybėmis, kurios išreiškiamos aksiomomis, nebandant jų susieti su realaus pasaulio reiškiniais. Matematika evoliucionavo nuo matematikos kaip mokslo apie kiekį į simbolinę matematiką, kai simboliai įgyja matematikos objektų vaidmenį (S. Stenlund [10]). Šioje istorijoje tiek dydis, tiek skaičius yra tos matematikos sąvokos, kurios geriausiai iliustruoja matematikos kaitą. Čia ir toliau laikomės iš Aristotelio „Metafizikos“ kildinamos terminų sampratos, pagal kurią kiekis (angl. *quantity*) yra skaičius (angl. *number*) arba dydis (angl. *magnitude*).

Skaičius buvo visą ko pradas Pitagoro pasaulėžiūroje. Tačiau istorija su nebendramačiais dydžiais pakeitė tokį skaičiaus statusą. Lyginant su aritmetika, Euklido „Pradmenyse“ dominavo geometrija. Šio veikalo nagrinėjimo objektai buvo dydžiai. Nagrinėti penkių rūšių dydžiai: tiesės atkarpos, plokštumos sritys, erdvinių figūrų paviršiai ir tūriai, bei kampai. Skirtingai nuo šiuolaikinės matematikos, senovės graikų matematikoje dydžiai neturėjo jokio ryšio su skaičiais. Senovės graikų požiūris į skaičius ir dydžius pasikeitė tik gerokai vėliau.

Realiųjų skaičių atsiradimas Vakarų kultūroje siejamas su flamandų matematiku ir inžinieriumi Simonu Stevinu (1548–1620). Jis pirmasis tarp matematikų atvirai neigė kai kuriuos Euklido „Pradmenų“ principus ir apibrėžimus. Stevino nuomone, skaičius yra tai, kas išreiškia ko nors kiekį, pavyzdžiui, dydžio matavimo rezultatas. Tokiam radikaliam požiūrio pasikeitimui galėjo turėti įtakos iš arabų ir indų atėję matematiniai tekstai, bei praktinės matematikos svarbos iškilimas.

Praėjus šimtmečiui po Stevino darbų, Newtono laikais skaičius jau naudojamas išreikšti bet kokių dydžių santykiui. Apie 1800 vis dar buvo įprasta matematiką laikyti „niekuo daugiau kaip mokslu apie kiekį“ (Euler, 1771). Tuo matematika siejama su realiu pasauliu ir taip vadinamais matematikos taikymais. Funkcijos ir netgi skaičiai buvo laikomi sąryšiais tarp dydžių; jų „egzistavimas“ grindžiamas akivaizdžiu egzistavimu tokių realaus pasaulio objektų, kaip fizikiniai dydžiai, laikas.

19 amžiaus pradžioje, B. Bolzano, A.-L. Cauchy, N.H. Abelio ir kitų matematikų darbų dėka, pradėjo ryškėti nauji matematikos pagrindų kontūrai. Jais tapo tuo, kas vadinama analizės „aritmetizacija“. Jos pagrindą sudarė loginis realiojo skaičiaus sampratos pagrindimas, kuris senovės graikų suformuotą aritmetikos ir geometrijos svarbos santykį pagaliau apvertė aukštyn kojomis. Pagrindinė „aritmetizacijos“ sprendžiama problema buvo klausimas kaip skaičių pagalba išreikšti intuityviai suprantamą (geometrinio) dydžio tolydumą. Šios veiklos viena iš pasekmių yra Dedekindo–Cantoro aksioma:

> Tarp realiųjų skaičių sistemos (aritmetinio kontinuumo) ir geometrinės tiesės (geometrinio kontinuumo) egzistuoja tvarką išsauganti abipus vienareikšmė atitiktis.

