Lietuvos matematikos rinkinys ISSN 0132-2818
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B www.mii.lt/LMR/
56 t., 2015, 70–74

Apie vieno brėžimo uždavinio neišsprendžiamumą

Jevgenijus Kirjackis[1], **Edmundas Mazėtis**[2,3], **Grigorijus Melničenko**[3]

[1] *Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas*
Saulėtekio 11, LT-10223 Vilnius
[2] *Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius
[2] *Lietuvos edukologijos universitetas, Gamtos, matematikos ir technologijų fakultetas*
Studentų 39, LT-08106 Vilnius
E. paštas: jk@vgtu.lt, gmelnicenko@gmail.com, edmundas.mazetis@leu.lt

Santrauka. Straipsnyje įrodoma, kad bendruoju atveju negalima skriestuvu ir liniuote nubrėžti trikampio, jei duota kampas, pusiaukampinė bei pusiaukraštinė, nubrėžtos iš kito kampo viršūnės. Parodoma, kuriais atskirais atvejais galima trikampį nubrėžti.

Raktiniai žodžiai: trikampis, pusiaukraštinė, pusiaukampinė, brėžimas skriestuvu ir liniuote, kubinė lygtis.

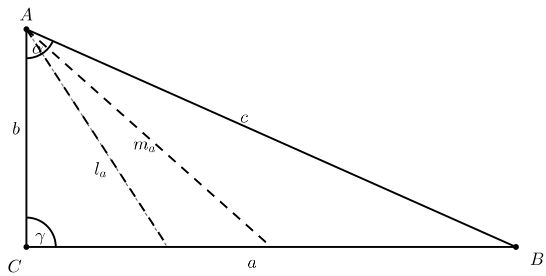
Įvadas

Sakykime, kad duotas trikampio ΔABC kampas $\angle C = \gamma$, pusiaukampinė l_a ir pusiaukraštinė m_a, išeinančios iš viršūnės A. O. Krotenheerdt [3] darbe įrodoma, kad skriestuvu ir liniuote negalima nubrėžti trikampio, kai duoti minėti elementai. Šis tvirtinimas išplaukia iš to, kad šio uždavinio išsprendžiamumo problema suvedama į galimumą nubrėžti kubinės lygties racionaliąsias šaknis. Kaip įrodyta [2], kubinės lygties su racionaliaisiais koeficientais sprendiniai yra nubraižomi skriestuvu ir liniuote tik tada, kai vienas iš sprendinių yra racionalusis. O. Krotenheerdt [3] darbe įrodoma, kad nubrėžti trikampį, kai duota γ, l_a ir m_a skriestuvu ir liniuote negalima bendruoju atveju, nes nubrėžti negalima specialiuoju atveju, kai $\gamma = 90°$, $l_a = 1$ ir $m_a = 2$. Bet minėtame darbe neparodoma, kad toks trikampis egzistuoja. Mūsų atvejis skiriasi nuo [3] darbe išnagrinėto atvejo tuo, kad mes imame atskirą atvejį, kai $\gamma = 90°$, $l_a = 1$ ir $m_a = \sqrt{3}$, įrodome, kad toks trikampis egzistuoja, ir dar parodome, kad atskirais atvejais, pvz., kai $\gamma = 90°$, $l_a = 2$ ir $m_a = \sqrt{21}/2$ trikampis yra nubrėžiamas skriestuvu ir liniuote.

Manome, kad tokius ir analogiškus kitais elementais duotų trikampių brėžimo galimumo nagrinėjimo uždavinius galima spręsti su matematikai gabiais mokiniais. Ši tematika gali būti įvairių projektinių darbų pagrindas.

