VILNIAUS UNIVERSITETAS

JOVITA ATSTOPIENĖ

DISKREČIOSIOS UNIVERSALUMO TEOREMOS RYMANO IR HURVICO DZETA FUNKCIJOMS

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2015 metai

Disertacija rengta 2010-2015 metais Vilniaus universitete

Mokslinis vadovas – Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos mokslo krypties mokslo taryboje:

Pirmininkas – Prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Nariai:

Prof. dr. Vasili Bernik (Baltarusijos MA Matematikos institutas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Doc. dr. Paulius Drungilas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2015 m. lapkričio 26 d. 14 val. Vilniaus universiteto matematikos ir informatikos fakulteto Jono Kubiliaus vardo (102) auditorijoje.
Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2015 m. spalio 26 d.
Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir
VU interneto svetainėje adresu: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

VILNIUS UNIVERSITY

JOVITA ATSTOPIENĖ

DISCRETE UNIVERSALITY THEOREMS FOR THE RIEMANN AND HURWITZ ZETA-FUNCTIONS

Summary of doctoral dissertation
Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2015

The scientific work was carried out in 2010-2015 at Vilnius University

Scientific supervisor – Prof. Dr. Habil. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

The thesis is defined in the council of Mathematics of Vilnius University:

Chairman – Prof. Dr. (HP) Ramūnas Garunkštis (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

Members:

Prof. Dr. Vasili Bernik (Institute of Mathematics of Academy of Science of Belarus, Physical sciences, Mathematics - 01P)

Prof. Dr. Habil. Eugenijus Manstavičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

Prof. Dr. Habil. Konstantinas Pileckas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

Doc. Dr. Paulius Drungilas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on November 26, 2015, in Vilnius University, Department of Mathematics and Informatics at 2 p.m., auditorium of Jonas Kubilius (102). Address: Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.

The summary of dissertation was distributed on October 26 , 2015.
The dissertation is available at the Library of Vilnius University and
the website www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

DISERTACINIO DARBO APRAŠYMAS

Mokslinė problema ir tyrimo objektas. Tyrimo objektas yra Rymano ir Hurvico dzeta funkcijos. Mokslinė problema - šių funkcijų universalumas.

Rymano dzeta funkcja $\zeta(s),\ s = \sigma + it$, pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Tegul α, $0 < \alpha \leq 1$, yra fiksuotas skaičius. Hurvico dzeta funkcija su parametru α pusplokštumėje $\sigma > 1$ taip pat yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu 1. Iš šių apibrėžimų matome, kad

$$\zeta(s, 1) = \zeta(s) \tag{1}$$

ir

$$\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = (2^s - 1)\zeta(s). \tag{2}$$

Taigi, Hurvico dzeta funkcija yra Rymano dzeta funkcijos apibendrinimas.

Nors funkcijų $\zeta(s)$ ir $\zeta(s, \alpha)$ apibrėžimai yra panašūs, tačiau jos yra gana skirtingi analiziniai objektai. Vienas svarbiausių skirtumų yra tas, kad funkcija $\zeta(s)$ srityje $\sigma > 1$ yra užrašoma Oilerio sandauga

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

pagal pirminius skaičius p, o funkcija $\zeta(s, \alpha)$, išskyrus (1) ir (2) atvejus, tokios sandaugos neturi. Šis skirtumas turi didelę įtaką funkcijų $\zeta(s)$ ir $\zeta(s, \alpha)$ analizinėms savybėms.

18 a. viduryje funkcija $\zeta(s)$ jau domėjosi L. Oileris, tačiau jis laikė, kad s yra realusis kintamasis. 19 a. antrojoje pusėje B. Rymanas pastebėjo, kad funkcija $\zeta(s)$ su kompleksiniu kintamuoju gali būti taikoma pirminių skaičių pasiskirstymui aibėje $\mathbb{N}$ tirti. Jis pasiūlė originalų būdą funkcijos

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$$

asimptotinei formulei, kai $x \to \infty$, gauti, tačiau iki galo problemos neišsprendė. Funkciją $\pi(x)$ nagrinėjo daugelis to meto žymių matematikų, jai nemažai dėmesio skyrė net matematikos "tėvas" K. Gausas, tačiau buvo apsiribojama empiriniais skaičiavimais. Tikslią funkcijos $\pi(x)$ augimo eilę, kai $x \to \infty$, pavyko nustatyti P. Čebyševui. Jis griežtai įrodė, kad $\pi(x)$, kai $x \to \infty$, elgiasi maždaug kaip $x/\log x$. Tačiau pilnai pirminių skaičių pasiskirstymo problemą, remdamiesi B. Rymano idėjomis, nepriklausomai vienas nuo kito 1896 m. išsprendė Š. de la Valė Pusenas ir Ž. Adamaras. Remdamiesi funkcijos $\zeta(s)$ savybėmis, jie įrodė, jog

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u}(1 + o(1)), \quad x \to \infty. \tag{3}$$

Funkciją $\zeta(s,\alpha)$ 1882 m. apibrėžė A. Hurvicas. Ji nėra tiesiogiai taikoma pirminiams skaičiams tirti, tačiau atlieka svarbų vaidmenį Dirichlė L funkcijų teorijoje, kurios yra naudojamos nagrinėjant pirminių skaičių pasiskirstymą aritmetinėse progresijose. Funkcija $\zeta(s,\alpha)$ yra sutinkama ir algebrinėje skaičių teorijoje. Didelę įtaką funkcijos $\zeta(s,\alpha)$ analizinėms savybėms turi parametro α aritmetinė prigimtis.

Apskritai, funkcijos $\zeta(s)$ ir $\zeta(s,\alpha)$ yra gana įdomūs ir svarbūs matematiniai objektai, jie naudojami sprendžiant įvairius ne tik matematikos, bet ir kitų gamtos mokslų, pavyzdžiui, fizikos, uždavinius.

Dabar keletas žodžių apie universalumą. Matematikoje universalumas suprantamas panašiai kaip ir kasdieniniame gyvenime. Turima galvoje, kad kuris nors vienas objektas turi įtaką plačiai kitų objektų klasei. Analizėje ši įtaka dažnai pasireiškia įvairių tipų aproksimacija. Negriežtai kalbant, pavyzdžiai, funkcijos $\zeta(s)$ universalumas reiškia, kad plačios klasės analizinės funkcijos norimu tikslumu gali būti aproksimuojamos postūmiais $\zeta(s+i\tau)$, kai τ perbėga kurią nors realiųjų skaičių aibę. Jei τ gali įgyti bet kurias realiąsias reikšmes, tai turime tolydųjį universalumą, o kai τ perbėga kurią nors diskrečiąją aibę, tarkime, aibę $\{kh : k \in \mathbb{N}_0\}$ su fiksuotu $h > 0$, tai universalumas yra vadinamas diskrečiuoju.

