

α -normalusis skirstinys

Vaidotas KANIŠAUSKAS (ŠU)

el. paštas: vaidotas@cr.su.lt

Nors normalusis tikimybinis skirstinys yra gana universalus, tačiau praktikoje dažnai būna per siauras. Norint praplėsti normaliųjų skirstinių klasę, neprarandant gerųjų jų savybių, natūralu įvesti α -normalųjį skirstinį.

1 apibrėžimas. Sakysime, kad atsitiktinis dydis ζ turi α -normalųjį skirstinį su parametrais (a, σ, α) , kur $a \in (-\infty, +\infty)$, $\sigma > 0$, $\alpha \in \{2, 4, 6, \dots\}$ (žymėsime $\zeta \sim N(a, \sigma, \alpha)$), jei jo pasiskirstymo funkcija turi pavidalą

$$F(a, \sigma, \alpha; t) = \frac{1}{2\sigma\Gamma(1\frac{1}{\alpha})\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} \int_{-\infty}^t \exp\left\{-\frac{(x-a)^\alpha}{\alpha\sigma^\alpha}\right\} dx, \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty),$$

kur $\Gamma(x)$ – gama funkcija.

Skirstinį $N(0, 1, \alpha)$ vadinsime α -standartiniu. Jeigu $\zeta \sim N(a, \sigma, \alpha)$, tai $\frac{\zeta-a}{\sigma} \sim N(0, 1, \alpha)$. Todėl tikslinga įvesti α -standartinio skirstinio pasiskirstymo funkciją:

$$\Phi(\alpha, t) = \frac{1}{2\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma(1\frac{1}{\alpha})} \int_{-\infty}^t \exp\left\{-\frac{x^\alpha}{\alpha}\right\} dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

su tankiu

$$p(\alpha, t) = \frac{1}{2\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma(1\frac{1}{\alpha})} \exp\left\{-\frac{t^\alpha}{\alpha}\right\}.$$

Dabar naudinga taikyti formulę

$$F(a, \sigma, \alpha) = \Phi\left(\alpha, \frac{t-a}{\sigma}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Skirstinio $N(a, \sigma, \alpha)$ pradiniai ir centriniai momentai apskaičiuojami pagal formules:

$$M_{\zeta^k} = \begin{cases} a, & k = 1, \\ \sigma^2 \alpha^{\frac{2}{\alpha}} \frac{\Gamma(\frac{3}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})} + a^2, & k = 2, \\ 3\sigma^2 \alpha^{\frac{2}{\alpha}} a \frac{\Gamma(\frac{3}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})} + a^3, & k = 3. \end{cases}$$

$$\mathbf{M}(\zeta - M\zeta)^k = \begin{cases} 0, & \text{kai } k = 2l - 1, \quad l \in \mathbb{N}, \\ \sigma^{2l} \alpha^{\frac{2l}{\alpha}} \frac{\Gamma(\frac{2l+1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}, & \text{kai } k = 2l, \quad l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Taigi $\zeta \sim N(a, \sigma, \alpha)$ vidurkis yra $\mathbf{M}\zeta = a$, o dispersija $\mathbf{D}\zeta = \sigma^2 \alpha^{\frac{2}{\alpha}} \frac{\Gamma(\frac{3}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}$.

Elementariai skaičiuojant nesunku įsitikinti, kad $\zeta \sim N(0, 1, \alpha)$ charakteristinė funkcija $f(t) = \mathbf{M}e^{it\zeta}$ tenkina diferencialinę lygtį su pradinėmis sąlygomis:

$$\begin{cases} t = (-1)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{f^{(\alpha-1)}(t)}{f(t)}, \\ f^{(2k)}(0) = (-1)^k \frac{\Gamma(\frac{2k+1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{\alpha}{2}, \\ f^{(2k-1)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{\alpha}{2}, \end{cases}$$

kur $f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$, ir gali būti išreikšta begaline eilute:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \frac{\Gamma(\frac{2n+1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})} \alpha^{\frac{2n}{\alpha}}.$$

Lema. Tegū $p(\alpha, t)$ yra $N(0, 1, \alpha)$ tankio funkcija. Tada

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} p(\alpha, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kai } t \in [-1, 1], \\ 0, & \text{kai } t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Išvada. Jei $p(a, \sigma, \alpha; t)$ yra $N(a, \sigma, \alpha)$ skirstinio tankio funkcija, tai

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} p(a, \sigma, \alpha; t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma}, & \text{kai } t \in [a - \sigma, a + \sigma], \\ 0, & \text{kai } t \notin [a - \sigma, a + \sigma]. \end{cases}$$

Lemos ir išvados rezultatas gaunamas tiesioginiu skaičiavimu. Aišku, kad $N(a, \sigma, \alpha)$ skirstinio parametras a yra tankio funkcijos grafiko simetrijos ašis, parametras σ valdo tankio kreivės aukštį, o parametras α – plotį ir kampuotumą.

Dabar iš α -normalaus skirstinio išvesime skirstinių klases, analogiškas log-normaliajam, χ^2 , Stjudento ir Fišerio skirstiniams.

