VILNIAUS UNIVERSITETAS

Gabrielė Mongirdaitė

Wright–Fisher proceso silpnosios aproksimacijos ir susiję uždaviniai

DAKTARO DISERTACIJOS SANTRAUKA

Gamtos mokslai,
matematika (N 001)

VILNIUS 2022

Disertacija rengta 2017–2022 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:

prof. habil. dr. Vigirdas Mackevičius (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika, N 001).

Gynimo taryba:

Pirmininkas:

prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika, N 001).

Nariai:

prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika, N 001);
doc. dr. Martynas Manstavičius (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika, N 001);
prof. habil. dr. Yuliya Mishura (Kijevo nacionalinis Taraso Ševčenkos universitetas, gamtos mokslai, matematika, N 001);
prof. habil. dr. Jonas Šiaulys (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika, N 001).

Disertacija bus ginama viešame Gynimo tarybos posėdyje 2022 m. birželio 28 d. 14 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete, 102 auditorijoje. Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva, tel. + 370 521 93 050; el. paštas: mif@mif.vu.lt.

Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir Vilniaus universiteto interneto svetainėje adresu:
www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

VILNIUS UNIVERSITY

Gabrielė Mongirdaitė

Weak Approximations of the Wright–Fisher process and Related Problems

SUMMARY OF DOCTORAL DISSERTATION

Natural sciences,
mathematics (N 001)

VILNIUS 2022

Doctoral dissertation was prepared between 2017 and 2022 at Vilnius University.

Academic supervisor:

prof. habil. dr. Vigirdas Mackevičius (Vilnius University, Natural sciences, Mathematics, N 001).

Dissertation Defence Panel:

Chairman:

prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius (Vilnius University, Natural sciences, Mathematics, N 001).

Members:

prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilnius University, Natural sciences, Mathematics, N 001);
doc. dr. Martynas Manstavičius (Vilnius University, Natural sciences, Mathematics, N 001);
prof. habil. dr. Yuliya Mishura (Taras Shevchenko National University of Kyiv, Natural sciences, Mathematics, N 001);
prof. habil. dr. Jonas Šiaulys (Vilnius University, Natural sciences, Mathematics, N 001).

The dissertation shall be defended at a public meeting of the Dissertation Defence Panel at 2 p.m. on 28 June 2022 in the lecture room 102 of the Faculty of Mathematics and Informatics, Vilnius University.
Address: Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.

The text of this dissertation can be accessed at the Library of Vilnius University and on the website of Vilnius University:
www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

DISERTACINIO DARBO APRAŠYMAS

1 Tyrimo objektas

Pagrindinės šios disertacijos temos yra:

1. Lengvai realizuojamos Wright–Fisher (WF) modelio

$$X_t^x = x + \int_0^t (a - bX_s^x)\,\mathrm{d}s + \sigma \int_0^t \sqrt{X_s^x(1 - X_s^x)}\,\mathrm{d}B_s, \quad x \in [0,1], \tag{1.1}$$

   pirmosios ir antrosios eilės silpnosios aproksimacijos. Čia parametrai $0 \leq a \leq b$ ir $\sigma > 0$, B – standartinis Brauno judesys. Ši lygtis turi vienintelį stiprųjį sprendinį X^x, kuris išlieka intervale $[0,1]$, t.y. $\mathbb{P}(X_t^x \in [0,1], \forall t \geqslant 0) = 1$ [3].

2. Atgalinės Kolmogorovo lygties, susijusios su WF bei Cox–Ingersoll–Ross (CIR) modeliu [4] ir Stratonovičiaus lygtimis su kvadratinės šaknies difuzijos koeficientu, sprendinio reguliarumo įrodymas. Šis reguliarumas yra reikalingas norint griežtai įrodyti, kad potenciali („kanditatė“) pirmosios arba antrosios eilės aproksimacija iš tikrųjų yra atitinkamos eilės silpnoji aproksimacija.

2 Tyrimo tikslas ir problemos

Disertacijos tyrimo tikslas yra sukurti paprastas ir efektyvias pirmosios ir antrosios eilės WF lygties sprendinio silpnąsias aproksimacijas, kurių kiekviename iteracijos žingsnyje būtų generuojami tik diskretieji atsitiktiniai dydžiai.

Taip pat svarbi šios disertacijos dalis yra atgalinės Kolmogorovo lygties, susijusios su WF bei CIR ir Stratonovičiaus lygtimis su kvadratinės šaknies difuzijos koeficientu, sprendinio reguliarumo įrodymas. Šis faktas yra esminis griežtai įrodant stochastinių diferencialinių lygčių (SDL) silpnųjų aproksimacijų konvergavimo greitį.

