VILNIAUS UNIVERSITETAS

KĘSTUTIS JANULIS

DIRICHLĖ L FUNKCIJŲ IR HURVICO TIPO DZETA FUNKCIJŲ MIŠRUS JUNGTINIS UNIVERSALUMAS

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2015

Disertacija rengta 2011–2015 metais Vilniaus universitete

Mokslinis vadovas – prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos mokslo krypties taryboje:
Pirmininkas – prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Nariai:
Prof. dr. Vasily Ivanovich Bernik (Baltarusijos mokslų akademijos matematikos institutas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)
Prof. habil. dr. Algimantas Jonas Bikelis (Vytauto Didžiojo universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)
Doc. dr. Paulius Drungilas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)
Prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2015 m. lapkričio 26 d. 16 val., VU Matematikos ir informatikos fakultete 102 a.
Adresas: Naugarduko g. 24, LT – 03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2015 m. spalio 26 d.

Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu: www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

VILNIUS UNIVERSITY

KĘSTUTIS JANULIS

MIXED JOINT UNIVERSALITY FOR DIRICHLET L - FUNCTIONS AND HURWITZ TYPE ZETA - FUNCTIONS

Summary of doctoral dissertation
Physical sciences, Mathematics (01P)

Vilnius, 2015

The scientific work was carried out in 2011–2015 at Vilnius University

Scientific supervisor – Prof. Dr. Habil. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The thesis is defined in the council of Mathematics of Vilnius University:
Chairman – Prof. Dr. Habil. Eugenijus Manstavičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Members:
Prof. Dr. Vasily Ivanovich Bernik (Institute of Mathematics of Academy of Science of Belarus, Physical sciences, Mathematics – 01P)
Prof. Dr. Habil. Algimantas Jonas Bikelis (Vytautas Magnus University, Physical sciences, Mathematics – 01P)
Doc. Dr. Paulius Drungilas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)
Prof. Dr. Habil. Konstantinas Pileckas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on November 26, 2015, in Vilnius University, Departament of Mathematics and Informatics, room 102, 4 p.m.
Address: Naugarduko str. 24, LT – 03225 Vilnius, Lithuania.

The summary of dissertation was distributed on October26, 2015.

The dissertation is available at the Library of Vilnius University and
at VU website address: www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

Tyrimo objektas

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Disertacijoje nagrinėjamos Dirichlė L funkcijos $L(s, \chi)$, Hurvico $\zeta(s, \alpha)$ ir periodinės Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$, kurios pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiamos Dirichlė eilutėmis

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s},$$

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}$$

ir

$$\zeta(s, \alpha, \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s}.$$

Čia χ yra Dirichlė charakteris moduliu $q \in \mathbb{N}$, α, $0 < \alpha \leq 1$, yra fiksuotas parametras, o $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka su minimaliu periodu $k \in \mathbb{N}$. Visos šios funkcijos yra analizinškai pratęsiamos į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$. Jei χ yra nepagrindinis charakteris, o

$$\sum_{m=0}^{k-1} a_m = 0,$$

tai funkcijos $L(s, \chi)$ ir $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ yra sveikosios funkcijos.

Funkcija $L(s, \chi)$ išsiskiria iš šių trijų funkcijų Oilerio sandauga

$$L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}, \sigma > 1,$$

pagal pirminius skaičius. Iš apibrėžimo matome, kad $\zeta(s, 1)$ yra Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$ ir

$$\zeta(s, \frac{1}{2}) = (2^s - 1)\zeta(s).$$

Kadangi puplokštumėje $\sigma > 1$

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

tai Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ turi Oilerio sandaugą tiktai parametro reikšmėms $\alpha = 1$ ir $\alpha = \frac{1}{2}$. Aišku, kad $\zeta(s, \alpha, \{1\}) = \zeta(s, \alpha)$. Taigi, $\zeta(s, \alpha)$ yra Rymano dzeta funkcijos, o $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ yra Hurvico dzeta funkcijos apibendrinimas.

Disertacijoje yra nagrinėjami rinkiniai, sudaryti iš Dirichlė L funkcijų ir Hurvico arba periodinių Hurvico dzeta funkcijų.

Darbo tikslai ir uždaviniai

Darbo tikslas yra mišrios jungtinės universalumo teoremos Dirichlė L funkcijoms ir Hurvico tipo dzeta funkcijoms, t.y., teoremos apie duotų analizinių funkcijų rinkinio vienalaikį aproksimavimą Dirichlė L

funkcijų, kurios turi Oilerio sandaugą pagal pirminius skaičius, ir Hurvico tipo dzetų funkcijų, kurios neturi Oilerio sandaugos, postūmiais.

Uždaviniai yra šie:

1. Mišri jungtinė universalumo teorema Dirichlė L funkcijoms ir Hurvico dzeta funkcijoms.
2. Mišri jungtinė universalumo teorema Dirichlė L funkcijoms ir periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms.
3. Dirichlė L funkcijų ir Hurvico dzeta funkcijų rinkinio sudėtinių funkcijų universalumas.
4. Dirichlė L funkcijų ir periodinių Hurvico dzeta funkcijų rinkinio sudėtinių funkcijų universalumas.

Aktualumas

Dzeta ir L funkcijos yra pagrindiniai analiziniai analizinės skaičių teorijos objektai. Jos yra naudojamos ne tik daugeliui problemų spręsti, bet ir pačios yra plačiai nagrinėjamos. 1975 m. S. M. Voronino atrastas dzeta funkcijų universalumas yra labai įdomus ir naudingas reiškinys, turintis visą eilę teorinių ir praktinių taikymų. Iš universalumo teoremų išplaukia dzeta funkcijų hipertranscendetumas, kurį dar 1900 m. numatė garsus matematikas D. Hilbertas. Funkcijos $\zeta(s)$ atveju, tai reiškia, kad, jei ne visos tolydžios funkcijos $F_0, F_1, \dots, F_N : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ yra tapatingai lygios nuliui, tai tuomet ir