2 apibrėžimas. Sakysime, kad ζ turi α -log-normalųjį skirstinį su parametrais $\theta = (a, \sigma, \alpha)$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $\alpha \in \{2, 4, 6, \dots\}$, jei $\ln \zeta \sim N(a, \sigma, \alpha)$. To skirstinio tankis yra

$$p(\theta, t) = \frac{1}{2\sigma\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma(1\frac{1}{\alpha})t} \exp\left\{-\frac{(\ln t - a)^\alpha}{\alpha\sigma^\alpha}\right\}, \quad t > 0,$$

o pasiskirstymo funkcija turi pavidalą

$$F(\theta, t) = \Phi\left(\alpha, \frac{\ln t - a}{\sigma}\right).$$

3 apibrėžimas. Tegų X_1, X_2, \dots, X_n nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, kuriems $X_i \sim N(0, 1, \alpha)$, $i = 1, \dots, n$. Tada atsitiktinio dydžio

$$\chi_n^\alpha = X_1^\alpha + X_2^\alpha + \dots + X_n^\alpha$$

tikimybinį skirstinį vadinsime χ^α skirstiniu su parametrais α ir n , kur $\alpha \in \{2, 4, 6, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$ (žymėsime $\chi_n^\alpha \sim C(\alpha, n)$). χ_n^α tankis yra

$$p_n(\alpha, x) = \frac{1}{\alpha^{\frac{n}{\alpha}} \Gamma(\frac{n}{\alpha})} x^{\frac{n}{\alpha} - 1} e^{-\frac{x}{\alpha}}, \quad x > 0,$$

o charakteristinė funkcija

$$f_n(\alpha, t) = \frac{1}{(1 - \alpha it)^{\frac{n}{\alpha}}}.$$

Nesunku matyti, kad $C(\alpha, n)$ yra gama skirstinys $G(\frac{1}{\alpha}, \frac{n}{\alpha})$.

Kada $\alpha = 2$, dydis χ^α turi χ^2 skirstinį su n laisvės laipsnių.

4 apibrėžimas. Tegų Y, X_1, X_2, \dots, X_n nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, kuriems $Y, X_i \sim N(0, 1, \alpha)$, $i = 1, \dots, n$. Tada atsitiktinio dydžio

$$t_{n,\alpha} = \frac{Y}{\sqrt{\frac{1}{n} \chi_n^\alpha}} = \frac{Y}{\left(\frac{1}{n}(X_1^\alpha + \dots + X_n^\alpha)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

tikimybinį skirstinį vadinsime α -Stjudento skirstiniu su parametrais α ir n , kur $\alpha \in \{2, 4, 6, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$ (žymėsime $t_{n,\alpha} \sim S(\alpha, n)$). To skirstinio tankis

$$p_n(\alpha, x) = \frac{1}{2} \frac{\alpha \Gamma(\frac{n+1}{\alpha})}{n^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma(\frac{1}{\alpha}) \Gamma(\frac{n}{\alpha})} \left(1 + \frac{x^\alpha}{n}\right)^{-\frac{n+1}{\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kada $\alpha = 2$, dydis $t_{n,2}$ turi Stjudento skirstinį su n laisvės laipsnių.

5 apibrėžimas. Tegų $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, kuriems $X_i, Y_i \sim N(0, 1, \alpha)$, $i = 1, \dots, n$. Tada atsitiktinio dydžio

$$F_{m,n,\alpha} = \frac{\frac{1}{m}(X_1^\alpha + \dots + X_m^\alpha)}{\frac{1}{n}(Y_1^\alpha + \dots + Y_n^\alpha)} = \frac{\frac{1}{m} \chi_m^\alpha}{\frac{1}{n} \chi_n^\alpha}$$

tikimybinį skirstinį vadinsime α -Fišerio skirstiniu su parametrais α, m, n , kur $\alpha \in \{2, 4, 6, \dots\}$, $m, n \in \mathbb{N}$ (žymėsime $F_{m,n,\alpha} \sim F(\alpha, m, n)$). Jo tankis

$$p_{n,m}(\alpha, x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{\alpha}\right) n^{\frac{n}{\alpha}} m^{\frac{m}{\alpha}} x^{\frac{m}{\alpha}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right) (n+mx)^{\frac{m+n}{\alpha}}}, \quad x > 0.$$

Kada $\alpha = 2$, dydis $F_{m,n,2}$ turi Fišerio skirstinį su m ir n laisvės laipsnių.

Nesunku pastebėti, kad parametų įvertinimo, parametų pasikliautiniųjų intervalų ieškojimo ir statistinių hipotezių tikrinimo teorijoje, kur panaudojamas normalusis skirstinys ir jo pagalba gauti kiti skirstiniai (žr. [1]), taikomi metodai nesunkiai apibendrinami panaudojant α -normalųjį ir kitus iš jo gaunamus skirstinius. Todėl čia apibrėžtos naujos tikimybinių skirstinių šeimos turėtų praplėsti statistinių metodų taikymo ribas.

Literatūra

[1] J. Kruopis, *Matematinė statistika*, Mokslo ir enciklopedijų leidykla, Vilnius (1993).

α -normal distribution

V. Kanišauskas

In this paper I introduce and consider the new class of distributions - natural widening of normal distribution.