Pagrindinė problema kuriant skaitinius sprendimo metodus kvadratinės šaknies difuzijos modeliams yra ta, kad difuzijos koeficientas turi neaprėžtas išvestines singuliarumo taškų aplinkoje (WF modelio atveju 0 ir 1). Tai neleidžia pritaikyti klasikinių aproksimacijos metodų, pvz., aprašytų Milstein ir Tretyakov knygoje [10]). Diskretizacijos schemos taikant minėtus metodus, kurie išreikštai ar neišreikštai naudoja koeficientų išvestines, dažniausiai praranda aproksimavo tikslumą singuliarumo taškų aplinkoje, ypač jei difuzijos koeficientas σ yra didelis.

Alfonsi [3, Chap. 6] sukonstravo silpnąją antros eilės aproksimaciją WF procesui pasinaudodamas jo sąryšiu su CIR [4] procesu bei anksčiau sukonstruotomis aproksimacijomis pastarajam (Alfonsi [2]). Palyginus su Alfonsi algoritmais [3, Tg. 6.1.13, Alg. 6.1 ir 6.2], mūsų sukonstruotas algoritmas yra tiesioginis ir, beje, gerokai lengviau realizuojamas. Konstruojant WF silpnąsias aproksimacijas, mes panaudojame kai kurias Lileikos ir Mackevičiaus [6, 7] idėjas, tačiau WF proceso atveju kyla rimta papildoma problema (palyginus su CIR ar Chan–Karolyi–Longstaff–Sanders (CKLS) procesais): difuzijos koeficientas turi du singuliarumo taškus 0 ir 1, kurie trukdo išlaikyti aproksimaciją intervale $[0, 1]$ (vietoje $[0, +\infty)$ kaip [6, 7]).

3 Tyrimo metodai

Atliekant disertacijos tyrimą buvo panaudoti įvairūs integralinio ir diferencialinio skaičiavimo, tikimybių teorijos, statistikos, matematinės, stochastinės ir funkcinės analizės metodai bei rezultatai. Kompiuterinės simuliacijos atliktos programavimo kalba Python. Grafikai sugeneruoti naudojant Python bei skaičiavimo paketą Maple. Šis paketas panaudotas ir spendžiant lygtis bei nelygybes.

4 Moksliniai rezultatai

Apibrėžimai

Nagrinėkime vienmatę stochastinę diferencialinę lygtį

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \tilde{\sigma}(X_s^x)\,\mathrm{d}B_s, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}; \tag{4.1}$$

čia B yra standartinis Brauno judesys (Vynerio procesas).

Siekiant išvengti dviprasmybės, difuzijos koeficientą bendrojoje (4.1) lygtyje žymime simboliu $\tilde{\sigma}$, o simboliu σ – konstantą WF lygtyje (1.1).

Laikysime, kad lygtis turi vienintelį silpnąjį sprendinį X_t^x su trajektorijomis intervale $\mathbb{D}$, t.y. $\mathbb{P}(X_t^x \in \mathbb{D},\, t \geq 0) = 1$ su visais $x \in \mathbb{D}$. Pavyzdžiui, (1.1) lygtyje galime laikyti, kad $\mathbb{D} = [0, 1]$.

Imkime fiksuoto laiko intervalo $[0, T]$ pastovaus žingsnio $h = T/n$, $n \in \mathbb{N}$, diskretizaciją $\Delta^h = \{ih, i = 0, 1, \dots, \lfloor T/h \rfloor,$ $h \in (0, T]\}$; čia $\lfloor a \rfloor$ – sveikoji skaičiaus a dalis. (4.1) lygties diskretizacijos schema laikome diskretaus laiko homogeninių Markovo procesų šeimą $\hat{X}^h = \{\hat{X}^h(x, t), x \in \mathbb{D}, t \in \Delta^h\}$ su pradine reikšme $\hat{X}^h(x,0) = x$ ir vienažingsne perėjimo tikimybe $p^h(x, \mathrm{d}z)$, $x \in \mathbb{D}$. Trumpumo dėlei kartais rašysime $\hat{X}^x_t$ ar $\hat{X}(x,t)$ vietoje $\hat{X}^h(x,t)$. Pastebėtina, kad dėl markoviškumo diskretizacijos schemos vienažingsnė aproksimacija $\hat{X}^x_h$ visiškai apibrėžia visos diskretizacijos schemos $\hat{X}^x_t$ tikimybinį pasiskirtymą, todėl užtenka konstruoti tik vienažingsnes aproksimacijas.