Tikslas ir uždaviniai. Disertacijos tikslas yra funkcijų $\zeta(s)$ ir $\zeta(s,\alpha)$ diskrečiojo universalumo tyrimas. Uždaviniai yra šie:

1. Įrodyti diskrečiąsias universalumo teoremas Rymano dzeta funkcijos sudėtinėms funkcijoms.
2. Įrodyti diskrečiąsias universalumo teoremas Hurvico dzeta funkcijos sudėtinėms funkcijoms.
3. Gauti nulių skaičiaus įverčius kai kurioms funkcijų $\zeta(s)$ ir $\zeta(s,\alpha)$ sudėtinėms funkcijoms.
4. Įrodyti diskrečiąją universalumo teoremą naujai Hurvico dzeta funkcijų klasei.

Aktualumas. Dzeta funkcijų universalumas yra įdomus ir svarbus matematikos reiškinys. Dzeta funkcijų universalumo teoremos turi visą eilę teorinių ir praktinių taikymų. Universalumo teoremos yra naudojamos įrodinėjant įvairius aibių tirštumo rezultatus ir funkcinio nepriklausomumo tipo teoremas, iš jų galima gauti informaciją apie kai kurių funkcijų, susijusių su dzeta funkcijomis, nulių skaičių, pagaliau, universalumas glaudžiai siejasi su saviaproksimacija ir tuo pačiu su Rymano tipo hipotezėmis. Praktiniai universalumo taikymai, žinoma, apima sudėtingų analizinių funkcijų aproksimavimo problemas. Be to, praktiniuose taikymuose diskretusis universalumas yra patogesnis už tolydųjį universalumą, tai, pavyzdžiui, matoma [2] straipsnyje. Iš kitos pusės, diskrečiajam universalumui yra skirta gerokai mažiau darbų negu tolydžiajam. Šios spragos tarp dzeta funkcijų dikrečiojo ir tolydžiojo universalumo užpildymui disertacijoje yra nagrinėjamos dzeta funkcijų diskretusis universalumas. Jis yra žinomų autorių B. Bagčio, R. Garunkščio, S. Goneko, A. Laurinčiko, K. Matsumoto, A. Reicho, J. Štaudingo tyrimų tęsinys.

Metodai. Diskrečiųjų universalumo teoremų įrodymui yra taikomas tikimybinis metodas, pagrįstas ribinėmis teoremomis apie silpnai konverguojnačius tikimybinius matus analizinių funkcijų erdvėje. Šis metodas yra derinamas su tolydžiųjų operatorių teorija bei Mergeliano teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais.

Naujumas. Visi disertacijos rezultatai yra nauji. Diskrečiosios universalumo teoremos Rymano ir Hurvico dzeta funkcijų sudėtinėms funkcijoms niekda nebuvo nagrinėtos. Šios teoremos pirmąkart yra taikomos nulių pasiskirstymo charakterizavimui. Diskrečioji universalumo teorema Hurvico dzeta funkcijai yra gauta naujai parametrų klasei.

Problemos istorija ir rezultatai. Pirmąjį universalumo rezultatą analizėje gavo M. Fekete. Jis įrodė, jog egzistuoja tokia realioji laipsninė eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m,$$

kad kiekvieną tolydžiąją funkciją $g(x)$, $x \in [-1,1]$, $g(0) = 0$, atitinka tokia didėjanti seka $\{m_k\} \subset \mathbb{N}$, kad dalinė suma

$$\sum_{m=1}^{m_k} a_m x^m,$$

kai $k \to \infty$, tolygiai intervale $[-1, 1]$ konverguoja į $g(x)$.

Įdomią universalumo teoremą sveikosioms funkcijoms 1929 m. įrodė G. Birkhofas. Jo teorema tvirtina, kad egzistuoja tokia sveikoji funkcija $f(s)$, kad kiekvieną sveikąją funkciją $g(s)$ atitinka tokia kompleksinių skaičių seka $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, jog tolygiai kompleksinės plokštumos kompaktinėse aibėse

$$\lim_{n\to\infty} f(s + a_n) = g(s).$$

Vėliau buvo atrasta visa eilė universalių analizinių objektų, tačiau jų išreikštinis pavidalas nebuvo žinomas, buvo įrodomas tik jų egzistavimas. Tik 1975 m. S. Voroninas surado pirmąjį įvardintą analizinį objektą, ir šis objektas buvo garsioji Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$. Pradinis Voronino teoremos formulavimas turi tokį pavidalą.

A teorema. *Tarkime, kad $0 < r < \frac{1}{4}$. Tegul $f(s)$ yra tolydi, nevirstanti nuliu skritulyje $|s| \le r$ funkcija, kuri yra analizinė to skritulio viduje. Tuomet kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks realusis skaičius $\tau = \tau(\varepsilon)$, kad*

$$\max_{|s|\le r} \left| \zeta\left(s + \frac{3}{4} + i\tau\right) - f(s) \right| < \varepsilon.$$

A teorema rodo, kad funkcijos $\zeta(s)$ reikšmių aibė yra labai turtinga. Šią funkcijos $\zeta(s)$ savybę dar 1911 m. pastebėjo H. Boras. Jis įrodė, kad funkcija $\zeta(s)$ su kiekvienu $\varepsilon > 0$ juostoje $\{s \in \mathbb{C} : 1 < \sigma < 1 + \varepsilon\}$ kiekvieną nenulinę reikšmę įgyja be galo daug kartų. Dar įdomesnis ir svarbesnis yra H. Boro ir R. Kuranto rezultatas [3], tvirtinantis, jog su kiekvienu σ, $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, aibė $\{\zeta(s + it) : t \in \mathbb{R}\}$ yra visur tiršta erdvėje $\mathbb{C}$. Kadangi analizinių funkcijų erdvė yra begaliniamatė, tai A teorema yra Boro-Kuranto teoremos begaliniamatis apibendrinimas.

A teorema yra vienas iš giliausių funkcijos $\zeta(s)$ teorijos rezultatų. Todėl nenuostabu, kad ji buvo greitai pastebėta ir patikslinta. Pirma, skritulys $|s| \le r$ buvo pakeistas kompaktinėmis aibėmis, antra, buvo gauta, jog postūmių $\zeta(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, aproksimuojančių duotą analizinę funkciją, aibė yra begalinė. Paskutiniajam Voronino teoremos variantui formuluoti reikalingi papildomi žymenys. Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$. Simboliu $\mathcal{K}$ žymime juostos D kompaktinių aibių, turinčių jungųjį papildinį, klasę, o simboliu $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, žymime tolydžių, nevirstančių nuliu aibėje K ir analizinių aibės K viduje funkcijų klasę. Be to meas$A$ yra mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas. Tuomet [7] monografijoje randame tokią A teoremos versiją

B teorema. *Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

B teorema tvirtina, kad postūmių $\zeta(s + i\tau)$, aproksimuojančių ε tikslumu funkciją $f(s)$, aibė turi teigiamą apatinį tankį, todėl ji yra begalinė.