1 Kubinės lygties šaknų braižymas

Daugelis klasikinių brėžimo skriestuvu ir liniuote uždavinių yra suvedama į trečiojo laipsnio lygčių šaknų radimą ir jų brėžimą. Tokių uždavinių pavyzdžiai – tai kubo



1 pav.

sudvigubinimas, kampo trisekcija, taisyklingojo septynkampio braižymas. Atskirais atvejais kai kurie šių klasikinių uždavinių yra išsprendžiami, pvz., kampo trisekcija yra atliekama, kai kampas lygus 90°, arba 45°. Bet bendruoju atveju nėra baigtinės procedūros, įgalinančios skriestuvu ir liniuote bet kurį kampą padalyti į tris lygias dalis.

Paprastai atsakymą apie brėžimo uždavinio išsprendžiamumą skriestuvu ir liniuote duoda ši teorema, kurią mes taikysime ir savo uždavinio sprendimui.

1 teorema. *(Žr. [2, p. 163].) Jei kubinė lygtis*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

su racionaliaisiais koeficientais neturi racionaliųjų šaknų, tai skriestuvu ir liniuote negalima nubrėžti atkarpų, kurių ilgiai lygūs šios lygties šaknims.

2 Lygtys, kurias tenkina stačiojo trikampio smailiojo kampo kosinusas

2 teorema. *Sakykime, kad trikampio ΔABC kampas $\angle C = \gamma = 90°$, o atkarpos l_a ir m_a yra trikampio pusiaukampinės ir pusiaukraštinės, nubrėžtų iš viršūnes A, ilgiai. Tuomet kampo $\angle A = \alpha$ kosinusas $x = \cos\alpha$ yra lygties*

$$3x^3 - kx^2 + x + 1 = 0, \quad \textit{čia } k = \left(8m_a^2 - 3l_a^2\right)/l_a^2, \tag{2}$$

sprendinys.

Įrodymas. Tarkime, kad trikampis ΔABC tenkina teoremos sąlygas (1 pav.). Tuomet yra teisinga lygybė

$$b = l_a \cos\frac{\alpha}{2} = l_a\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \tag{3}$$

Iš Pitagoro teoremos išplaukia, kad $4m_a^2 = a^2 + 4b^2$, todėl

$$a = \sqrt{4m_a^2 - 2l_a^2\cos\alpha - 2l_a^2}. \tag{4}$$

Kadangi $\sin\alpha/\cos\alpha = a/b$, tai

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2(4m_a^2 - 2l_a^2\cos\alpha - 2l_a^2)}{l_a^2(1+\cos\alpha)}.$$

Atlikę veiksmus gauname, kad dydis $x = \cos\alpha$ tenkina (2) lygtį.

3 Trikampio brėžimo uždavinio, kai duota kampas ir iš kito kampo viršūnės išvestos pusiaukampinė ir pusiaukraštinė, neišsprendžiamumas skriestuvu ir liniuote

Išnagrinėsime, kaip trikampio brėžimo skriestuvu ir liniuote, kai duota jo kampas ir iš kito kampo viršūnės išvestos pusiaukampinė bei pusiaukraštinė, uždavinys sprendžiamas su tam tikromis konkrečiomis β, l_a ir m_a reikšmėmis. Iš negalimumo nubrėžti trikampį konkrečiais atvejais darysime išvadą apie šio brėžimo uždavinio neišsprendžiamumą skriestuvu ir liniuote bendruoju atveju.

3 teorema. *Uždavinys nubrėžti trikampį, kai duotas jo kampas ir iš kito kampo viršūnės išvestos pusiaukampinė bei pusiaukraštinė, bendruoju atveju yra neišsprendžiamas skriestuvu ir liniuote.*

Įrodymas. Išnagrinėsime atskirąjį duotojo uždavinio atvejį, kai $\gamma = 90°$, $l_a = 1$ ir $m_a = \sqrt{3}$. Pradžioje parodysime, kad trikampis su tokiais elementais egzistuoja. Tuomet $k = (8m_a^2 - 3l_a^2)/l_a^2 = 21$ ir (2) lygtis tampa tokia