$$\sum_{m=0}^{N} s^m F_m(\zeta(s), \zeta^{'}(s), \dots, \zeta^{(n)}(s) \neq 0$$

su kuriuo nors $s \in \mathbb{C}$. Dzeta funkcijų be Oilerio sandaugos universalumas gali būtų taikomas tų funkcijų nulių pasiskirstymo tyrimui, egzistuoja ryšys tarp kartotinių dzeta funkcijų universalumo ir nulių. Primename, kad kvadratinio skaičių kūno $\mathbb{Q}(\sqrt{d}), d < 0$, klasių skaičius $h(d)$ yra lygus diskriminanto d redukuotų binariųjų kvadratinių formų skaičiui. Tegul Λ^{-1} yra neigiamų diskriminantų aibė. Tuomet yra žinoma, kad iš universalumo rezultatų išplaukia aibės $\{\frac{h(d)}{\sqrt{d}} : d \in \Lambda^{-1}\}$ tirštumas aibėje $\mathbb{R}_+$. Praktiški universalumo taikymai yra tiesiogiai susiję su sudėtingų analizinių funkcijų aproksimavimu. Pavyzdžiui, funkcijos $\zeta(s)$ universalumas buvo pritaikytas [2] kvantinėje mechanikoje sutinkamų integralų pagal analizines kreives įvertinimui. Universalumas yra glaudžiai susijęs su saviaproksimavimu, taigi ir su Rymano hipoteze (RH). Yra žinoma [25], kad RH yra ekvivalenti tvirtinimui, kad funkcija $\zeta(s)$ gali būti aproksimuojama jos pačios postūmiais $\zeta(s + i\tau)$. Gilius tokio tipo rezultatus gavo T. Nakamura, T. Nakamura ir L. Pankovskis, bei Lietuvos matematikai R. Garunkštis ir E. Karikovas. Šie ir kiti pavyzdžiai rodo, jog dėmesys dzeta funkcijų universalumui turi gilią motyvaciją. Susikūrę įvairiose šalyse (Lietuvoje, Japonijoje, Vokietijoje, Kanadoje, Pietų Korėjoje, Prancūzijoje) universalumo mokyklos taip pat patvirtina dzeta funkcijų universalumo savybės svarbą. Taigi, dzeta ir L funkcijų universalumo tyrimas yra svarbi šiuolaikinės skaičių teorijos problema.

Metodai

Disertacijoje gautų universalumo teoremų įrodymui yra išvystytas tikimybinis metodas, besiremiantis ribinėmis teoremomis apie silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą. Šis metodas apjungia mato ir ergodinės teorijų elementus. Be to, yra naudojami analizinių funkcijų aproksimavimo rezultatai, ypač Mergeliano teorema.

Naujumas

Visi disertacijos rezultatai yra nauji. Mišrus jungtinė universalumo teoremos Dirichlė L funkcijoms ir Hurvico tipo dzeta funkcijoms iki šiol nebuvo nagrinėtas.

Problemos istorija ir rezultatai

Nuo senų laikų matematikus (ir ne tik!) domino piminių skaičių išsidėstymo naturaliųjų skaičių aibėje problema. Remdamiesi Rymano idėjomis ir funkcijos $\zeta(s)$ savybėmis, de la Valė Pusenas ir Adamaras nepriklausomai įrodė, kad

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\log u}(1 + o(1)), x \to \infty.$$

Analogišką problemą apie pirminių skaičių pasiskirstymą artimetinėje progresijoje sprendė L. Dirichlė, t.y., jis nagrinėjo funkcijos

$$\pi(x) = \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv a (mod l)}} 1$$

asimptotiką, kai $(a, l) = 1$ ir $x \to \infty$. Šiam tikslui jam prireikė naujų matematinių objektų – charakterių ir L funkcijų, kurias jis apibrėžė 1937 m. Pasirodė, jog tai yra labai naudingi, tačiau sudėtingi objektai.

Hurvico dzeta funkciją $\zeta(s, \alpha)$ 1887 m. apibrėžė ir pradėjo nagrinėti A. Hurvicas. Funkcija $\zeta(s, \alpha)$ nėra tiesiogiai susijusi su pirminiais skaičiais, tačiau ji yra gana įdomus analizinis objektas, priklausantis nuo parametro, ir yra sutinkama įvairiausiuose uždaviniuose, pavyzdžiui, Dirichlė L funkcijų teorijoje, algebrinėje skaičių teorijoje.

Periodinę Hurvico dzeta funkciją 2006 m. pradėjo nagrinėti A. Laurinčikas.

Grįžtame prie pagrindinės disertacijos problemos – dzeta ir L funkcijų universalumo. Kaip jau minėjome, šių funkcijų universalumą atrado S. M. Voroninas. Jis įrodė [26] tokią teoremą funkcijai $\zeta(s)$.

A teorema. *Tarkime, kad $0 < r < \frac{1}{4}$, o funkcija $f(s)$ yra tolydi ir nelygi nuliui skritulyje $|s| \le r$ bei analizinė šio skritulio viduje. Tuoment kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\tau = \tau(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, kad*

$$\max_{|s| \le r} |\zeta(s + \frac{3}{4} + i\tau) - f(s)| < \varepsilon.$$

Taigi, funkcija $\zeta(s)$ yra vadinama universali, nes atitinamai parinkti jos postūmiai $\zeta(s+\frac{3}{4}+i\tau)$ norimu tikslumu aproksimuoja bet kurią duotą analizinę funkciją, tenkinančią A teoremos sąlygas.

Įvairūs autoriai šiek tiek sustiprino Voronino teoremą. Tegul $D=\{s\in\mathbb{C}:\frac{1}{2}<\sigma<1\}, \mathcal{K}$ yra juostos D kompaktinių poaibių, turinčių jungųjį papildinį, klasė, o $H_0(K), K\in\mathcal{K}$, yra tolydžių, nevirstančių nuliumi aibėje K ir analizinių aibės K viduje klasė. Be to, simboliu $measA$ žymime mačių aibių $A\subset\mathbb{R}$ Lebego matą. Tuomet paskutinė Voronino teoremos versija turi tokį pavidalą [10].

B teorema. *Tarkime, kad $K\in\mathcal{K}$, o $f(s)\in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon>0$*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0;T]:\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau)-f(s)|<\varepsilon\}>0.$$

Matome, kad B teorema išplečia A teoremą dviem kryptimis. Pirma, analizinės funkcijos yra aproksimuojamos postūmiais $\zeta(s+i\tau)$ ne tik skritulyje, bet ir bendresnėse kompaktinėse aibėse iš klasės $\mathcal{K}$. Be to, B teorema rodo, jog yra be galo daug postūmių $\zeta(s+i\tau)$, aproksimuojančių duotą analizinę funkciją, tokių postūmių aibė turi teigiamą apatinį tankį.

Be funkcijos $\zeta(s)$, ir kai kurios kitos dzeta ir L funkcijos taip pat yra universalios Voronino prasme. Pats Voroninas pastebėjo [26], kad ir visos Dirichlė L funkcijos yra universalios. Taigi, turime tokį tvirtinimą.

C teorema. *Tarkime, kad $K\in\mathcal{K}$ ir $f(s)\in H_0(K)$. Tuoment su kiekvienu $\varepsilon>0$*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0;T]:\sup_{s\in K}|L(s+i\tau,\chi)-f(s)|<\varepsilon\}>0.$$

Šiuo metu yra žinoma, jog plačios klasės dzeta ir L funkcijų, turinčių Oilerio sandaugą pagal pirminius skaičius, yra universalios mūsų nagrinėjama prasme. Pavyzdžiui, yra įrodytas [22] kai kurių Dirichlė eilučių

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a(m)}{n^s}$$

su multiplikatyviais koeficientais ($a(mn)=a(m)a(n)$ su visais $m,n\in\mathbb{N},(m,n)=1$) klasių universalumas. Darbe [18] buvo gautas kai kurių parabolinių formų dzeta funkcijų universalumas. Monografoje [23] universalumo savybė buvo išplėsta garsiosios Selbergo klasės L funkcijoms.