Tuo pačiu metu, kuriant loginius matematinės analizės pagrindus, „ontologinį įsipareigojimą“ skaičiaus sąvokai stengėsi išsaugoti G. Frege. Jis atmetė matematinės analizės redukavimą iki natūraliųjų skaičių ir bandė išsaugoti tradicinį požiūrį, kad realusis skaičius yra dydžių santykis [2]. Panašiu metu ir nepriklausomai kitokią dydžio sampratą 1901 metais pasiūlė O. Hölder'is. Euklido padarytas prielaidas apie dydžius performulavo kaip „matavimo aksiomas“. Panašią dydžio sąvoką apibrėžiančią aksiomų sistemą siūlo A.N. Kolmogorovas matematikos enciklopedijoje. Jei dydžių sistemoje D pasirinktume vienetinį dydį ℓ, tai visi kiti sistemos dydžiai a išreiškiami lygybe $a = \alpha\ell$, čia α teigiamas realusis skaičius.

2 Dydis ir skaičius mokyklinėje matematikoje

Mokyklinė matematika dar labiau komplikuoja dydžio ir skaičiaus sąvokų traktavimą. Aksiominės dydžio ir skaičiaus sampratos naudojamos simbolinėje matematikoje yra nepriimtinos mokyklinėje matematikoje dėl savo kognityvinio sudėtingumo. Pradiniame ugdyme stengiamasi remtis mokinio realiame pasaulyje įgyta patirtimi. Todėl dydis ir skaičius mokiniui aiškinami intuityviai ir vizualiai. Klausimas – kaip turėtų keistis sąvokų samprata vėlesnėse klasėse, kad baigiant mokyklą kiekvienas mokinys turėtų bent apytikrį simbolinės matematikos esminių bruožų supratimą?

Šiuolaikinė matematikos sąvokų sistemos kūrimo problema buvo sprendžiama nuo 18 amžiaus pabaigos iki 20 amžiaus pradžios ir motyvuojama universitetinėmis studijomis. Analogiška hierarchinės sąvokų struktūros mokyklinėje matematikoje konstravimo problema dar tik pradedama spręsti. Išsamią mokyklinės matematikos turinio versiją pastaruoju metu pasiūlė amerikiečių matematikas Hung-Hsi Wu ([11] – viena iš šešių šiai temai skirtų jo knygų). Ji apima pagrindinius matematikos teiginius tradiciškai priskiriamus mokyklinei matematikai ir skirta vadovėlių autoriams, matematikos mokytojams ir jų rengėjams. H.-H. Wu mokyklinės matematikos turinys yra toliau plėtojamas.

Skirtingai nuo akademinės matematikos, mokyklinė matematika yra priklausoma nuo požiūrių į mokymą ir mokymąsi. Kas ir kaip mokoma klasėje priklauso ir nuo psichologijos, didaktikos bei bendrosios edukologijos mokslų teorijų. Tai sudaro dar didesnį alternatyvių pasirinkimų spektrą. Priklausomybę nuo didaktinių pasirinkimų iliustruosime dydžio ir skaičiaus mokymu.

Lietuvoje, kaip ir daugelio kitų šalių mokyklose, matematikos mokymas prasideda nuo supažindinimo su nuosekliu skaičiavimu ir aritmetinių veiksmų su natūraliaisiais skaičiais atlikimu. Keliamas tikslas išugdyti kasdieniniame gyvenime naudingus įgūdžius. Mokymas grindžiamas mokinio turima patirtimi, skatinant jį ir sudarant sąlygas pačiam atrasti matematikos faktus ir sąvokas. Toks mokymo pasirinkimas aiškinamas progresyviosios pedagogikos ideologija pasiremiant konstruktyvizmo principais.

Kitokį pradinį matematikos mokymą siūlo V.V. Davydovo programa [1]. Pagal ją, nuo pirmosios dienos klasėje lyginami ir matuojami tolydūs dydžiai, tokie kaip ilgis, plotas, masė ir panašiai. Prie skaičiavimo ir veiksmų su skaičiais pereinama pirmųjų metų antroje pusėje. Realieji skaičiai ir veiksmai su jais Davydovo programoje grindžiami matavimais, o ne nuosekliu skaičiavimu. Panaši idėja, realaus skaičiaus kaip matavimo rezultato apibrėžimas, buvo naudojama vakarų Vokietijos mokyklose laikotarpiu 1960–1970 (H.-H. Steiner [9]).