Žymėsime $C_0^\infty(\mathbb{D})$ klasę funkcijų $f \in C^\infty(\mathbb{D})$ su kompaktiška atrama aibėje $\mathbb{D}$, o $C^\infty_{\mathrm{pol}}(\mathbb{D})$ – klasę tokių funkcijų $f \in C^\infty(\mathbb{D})$, kad

$$|f^{(n)}(x)| \le C_n(1 + |x|^{k_n}), \quad x \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\},$$

su tam tikra seka $(C_n, k_n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}_0$. Sekdami Alfonsi [2], sakysime, kad $\{(C_n, k_n), n \in \mathbb{N}_0\}$ yra *gera* seka funkcijai f. Galiausiai žymėsime $C_{\mathrm{lin}}(\mathbb{D})$ klasę tokių funkcijų $f \in C(\mathbb{D})$, kad

$$|f(x)| \leqslant C(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{D}.$$

Rašysime $g(x,h) = O(h^n)$, jei su tam tikrais $C > 0$, $k \in \mathbb{N}$ ir $h_0 > 0$,

$$|g(x,h)| \le C(1 + |x|^k)h^n, \quad x \ge 0, \quad 0 < h \le h_0.$$

Atskiru atveju, kai funkcija g yra išreiškiama kita funkcija $f \in C^\infty_{\mathrm{pol}}(\mathbb{R})$ ir konstantos C, k ir h_0 priklauso tik nuo *geros* sekos funkcijai f, rašysime $g(x,h) = \mathcal{O}(h^n)$.

Parabolinė diferencialinė lygtis dalinėmis išvestinėmis su pradine sąlyga

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = Au(t,x), & x \ge 0,\ t \in [0,T], \\ u(0,x) = f(x), & x \ge 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

yra vadinama atgaline Kolmogorovo lygtimi; čia $Af = bf' + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 f''$ yra (4.1) lygties sprendinio generatorius.

4.1 apibrėžimas. Sakoma, kad diskretizacijos schema $\hat{X}^h$ yra silpnoji ν-ios eilės (4.1) lygties sprendinio $(X_t^x, t \in [0,T])$ aproksimacija, jei kiekvienai funkcijai $f \in C_0^\infty(\mathbb{D})$ egzistuoja toks $C > 0$, kad

$$|\mathbb{E}f(X_T^x) - \mathbb{E}f(\hat{X}_T^x)| \leq Ch^\nu, \ h > 0.$$

4.2 apibrėžimas. Tarkime, kad $Af \in C_{\mathrm{pol}}^\infty(\mathbb{D})$ su kiekviena funkcija $f \in C_{\mathrm{pol}}^\infty(\mathbb{D})$, t. y. $b, \tilde{\sigma}^2 \in C_{\mathrm{pol}}^\infty(\mathbb{D})$. Proceso X_t^x diskretizacijos schemos $\hat{X}_t^x$ ν-ios eilės liekana vadinsime operatorių $R_\nu^h : C_{\mathrm{pol}}^\infty(\mathbb{D}) \to C(\mathbb{D})$, apibrėžiamą lygybe

$$R_\nu^h f(x) := \mathbb{E}f(\hat{X}_h^x) - \left[f(x) + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{A^k f(x)}{k!} h^k \right], \ x \in \mathbb{D}, \ h > 0. \tag{4.3}$$

Diskretizacijos schemą $\hat{X}_t^x$ vadinsime lokalia ν-ios eilės silpnąja (4.1) lygties aproksimacija, jei

$$R_\nu^h f(x) = O(h^{\nu+1}), \ h \to 0,$$

su visomis $f \in C_{\mathrm{pol}}^\infty(\mathbb{D})$ ir visais $x \in \mathbb{D}$.

Aproksimacijos

Mums pavyko sukonstruoti paprastai realizuojamas ir efektyvias pirmosios ir antrosios eilės silpnąsias WF lygties sprendinio aproksimacijas. Šiose aproksimacijose kiekviename žingsnyje generuojami tik diskretieji atsitiktiniai dydžiai. Aproksimacijos apibrėžiamos žemiau pateiktose teoremose bei iliustruojamos simuliacijų pavyzdžiais.

4.1 teorema. *Tarkime, kad*

$$D_t^x = D(x,t) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-bt} + \frac{a}{b}\left(1 - \mathrm{e}^{-bt}\right), & 0 \leq a \leq b \neq 0, \\ x, & a = b = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

ir apibrėžkime atsitiktinį dydį $\hat{S}_h^x$, įgyjantį reikšmes

$$\hat{x}_{1,2} := \begin{cases} x_{1,2}(x,h) \text{ su tik. } p_{1,2} = \frac{x}{2x_{1,2}(x,h)}, \\ \hfill x \in [0,1/2], \\ 1 - x_{1,2}(1-x,h) \text{ su tik. } p_{1,2} = \frac{1-x}{2x_{1,2}(1-x,h)}, \\ \hfill x \in (1/2,1]; \end{cases} \tag{4.5}$$

čia

$$x_{1,2}(x,h) = x + (1-x)\sigma^2 h \mp \sqrt{(x+(1-x)\sigma^2 h)(1-x)\sigma^2 h}.$$

Tada vienažingsnė aproksimacija $\hat{X}_h^x$, apibrėžiama kompozicija

$$\hat{X}_h^x := D(\hat{S}_h^x, h),\ x \in [0,1],\ h > 0,$$

yra pirmosios eilės WF lygties (1.1) silpnoji aproksimacija.