$$3x^3 - 21x^2 + x + 1 = 0. \tag{5}$$

Nagrinėkime funkciją $f(x) = 3x^3 - 21x^2 + x + 1$. Akivaizdu, kad $f(0) = 1$, o $f(1) = -16 < 0$. Iš analizės žinoma teorema apie tolydžios segmente funkcijos nulius, iš kurios išplaukia, kad funkcija $f(x)$, segmento $[0;1]$ galuose įgyjanti priešingų ženklų reikšmes, bent viename intervalo $(0;1)$ taške įgyja reikšmę lygią nuliui. Taigi (5) lygtis turi bent vieną šaknį $0 < x_0 < 1$. Bet $x_0 = \cos\alpha$, todėl egzistuoja tokia α reikšmė, kad $0 < \alpha < 90°$. Tuomet galima nubrėžti smailųjį kampą $\angle A = \alpha$, kurio kosinusas lygus x_0. Tuo tikslu nubrėžiame statųjį trikampį, kurio įžambinė lygi 1, o vienas statinis lygus x_0. Tuomet smailusis kampas prie šio statinio yra ieškomasis kampas α. Žinodami stačiojo trikampio ΔABC kampą $\angle A = \alpha$ ir jo pusiaukampinę $l_a = 1$, nubrėžiame trikampį. Brėžiame taip: nubrėžiame kampo $\angle A = \alpha$ pusiaukampinę ir joje atidedame atkarpą $AL = 1$. Iš taško L nuleidžiame statmenį LC į bet kurią kampo $\angle A = \alpha$ kraštinę ir jį pratęsiame iki susikirtimo su kita šio kampo kraštine taške B. Gauname statųjį trikampį ΔABC, kurio smailusis kampas $\angle A = \alpha$, be to $\angle C = \gamma = 90°$, o kampo A pusiaukampinė $l_a = 1$. Sakykime, kad $\bar{m}_a$ – šio trikampio pusiaukraštinė, nubrėžta iš viršūnės A. Iš (5) lygybės ir 2 teoremos išplaukia, kad šio trikampio kampo $\angle A = \alpha$ kosinusas $\cos\alpha$ tenkina šias dvi lygtis

$$\begin{aligned} 3\cos^3\alpha - 21\cos^2\alpha + \cos\alpha + 1 &= 0, \\ 3\cos^3\alpha - k\cos^2\alpha + \cos\alpha + 1 &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

čia $k = (8\bar{m}_a^2 - 3l_a^2)/l_a^2 = 8\bar{m}_a^2 - 3$. Iš (6) lygybių išplaukia, kad $k = 21$, todėl $\bar{m}_a^2 = \sqrt{3}$. Taigi trikampis ΔABC tenkina sąlygas $\gamma = 90°$, $l_a = 1$ ir $m_a = \sqrt{3}$, t. y., jis yra ieškomasis.

Įrodysime, kad (5) lygtis neturi racionaliųjų šaknų. Kaip žinome iš algebros [1], jei polinomo koeficientai yra sveikieji skaičiai, neturintys bendrų daliklių, o m/n yra racionalioji šio polinomo šaknis, tai vardiklis n yra polinomo vyriausiojo nario koeficiento daliklis, o skaitiklis m – laisvojo nario daliklis. Taigi (5) lygties racionaliosios šaknys gali būti tik šios: $1/3$, $-1/3$, 1 ir -1. Patikrinę matome, kad nė vienas šių skaičių nėra (5) lygties šaknis, taigi ji neturi racionaliųjų šaknų.

Anksčiau mes įrodėme, kad egzistuoja trikampis ΔABC, kuriame $\gamma = 90°$, $l_a = 1$ ir $m_a = \sqrt{3}$. Sakykime, kad jį galima nubrėžti skriestuvu ir liniuote. Parodysime, kad tuo atveju galima nubrėžti atkarpą, kurios ilgis lygus $\cos\alpha$. Tuo tikslu šio trikampio įžambinėje AB atidedame vienetinio ilgio atkarpą AB'. Iš taško B' skriestuvu ir liniuote nuleidžiame statmenį statiniui AC, kuris statinį kerta taške C'. Akivaizdu, kad atkarpa $AC' = \cos\alpha$ nubrėžta skriestuvu ir liniuote. Bet $\cos\alpha$ – (5) lygties šaknis, o kaip įrodėme, ši lygtis racionaliųjų šaknų neturi. Iš 1 teoremos išplaukia, kad šios lygties sprendinių negalima nubrėžti skriestuvu ir liniuote. Gautoji prieštara ir įrodo teoremą.