Matematine prasme turime dvi priešingas skaičiaus sąvokos aiškinimo strategijas. Pirmoji jų prasideda diskrečių objektų skaičiavimu, pereinant prie veiksmų su trupmenomis, paliekant paskutinį perėjimą prie realiųjų skaičių nutylėtu. Antroji mokymo strategija prasideda atvirkščiai nuo tolydžiųjų dydžių, matuojamų realiaisiais skaičiais ir pereinant prie diskretaus atvejo vėliau. Abu mokymo būdai panašūs dviem aspektais: grindžiami aktyvia mokinių veikla ir realaus pasaulio kontekstu. Tačiau esmingai skiriasi požiūriu į sąvokų sampratą. Skirtumą paaiškina Vygotskio pasiūlytos spontaniškos sąvokos ir mokslinės sąvokos sampratos. Pirmoji formuojasi kai mokinys abstrahuoja (apibendrina) kasdieninės patirties savybes arba konkrečius atvejus; antroji vystosi dirbant su pačiomis savybėmis formaliame lygmenyje, panašiai kaip mokymasis žaisti šachmatais nagrinėjant žaidimo taisykles [8, 1].

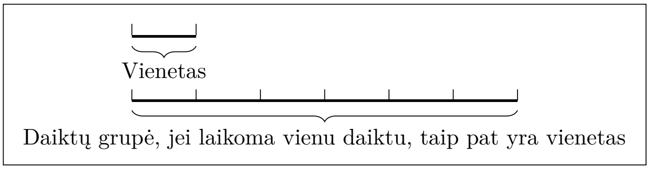
Dar vienas skirtingų strategijų aiškinant skaičiaus ir dydžių sampratas šaltinis yra G. Frege darbai. Jie pagrįsti požiūriu, kad skaičiaus samprata turėtų remtis „ontologiniu įsipareigojimu“, priešingu Dedekindo ir Cantoro loginiam realiojo skaičiaus sąvokos pagrindimui. Realusis skaičius apibrėžiamas dydžių santykiu. Šios idėjos yra plėtojamos vokiečių didaktikoje (H. Griesel [3]).

Lietuvoje dydžio sąvokos supratimo tikslumui mokykloje daug dėmesio savo darbuose skyrė Liubomiras Kulviecas. Savo darbe [4] jis rašė: „Su fizikinių dydžių sąvokų apibrėžimo problema nuolat susiduria kiekvienas fizikos dėstytojas â€ vidurinės mokyklos mokytojas, aukštosios mokyklos dėstytojas ar fizikos vadovėlio autorius. <...> Ir pasidaro taip, kad negalima rasti nė vieno fizikinių dydžių apibrėžimo būdo, kuris būtų visų pripažintas: vienos ir tos pačios sąvokos yra apibrėžiamos skirtingai, kartais net klaidingai“. Vėliau, nagrinėdamas geometrinės atkarpos a pavyzdį, Kulviecas jos ilgį $\ell(a)$ apibrėžia naudodamas ekvivalentumo klases sudarytas iš kongruenčių atkarpų [5]. Jis parodo, kad taip apibrėžtas ilgis tenkina A.N. Kolmogorovo suformuluotas dydžio aksiomas. Taigi, ilgis nėra skaičius. Tačiau, pasirinkus tokioje sistemoje kurį nors ilgį $\ell(e)$, bet kurios atkarpos a ilgį $\ell(a)$ galima išreikšti vieninteliu būdu: $\ell(a) = \alpha{\cdot}\ell(e)$, čia α teigiamas realusis skaičius. Jei $\ell(e)$ yra ilgio matavimo vienetas, tai realųjį skaičių α Kulviecas vadina atkarpos a ilgio skaitine reikšme. Su ilgio skaitine reikšme praktiškai susiduria mokiniai mokomi pirmoje klasėje pagal V.V. Davydovo matematikos programą.

3 Mokyklinis skaičiaus sąvokos apibrėžimas

Mokyklinei matematikai pritaikyti natūraliojo skaičiaus ir aritmetinių veiksmų su jais apibrėžimai svarstomi Liping Ma ir Cathy Kessel straipsnyje [6].

1 apibrėžimas. *Vienetas* (unit) yra vienas daiktas arba vienas (one).