4.2 teorema. *Tarkime, kad*

$$\begin{aligned} x_1 = x_1(x,h) &= x + \frac{3(1-x)\sigma^2 h}{4} + \frac{2x\sigma^2 h}{3} \\ &\quad - \sqrt{3x(1-x)\sigma^2 h}, \\ x_2 = x_2(x,h) &= x + \frac{17x\sigma^2 h}{12}, \\ x_3 = x_3(x,h) &= x + \frac{3(1-x)\sigma^2 h}{4} + \frac{2x\sigma^2 h}{3} \\ &\quad + \sqrt{3x(1-x)\sigma^2 h}, \\ y_{1,2} = y_{1,2}(x,h) &= x + (1-x)\sigma^2 h \\ &\quad \mp \sqrt{(x+(1-x)\sigma^2 h)(1-x)\sigma^2 h} \end{aligned}$$

ir apibrėžkime atsitiktinį dydį

$$\hat{S}_h^x := \begin{cases} x_{1,2,3}(x,h) \text{ su tikimybėmis } p_{1,2,3}(x,h) \text{ ir} \\ \quad 0 \text{ su tikimybe} \\ \qquad p_0(x,h) = 1 - (p_1 + p_2 + p_3)(x,h), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in (\frac{\sigma^2 h}{3}, \frac{1}{2}], \\ 1 - x_{1,2,3}(1-x,h) \text{ su tik. } p_{1,2,3}(1-x,h) \text{ ir} \\ \quad 1 \text{ su tikimybe} \\ \qquad p_0(x,h) = 1 - (p_1 + p_2 + p_3)(1-x,h), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in (\frac{1}{2}, 1 - \frac{\sigma^2 h}{3}), \\ y_{1,2}(x,h) \text{ su tikimybėmis } \tilde{p}_{1,2}(x,h) := \frac{x}{2y_{1,2}(x,h)}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in [0, \frac{\sigma^2 h}{3}], \\ 1 - y_{1,2}(1-x,h) \text{ su tikimybėmis } \tilde{p}_{1,2}(1-x,h), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in [1 - \frac{\sigma^2 h}{3}, 1]; \end{cases} \tag{4.6}$$

čia

$$\begin{aligned} p_1(x,h) &= \frac{\hat{m}_1 x_2 x_3 - \hat{m}_2 x_2 - \hat{m}_2 x_3 + \hat{m}_3}{x_1(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)}, \\ p_2(x,h) &= -\frac{\hat{m}_1 x_1 x_3 - \hat{m}_2 x_1 - \hat{m}_2 x_3 + \hat{m}_3}{x_2(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)}, \\ p_3(x,h) &= \frac{\hat{m}_1 x_1 x_2 - \hat{m}_2 x_1 - \hat{m}_2 x_2 + \hat{m}_3}{x_3(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)} \end{aligned} \tag{4.7}$$

su

$$\begin{aligned} \hat{m}_1 &= x, \\ \hat{m}_2 &= x^2 + \sigma^2 h x(1-x)(1 - \tfrac{1}{2}\sigma^2 h), \\ \hat{m}_3 &= x^3 + \tfrac{3}{2}x(\sigma^2 h)^2(3x^2 - 4x + 1) - 3x\sigma^2 h(x^2 - x). \end{aligned}$$

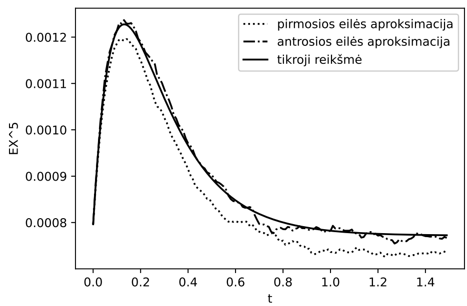
Tada vienažingsnė aproksimacija $\hat{X}_h^x$, *apibrėžiama kompozicija*