Kai kurios dzeta funkcijos, neturinčios Oilerio sandaugos pagal pirminius skaičius, taip pat yra universalios panašia prasme. Tegul $H(K), K\in\mathcal{K}$, yra funkcijų, tolydžių aibėje K ir analizinių aibės K viduje, klasė. Paprasčiausia ir svarbiausia iš dzeta funkcijų be Oilerio sandaugos yra Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s,\alpha)$. Šiuo metu yra žinomas toks rezultatas.

D teorema. *Tarkime, kad parametras α yra transcendentus arba racionalus skaičius $\neq 1,\frac{1}{2}$. Tegul $K\in\mathcal{K}$ ir $f(s)\in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon>0$*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0;T]:\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau,\alpha)-f(s)|<\varepsilon\}>0.$$

Racianaliuoju atveju, D teoremą šiek tiek kitokioje formoje nepriklausomai įrodė S. M. Gonekas [4] ir B. Bagčis [1]. Transcendenčiojo parametro α atvejį galima rasti [19] monografijoje.

D teoremos universalumo savybė dažnai yra vadinama stipriuoju universalumu, nes postūmiais $\zeta(s+i\tau,\alpha)$ yra aproksimuojamos funkcijos iš platesnės klasės $H(K)\supset H_0(K)$ negu B teoremoje.

Hurvico dzeta funkcijos apibendrinimas yra Lercho dzeta funkcija $L(\lambda,\alpha,s)$, kuri pusplokštumėje $\sigma>1$ yra apibrėžiama eilute

$$L(\lambda,\alpha,s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\lambda m}}{(m+\alpha)^s},$$

ir yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą su kiekvienu fiksuotu $\lambda\in\mathbb{R}$. Funkcijos $L(\lambda,\alpha,s)$ universalumas buvo gautas [19] monografijoje. Kitas funkcijos $\zeta(s,\alpha)$ apibendrinimas yra periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$, kuri buvo pradėta nagrinėti [11] darbe. Jos universalumas su transcendenčiuoju parametru α buvo įrodytas [7] straipsnyje.

Žymiai įdomesnis, tačiau sudėtingesnis, yra jungtinis dzeta ir L funkcijų universalumas, kuomet duotas analizinių dunkcijų rinkinys tuo pačiu metu yra aproksimuojamas dzeta arba L funkcijų postūmiais. Pirmasis šios krypties rezultatas taip pat priklauso S. M. Voroninui. Nagrinėdamas Dirichlė L funkcijų funkcinį nepriklausomumą, jis neišreikštiniu pavidalu gavo [22] ir tų funkcijų jungtinį universalumą. Voronino teoremos formulavimui reikalingos kai kurios sąvokos.

Primename, kad nepagrindinis Dirichlė charakteris $\chi(m)$ moduliu q yra vadinamas primityviuoju, jei q yra mažiausias $\chi(m)$ periodas su visais $(m,q)=1$. Jei charakteris $\chi(m)$ moduliu q nėra primityvus, tada egzistuoja toks $q_1, q_1<q$, ir primityvus charakteris $\chi_1(m)$ moduliu q_1, kad

$$\chi(m)=\begin{cases}\chi_1(m) & \text{, kai } (m,q)=1,\\ 0 & \text{, kai } (m,q)>1.\end{cases}$$

Šiuo atveju yra sakoma, kad primityvus charakteris $\chi_1(m)$ generuoja charakterį $\chi(m)$. Dirichlė charakteriai yra vadinami ekvivalenčiais, jei juos generuoja tas pats primityvusis charakteris.

Dabar formuluojame jungtinę universalumo teoremą Dirichlė L funkcijoms [14].

E teorema. *Tarkime, kad $\chi_1,\dots,\chi_r$ yra poromis neekvivalentūs Dirichlė charakteriai. Kai $j=1,\dots,r$, tegul $K_j\in\mathcal{K}$ ir $f_j(s)\in H_0(K_j)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon>0$*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0;T]:\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K_j}|L(s+i\tau,\chi_j)-f_j(s)|<\varepsilon\}>0.$$

B. Bagčio ir S. M. Goneko darbuose buvo gautas silpnesnis E teoremos variantas. Aišku, kad jungtinėse universalumo teoremose funkcijos, kurių pastūmiais yra aproksimuojamos duotos analizinės funkcijos, turi būti tam tikra prasme nepriklausomos. E teoremoje šis nepriklausomumas yra realizuojamas Dirichlė charakterių neekvivalentiškumu.

Hurvico dzeta funkcijų jungtinis universalumas buvo nagrinėjamas keliuose darbuose. Tegul $0 < \alpha_j \leq 1$ su visais $j = 1, \dots, r$,

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \{\log(m + \alpha_j) : m \in \mathbb{N}_0, j = 1, \dots, r\}.$$

Formuluojame jungtinę universalumo teoremą Hurvico dzeta funkcijoms, įrodytą [12] straipsnyje.

F teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Kai $j = 1, \dots, r$, tegul $K_j \in \mathcal{K}$ ir $f_j(s) \in H(K_j)$. Tuomet su kievienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : \sup_{1\leq j\leq r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j) - f_j(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Primename, kad skaičiai $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ yra vadinami algebriškai nepriklausomais virš $\mathbb{Q}$, jei nėra jokio polinomo $p \not\equiv 0$ su racionaliaisiais koeficientais, kad $p(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = 0$. F teorema su stipresne sąlyga, kad $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$, buvo įrodyta T. Nakamuros darbe [24]. A. Dubickas išplėtė [3] F teoremą kitokiems parametrams $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

Periodinių Hurvico dzeta funkcijų jungtiniam unuviversalumui yra skirta daug darbų, o pirmieji rezultatai buvo gauti [11] straipsnyje, kuriame buvo nagrinėjamas atvejis $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = \alpha$. [8] darbe buvo gauta bendresnė teorema. Tegul su visais $j = 1, \dots, r$ turime, kad $0 < \alpha_j \leq 1$, $\mathfrak{a}_j = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ periodinė komplesksinių skaičių seka su mažiausiu periodu k_j, o $k_j = [k_{j1}, \dots, k_{jl_j}]$ yra bendras mažiausias kartotinis ir

$$A = \begin{pmatrix} a_{1r} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kr} \end{pmatrix}.$$

G teorema. *Tarkime, kad skaičiai $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$, $rank(A) = r$. Tegul $K_j \in \mathcal{K}$ ir $f_j(s) \in H(K_j)$ su visais $j = 1, \dots, r$. Tuoment su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : \sup_{1\leq j\leq r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathfrak{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

[20] straipsnyje pavyko atsikratyti rango sąlygos.

Bendriausias rezultatas gautas [21] darbe. Čia yra nagrinėjamos išplėstas periodinių Hurvico dzeta funkcijų rinkinys. Tegul su visais $j = 1, \dots, r$, α_j, $0 < \alpha_j \leq 1$, yra fiksuotas parametras, $l_j \in \mathbb{N}$, o $\mathfrak{a}_{jl} = \{a_{mjl} : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka su minimaliu periodu k_{jl}, $l = 1, \dots, l_j$. Tuomet galima nagrinėti rinkinio

$$\zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{r1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{rl_r}) \tag{0.1}$$

jungtinį universalumą. Tegul $k_j = [k_{j1}, \dots, k_{jl_j}]$ yra periodų $k_{j1}, \dots, k_{jl_j}$ bendras mažiausias kartotinis ir

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j1} & a_{1j2} & \cdots & a_{1jl_j} \\ a_{2j1} & a_{2j2} & \cdots & a_{2jl_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k_j j1} & a_{k_j j2} & \cdots & a_{k_j j l_j} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Tuomet [21] yra teisingas toks bendras tvirtinimas.

H teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$ ir $rank(A_j) = l_j$ su visais $j = 1, \dots .r$. Tegul $K_{jl} \in \mathcal{K}$ ir $f_{jl}(s) \in H(K_{jl})$ su visais $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : \sup_{1\le j\le r} \sup_{1\le l\le l_j} \sup_{s\in K_{jl}} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl}) - f_{jl}(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

M. Mišu pradėjo nagrinėti jungtinį dzeta funkcijų, turinčių Oilerio sandaugą ir jos neturinčių, universalumą. Jis įrodė jungtinę universalumo teoremą Rymano dzeta funkcijai ir Hurvico dzeta funkcijai $\zeta(s, \alpha)$ su transcendenčiuoju parametru α. Tokios rūšies jungtinis universalumas dabar vadinamas mišriuoju jungtiniu universalumu. Mišu teorema turi tokį pavidalą [23].

I teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius. Tegul $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, o $f_1(s) \in H_0(K_1)$, $f_2(s) \in H(K_2)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s + i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon$$

$$\sup_{s\in K_2} |\zeta(s + i\tau, \alpha) - f_2(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Tegul $\mathfrak{a} = \{l_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka. Primename, kad periodinė dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s; \mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}$$

ir yra moromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą su paprastu poliumi taške $s = 1$. Mišu teorema buvo apibendrinta [9] periodinei dzeta funkcijai ir periodinei Hurvico dzeta funkcijai.

Serijoje darbų prie (0.1) rinkinio buvo pridedama dzeta funkcija, turinti Oilerio sandaugą, ir buvo nagrinėjamas mišrus gauto rinkinio universalumas. Pirmiausia prie (0.1) rinkinio buvo pridedama funkcija $\zeta(s)$, vėliau ši funkcija buvo keičiama įvairiausiomis dzeta funkcijomis, susijusiomis su parabolinėmis formomis.

Dabar formuluosime disertacijos rezultatus. Disertacijos 1 skyrius yra skirtas Dirichlė L funkcijų ir Hurvico dzeta funkcijų mišriam jungtiniam universalumui. Pagrindinis skyriaus rezultatas yra toks tvirtinimas.

1.1 teorema. *Tarkime, kad $\chi_1, \ldots, \chi_{r_1}$ yra poromis neekvivalentūs Dirichlė charakteriai,o skaičiai $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_2}$ algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Su visais $j = 1, \ldots, r_1$, tegul $K_j \in \mathcal{K}$ ir $f_j(s) \in H_0(K_j)$,o su visais $j = 1, \ldots, r_2$, tegul $\widehat{K}_j \in \mathcal{K}$ ir $\widehat{f}_j(s) \in H(\widehat{K}_j)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : \sup_{1\le j\le r_1} \sup_{s\in K_j} |L(s+i\tau,\chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon,$$

$$\sup_{1\le j\le r_2} \sup_{s\in \widehat{K}_j} |\zeta(s+i\tau,\alpha_j) - \widehat{f}_j(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Matome, kad 1.1 teoremoje, skirtingai nuo G teoremos, jokia rango sąlyga yra nereikalinga.

1.1 teoremos įrodymas yra tikimybinis. Tegul G yra sritis kompleksinėje plokštumoje, $H(G)$ yra analizinių srityje G funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija, o $\mathcal{B}(X)$ yra erdvės X Borelio σ kūnas. Taigi, 1.1 teoremos įrodymas remiasi mato

$$\frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : \Xi(s+i\tau) \in A\}, A \in \mathcal{B}(H^{r_1+r_2}(D)),$$

$$\Xi(s) = (L(s,\chi_1), \ldots, L(s,\chi_{r_1}), \zeta(s,\alpha_1), \ldots, \zeta(s,\alpha_{r_2})),$$

siplnuoju konvergavimu, kai $T \to \infty$.

Disertacijos 2 skyriuje yra nagrinėjamos Dirichlė L funkcijų ir periodinių Hurvico dzeta funkcijų mišrus jungtinis universalumas, ir yra įrodyta tokia teorema.

2.1 teorema. *Tarkime, kad $\chi_1, \ldots, \chi_d$ yra poromis neekvivalentūs Dirichlė charakteriai, skaičiai $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$ ir $rank(A_j) = l_j$ su visais $j = 1, \ldots .r$. Su visais $j = 1, \ldots, d$, tegul $K_j \in \mathcal{K}$ ir $f_j(s) \in H_0(K_j)$, o su visais $j = 1, \ldots, r$, $l = 1, \ldots, l_j$, tegul $K_{jl} \in \mathcal{K}$ ir $f_{jl}(s) \in H(K_{jl})$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : \sup_{1\le j\le d} \sup_{s\in K_j} |L(s+i\tau,\chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon,$$

$$\sup_{1\le j\le r} \sup_{1\le l\le l_j} \sup_{s\in K_{jl}} |\zeta(s+i\tau,\alpha_j;\mathfrak{a}_{jl}) - f_{jl}(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

2.1 teoremos, kaip ir 1.1 teoremos, įrodymas yra tikimybinis ir remiasi daugiamate ribine toerema funkcijų rinkiniui

$$L(s,\chi_1), \ldots, L(s,\chi_d), \zeta(s,\alpha_1;\mathfrak{a}_{11}), \ldots, \zeta(s,\alpha_1;\mathfrak{a}_{1l_1}), \ldots, \zeta(s,\alpha_r;\mathfrak{a}_{r1}), \ldots, \zeta(s,\alpha_r;\mathfrak{a}_{rl_r}).$$

Santraukos pradžioje jau minėjome, kad dzeta funkcijų universalumas vaidina svarbų vaidmenį analizinėje skaičių teorijoje ir analizinių funkcijų aproksimavimo teorijoje. Todėl yra svarbu išplėsti universalių funkcijų klasę. Tai galima padaryti nagrinėjant sudėtinių funkcijų klases. Pirmieji tokio tipo rezultatai buvo gauti [13] darbe, kuriame buvo nagrinėjamas funkcijų $F(\zeta(s))$ universalumas kai kuriems operatoriams $F: H(D) \to H(D)$. Pavyzdžiui, yra teisinga tokia teorema. Tegul

$$S = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \text{ or } g(s) \equiv 0\}.$$

J teorema. *Tarkime, kad $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydus operatorius, kad su kiekviena atvirąja aibe $G \subset H(D)$, aibė $(F^{-1}G) \cap S$ yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau)) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Straipsnio [13] idėjos buvo pritaikytos Hurvico dzeta funkcijai [17]. Pavyzdžiui, turime tokį D teoremos apibendrinimą.

K teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, o $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydus operatorius, kad su kiekvienu polinomu $p = p(s)$ aibė $F^{-1}\{p\}$ yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau, \alpha)) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Straipsnyje [15] yra nagrinėjamas sudėtinės funkcijos $F(\zeta(s), \zeta(s,\alpha))$ universalumas kai kurioms operatorių $F : H^2(D) \to H(D)$ klasėms. Pateikiame vieną tokį pavyzdį.

L teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, o $F : H^2(D) \to H(D)$ yra toks tolydus operatorius, kad su kiekvienu polinomu $p = p(s)$ aibė $(F^{-1}\{p\}) \cap (S \times H(D))$ yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau), \zeta(s+i\tau, \alpha)) -$$

$$-f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Pagaliau, [16] darbe buvo nagrinėjamas sudėtinių funkcijų $F(\zeta(s,\alpha_1), \ldots, \zeta(s,\alpha_r))$ universalumas. Formuluojame vieną tokio tipo teoremą.

M teorema *Tarkime, kad aibė $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o $F : H^r(D) \to H(D)$ yra toks tolydus operatorius, kad su kiekviena atvira aibe $G \subset H(D)$ aibė $F^{-1}G$ yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau, \alpha_1), \ldots, \zeta(s+i\tau, \alpha_r))$$

$$-f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Disertacijos 3 skyrius yra skirtas 1.1 teoremos apibendrinimui. Jame yra nagrinėjamos sudėtinės funkcijos $F(L(s,\chi_1),\dots,L(s,\chi_{r_1}),\zeta(s,\alpha_1),\dots,\zeta(s,\alpha_{r_2}))$ ir įvairioms operatorių F klasėms yra įrodomos tokios universalumo teoremos.

3.1. teorema. *Tarkime, kad Dirichlė charakteriai $\chi_1,\dots,\chi_{r_1}$, skaičiai $\alpha_1,\dots,\alpha_{r_2}$ tenkina 1.1 teoremos sąlygas, o $F : H^{r_1+r_2}(D) \to H(D)$ yra toks tolydus operatorius, kad su kiekviena atvira aibe $G \subset H(D)$ aibė $(F^{-1}G) \cap (S^{r_1} \times H^{r_2}(D))$ yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |F(L(s+i\tau,\chi_1),\dots,L(s+i\tau,\chi_{r_1}),$$

$$\zeta(s+i\tau,\alpha_1),\dots,\zeta(s+i\tau,\alpha_{r_2})) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

3.1 teorema yra teorinio pobūdžio, jos sąlygą sunku patikrinti. Paprasta 3.1 teoremos modifikacija yra tokia teorema.

3.2. teorema. *Tarkime, kad Dirichlė charakteriai $\chi_1,\dots,\chi_{r_1}$, skaičiai $\alpha_1,\dots,\alpha_{r_2}$ tenkina 1.1 teoremos sąlygas, o $F : H^{r_1+r_2}(D) \to H(D)$ yra toks tolydus operatorius, kad su kiekvienu polinomu $p = p(s)$ aibė $(F^{-1}\{p\}) \cap (S^{r_1} \times H^{r_2}(D))$ yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet yra teisingas 3.1 teoremos tvirtinimas.*

3.2 teoremos taikymo pavyzdys yra pateiktas išvadoje.

3.3 išvada. *Tarkime, kad Dirichlė charakteriai $\chi_1,\dots,\chi_{r_1}$, skaičiai $\alpha_1,\dots,\alpha_{r_2}$ tenkina 1.1 teoremos sąlygas. Tegul $\{j_1,\dots,j_r\} \neq \varnothing$ yra bet koks aibės $\{1,\dots,r_1\}$ poaibis ir $\{l_1,\dots,l_k\} \neq \varnothing$ yra bet koks aibės $\{1,\dots,r_2\}$ poaibis. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet du kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |L(s+i\tau,\chi_{j_1})\dots L(s+i\tau,\chi_{j_r})\times$$

$$\times\zeta(s+i\tau,\alpha_{l_1})\dots\zeta(s+i\tau,\alpha_{l_k}) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Polinomo nevirtimas nuliumi aprėžtoje srityje gali būti kontroliuojamas jo laisvuoju nariu. Todėl kai kuriais atvejais yra patogiau nagrinėti analizinių funkcijų aprėžtoje srityje erdvę. Tegul $D_V = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1, |t| < V\}$ ir

$$S_V = \{g \in H(D_V) : g(s) \neq 0 \text{ or } g(s) \equiv 0\}.$$

su $V > 0$. Tuomet turime tokią 3.2 teoremos modifikaciją.

3.4 teorema. *Tarkime, kad Dirichlė charakteriai $\chi_1,\dots,\chi_{r_1}$, skaičiai $\alpha_1,\dots,\alpha_{r_2}$ tenkina 1.1 teoremos sąlygas, $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$, o $V > 0$ yra toks, kad $K \subset D_V$. Tegul $F : H^{r_1}(D_V) \times$*

$H^{r_2}(D) \to H(D_V)$ *yra toks tolydus operatorius, kad su kiekvienu polinomu* $p = p(s)$ *aibė* $(F^{-1}\{p\}) \cap (S_V^{r_1} \times H^{r_2}(D))$ *yra netuščia. Tuomet yra teisingas 3.1 teoremos tvirtinimas.*

Likusiuose dviejuose skyriaus teoremose yra aproksimuojamos funkcijos iš erdvės $H(D)$ poklasių. Su bet kuriais skirtingais kompleksiniais skaičiais $a_1, \dots, a_k$ apibrėžiame seką

$$H_k(D) = \{g \in H(D) : (g(s) - a_j)^{-1} \in H(D), j = 1, \dots, k\}.$$

3.5 teorema. *Tarkime, kad Dirichlė charakteriai* $\chi_1, \dots, \chi_{r_1}$ *ir skaičiai* $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$ *tenkina 1.1 teoremos sąlygas, o* $F : H^{r_1+r_2}(D) \to H(D)$ *yra toks tolydus operatorius, kad* $F(S^{r_1} \times H^{r_2}(D)) \supset H_k(D)$*. Jei* $k = 1$*, tegul* $K \in \mathcal{K}$*,* $f(s) \in H(K)$ *ir* $f(s) \neq a_1$ *aibėje* K*. Jei* $k \geq 2$*, tegul* $K \subset D$ *yra bet kuri kompaktinė aibė, o* $f(s) \in H_r(D)$*. Tuomet yra teisingas 3.1 teoremos tvirtinimas.*

Pavyzdžiui, 3.5 teorema duoda funkcijų $\sin(L(s,\chi_1)+L(s,\chi_2)+\zeta(s,\alpha_1)+\zeta(s,\alpha_2))$ ir $\cos(L(s,\chi_1)+L(s,\chi_2)+\zeta(s,\alpha_1)+\zeta(s,\alpha_2))$ universalumą su neekvivalenčiais charakteriais χ_1 ir χ_2 ir algebriškai nepriklausomais α_1 ir α_2.

Dar vienoje skyriaus teoremoje yra aproksimuojamos funkcijos iš aibės $F(S^{r_1} \times H^{r_2}(D))$.