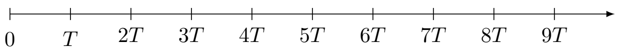


Vienetas yra aritmetikos sąvoka apibendrinanti įgimtą „vieno daikto“ arba skaičiaus „vienas“ suvokimą. Šios sąvokos mokinio supratimas gilinamas palaipsniui pradinio ugdymo eigoje, o pats terminas gali būti naudojamas pasiekus pagrindinį ugdymą.

2 apibrėžimas. *Skaičius* yra vienetas arba vienetų rinkinys.

Ši skaičiaus sąvoka apibendrina nuoseklų skaičiavimą. Kai vienetu yra skaičius vienas gauname natūraliuosius skaičius $1, 2, 3, \dots$. Šis apibrėžimas generuoja ir teigiamus racionaliuosius skaičius.

Kitame apibrėžime naudojame tokią terminologiją. Intervalą $[0, T]$ pastumiant į dešinę nuo nulio taip, kad 0 atsidurtų taške T. Perstumto intervalo dešinysis galas atsidurs atstumu $2T$ nuo 0 ir jį pavadinsime taško T antruoju kartotiniu tašku. Su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi m, taško T m-tasis kartotinis taškas yra dešinysis galas intervalo gauto intervalą $[0, T]$ perstumiant taip, kad nulis sutaptų su tašku $(m - 1)T$. Gauname seką taškų su vienodais tarpais tarp gretimų taškų.



Tegul $0T := 0$ ir $1T := T$. Jei $T = 1$, tai taško m-tieji kartotiniai yra natūralieji skaičiai. Apibendrinsime natūraliuosius skaičius.

3 apibrėžimas. Tarkime, kad n yra nelygus nuliui natūralusis skaičius ir skaičių tiesės vienetinė atkarpa $[0, 1]$ yra padalinta į n vienodo ilgio atkarpų. Nuo nulio pirmosios gautos atkarpos dešinysis galas yra *vienetinė trupmena*, žymima simboliu $\frac{1}{n}$. Su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi m, taško $\frac{1}{n}$ m-tasis kartotinis yra *trupmena* $\frac{m}{n}$.

Kitaip tariant, trupmenas sudaro vieneto generuojami skaičiai, kai vienetu laikoma vienetinė trupmena. Visą gautą „skaičių sodą“ galima patalpinti į vieną mokiniui suprantamą struktūrą (verta prisiminti Dedekindo–Cantoro aksiomą):

4 apibrėžimas. Realusis skaičius yra taškas skaičių tiesėje.

Ši (realiojo) skaičiaus apibrėžtis suteikia galimybę tiksliai apibrėžti ką reiškia, kad du skaičiai yra lygūs ir ką reiškia, kad vienas skaičius yra mažesnis už kitą. Būtent, du skaičiai yra lygūs, jei sutampa taškai skaičių tiesėje. Skaičius a yra mažesnis už skaičių b, simboliais žymima $a < b$, jei skaičių tiesėje a yra į kairę nuo b. Bet svarbiausias skaičiaus apibrėžties privalumas yra galimybė skaičių tiesės pagalba pagrįsti trupmeninių skaičių aritmetiką.

4 Mokyklinis dydžio sąvokos apibūdinimas

Mes neturime tokio dydžio sąvokos apibrėžimo, kuris būtų tinkamas ir pakankamas mokyklinėje matematikoje. Tenka tenkintis apibūdinimais ir atskirų dydžio pavyzdžių apibrėžimais.

Apibūdinimas. *Dydis* yra tokia objekto ar reiškinio savybė, kurią galima kiekybiškai lyginti su ta pačia kito objekto ar reiškinio savybe, jei tokią savybę turi. Kiekviena konkreti *dydžio rūšis* yra susijusi su tam tikru lyginimo būdu. Tuo pačiu būdu palyginami dydžiai vadinami *tos pačios rūšies dydžiai*.