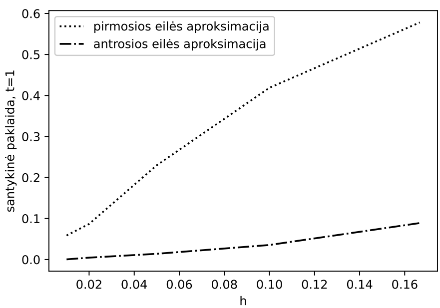
$$\hat{X}_h^x = D(\hat{S}(D(x, h/2), h), h/2), \; x \in [0,1], \; h > 0, \tag{4.8}$$

yra antrosios eilės WF lygties (1.1) *silpnoji aproksimacija.*

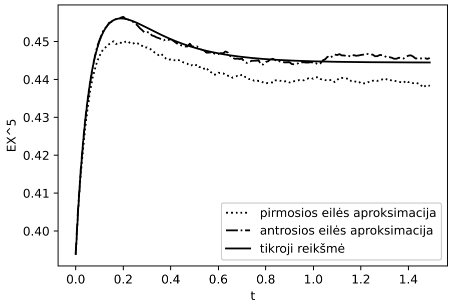
Simuliacijų pavyzdžiai

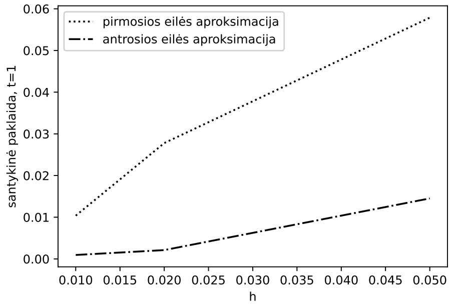
Sukonstruotas aproksimacijas pailiustruosime su testuojančia funkcija $f(x) = x^5$. 1–2 grafikuose lyginami momentai $\mathbb{E}f(\hat{X}_t^x)$ ir $\mathbb{E}f(X_t^x)$ absoliučia bei santykine reikšme, kintant t (viršutiniai grafikai, $h = 0{,}01$) ir diskretizacijos žingsniui h (apatiniai grafikai, $t = 1$).





1 pav.: $\mathbb{E}f(\hat{X}_t^x)$ ir $\mathbb{E}f(X_t^x)$ palyginimas, kintant t ir h, su $f(x) = x^5$: $x = 0{,}24$, $\sigma^2 = 0{,}6$, $a = 0,8$, $b = 5$, iteracijų skaičius $N = 100\ 000$. Viršuje: $h = 0{,}01$; apačioje: santykinė paklaida, kai $t = 1$.





2 pav.: $\mathbb{E}f(\hat{X}_t^x)$ ir $\mathbb{E}f(X_t^x)$ palyginimas, kintant t ir h, su $f(x) = x^5$: $x = 0{,}83$, $\sigma^2 = 2$, $a = 4$, $b = 5$, iteracijų skaičius $N = 100\,000$. Viršuje: $h = 0{,}01$; apačioje: santykinė paklaida, kai $t = 1$.

Atgalinės Kolmogorovo lygties sprendinio reguliarumas

Šioje disertacijoje įrodomas atgalinės Kolmogorovo lygties, susijusios su WF procesu ir taip pat CIR procesu bei Stratonovičiaus SDL su kvadratinės šaknies difuzijos koeficientu, sprendinio reguliarumas. Šis faktas yra esminis norint griežtai įrodyti, kad potenciali („kandidatė“) silpnoji aproksimacija iš tiesų yra atitinkamos eilės silpnoji aproksimacija.

4.3 teorema. *Pažymėkime*

$$C_*^\infty[0,1] := \big\{f \in C^\infty[0,1] : \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k!} \max_{x\in[0,1]} |f^{(k)}(x)| = 0\big\},$$

ir tarkime, kad X_t^x yra WF procesas. Jei $f \in C_*^\infty[0,1]$, tai

$$u(t,x) := \mathbb{E}f(X_t^x), \quad (t,x) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times [0,1],$$

yra C^∞ funkcija ir

$$\partial_t u(t,x) = Au(t,x). \tag{4.9}$$

4.3 teoremą klasei $C^\infty[0,1]$ įrodė Epstein ir Mazzeo [5] diferen-cialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis teorijos metodais. Disertacijoje pateiktas įrodymas yra grynai tikimybinis ir žymiai paprastesnis.

4.4 teorema. *Tarkime, kad*

$$X_t(x) = X_t^x = x + \int_0^t \theta(\kappa - X_s^x)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\sqrt{X_s^x}\,\mathrm{d}B_s$$

yra CIR procesas su koeficientais, tenkinančiais sąlygą $\sigma^2 \le 4\theta\kappa$ ir prasidedantis taške $x \ge 0$. Tarkime, kad $f \in C^q_{\mathrm{pol}}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ su kokiu nors $q \ge 4$. Tada funkcija

$$u(t,x) := \mathbb{E}f(X_t(x)), \quad x \ge 0, t \in [0,T],$$

yra l kartų tolydžiai diferencijuojama pagal $x \ge 0$ ir l' kartų tolydžiai diferencijuojama pagal $t \in [0,T]$, su $l, l' \in \mathbb{N}$ tokiais, kad $2l + 4l' \le q$. Be to, egzistuoja tokios konstantos $C \ge 0$ ir $k \in \mathbb{N}$, priklausančios tik nuo geros sekos $\{(C_i, k_i)$, $i = 0,1,\dots,q\}$ funkcijai f, kad

$$\big|\partial_x^j \partial_t^i u(t,x)\big| \leqslant C(1+x^k), \quad x \ge 0,\ t \in [0,T]; \tag{4.10}$$