A ir B teoremos yra tolydaus tipo universalumo teoremos. Diskretusis B teoremos analogas yra tokia teorema.

C teorema. *Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H_0(K)$, o $h > 0$ yra bet koks fiksuotas skaičius. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N + 1} \# \left\{ 0 \le k \le N : \sup_{s\in K} |\zeta(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Čia $\#A$ žymi aibės A elementų skaičių.

C teorema, su šiek tiek skirtingais reikalavimais aibei K savo disertacijoje [1] įrodė B. Bagčis.

Nesunku matyti, kad kai kurios sudėtinės funkcijos $F(\zeta(s))$ taip pat turi universalumo savybę. Pateiksime porą pavyzdžių. Simboliu $H(K)$, $K \in \mathcal{K}$, žymime tolydžių aibėje K ir analizinių jos viduje funkcijų klasę. Tuomet tiesioginis Koši integralinės formulės taikymas duoda išvestinės $\zeta'(s)$ universalumą su $f(s) \in H(K)$. Analogiškas tvirtinimas yra teisingas ir funkcijai $\log\zeta(s)$, kuri juostoje D yra apibrėžiama tolydaus kitimo pagalba iš taško $\log\zeta(2) \in \mathbb{R}$ išilgai laužčių, jungiančių taškus $[2, 2+it]$ ir $[2+it, \sigma+it]$, jei kitimo trajektorija neina per galimus nulius ir polių taške $s = 1$. Priešingu atveju naudojame formulę

$$\log\zeta(\sigma+it) = \lim_{\varepsilon\to+0} \log\zeta(\sigma+i(t+\varepsilon)).$$

Tarp kitko, A teoremos įrodymui yra naudojamas funkcijos $\log\zeta(s)$ universalumas.

Šie pavyzdžiai rodo, kad egzistuoja problema aprašyti tokių operatorių F klases, su kuriais funkcija $F(\zeta(s))$ išlieka universali. Tolydžiuoju atveju tai buvo parodyta [11] ir [12] straipsniuose. Tegul $H(G)$ yra analizinių srityje G funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija, o $S = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \text{ arba } g(s) \equiv 0\}$. Pateikiame vieną pavyzdį iš [11].

D teorema. *Tarkime, kad $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydusis operatorius, kad aibė $(F^{-1}G)\bigcap S$ yra netusčia su kiekviena atvirąja aibe $G \subset H(D)$. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau)) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Disertacijos 1 skyriuje yra gauti diskretieji D teoremos analogai ir kitos panašaus tipo teoremos.

1.1 teorema. *Tarkime, kad $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydusis operatorius, kad sankirta $(F^{-1}G)\bigcap S$ yra netuščia su kiekviena atvirąja aibe $G \subset H(D)$. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet su visais $\varepsilon > 0$ ir $h > 0$*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{0 \le k \le N : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+ikh)) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

1.1 teorema yra teorinio pobūdžio, nes sunku patikrinti jos sąlygą, kad $(F^{-1}G)\bigcap S \neq \varnothing$ su kiekviena atvirąja aibe $G \subset H(D)$. Ši sąlyga gali būti pakeista stipresne, bet paprastesne.

1.2 teorema. *Tarkime, kad $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydusis operatorius, kad sankirta $(F^{-1}\{p\})\bigcap S$ yra netuščia su kiekvienu polinomu $p = p(s)$. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet yra teisingas 1.1 teoremos tvirtinimas.*

Sąlyga $(F^{-1}\{p\})\bigcap S \neq \varnothing$ siejasi su pirmavaizdžio $F^{-1}\{p\}$ nevirtimu nuliu su kiekvienu polinomu $p = p(s)$. Aišku, kad jei polinomo laisvojo nario modulis yra pakankamai didelis, tai tas polinomas neturi šaknų aprėžtoje srityje. Ši pastaba supaprastina 1.2 teoremą

Tegul V yra bet koks teigiamas skaičius,

$$D_V = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1,\ |t| < V\right\}$$

ir

$$S_V = \{g \in H(D_V : g(s) \neq 0 \text{ arba } g(s) \equiv 0)\}.$$

Tuomet turime tokią teoremą.

1.3 teorema. *Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$, o V yra toks skaičius, kad $K \subset D_V$. Tarkime, kad $F : H(D_V) \to H(D_V)$ yra toks tolydusis operatorius, kad sankirta $(F^{-1}\{p\})\bigcap S_V$ yra netuščia su kiekvienu polinomu $p = p(s)$. Tuomet yra teisingas 1.1 teoremos tvirtinimas.*

Nesunku pateikti operatoriaus 1.3 teoremoje pavyzdį. Tegul operatorius $F : H(D_V) \to H(D_V)$ yra apibrėžiamas formule

$$F(g) = c_1 g' + \ldots + c_r g^{(r)},\ g \in H(D_V),\ c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

čia $g(k)$ yra funkcijos g k eilės išvestinė. Iš Koši integralinės formulės išplaukia operatoriaus F tolydumas. Be to, lengva patikrinti, kad kiekvieną polinomą $p = p(s)$ atitinka toks kitas polinomas $q = q(s)$, priklausantis pirmavaizdžiui $F^{-1}\{p\}$, ir $q(s) \neq 0$ stačiakampyje D_V. Todėl pagal 1.3 teoremą funkcija

$$c_1\zeta'(s) + \ldots + c_r\zeta^{(r)}(s)$$

yra universali 1.1 teoremos prasme.

Disertacijos 1 skyriuje yra nagrinėjama dar viena operatorių $F : H(D) \to H(D)$ klasė. Tegul $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{C}$ ir

$$H_{F;a_1,\ldots,a_r}(D) = \{g \in H(D) : (g(s) - a_j)^{-1} \in H(D),\ j = 1, \ldots, r\} \bigcup \{F(0)\}.$$

1.4 teorema. *Tarkime, kad $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydusis operatorius, kad $F(S) \supset H_{F;a_1,\ldots,a_r}(D)$. Atveju $r = 1$, tegul $K \in \mathcal{K}$, o funkcija $f(s)$ yra tolydi ir nelygi a_1 aibėje K bei analizinė aibės K viduje. Atveju $r \geq 2$ tegul K yra bet kokia kompaktinė juostos D aibė, o funkcija $f(s) \in H_{F;a_1,\ldots,a_r}(D)$. Tuomet yra teisingas 1.1 teoremos tvirtinimas.*

Iš 1.4 teoremos išplaukia funkcijų $\zeta^N(s)$, $N \in \mathbb{N}$ ir $\sin(\zeta(s))$, $\cos(\zeta(s))$, $\sinh(\zeta(s))$, $\cosh(\zeta(s))$ diskretusis universalumas.