3.6 teorema. *Tarkime, kad Dirichlė charakteriai* $\chi_1, \dots, \chi_{r_1}$ *ir skaičiai* $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$ *tenkina 1.1. teoremos sąlygas, o* $F : H^{r_1+r_2}(D) \to H(D)$ *yra tolydus operatorius. Tegul* K *yra bet koks kompaktinės juostos* D *poaibis, o* $f(s) \in F(S^{r_1} \times H^{r_2}(D))$*. Tuomet yra teisingas 3.1 teoremos tvirtinimas.*

3 skyriaus rezultatai buvo gauti [5] ir [6] darbuose.

Disertacijos 4 skyriuje yra nagrinėjamas sudėtinių funkcijų $F(L(s,\chi_1), \dots, L(s,\chi_d), \zeta(s,\alpha_1;\mathfrak{a}_{11}), \dots, \zeta(s,\alpha_1;\mathfrak{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(s,\alpha_r;\mathfrak{a}_{r1}), \dots, \zeta(s,\alpha_r;\mathfrak{a}_{rl_r}))$ universalumas kai kurioms operatorių F klasėms. Pirmiausia yra aptariamos funkcijų iš erdvės $H(D)$ aproksimavimas. Tegul $v = d+l_1+\ldots+l_r$. Sakome, kad operatorius $F : H^v(D) \to H(D)$ priklauso klasei $Lip(\beta_1, \dots, \beta_v)$, $\beta_1 > 0, \dots, \beta_v > 0$, jeigu yra išpildytos tokios sąlygos:

1^o Kiekvieną polinomą $p = p(s)$ ir aibes $K_1, \dots, K_d \in \mathcal{K}$ atitinka toks elementas $(g_1, \dots, g_d, g_{11}, \dots, g_{1l_1}, g_{r1}, \dots, g_{rl_r}) \in F^{-1}\{p\} \subset H^v(D)$, kad $g_j(s) \neq 0$ aibėje K_j su visais $j = 1, \dots, d$;

2^o Kiekvieną $K \in \mathcal{K}$ atitinka tokia konstanta $c > 0$ ir aibės $K_1, \dots, K_v \in \mathcal{K}$, kad

$$\sup_{s\in K} |F(g_{11}(s), \dots, g_{1v}(s)) - F(g_{21}(s), \dots, g_{2v}(s)| \leq$$

$$c \sup_{1\leq j\leq v} \sup_{s\in K_j} |g_{1j}(s) - g_{2j}(s)|^{\beta_j}$$

su visais $(g_{j1}, \dots, g_{jv}) \in H^v(D), j = 1, 2$.

4.1 teorema. *Tarkime, kad Dirichlė charakteriai* $\chi_1, \dots, \chi_d$*, skaičiai* $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ *ir sekos* $\mathfrak{a}_{11}, \dots, \mathfrak{a}_{1l_1}, \dots, \mathfrak{a}_{r1}, \dots, \mathfrak{a}_{rl_r}$ *tenkina 2.1 teoremos sąlygas, o* $F \in Lip(\beta_1, \dots, \beta_v)$*. Tegul* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H(K)$*.*

Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |F(L(s+i\tau,\chi_1),\ldots,L(s+i\tau,\chi_d),$$

$$\zeta(s+i\tau,\alpha_1;\mathfrak{a}_{11}),\ldots,\zeta(s+i\tau,\alpha_1;\mathfrak{a}_{1l_1}),\ldots,$$

$$\zeta(s+i\tau,\alpha_r;\mathfrak{a}_{r1}),\ldots,\zeta(s+i\tau,\alpha_r;\mathfrak{a}_{rl_r})) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Tegul $f^{(n)}$ yra n- oji funkcijos f išvestinė. Pavyzdžiui, operatorius $F(g_1,\ldots,g_d,g_{11},\ldots,g_{1l_1}, g_{r1},\ldots,g_{rl_r}) = c_1 g_1^{(n_1)} + \ldots + c_d g_d^{(n_d)} + \ldots + c_{11} g_{11}^{(n_{11})} + \ldots + c_{1l_1} g_{1l_1}^{(n_{1l_1})} + \ldots + c_{r1} g_{r1}^{(n_{r1})} + \ldots + c_{rl_r} g_{rl_r}^{(n_{rl_r})}$ su $c_1,\ldots,c_d,c_{11},\ldots,c_{1l_1},\ldots,c_{r1},\ \ldots,c_{rl_r} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ir $n_1,\ldots,n_d,n_{11},\ldots,n_{1l_1},\ldots,n_{r1},\ldots,n_{rl_r} \in \mathbb{N}$ priklauso klasei $Lip(1,\ldots,1)$.

Kitos 4 skyriaus teoremos yra 3 skyriaus teoremų analogai. Tegul

$$v_1 = \sum_{j=1}^{r} l_j.$$

4.3 teorema. *Tarkime, kad Dirichlė charakteriai* $\chi_1,\ldots,\chi_d$*, skaičiai* $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ *ir sekos* $\mathfrak{a}_{11},\ldots,\mathfrak{a}_{1l_1},\ldots,\mathfrak{a}_{r1},\ldots,\mathfrak{a}_{rl_r}$ *tenkina 2.1 teoremos sąlygas, o* $F : H^v(D) \to H(D)$ *yra toks tolydus operatorius, kad su kiekviena atvira aibe* $G \subset H(D)$ *aibė* $(F^{-1}G) \cap (S^d \times H^{v_1}(D))$ *yra netuščia. Tegul* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H(K)$*. Tuomet yra teisingas 4.1 teoremos tvirtinimas.*

Iš 4.3 teoremos išplaukia tokia 4.1 teoremos modifikacija.

4.4 teorema. *Tarkime, kad Dirichlė charakteriai* $\chi_1,\ldots,\chi_d$*, skaičiai* $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ *ir sekos* $\mathfrak{a}_{11},\ldots,\mathfrak{a}_{1l_1},\ldots,\mathfrak{a}_{r1},\ldots,\mathfrak{a}_{rl_r}$ *tenkina 2.1 teoremos sąlygas, o* $F : H^v(D) \to H(D)$ *yra toks tolydus operatorius, kad su kiekvienu polinomu* $p = p(s)$ *aibė* $(F^{-1}\{p\}) \cap (S^d \times H^{v_1}(D))$ *yra netuščia. Tegul* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H(K)$*. Tuomet yra teisingas 4.1 teoremos tvirtinimas.*

Nesunku matyti, kad iš klasės $Lip(\beta_1,\ldots,\beta_v)$ 2^0 sąlygos išplaukia operatoriaus F tolydumas. Tačiau tos klasės 1^0 sąlyga yra silpnesnė už reikalavimą, kad $(F^{-1}\{p\}) \cap (S^d \times H^{v_1}(D)) \neq \varnothing$.

Kaip ir 3.4 teoremoje, 4.4 teoremoje dažnai patogu vietoje erdvės $H^v(D)$ nagrinėti erdvę $H^v(D_V, D) = H^d(D_V) \times H^{v_1}(D)$. Su 3.4 teoremos žymenimis, turime tokią 4.3 teoremos modifikaciją.