čia $j = 0, 1, \ldots, l$, $i = 0, 1, \ldots, l'$. *Be to,* $u(t,x)$, $(t,x) \in [0,T] \times \overline{\mathbb{R}}_+$, *yra (klasikinis) atgalinės Kolmogorovo lygties sprendinys.*

Atskiru atveju, jei $f \in C^\infty_{\mathrm{pol}}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, *tai* $u(t,x)$ *yra be galo daug kartų diferencijuojama aibėje* $[0,T] \times \overline{\mathbb{R}}_+$ *ir įvertis* (4.10) *galioja su visais* $i, j \in \mathbb{N}$, *o konstantos* C *ir* k *priklauso tik nuo* (i,j) *ir geros sekos* $\{(C_i, k_i),\ i \in \mathbb{N}_0\}$ *funkcijai* f.

4.4 teorema yra žinomas rezultatas, kurį įrodė Alfonsi [1], panaudojęs žinomą gana sudėtingą CIR proceso perėjimo tankio išraišką. Šioje disertacijoje pateiktas tiesioginis įrodymas nesinaudojant perėjimo tankiu. Toks metodas leido išplėsti rezultatą bendroms Stratonovičiaus lygtims su kvadratinės šaknies difuzijos koeficientu:

4.5 teorema. *Tegul* $X_t(x) = X_t^x$, $t \geq 0$, *yra procesas, tenkinantis Stratonovičiaus SDL*

$$\mathrm{d}X_t = \sqrt{X_t a(X_t)} \circ \mathrm{d}B_t, \qquad X_0 = x \geq 0. \tag{4.11}$$

Tariame, kad funkcija $a \in C^{2l-1}_{\mathrm{pol}}(\overline{\mathbb{R}}_+) \cap C_{\mathrm{lin}}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ *su kokiu nors* $l \geqslant 1$ *ir* $0 < C_0 \leqslant a(x)$, $x \geqslant 0$. *Jei* $f \in C^q_{\mathrm{pol}}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ *su kokiu nors* $q \geqslant 4$, *tai funkcija*

$$u(t,x) := \mathbb{E} f(X_t(x)), \quad x \geqslant 0,\ t \in [0,T],$$

yra l *kartų tolydžiai diferencijuojama pagal* $x \geq 0$ *ir* l' *kartų tolydžiai diferencijuojama pagal* $t \in [0,T]$ *su tokiais* $l, l' \in \mathbb{N}$, *kad* $2l + 4l' \leq q$. *Be to, egzistuoja tokios konstantos* $C \geq 0$ *ir* $k \in \mathbb{N}$, *priklausančios tik nuo geros sekos* $\{(C_i, k_i),\ i = 0, 1, \ldots, q\}$ *funkcijai* f, *kad*

$$\left|\partial_x^j \partial_t^i u(t,x)\right| \leqslant C(1 + x^k), \quad x \geq 0; \tag{4.12}$$

čia $j = 0, 1, \ldots, l$, $i = 0, 1, \ldots, l'$. *Be to,* $u(t, x)$, $(t, x) \in [0, T] \times \overline{\mathbb{R}}_+$, *yra (klasikinis) atgalinės Kolmogorovo lygties sprendinys.*

Atskiru atveju, jei $f \in C^\infty_{\mathrm{pol}}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, *tai* $u(t, x)$ *yra be galo daug kartų diferencijuojamas aibėje* $[0, T] \times \overline{\mathbb{R}}_+$ *ir įvertis* (4.10) *galioja su visais* $i, j \in \mathbb{N}$, *o* C *ir* k *priklauso tik nuo* (i, j) *ir geros sekos* $\{(C_i, k_i),\ i \in \mathbb{N}_0\}$ *funkcijai* f.

5 Mokslinis aktualumas ir naujumas

Wright–Fisher procesas pradžioje naudotas modeliuoti genų dreifą, t.y. genų proporciją populiacijoje. Pastaraisias metais šis procesas pradėtas naudoti ir finansų matematikoje. Pagrindinė to priežastis yra tai, jog WF procesas yra apibrėžtas uždarame intervale ir tai lemia jo pritaikomumą modeliuojant dinaminius aprėžtus kintamuosius, pavyzdžiui režimo ar bankroto tikimybę. Deja, WF procesas neturi sprendinio išreikštiniu pavidalu. Todėl yra didelis poreikis turėti tikslias jo aproksimacijas.