Pastebėkime, kad tą faktą, jog (5) lygtis neturi racionaliųjų šaknų, galima įrodyti ir netaikant algebros teoremos apie polinomo racionaliąsias šaknis, o naudojant tik elementariosios matematikos žinias. Keitiniu $y = 3x - 7$ (5) lygtis suvedama į tokią lygtį $y^3 - 144y - 656 = 0$. Akivaizdu, kad ši lygtis turi racionaliuosius sprendinius tada ir tik tada, kai (5) lygtis turi racionaliuosius sprendinius. Sakykime, kad racionalusis skaičius m/n, čia m ir n – tarpusavyje pirminiai skaičiai, yra šios lygties sprendinys. Tuomet teisinga lygybė $m^3 = 4^2n^2(9m + 41n)$. Iš čia išplaukia, kad skaičius m dalijasi iš 4, t. y., $m = 4r$, čia r – sveikasis skaičius. Tuomet teisinga lygybė $4r^3 = n^2(36r + 41n)$. Taigi skaičius n dalijasi iš 2, t. y., skaičiai m ir n nėra tarpusavyje pirminiai. Todėl lygtis $y^3 - 144y - 656 = 0$, o tai reiškia, ir (5) lygtis neturi racionaliųjų sprendinių.

Atskirais atvejais, specialiai parinkus kampą ir iš kito kampo viršūnės išeinančias pusiaukampinę bei pusiaukraštinę, trikampį galima nubrėžti skriestuvu ir liniuote.

Uždavinys. Nubrėžkime trikampį ΔABC, kai duota $\gamma = 90°$, $l_a = 2$ ir $m_a = \sqrt{21}/2$.

Analizė. Sakykime, kad ieškomasis trikampis ΔABC yra nubraižytas. Tuomet $k = (8m_a^2 - 3l_a^2)/l_a^2 = 15/2$, o iš čia išplaukia, kad $x_0{=}1/2$ yra (2) lygties šaknis. Kadangi kampas α – smailusis, tai iš sąlygos $\cos\alpha = 1/2$ išplaukia, kad $\alpha = 60°$. Tuomet iš (3) ir (4) lygybių išplaukia, kad $b = \sqrt{3}$ ir $a = 3$.

Brėžimas. Skriestuvu ir liniuote brėžiame atkarpą lygią $\sqrt{3}$ [2, pp. 120–123], po to skriestuvu ir liniuote braižome statųjį trikampį, kurio statiniai $a = 3$, $b = \sqrt{3}$. Šis trikampis yra ieškomasis.

Įrodymas. Iš (3) ir (4) gauname, kad $l_a = 2$ ir $m_a = \sqrt{21}/2$. Taigi nubrėžtasis trikampis tenkina uždavinio sąlygą.

Literatūra

[1] K. Bulota ir P. Survila. *Algebra ir skaičių teorija* II d. Mokslas, Vilnius, 1990.

[2] R. Courant and H.Robbins. *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. 2nd ed. Oxford University Press, Oxford, 1996.

[3] O. Krotenheerdt. Zur theorie der dreieckskonstruktionen. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Naturw. Reihe*, **15**:677–700, 1966.

SUMMARY

On the insolubility of one drawing problem

J. Kirjackis, G. Melničenko, E. Mazėtis

It is shown in the article that, in general, it is not possible to draw a triangle using a compass and a straightedge given an angle, and a bisector and a median drawn from the vertex of another angle. It is shown in which particular cases a triangle can be drawn.

Keywords: triange, median, bisector, drawing with compass and straightedge, cubic equation.