4.5 teorema. *Tarkime, kad Dirichlė charakteriai* $\chi_1,\ldots,\chi_d$*, skaičiai* $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ *ir sekos* $\mathfrak{a}_{11},\ldots,\mathfrak{a}_{1l_1},\ldots,\mathfrak{a}_{r1},\ldots,\mathfrak{a}_{rl_r}$ *tenkina 2.1 teoremos sąlygas,* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H(K)$*, o* $V > 0$ *yra toks skaičius, kad* $K \subset D_V$*. Tegul* $F : H^v(D_V, D) \to H(D_V)$ *yra toks tolydus operatorius, kad su kiekvienu polinomu* $p = p(s)$ *aibė* $(F^{-1}\{p\}) \cap (S_V^d \times H^{v_1}(D))$ *yra netuščia. Tuomet yra teisingas 4.1 teoremos tvirtinimas.*

Pavyzdžiui, 4.4 teorema gali būti pritaikyta operatoriui

$$F(g_1,\ldots,g_v) = c_1 g_1 + \ldots + c_d g_d, \quad c_1,\ldots,c_d \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Kitos 4 skyriaus teoremos yra skirtos analizinių funkcijų iš operatoriaus $F : H^v(D) \to H(D)$ aibės $S^d \times H^{v_1}(D)$ vaizdo aproksimavimui.

4.8 teorema. *Tarkime, kad Dirichlė charakteriai* $\chi_1, \dots, \chi_d$*, skaičiai* $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ *ir sekos* $\mathfrak{a}_{11}, \dots, \mathfrak{a}_{1l_1}, \dots, \mathfrak{a}_{r1}, \dots, \mathfrak{a}_{rl_r}$ *tenkina 2.1 teoremos sąlygas, o* $F : H^v(D) \to H(D)$ *yra tolydus operatorius. Tegul* $K \subset D$ *kompaktinė aibė ir* $f(s) \in F(S^d \times H^u(D))$*. Tuomet yra teisingas 4.1 teoremos tvirtinimas.*

Aprašyti aibę $F(S^d \times H^{v_1}(D))$ nėra lengva. Paskutinė 4 skyriaus teorema duoda gana paprastos aibės, priklausančios aibei $F(S^d \times H^{v_1}(D))$, pavyzdį. Gautas toks tvirtinimas.

4.9 teorema. *Tarkime, kad Dirichlė charakteriai* $\chi_1, \dots, \chi_d$*, skaičiai* $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ *ir sekos* $\mathfrak{a}_{11}, \dots, \mathfrak{a}_{1l_1}, \dots, \mathfrak{a}_{r1}, \dots, \mathfrak{a}_{rl_r}$ *tenkina 2.1 teoremos sąlygas, o* $F : H^v(D) \to H(D)$ *yra toks tolydus operatorius, kad* $F(S^d \times H^u(D)) \supset H_k(D)$*. Jei* $k = 1$*, tegul* $K \in \mathcal{K}$*,* $f(s) \in H(K)$ *ir* $f(s) \neq a_1$ *aibėje* K*. Jei* $k \geq 2$*, tegul* $K \subset D$ *yra bet kuri kompaktinė aibė, o* $f(s) \in H_k(D)$*. Tuomet yra teisingas 4.1 teoremos tvirtinimas.*

Išvados

1. Rinkiniai, sudaryti iš Dirichlė L funkcijų su poromis neekvivalenčiais charakteriais ir Hurvico dzeta funkcijų su algebriškai nepriklausomais parametrais, turi jungtinio universalumo savybę.
2. Rinkiniai, sudaryti iš Dirichlė L funkcijų su poromis neekvivalenčiais charakteriais ir periodinių Hurvico dzeta funkcijų su algebriškai nepriklausomais parametrais, turi jungtinio universalumo savybę.
3. Kai kurios klasės sudėtinių funkcijų nuo rinkinių aprašytų, 1 punkte, yra universalios.
4. Kai kurios klasės sudėtinių funkcijų nuo nuo rinkinių aprašytų, 2 punkte, yra universalios.

Aprobacija

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti MMA (Mathematical Modeling and Analysis) konferencijose (MMA 2012, Birželio 6 - 9, 2012, Talinas, Estija), (MMA 2013, Gegužės 27 - 30, 2013, Tartu, Estija), (MMA 2014, Gegužės 26 - 39,2014, Druskininkai, Lietuva), tarptautinėje konferancijoje Algebra, skaičių teorija ir diskrečioji geomerija, šiuolaikinės problemos ir taikymai(Gegužės 25 - 30, 2015, Tula, Rusija), Lietuvos matematikų draugijos konferancijose (2012, 2013, 2014), taip pat Vilniaus universiteto skaičių teorijos seminaruose.

Dėkoju savo moksliniam vadovui prof. Antanui Laurinčikui už įvairiapusę paramą doktorantūros studijų metu. Esu dėkingas Vilniaus universiteto tikimybių ir skaičių teorijos fakulteto nariams už paramą ir naudingas diskusijas. Dėkoju Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetui už finansinę paramą.

Publikacijų disertacijos tema sąrašas

1. K. Janulis, Remarks on the joint universality of Dirichlet L - functions and Hurwitz zeta - functions, Šiauliai Math. Semin. **9** (**17**) (2014), 61 - 70.

2. K. Janulis, Mixed joint universality of Dirichlet L - functions and Hurwitz type zeta - functions, in: Materialy XVIII mezh. konf. Algebra, teorija chisel i disk. geom: sovremennye problemy u priloshenіya, Tula 2015, Uzd. Tul. goc. neg. usuv. im. L. N. Tolstogo, Tula, 2015, pp: 210 - 213.

3. K. Janulis and A. Laurinčikas, Joint universality of Dirichlet L - functions and Hurwitz zeta - functions, Ann. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. **39** (2013), 203 - 214.

4. K. Janulis, A. Laurinčikas, R. Macaitienė and D. Šiaučiūnas, Joint universality of Dirichlet L - functions and periodic Hurwitz zeta - functions, Math. Modelling and Analysis **17** (2012), 673 - 685.

5. K. Janulis, D. Jurgaitis, A. Laurinčikas, R. Macaitienė, Universality of some composite functions, (approved).

Konferancijų tezės

1. K. Janulis, Joint universality of Dirichlet L - functions and Hurwitz zeta-functions, 17th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis, Abstracts, Tallinn University of Technology, 2012, p. 58.
2. K. Janulis, On joint universality of Dirichlet L-functions and periodic Hurwitz zeta - functions, 18th International Conference: Mathematical Modelling and Analysis and 4th International Conference: Approximation Methods and Orthogonal Expansions, Abstracts, Institute of Mathematics of the University of Tartu, 2013, p. 50.
3. K. Janulis, Universality of some functions related to Dirichlet L - functions and Hurwitz zeta - functions, 19th International Conference Mathematical Modelling and Analysis, Abstracts, Technika, Vilnius, 2014, p. 29.

Summary

In the thesis, the mixed joint universality of Dirichlet L - functions and Hurwitz type zeta - functions is studied.