Egzistuojančios antros eilės WF proceso aproksimacijos [3] yra sukonstruotos pasinaudojant WF proceso sąryšiu su CIR procesu bei anksčiau sukonstruotomis aproksimacijomis pastarajam. Disertacijoje pasiūlytos schemos, kurios yra sukonstruotos tiesiogiai bei yra lengvai realizuojamos. Aproksimacijų tikslumą ne tik įrodome griežtai, bet ir iliustruojame įtikinamais simuliacijų pavyzdžiais.

Kalbant apie atgalinės Kolmogorovo lygties sprendinio reguliarumą, žinomi rezultatai buvo gauti naudojant diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis teorijos metodus [5] (WF lygčiai) arba perėjimo tankio išreikštinę formulę [1] (CIR lygčiai). Šioje disertacijoje atgalinės Kolmogorovo lygties, susijusios su WF ar CIR procesais, sprendinio reguliarumas įrodomas naudojant tikimybinius metodus ir nesinaudojant perėjimo tankio formule. Pastaruoju atveju tai leido išplėti metodą Stratonovičiaus pavidalo lygčiai su kvadratinės šaknies difuzijos koeficientu.

6 Darbo struktūra ir apimtis

Disertaciją sudaro tikslus ir uždavinius apžvelgiantis įvadas (1 skyrius), trumpa susijusių tyrimų apžvalga (2 skyrius), pagrindiniai apibrėžimai, teoremos ir naudojamų metodikų aprašymai (3 skyrius), disertacijos tyrimai (4 ir 5 skyriai), išvados (6 skyrius), priedas (7 skyrius) ir literatūros sąrašas.

Disertacija parašyta anglų kalba ir ją sudaro 95 puslapiai.

7 Publikacijos

Disertacijos rezultatai publikuoti šiuose moksliniuose straipsniuose:

1. V. Mackevičius, G. Mongirdaitė, *On backward Kolmogorov equation related to CIR process*, Modern Stoch. Theory Appl. **5**(1), 113–127 (2018).

2. G. Mongirdaitė, V. Mackevičius, *Weak approximations of Wright–Fisher equation*, Lietuvos matematikos rinkinys **62**: 23–26 (2021).

3. V. Mackevičius, G. Mongirdaitė, *Weak approximations of the Wright–Fisher process*, Mathematics **10**, 125 (2022).

8 Rezultatų sklaida

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti šiose mokslinėse konferencijose:

- 12-toji tarptautinė Vilniaus konferencija „Tikimybių teorija ir matematinė statistika“, Vilnius, Lietuva, 2018–07–03.

- 58-oji Lietuvos matematikų draugijos (LMD) konferencija, Vilnius, 2017–06–21.

- 60-oji LMD konferencija, Vilnius, 2019–06–19.

- 61-oji LMD konferencija, Šiauliai, 2020–12–04.

- 62-oji LMD konferencija, Vilnius, 2021–06–16.

9 Išvados

Disertacijoje konstruojamos pirmosios ir antrosios eilės WF lygties sprendinio silpnosios aproksimacijos, naudojant aproksimuojamos lygties išskaidymo (angl. split-step), aproksimacijos ir lygties sprendinio momentų sutapimo (angl. moment matching) ir apytikslių momentų sutapimo metodus. Lygties išskaidymo metodas aproksimuojamai lygčiai priskiria vadinamąsias stochastinę ir deterministinę lygties dalis. Deterministinės dalies išreikštinis sprendinys lengvai randamas naudojant diferencialinių lygčių sprendimo metodus, o stochastinė dalis aproksimuojama silpnosiomis aproksimacijomis. Stochastinės dalies aproksimacijos konstravimui, siekiant norimo tikslumo, naudojami aproksimacijos ir lygties sprendinio momentų bei apytikslių momentų sulyginimo metodai.

Taip pat tikimybiniais metodais įrodomas atgalinės Kolmogorovo lygties, susijusios su WF procesu bei CIR procesu ir Stratonovičiaus SDL su kvadratinės šaknies difuzijos koeficientu, sprendinio reguliarumas, nenaudojant perėjimo tankio išraiškų. Šis faktas yra esminis įrodant, kad potenciali („kandidatė“) silpnoji aproksimacija iš tiesų yra atitinkamos eilės silpnoji aproksimacija.

Pagrindiniai disertacijos rezultatai:

- Sukonstruota pirmosios eilės silpnoji aproksimacija WF lygčiai.
- Sukonstruota antrosios eilės silpnoji aproksimacija WF lygčiai.
- Pateikti simuliacijų pavyzdžiai, iliustruojantys pirmosios bei antrosios eilės silpnųjų WF lygčties aproksimacijų tikslumą.