Pavyzdžiui, ilgis, plotas ir tūris yra geometrinių objektų dydžiai. Geometrinis objektas atkarpa turi ilgio savybę, kurią galima lyginti su kitų atkarpų ilgiais. Ilgiai palyginami vieną atkarpą uždedant ant kitos atkarpos. Atkarpų ilgiai yra tos pačios rūšies dydžiai. Masė yra fizinių kūnų dydis. Dviejų kūnų masės palyginamos pusiausvyrinėmis svarstyklėmis. Nagrinėjamojo dydžio ir kito tos pačios rūšies dydžio (matavimo vieneto) santykio nustatymo procesą vadiname matavimu

H.-H. Wu adaptavo Lebesgue mato sampratą formuluodamas geometrinio matavimo fundamentaliuosius prinipus [11, 5 skyrius]. Šiuos principus tenkina mokyklinėje matematikoje tradiciškai nagrinėjamos geometrinės figūros. Tokių figūrų ilgiams, plotams ir tūriams apskaičiuoti jis siūlo skaičiavimo algoritmus.

5 Išvados

Mokyklinėje matematikoje realiųjų, racionaliųjų ir natūraliųjų skaičių sąvokos turi matematine prasme tinkamus ir mokinių supratimui prieinamus apibrėžimus. Remiantis jais galima įrodyti pagrindinius mokyklinės matematikos turiniui tradiciškai priskiramus teiginius.

Šiuo metu neturime mokyklinėje matematikoje tinkamo dydžio sąvokos apibrėžimo bendru atveju. Tačiau tokie apibrėžimai egzistuoja geometrinių dydžių ir fizikinių dydžiųatskirais atvejais. Dydžio sąvokos supratimui galėtų padėti gilaus ir profesionalaus matematikos idėjų istoriniame kontekste supratimo sklaida tarp mokytojų, tarp jų rengėjų, vadovėlių autorių ir visų kitų, kas gali įtakoti matematikos mokymą. J.J. Madden straipsnis [7] gera pažinties su šia sritimi pradžia.

Literatūra

[1] V.V. Davydov. The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. In T.P. Carpenter et al.(Ed.), *Addition and Subtraction*, pp. 224–238. Routledge, 1982.

[2] M. Dummett. Frege's theory of real numbers. In W. Demopoulos(Ed.), *Frege's Philosophy of Mathematics*, pp. 386–403. Harvard University Press, 1995.

[3] H. Griesel. Reform of the construction of the number system with reference to Gottlob Frege. *ZDM Mathematics Education*, **39**:31–38, 2007.

[4] L. Kulviecas. Apie fizikinių dydžių sąvokų apibrėžimą. *Vilniaus Valstybinio Pedagoginio Instituto Mokslo Darbai*, **X**:95–119, 1960.

[5] L. Kulviecas. Apie fizikinių dydžių apibrėžimus, paremtus abstrakcijos principu. I. *Preprint*, Vilniaus pedagoginis universitetas, 1994.

[6] L. Ma, C. Kessel. The theory of school arithmetic: Whole numbers. In X.H. Sun M.G.B. Bussi(Ed.), *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades, The 23rd ICMI Study*, pp. 439–463. Springer Open, 2018.

[7] J.J. Madden. Knowing ratio and proportion for teaching. In Y.Li et al.(Ed.), *Mathematics Matters in Education, Advances in STEAM Education*, pp. 93–115. Springer International Publishing AG, 2018.

[8] J. Schmittau. Vygotskian theory and mathematics education: resolving conceptual-procedural dichotomy. *Eur. J. Psychol. Educ.*, **XIX**(1):19–43, 2004.

[9] H.-G. Steiner. Magnitudes and rational numbers: a didactical analysis. *Educ. Stud. Math.*, **2**(2/3):371–392, 1969.

[10] S. Stenlund. *The Origin of Symbolic Mathematics and the End of the Science of Quantity*. Uppsala Universitet, 2014.

[11] H.-H. Wu. *Teaching School Mathematics: Pre-Algebra*. American Mathematical Society, 2016.

SUMMARY

Magnitude, number and school mathematics

R. Norvaiša

Definitions of concepts of magnitude and number used in academic mathematics are not suitable for school mathematics for reasons of their cognitive complexity. We discuss possible ways to treat magnitudes and numbers in school mathematics based on mathematical reasoning.

Keywords: content of school mathematics; magnitude; number; number line; measurement