Pastebime, kad 1.1-1.4 teoremos yra atitinkamai diskretieji tolydžiųjų Rymano dzeta funkcijos universalumo teoremų, gautų [11] ir [12] darbuose, analogai. 1.1-1.4 teoremos buvo įrodytos autorės [19] darbe su sąlyga, kad su visais $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ skaičius $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ yra iracionalus. Disertacijoje šio reikalavimo atsisakoma, 1.1-1.4 teoremos galioja visiems $h > 0$.

1.1-1.4 teoremų įrodymai remiasi tikimybinėmis ribinėmis teoremomis apie tikimybinių matų analizinių funkcijų erdvėje silpnąjį konvergavimą, naudoja C teoremą ir Mergeliano teoremą.

Po istorinio S. Voronino darbo [20] buvo pastebėta, kad universalumo savybę turi ne tik funkcijos $\zeta(s)$, bet ir kitos dzeta ir L funkcijos. Pats S. Voroninas įrodė visų Dirichlė L funkcijų $L(s, \chi)$, kurios pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiamos Dirichlė eilute

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s},$$

universalumą. Čia χ yra Dirichlė charakteris, o funkcijos $L(s, \chi)$ yra meromorfiškai pratęsiamos į visą kompleksinę plokštumą. Universalios yra parabolinių Hekės eigen formų $\widehat{F}$ svorio κ dzeta funkcijos $\zeta(s, \widehat{F})$ [17]. Tai yra sveikosios funkcijos, pusplokštumėje $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$ apibrėžiamos eilutėmis

$$\zeta(s, \widehat{F}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s},$$

o $c(m)$ yra formų $\widehat{F}$ Furjė koeficientai. Universalios yra ir baigtinių Abelio grupių dzeta funkcijos [9]. Šie trys pavyzdžiai yra iš dzeta funkcijų, turinčių Oilerio sandaugą pagal pirminius skaičius, klasės.

Kitą klasę universalių dzeta funkcijų sudaro funkcijos be Oilerio sandaugos. Paprasčiausias tos klasės elementas yra jau minėta Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$. Jos apibendrinimas yra Lercho dzeta funkcija

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\lambda m}}{(m + \alpha)^s},\ \sigma > 1,$$

su parametrais $\lambda \in \mathbb{R}$ ir α, $0 < \alpha \leq 1$, bei periodinė Hurvico dzeta funkcija

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s},\ \sigma > 1,$$

čia $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka, o parametras α toks pat, kaip ir funkcijų $\zeta(s,\alpha)$ ir $L(\lambda,\alpha,s)$ atveju.

Primename, kad skaičius α yra vadinamas transcendenčiuoju, jei jis nėra jokio polinomo $p(s) \not\equiv 0$ su racionaliaisiais koeficientais šaknis. Tolydųjį Hurvico dzeta funkcijos universalumą aprašo tokia teorema.

E teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis arba racionalusis skaičius $\neq 1, \frac{1}{2}$. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

E teorema, su racionaliuoju parametru α nepriklausomai vienas nuo kito skirtingais metodais įrodė S. Voroninas [21], S. Gonekas [6] ir B. Bagčis [1]. Transcendenčiojo parametro α atvejis yra išnagrinėtas [15] monografijoje. Funkcijos $\zeta(s,\alpha)$ su algebriniu iracionaliuoju parametru α universalumas iki šiol lieka atvira problema. Primename, kad skaičius α yra vadinamas algebriniu, jei jis yra kurio nors polinomo $p(s) \not\equiv 0$ su racionaliaisiais keoficientais šaknis. Aišku, kad visi racionalieji skaičiai yra algebriniai, o skaičius $\sqrt{3}$ yra algebrinis iracionalusis skaičius.

Racionalaus parametro α atveju $\alpha = 1$ ir $\alpha = \frac{1}{2}$ E teoremoje yra nenagrinėjami, kadangi galioja (1) ir (2) lygybės. Ir šiais atvejais funkcija $\zeta(s,\alpha)$ išlieka universali, tačiau aproksimuojamos funkcijos turi priklausyti klasei $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$.

Yra žinomas ir diskretusis E teoremos variantas. Teisinga tokia teorema.

F teorema. *Tarkime, kad parametras α, aibė K ir funkcija $f(s)$ yra kaip teoremoje E. Racionalaus parametro α atveju, tegul $h > 0$ yra bet koks skaičius, o transcendenčiojo α atveju, tegul $h > 0$ yra toks, kad skaičius* $\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\right\}$ *yra racionalus. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \le k \le N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh,\alpha) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

F teorema su racionaliuoju α ir šiek tiek skiringais reikalavimais aibei K buvo gauta [1] disertacijoje, tačiau tuos reikalavimus galima susilpninti Mergeliano teoremos pagalba. Transcendenčiojo parametro α atvejis išplaukia iš bendresnės teoremos [16], įrodytos periodinei Hurvico dzeta funkcijai.

E teorema [13] straipsnyje buvo apibendrinta sudėtinėms funkcijoms $F(\zeta(s,\alpha))$ kai kurioms operatorių $F : H(D) \to H(D)$ klasėms. Pateikiame vieną pavyzdį iš [13].

G teorema. *Tarkime, kad $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydusis operatorius, kad aibė $(F^{-1}\{p\}) \bigcap H(D)$ yra netuščia su kiekvienu polinomu $p = p(s)$. Tegul parametras α, aibė K ir funkcija $f(s)$ tenkina E teoremos sąlygas. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau,\alpha)) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Disertacijos 2 skyriuje yra gauti [13] darbo teoremų diskretieji analogai. Pakankamai plačiai operatorių F klasei sudėtinės funkcijos $F(\zeta(s,\alpha))$ universalumas gali būti gaunamas tiesiogiai iš F teoremos. Sakoma, kad operatorius F priklauso klasei $\mathrm{Lip}(\beta)$, $\beta > 0$, jei galioja tokios sąlygos:

1° kiekvieną polinomą $p = p(s)$ atitinka elementas $g \in F^{-1}\{p\} \subset H(D)$;

2° kiekvieną aibę $K \in \mathcal{K}$ atitinka tokia teigiama konstanta c ir aibė $K_1 \in \mathcal{K}$, kad

$$\sup_{s\in K} |F(g_1(s)) - F(g_2(s))| \le c \sup_{s\in K_1} |g_1(s) - g_2(s)|^{\beta}$$

su visomis funkcijomis $g_1, g_2 \in H(D)$.

Pirmoji 2 skyriaus teorema turi tokį pavidalą.