- Pateiktas tikimybinis atgalinės Kolmogorovo lygties, susijusios su WF procesu, sprendinio reguliarumo įrodymas.
- Pateiktas atgalinės Kolmogorovo lygties, susijusios su CIR procesu, sprendinio reguliarumo įrodymas, nesinaudojant žinoma tankio formule. Toks metodas leido išplėsti rezultatą Stratonovičiaus lygtims su kvadratinės šaknies difuzijos koeficientu.

10 Summary

The aim of the thesis is to construct simple, yet effective first- and second-order weak approximations for the solution of the WF model that use only generation of discrete random variables at each approximation step. In addition, we prove the regularity of solutions of the backward Kolmogorov equations for the WF equation as well as for the CIR and general Stratonovich equations with square-root diffusion coefficient. This fact is essential in rigorous proofs of the convergence rates of weak approximations of SDEs. The main results presented in Chapters 4 and 5 were published in papers [8] and [9].

The main problem in developing numerical methods for "square-root" diffusions is that the diffusion coefficient has unbounded derivatives near "singular" points (in our case, 0 and 1), and therefore standard methods (see, e.g., Milstein and Tretyakov [10]) are not applicable; typically, discretization schemes involving (explicitly or implicitly) the derivatives of the coefficients usually lose their accuracy near singular points, especially for large σ.

When it comes to the regularity of solutions of the backward Kolmogorov equations, known results rely on explicit formulas of density [1] or partial differential equation theory [5]. In this thesis, we give probabilistic proofs of the regularity of solutions for the WF equation and for the CIR equation without relying on existing transition density formulas. This enabled us to extend our method to general Stratonovich equations with square-root diffusion coefficient.

In Chapter 2, we give an overview of related results obtained by other authors. Preliminaries and definitions

are provided in Chapter 3. In Section 4.1, we construct a first-order weak approximation of the WF model, and in Section 4.2, we construct a second-order one. In the same sections, we summarize the constructed first- and second-order algorithms and illustrate them by numerical simulation results. In Section 5, we prove the regularity of solutions of backward Kolmogorov equations for SDEs with square-root diffusion coefficients: for WF, CIR, and general Stratonovich square-root diffusions (Sections 5.1, 5.2, and 5.3, respectively). We provide conclusions of the thesis in Chapter 6, and in the Appendix (Chapter 7), we provide additional calculations.

Literatūra

[1] A. Alfonsi. On the discretization schemes for the CIR (and Bessel squared) processes. *Monte Carlo Methods and Applications*, 11(4):355–384, 2005.

[2] A. Alfonsi. High order discretization schemes for the CIR process: Application to affine term structure and Heston models. *Mathematics of Computation, American Mathematical Society*, 79(269):209–237, 2010.

[3] A. Alfonsi. *Affine Diffusions and Related Processes: Simulation, Theory and Applications*, volume 6 of *Bocconi & Springer Series*. Springer, 1 edition, 2015.

[4] J.C. Cox, J.E. Ingersoll, and S.A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, (53):385–407, 1985.

[5] C.L. Epstein and R. Mazzeo. Wright–Fisher diffusion in one dimension. *SIAM J. Math. Anal.*, 42:568–608, 2010.

[6] G. Lileika and V. Mackevičius. Weak approximation of CKLS and CEV processes by discrete random variables. *Lithuanian Mathematical Journal*, 60(2):208–224, 2020.

[7] G. Lileika and V. Mackevičius. Second-order weak approximations of CKLS and CEV processes by discrete random variables. *Mathematics*, 9, 2021.

[8] V. Mackevičius and G. Mongirdaitė. On backward Kolmogorov equation related to CIR process. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 5(1):113–127, 2018.

[9] V. Mackevičius and G. Mongirdaitė. Weak approximations of the wright–fisher process. *Mathematics*, 10(125), 2022.

[10] G. Milstein and M. V. Tretyakov. *Stochastic Numerics for Mathematical Physics*. Scientific Computation. Springer-Verlag, 1 edition, 2004.

Trumpai apie disertantą

Gimimo data ir vieta:

1991–12–15 Vilniuje.

Išsilavinimas:

2006–2010 Molėtų gimnazija

2010–2014 Vilniaus universiteto finansų ir draudimo matematikos bakalauras

2014–2016 Vilniaus universiteto finansų ir draudimo matematikos magistras

2016–2022 Vilniaus universiteto matematikos doktorantė

Darbo patirtis

2013–2016	Ergo Life Insurance SE
2016–2022	Danske Bank
2022–	Vinted

UŽRAŠAMS

UŽRAŠAMS

Vilniaus universiteto leidykla
Saulėtekio al. 9, III rūmai, LT-10222 Vilnius
El. p.: info@leidykla.vu.lt, www.leidykla.vu.lt
bookshop.vu.lt, journals.vu.lt
Tiražas 20 egz.