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable, $\chi(m)$ be a Dirichlet character, $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, be a fixed parameter, and let $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ be a periodic sequence of complex numbers. Then the Dirichlet L - function $L(s, \chi)$, the Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha)$ and the periodic Hurwitz zeta - function $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{a})$ are defined, for $\sigma > 1$, by the series

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s},$$

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s},$$

and

$$\zeta(s, \alpha, \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m+\alpha)^s},$$

and can be analytically continued to the whole complex plane, except for a possible simple pole at the point $s = 1$. Moreover, the function $L(s, \chi)$ has, for $\sigma > 1$, the Euler product over primes.

We consider the simultaneous approximation of a a collection of analytic functions on compact subsets of the strip $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ by shifts of the above functions. The following universality result are obtained:

1. A mixed joint universality theorem for the collection of functions $(L(s, \chi_1), \ldots, L(s, \chi_{r_1}), \zeta(s, \alpha_1), \ldots, \zeta(s, \alpha_{r_2}))$ with pairwise non-equivalent Dirichlet characters $\chi_1, \ldots, \chi_{r_1}$ and algebraically independent numbers $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_2}$.

2. A mixed joint universality theorem for the collection of functions $L(s, \chi_1), \ldots, L(s, \chi_d)$, $\zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{11}), \ldots, \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{1l_1}), \ldots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{r1}), \ldots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{rl_r})$ with pairwise non-equivalent Dirichlet characters $\chi_1, \ldots, \chi_{r_1}$, algebraically independent numbers $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_2}$ and periodic sequences $\mathfrak{a}_{11}, \ldots, \mathfrak{a}_{1l_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{r1}, \ldots, \mathfrak{a}_{rl_r}$ satisfying a certain rank hypothesis.

   Let $H(D)$ be space of analytic functions on D equipped with the topology of uniform convergence on compacta.

3. Universality theorem for composite functions $F(L(s, \chi_1), \ldots, L(s, \chi_{r_1}), \zeta(s, \alpha_1), \ldots, \zeta(s, \alpha_{r_2}))$ with some operator $F : H^{r_1+r_2}(D) \to H(D)$.

4. Universality theorem for composite functions $F(L(s, \chi_1), \ldots, L(s, \chi_d)$, $\zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{11}), \ldots, \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{1l_1}), \ldots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{r1}), \ldots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{rl_r}))$ with some operator $F : H^{d+r}(D) \to H(D)$.

Cituota literatūra

[1] B. Bagchi, The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, PhD Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

[2] K.M. Bitar, N.N. Khuri and H.C. Ren, Path integrals and Voronin's theorem on the universality and the Riemann zeta function, Annals of Physics **67** (1991), 172–196.

[3] A. Dubickas, On the linear independence of the set of Dirichlet exponents, Kodai Math. J. **35**(2012), 642–651.

[4] S.M. Gonek, Analytic properties of zeta and L-functions, PhD Thesis, University of Michigan, 1979.

[5] K. Janulis, Remarks on the joint universality of Dirichlet L-functions and Hurwitz zeta - functions, Šiauliai Math. Seminar. **9**(**17**), 61–70.

[6] K. Janulis, A. Laurinčikas, Joint universality of Dirichlet L-functions and Hurwitz zeta-functions, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. **39**(2013), 203–214.

[7] A. Javtokas, A. Laurinčikas, Universality of the periodic Hurwitz zeta - function, Integral Transforms Spec. Funct., **17**(2006), 711–722.

[8] A. Javtokas, A. Laurinčikas, A joint universality theorem for periodic Hurwitz zeta - functions, Bull. Austral. Math. Soc. **78**(2008), 13–33.

[9] R. Kačinsksaitė, A. Laurinčikas, The joint distribution of periodic zeta - functions, Studia Sci. Math. Hung. **48** 2011), 257–279.

[10] A. Laurinčikas, Limit Theorems for the Riemann Zeta - Function, Math. Applic., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1996.

[11] A. Laurinčikas, The joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions, Analysis (Munich) **26**(2006), 419–428.

[12] A. Laurinčikas, The joint universality of Hurwitz zeta - functions, Šiauliai Math. Semin. **3**(**11**)(2008), 169–187.

[13] A. Laurinčikas, Universality of the Riemann zeta - function, J. Number Theory **130**(2010), 2323–2331.

[14] A. Laurinčikas, On joint universality of Dirichlet L - functions, Chebysh. Sb. **12**(2011), No. 1, 124–139.

[15] A. Laurinčikas, On joint universality of the Riemann zeta - function and Hurwitz zeta - functions, J. Number Theory **132**(2012), no. 12, 2842-2853.

[16] A. Laurinčikas, Joint universality of Hurwitz zeta - functions, Bull. Austral. Math. Soc. **86**(2012), 232–243.

[17] A. Laurinčikas, On the universality of the Hurwitz zeta-function, Intern. J. Number Theory, **9**(2013), 155–165.

[18] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms, Acta Arith. **98**(2001), 345–359.

[19] A. Laurinčikas, R. Garunkštis, The Lerch Zeta - function, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London, 2002.

[20] A. Laurinčikas, S. Skersonaitė, A joint universality theorem for periodic Hurwitz zeta-functions. II, Lith. Math. J., 49(2009), 287–296.

[21] A. Laurinčikas, S. Skersonaitė, Joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions. II, in: New directions in value - distribution theory of zeta and L - functions, R. Steuding and J. Steuding (Eds), Shaker Verlag, Aachen, 2009, pp. 161–169.

[22] A. Laurinčikas, R. Šleževičienė, The universality of zeta - functions with multiplicative coefficients, Integral Transforms and Spec. Funct. **13** (2002), 243–257.

[23] H. Mishou, The joint value distribution of the Riemann zeta function and Hurwitz zeta functions, Lith. Math. J., **47**(2007), 32–47.

[24] T. Nakamura, The existence and the non-existence of joint t - universality for Lerch zeta functions, J. Number Theory, **125**(2)(2007), 424–441.

[25] J. Steuding, Value - Distribution of L - functions, Lectures Notes Math. Vol. **1877**, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.

[26] S.M. Voronin, Theorem on the "universality" of the Riemann zeta - function, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem, **39**(1975), 475–486 (in Russian)≡ Math. USSR Izv.**9**(1975), 443–445.

[27] S.M. Voronin, On the functional independence of Dirichlet L - functions, Acta Aritm. **27**(1975), 493–503.

Trumpos žinios apie autorių

Gimimo vieta ir data

1985 m. gegužės 16 d., Panevėžys.

Išsilavinimas

2002 Panevėžio konservatorijos pargrindinė muzikos mokykla.

2004 Panevėžio 5 – oji vidurinė mokykla.

2009 Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, matematikos ir matematikos taikymų studijų programos bakalauras.

2011 Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, matematikos ir matematikos taikymų studijų programos magistras.

2015 Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, matematikos doktorantūra.

Short information about the author

Birth data and place

May 16, 1985, Panevezys, Lithuania.

Education

2002 Panevežys conservatory basic music school.

2004 Panevevzys Secondary School No 5

2009 Bachelor degree in Mathematics at Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, Lithuania.

2011 Master degree in Mathematics at Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, Lithuania.

2015 PhD studies in Mathematics at Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, Lithuania.