2.1 teorema. *Tarkime, kad skaičiai α ir h, aibė K ir funkcija $f(s)$ tenkina F teoremos sąlygas, o $F \in Lip(\beta)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \le k \le N : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s+ikh,\alpha)) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Naudojant Koši integralinę formulę, lengva matyti, kad operatorius $F(g) = g'$ priklauso klasei Lip(1). Taigi, 2.1 teoremos tvirtinimas yra teisingas funkcijai $\zeta'(s,\alpha)$.

Dabar formuluojame diskrečiąsias universalumo teoremas funkcijai $F(\zeta(s,\alpha))$, kai operatorius F priklauso kitoms klasėms.

2.2 teorema. *Tarkime, kad skaičiai α ir h, aibė K ir funkcija $f(s)$ tenkina F teoremos sąlygas. Tegul $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydusis operatorius, kad aibė $F^{-1}G$ yra netuščia su kiekviena atvirąja aibe $G \subset H(D)$. Tuomet yra teisingas 2.1 teoremos tvirtinimas.*

2.2 teoremos reikalavimai operatoriui F gali būti pakeisti stipresniais, bet paprastesniais reikalavimais.

2.3 teorema. *Tarkime, kad $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydusis operatorius, kad aibė $F^{-1}\{p\}$ yra netuščia su kiekviena polinomu $p = p(s)$. Tuomet su α, h, K ir $f(s)$, tenkinančiais F teoremos sąlygas, yra teisingas 2.1 teoremos tvirtinimas.*

Tarkime, kad su $g \in H(D)$

$$F(g) = c_1 g' + \ldots + c_r g^{(r)}, \ c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Tuomet kiekvienam polinomui $p = p(s)$ galima rasti kitą tokį polinomą $q = q(s)$, kad $q \in F^{-1}\{p\}$. Taigi, iš 2.3 teoremos turime, kad funkcija

$$c_1 \zeta'(s,\alpha) + \cdots + c_r \zeta^{(r)}(s,\alpha)$$

yra universali 2.1 teoremos prasme su racionaliuoju $\alpha \ne 1, \frac{1}{2}$ (šiuo atveju $h > 0$ yra bet koks skaičius) ir transcendenčiuoju α (šiuo atveju $\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\right\}$ turi būti racionalusis skaičius).

Kitoje 2 skyriaus teoremoje postūmiais $F(\zeta(s+ikh,\alpha))$ yra aproksimuojamos funkcijos iš aibės $H(D)$ poaibių. Tegul $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{C}$ ir $H_{a_1,\ldots,a_r}(D) = \{g \in H(D) : (g(s) - a_j)^{-1} \in H(D),\ j = 1, \ldots, r\}$.

2.4 teorema. *Tarkime, kad skaičiai α ir h tenkina F teoremos sąlygas, o $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydusis operatorius, kad $F(H(D)) \supset H_{a_1,\ldots,a_r}(D)$. Atveju $r = 1$, tegul $K \in \mathcal{K}$, o tolydi funkcija $f(s) \ne a_1$ aibėje K ir analizinė aibės K viduje. Atveju $r \ge 2$, tegul $K \subset D$ yra bet koks kompaktinis poaibis,o $f(s) \in H_{a_1,\ldots,a_r}(D)$. Tuomet yra teisingas 2.1 teoremos tvirtinimas.*

Pavyzdžiui, kai $r = 1$ ir $a = 0$, gauname funkcijos $\zeta^n(s,\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$ universalumą. Kai $r = 2$ ir $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, turime funkcijų $\sin(\zeta(s,\alpha))$, $\cos(\zeta(s,\alpha))$, $\sinh(\zeta(s,\alpha))$, $\cosh(\zeta(s,\alpha))$ universalumą.

Paskutinioji 2 skyriaus teorema rodo, kad funkcijos iš aibės $F(H(D))$ visada yra aproksimuojamos diskrečiaisiais funkcijos $F(\zeta(s,\alpha))$ postūmiais.

2.5 teorema. *Tarkime, kad skaičiai α ir h tenkina F teoremos sąlygas, o $F : H(D) \to H(D)$ yra bet koks tolydusis operatorius. Tegul $K \subset D$ yra kompaktinė aibė, o $f(s) \in F(H(D))$. Tuomet yra teisingas 2.1 teoremos tvirtinimas.*

Disertacijos 3 skyriuje yra trumpai paliečiamas funkcijų $\zeta(s)$ ir $\zeta(s,\alpha)$ nulių pasiskirstymo klausimas.

Gerai žinoma, kad dzeta ir L funkcijų nulių pasiskirstymas yra centrinė analizinės skaičių teorijos problema, o rezultatai apie tų funkcijų nulių išsidėstymą yra naudojami sprendžiant kitus svarbius ir sudėtingus uždavinius. Pavyzdžiui, netrivialiųjų Rymano dzeta funkcijos nulių išsidėstymas tiesiogiai susijęs su pirminių skaičių pasiskirstymu. Primename, kad nuliai $s = -2m$, $m \in \mathbb{N}$, yra vadinami funkcijos $\zeta(s)$ trivialiaisiais nuliais, o jų egzistavimas išplaukia iš funkcinės lygties

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

čia $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija. Trivialieji nuliai nėra svarbūs. Tačiau yra žinoma, kad funkcija $\zeta(s)$ turi be galo daug netrivialiųjų nulių, kurie yra išsidėstę kritinėje juostoje $\{s \in \mathbb{C} : 0 \leq \sigma \leq 1\}$. Garsioji Rymano hypotezė (RH) tvirtina, kad visi netrivialieji funkcijos $\zeta(s)$ nuliai guli kritinėje tiesėje $\sigma = \frac{1}{2}$, arba, kad $\zeta(s) \neq 0$ pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$.

(3) asimptotinės lygybės įrodymui pakanka žinoti, kad $\zeta(s) \neq 0$ tiesėje $\sigma = 1$. Yra žinoma, kad įvertis

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x^{\kappa+\varepsilon})$$

su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisingas tada ir tik tada, kai $\zeta(s)$ nevirsta nuliu srityje $\sigma > \kappa$. Atskiru atveju, RH yra ekvivalenti [5] įverčiui

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(\sqrt{x}\log x).$$

Geriausias žinomas rezultatas apie funkcijos $\zeta(s)$ nulių išsidėstymą tvirtina, kad $\zeta(s) \neq 0$ srityje

$$\sigma > 1 - \frac{c}{(\log|t|)^{\frac{2}{3}}(\log\log|t|)^{\frac{1}{3}}}, \ |t| \geq t_0 > 0,$$

o $c > 0$ yra absoliuti konstanta. A. Selbergas pirmasis įrodė, kad be galo daug netrivialiųjų funkcijos $\zeta(s)$ nulių guli kritinėje tiesėje. Šiuo metu yra žinoma, kad bent 41% netrivialiųjų $\zeta(s)$ nulių tankio prasme yra išsidėstę tiesėje $\sigma = \frac{1}{2}$. Kompiuteriniai skaičiavimai taip pat remia RH.

Be jau minėto RH funkcijos $\pi(x)$ terminais yra žinomi ir kiti ekvivalentai. Vienas iš jų yra formuluojamas saviaproksimavimo terminais ir todėl yra susijęs su funkcijos $\zeta(s)$ universalumu. B. Bagčis įrodė [1], kad RH yra ekvivalenti tvirtinimui, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$ ir kiekviena kompaktine aibe $K \subset D$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau) - \zeta(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

S. Voroninas pirmasis pastebėjo, kad dzeta funkcijų universalumas gali būti taikomas tų funkcijų nulių skaičiaus įverčiams gauti. Jis [21] įrodė tokį tvirtinimą.

H teorema. *Tegul $a, b \in \mathbb{N}$, $1 \leq a < b$, $b \neq 2$ ir $(a,b) = 1$. Tuomet bet kuriuos σ_1, σ_2, $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, atitinka tokia konstanta $c = c(a, b, \sigma_1, \sigma_2) > 0$, kad pakankamai dideliems T funkcija $\zeta\left(s, \frac{a}{b}\right)$ turi daugiau negu cT nulių, gulinčių stačiakampyje*

$$\{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, \ 0 < t < T\}.$$

H teoremos apibendrinimas įvairių dzeta ir L funkcijų tiesinėms kombinacijoms buvo gautas [8] ir [18] darbuose. H teoremos analogas parabolinių Hekes eigen formų dzeta funkcijų išvestinei buvo gautas [10] darbe. Funkcijos $\zeta(s)$ sudėtinių funkcijų nulių skaičiaus įverčiai buvo nagrinėjami [14] straipsnyje.

Disertacijos 3 skyriuje yra pateikiami diskretieji anksčiau minėtų rezultatų apie nulių skaičiaus įverčius variantai.

3.1 teorema. *Tarkime, kad operatorius F tenkina kurios nors iš 1.1–1.3 teoremų sąlygas. Tuomet bet kuriuos σ_1, σ_2, $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, atitinka tokia konstanta $c = c(\sigma_1, \sigma_2, h, F) > 0$, kad pakankamai dideliems N funkcija $F(\zeta(s + ikh))$ su daugiau negu cN sveikųjų skaičių k, $0 \le k \le N$, turi nulį skritulyje*

$$|s - \widehat{\sigma}| \le \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}, \quad \widehat{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \tag{4}$$

Dabar aptarsime Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ nulių pasiskirstymą, kuris priklauso nuo parametro α aritmetinės prigimties. H. Davenportas ir H. Helbronas pastebėjo, kad funkcija $\zeta(s, \alpha)$, skirtingai nuo funkcijos $\zeta(s)$, su transcendenčiuoju arba racionaliuoju parametru $\alpha \ne 1, \frac{1}{2}$, turi nulius srityje $\sigma > 1$. J. Kaselsas ši rezultatą išplėte [4] algebriniam iracionaliajam α. H teorema rodo, kad funkcija $\zeta(s, \alpha)$ su racionaliuoju $\alpha \ne 1, \frac{1}{2}$ turi nulius juostoje $\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$. Panašus tvirtinimas galioja [15] ir transcendenčiojo parametro α atveju. Šie rezultatai buvo išplėsti sudėtinėms funkcijoms $F(\zeta(s, \alpha))$ kai kuriems erdvės $H(D)$ operatoriams F.

Disertacijos 3 skyriuje yra gauta informacija apie funkcijos $\zeta(s + ikh, \alpha)$ bei sudėtinių funkcijų $F(\zeta(s + ikh, \alpha))$ nulius kai kurioms operatorių F klasėms.

3.3 teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis arba racionalusis skaičius $\ne 1, \frac{1}{2}$. Racionalaus α atveju, tegul $h > 0$ yra bet koks fiksuotas skaičius, o transcendenčiojo α atveju , tegul $h > 0$ yra toks, kad skaičius $\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\right\}$ yra racionalus. Tada bet kuriuos σ_1, σ_2, $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, atitinka tokia konstanta $c = c(\sigma_1, \sigma_2, \alpha, h) > 0$, kad pakankamai dideliems N funkcija $\zeta(s + ikh, \alpha)$ su daugiau negu cN sveikųjų skaičių k, $0 \le k \le N$, turi nulį (4) skritulyje.*

Kita 3 skyriaus teorema yra 3.3 teoremos analogas sudėtinei funkcijai $F(\zeta(s, \alpha))$.

3.4 teorema. *Tarkime, kad skaičiai α ir h tenkina 3.3 teoremos sąlygas, o $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydusis operatorius, kad aibė $F^{-1}G$ yra netuščia su kiekviena atvirąja aibe $G \subset H(D)$, arba kad $s - a \in F(H(D))$ su visais $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Tada bet kuriuos σ_1, σ_2, $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, atitinka tokia konstanta $c = c(\sigma_1, \sigma_2, \alpha, h, F) > 0$, kad pakankamai dideliems N funkcija $F(\zeta(s+ikh, \alpha))$ su daugiau negu cN sveikųjų skaičių k, $0 \le k \le N$, turi nulį (4) skritulyje.*

Tegul operatorius $F : H(D) \to H(D)$ yra duotas formule

$$F(g) = gg', \; g \in H(D).$$

Tuomet nesunku matyti, kad $s - a \in F(H(D))$ su visais $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Tegul $H_{a_1,\dots,a_r}(D)$ yra ta pati aibė kaip ir 2.4 teoremoje.

3.5 teorema. *Tarkime, kad skaičiai α ir h tenkina 3.3 teoremos sąlygas, o $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydusis operatorius, kad $F(H(D)) \supset H_{a_1,\dots,a_r}(D)$ su $\operatorname{Re} a_j \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $j = 1, \dots, r$. Tuomet teisingas 3.4 teoremos tvirtinimas.*

Pavyzdžiui, 3.5 teoremoje galime imti $F(g) = \sin g$ arba $F(g) = \cos g$, $g \in H(D)$.

Disertacijos paskutinysis, 4 skyrius, yra skirtas F ir 2.3 teoremų išplėtimui.

Kaip įprasta, tegul $\mathbb{Q}$ yra visų racionaliųjų skaičių kūnas, o $\mathbb{Q}_1^+$ yra teigiamų, nelygių vienetui racionaliųjų skaičių aibė. Elementams $q \in \mathbb{Q}_1^+$ apibrėžiame aibę

$$L(\alpha, q) = \{(\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0, \log q)\}$$

4.1 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha, q)$ su visais $q \in \mathbb{Q}_1^+$ yra tiesiškai nepriklausoma virš kūno $\mathbb{Q}$. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet su visais $h > 0$, kuriems $\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\right\}$ yra racionalusis skaičius, ir visais $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \le k \le N : \sup_{s \in K} |\zeta(s + ikh, \alpha) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Pastebime, kad jei α yra transcendentusis skaičius, tuomet aibė $L(\alpha, q)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Iš kitos pusės, jei α yra algebrinis iracionalusis skaičius, yra žinoma [4], kad bent 51% aibės

$$L(\alpha) = \{(\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}$$

elementų tankio prasme yra tiesiškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Todėl yra tikėtina, kad kuriems nors algebriniams iracionaliems α aibė $L(\alpha, q)$, $q \in \mathbb{Q}_1^+$, gali būti tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tačiau kol kas algebrinių iracionaliųjų α pavyzdžiai su tiesiškai nepriklausomomis virš $\mathbb{Q}$ aibėmis $L(\alpha)$ ir $L(\alpha, q)$ nėra žinomi.

4.1 teorema gali būti apibendrinta sudėtinėms funkcijoms $F(\zeta(s, \alpha))$ su kai kuriais operatoriais $F : H(D) \to H(D)$. Disertacijoje yra pateikiamas vienas 2.3 teoremos apibendrinimas.

4.2 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha, q)$ su visais $q \in \mathbb{Q}_1^+$ yra tiesiškai nepriklausoma virš kūno $\mathbb{Q}$, o $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydusis operatorius, kad pirmavaizdis $F^{-1}\{p\}$ nėra tuščia aibė su kiekvienu polinomu $p = p(s)$. Tegul $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H(D)$. Tuomet su visais $h > 0$, kuriems $\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\right\}$ yra racionalusis skaičius, ir visais $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \le k \le N : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+ikh, \alpha)) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Visų universalumo teoremų, gautų disertacijoje, įrodymai remiasi tikimybinėmis ribinėmis teoremomis apie silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą analizinių funkcijų erdvėje $H(D)$.

Išvados

Disertacijoje gauti tokie diskretaus tipo tvirtinimai:

1. Su kai kuriais operatoriais $F : H(D) \to H(D)$ ($D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$, $H(D)$ yra analizinių juostoje D funkcijų erdvė) sudėtinėms funkcijoms $F(\zeta(s))$ ($\zeta(s)$ yra Rymano dzeta funkcija, $s = \sigma + it$) yra teisingos diskrečiosios universalumo teoremos apie plačios analizinių funkcijų klasės aproksimavimą postūmiais $F(\zeta(s + ikh))$, $k \in \mathbb{N}_0$, $h > 0$ yra fiksuotas skaičius.

2. Su kai kuriais operatoriais $F : H(D) \to H(D)$ sudėtinėms funkcijoms $F(\zeta(s, \alpha))$ ($\zeta(s, \alpha)$ yra Hurvico dzeta funkcija) yra teisingos diskrečiosios universalumo teoremos apie plačios klasės analizinių funkcijų klasės aproksimavimą postūmiais $F(\zeta(s + ikh, \alpha))$ kai kuriems parametrų α, $0 < \alpha < 1$, tipams.

3. Sudėtinės funkcijos $F(\zeta(s + ikh))$ ir $F(\zeta(s + ikh, \alpha))$ su visais σ_1, σ_2, $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, ir pakankamai dideliais N turi nulį skritulyje
$$\left| s - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right| \leq \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$$
su daugiau negu cN skaičių k, $0 \leq k \leq N$, o $c = (\sigma_1, \sigma_2, F, h, \alpha)$ yra teigiama konstanta ($c = (\sigma_1, \sigma_2, F, h)$ Rymano dzeta funkcijos atveju).

4. Egzistuoja diskrečiosios universalumo teoremos Hurvico dzeta funkcijai $\zeta(s, \alpha)$ su transcendenčiuoju parametru α plėtinys.

APROBACIJA

Pagrindiniai disertacijos rezultatai buvo pristatyti konferencijose: 8 th International Albebraic Conference in Ukraine dedicated to the memory of Professor Vitaliy Mikhaylovich Usenko (2011 m. birželio 5-12 d., Luganskas, Ukraina), MMA (Mathematical Modelling and Amalysis): MMA 2011 (2011 m. gegužės 25-28 d., Sigulda, Latvija), MMA 2012 (2012 m. birželio 6-9 d., Talinas, Estija), MMA 2013 (2013 m. gegužės 27-30 d., Tartu, Estija), 5 th International Conference in Honour of J. Kubilius (2011 m. rugsėjo 4-10 d., Palanga), International Conference on Number Theory in Honour of A. Laurinčikas (2013 m. rugsėjo 9-12 d., Šiauliai), Lietuvos matematikų draugijos konferencijose (2011, 2012, 2013). Be to, buvo skaityti pranešimai Vilniaus bei Šiaulių universitetų seminaruose.

SVARBIAUSIŲ PUBLIKACIJŲ DISERTACIJOS TEMA SĄRAŠAS

- E. Buivydas, A. Laurinčikas, R. Macaitienė, J. Rašytė, Discrete universality theorems for the Hurwitz zeta-function, J. Approximation Theory **183**(2014), 1-13.
- A. Laurinčikas and J. Rašytė, Generalizations of a discrete universality theorem for Hurwitz zeta-functions, Lith. Math. J. **52**(2012), No. 2, 172-180.
- A. Laurinčikas and J. Rašytė, On zeros of some composite functions, in: Analytic Methods of Analysis and Diferential Equations: AMADE 2012, S. V. Rogosin and M. V. Dubatovshaya (Eds), Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 2013, pp. 99-105.
- J. Rašytė, On discrete universality of composite functions, Math. Modell. and Analysis, **17**(2012), No. 2, 271-280.
- J. Rašytė, On zeros of some composite functions, Liet. Matem. Rink, LMD darbai, **52**(2011), 19-22.

KONFERENCIJŲ PRANEŠIMŲ TEZĖS

- J. Rašytė, Discrete universality of the composite functions, Book of abstracts of the 8th International Algebraic Conference in Ukraine, Yu. A. Drozd et al (Eds), Lugansk Taras Shevchenko National University, Lugansk, 2011, p. 45.
- J. Rašytė, Discrete universalitty of the Riemann zeta-function, Abstracts of MMA 2011, University of Latvia, Rīga, 2011, p. 101.
- J. Rašytė, A discrete universality theorem for Hurwitz zeta-functions, Abstracts of MMA 2012, Tallinn University of Technology, Tallinn, 2012, p. 99.
- J. Rašytė, Zeros of some analytic functions, Abstracts of MMA 2013, Institute of Mathematics of the University of Tartu, 2013, p. 102.

SUMMARY

In the thesis, the problems related to the discrete universality of the Riemann and Hurwitz zeta-functions $\zeta(s)$ and $\zeta(s,\alpha)$, $s=\sigma+it$, $0<\alpha\leq 1$, which are defined, for $\sigma>1$, by the series

$$\zeta(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}\qquad\text{and}\qquad\zeta(s,\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+\alpha)^s},$$

and by analytic continuation elsewhere, are considered. Let $D=\{s\in\mathbb{C}:\frac{1}{2}<\sigma<1\}$, $H(D)$ be the space of analytic functions on D equipped with the topology of uniform convergence on compacta, $\mathcal{K}$ be the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and let $H(K)$, $K\in\mathcal{K}$, be the class of continuous functions on K which are analytic in the interior of K.

In Chapter 1, universality theorems on the uniform approximation on compact sets $K\in\mathcal{K}$ of functions $f(s)\in H(K)$ by shifts $F(\zeta(s+ikh))$, where $F:H(D)\to H(D)$ are certain continuous operators, $h>0$ is a fixed number, and k runs non-negative integers, are obtained.

Chapter 2 is devoted to the discrete universality of composite functions $F(\zeta(s,\alpha))$ for some classes of operators $F:H(D)\to H(D)$ and transcendental or rational $\neq 1,\frac{1}{2}$ parameters α. Here analogues of theorems of Chapter 1 are proved for the Hurwitz zeta-function.

Chapter 3 contains the results of applications of discrete universality theorems from Chapters 1 and 2 to zero distribution of composite functions $F(\zeta(s))$ and $F(\zeta(s,\alpha))$. Roughly speaking, theorems of Chapter 3 assert that the functions $F(\zeta(s+kh))$ and $F(\zeta(s+kh,\alpha))$, for some classes of operators $F:H(D)\to H(D)$, have zeros in the strip D for infinitely many $k\in\mathbb{N}_0$.

In Chapter 4, a discrete universality theorem for $\zeta(s,\alpha)$ with α from a new class is obtained. This class is characterized by the linear independence over the field of rational numbers of the set $\{\log(m+\alpha):m\in\mathbb{N}_0,\log q\}$ for all positive rational $q\neq 1$, and generalizes the case of transcendental parameters α.

For proving of universality theorems, the probabilistic approach based on limit theorems for weakly convergent probability measures in the space of analytic functions is applied. Also, the Mergelyan theorem on the approximation of analytic functions by polynomials plays an important role.

CITUOTA LITERATŪRA

1. B. Bagchi, The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, Ph. D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta,1981.
2. K. M. Bitar, N. N. Khuri, H. C. Ren, Paths integrals and Voronin's theorem on the universality of the Riemann zeta-function, Ann. Phys. **211**(1991), 172-196.
3. H. Bohr and R. Courant, Neue Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximationen auf die Riemannschen Zetafunction, J. reine Angew. Math. **144**(1914), 249-274.
4. J. W. S. Cassels, Footnote to a note of Davenport and Heilbronn, J. London Math. Soc. **36**(1961), 171-184.
5. H. Cramér, Ein Mittelwertsatz in der Primzahltheorie, Math. Z. **12**(1922), 147-153.
6. S. M. Gonek, Analytic properties of zeta and L-functions, Ph. D. Thesis, University of Michigan, 1979.
7. A. Laurinčikas, Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1996.
8. A. Laurinčikas, On the zeros of linear combinations of the Matsumoto zeta-functions, Lith. Math. J. **39**(1998), 144-159.
9. A. Laurinčikas, The universality of Dirichlet series attached to finite Abelian groups, in: Number Theory, M. Jutila and T. Metsänkylä (Eds), Walter de Gruyter, 2001, pp. 179-192.
10. A. Laurinčikas, On the derivatives of zeta-functions of certain cusp forms, Glasgow Math. J. **47**(2005), 87-96.
11. A. Laurinčikas, Universality of the Riemann zeta-function, J. Number Theory **130**(2010), 2323-2331.
12. A. Laurinčikas, Universality of composite functions, in: Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects, K. Matsumoto et al (Eds), RIMS. Kôkyûroku Bessatsu **B34**, RIMS, 2012, pp. 191-204.
13. A. Laurinčikas, On the universality of the Hurwitz zeta-function, Intern. J. Number Theory **9**(2013), 155-165.
14. A. Laurinčikas, On zeros of some analytic functions related to the Riemann zeta-function, Glasnik Matem. **48**(2013), 59-65.
15. A. Laurinčikas and R. Garunkštis, The Lerch Zeta-Function, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2002.
16. A. Laurinčikas and R. Macaitienė, The discrete universality of the periodic Hurwitz zeta-function, Integral Transforms Spec. Funct. **20**(9-10), (2009), 673-686.
17. A. Laurinčikas and K. Matsumoto, The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms, Acta Arith. **98**(2001), 345-359.
18. T. Nakamura and Ł. Pánkowski, On universality for linear combinations of L-functions, Monatsh. Math. **165**(2012), 433-446.
19. J. Rašytė, On discrete universality of composite functions, Math. Modelling and Analysis, **17**(2012), 271-280.
20. S. M. Voronin, Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **39**(1975), 475-486(in Russian)≡ Math. USSR Izv. **9**(1975), 443-453.
21. S. M. Voronin, Analytic properties of Dirichlet generating functions of arithmetic objects, Thesis, V. A. Steklov Istitute of Mathematics, 1977(in Russian).

TRUMPOS ŽINIOS APIE AUTORĘ

Gimimo data ir vieta

1985 rugpjūčio 21 d., Radviliškis

Išsilavimas

1992 - 2004 Šeduvos vidurinė mokykla.

2004 - 2008 Šiaulių universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, matematikos ir informatikos bakalauras, suteiktas matematikos bakalauro kvalifikacinis laipsnis ir mokytojo profesinė kvalifikacija.

2008 - 2010 Šiaulių universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, matematikos magistras, suteiktas matematikos magistro kvalifikacinis laipsnis ir mokytojo profesinė kvalifikacija.

Darbo patirtis

2007 - 2008 Radvilškio Vaižganto pagrindinė mokykla.

2008 - 2010 Šiaulių rajono Šakynos pagrindinė mokykla.

2011- Šiaulių suaugusiųjų mokykla.

SHORT INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Birth date and place

1985 August 21, Radviliškis

Education

1992 - 2004 Šeduva secondary school.

2004 - 2008 Šiauliai University, Faculty of Mathematics and Informatics, bachelor of mathematics and informatics.

2008 - 2010 Šiauliai University, Faculty of Mathematics and Informatics, master of mathematics.

Work experience

2007 - 2008 Vaižgantas high school in Radviliškis.

2008 - 2010 Šakyna high school of Šiauliai District.

2011- Šiauliai school of adult students.