GIEDRIUS ALKAUSKAS
Vilniaus universitetas
ORCID id: orcid.org/0000-0002-5747-363X

Mokslinių tyrimų kryptys: modulinės formos, funkcinės lygtys, projektyvinės tėkmės; gamtamoksliniai muzikologijos aspektai; poezijos kalba ir forma.

DOI: doi.org/10.35321/all86-10

MATEMATIKA, KALBA, POEZIJA: SĄVEIKOS IR TRAUKOS

Mathematics, Language, Poetry: Interactions and Attractions

ANOTACIJA

Straipsnyje tyrinėjamos dviejų iš pažinimo sričių (matematikos, kalbos, poezijos) sankirtoje esančios struktūros, kurios implikuoja netrivialias išvadas trečiajai jų. Pavyzdžiui, nagrinėjama, kaip kūrybiškai interpretuoti lietuvišką tekstą, parašytą laikantis griežtų matematinių ir gramatinių taisyklių. Toliau, remiantis matematika, atskleidžiama tercinų formos šerdis, tuo pačiu šis poetinis Dantės išradimas leidžia formuluoti teorinį (ir keliais atvejais praktinį) uždavinį. Straipsnyje taip pat aptariamos prielaidos, nulemiančios, kada kelių disciplinų sąveikos yra (ar gali būti) vaisingos.

ESMINIAI ŽODŽIAI: eilėdara, fiksuotos formos, tercinos, kvintinos, Baranauskas, Dantė, penkiaeilis, bidiscipliniškumas, konkrečioji poezija, sinonimas, metatezė, mnemonikas, Luhn'o formulė, tropai.

ANNOTATION

In this paper, we investigate the structures built in the intersection of two domains of knowledge (mathematics, language, poetry), which imply non-trivial consequences for the remaining domain. For example, we explore the possibilities of how to creatively interpret the Lithuanian text whose form is strictly limited by mathematical and grammatical rules. Further, mathematics helps us to reveal the core *of terza rima* by Dante and allows to pose a purely theoretical (and in few cases practical) problem about its generalizations. We also discuss the assumptions under which the interactions of several domains of creativity are (or can be) fertile.

KEYWORDS: Versification, formes fixes, terza rima, quinta rima, Baranauskas, Dante, pentastich, bidisciplinary, concrete poetry, synonym, metathesis, mnemonic, Luhn algorithm, trope.

1. ĮŽANGA

Improvizacija poezijoje yra svarbiausias dalykas,
bet prieš tai turi būti turininga visuma –
rašantysis turi išmanyti ir fiziką, ir matematiką.
Sigitas Geda

1.1. Kontekstas. Šis straipsnis – trečiasis iš keturių tekstų ciklo. Pirmasis buvo skirtas poezijos kalbai (2019), antrasis – jos skambesiui (2020). Paskutinioji dalis aptars poezijos rašmenis: nenorminės rašybos priežastis (istorines, politines, technines, asmenines, tikslines) ir potencialią jos meninę talpą; grafemas, silabogramas, logogramas, hieroglifus, piktogramas ir grafiką; petroglifus, litometriją[1] ir bustrofedoną; rašmenų (tarkim, vakarų Afrikos Adlamo ir N'ko, Enocho kalbos) poetines dimensijas ir galimybę tai konvertuoti / ekstrapoliuoti į lietuvių kalbą. Išties, klausimai apie egzokalbinį deficitą / proficitą lietuviškose eilėse graždanka[2], arba Lietuvos totorių knygas rusėniškai arabiškais rašmenimis (pavyzdžiui, Ivano Luckevičiaus kitabas), intriguoja. Ir dar: ar akmens forma diktuoja kitą erdvėlaikį iškalamiems tekstams?[3] Ar skiriasi Luiso Kerolio *Jabberwocky*[4] nuo teksto, kurio suvokti nepavyko, bet kuris iš tiesų turi prasmę, nors amžiams prarastą? Tokiomis orbitomis suksis ketvirtosios dalies idėjos. Šio straipsnio tikslas – išgryninti keletą konstrukcijų, paremtų dviejų sričių (poezijos, kalbos, matematikos) tarpusavio sąveika, kurios implikuoja netrivialią

---

[1] Akmens matavimas (λιθός μέτρον). Šis terminas čia tinkamesnis, nei žemės matavimas (geometrija).

[2] Giedriaus Subačiaus monografija (Subačius 2010) skirta kitam šios temos aspektui.

[3] Akmenyje iškalta poezija jungia savyje ir laiko meną, ir belaikę erdvės geometriją. Eilėraštis, parašytas viena iš toliau šiame tekste (2.2.) aptarsimų kvintinų formų, būtent, 13213 24324 31431 42142 (standartinė kvintina moduliu 4), iškaltas ant $1 \times 1 \times 2$ proporcijų stačiakampio gretasienio akmeninės stelos, paslepia net laiko kryptį.

[4] Apie netrivialią šio eilėraščio lingvistinę struktūrą žr. https://en.wikipedia.org/wiki/Jabberwocky. Nuostabu! Nenuostabu, juk L. Kerolis (Lewis Carroll, tikroji pavardė Charles L. Dodgson) – profesionalus matematikas.

trečiosios srities struktūrą. Tai daryta pagal darbo apie muziką ir matematiką analogiją (Alkauskas 2018), kur bendro pažinumo ribos nagrinėjamos ne iš tiksliųjų mokslų (taip rašantieji – o tokių dauguma – retai išsilaisvina iš gamtamokslinio mąstymo schemų), o iš meno pusės. Išsamių pavyzdžių, išskyrus vieną (2.2.), nepateikiama. Taigi šis tekstas – tik idėjų daigynas. Bet net ir nedygus kankorėžis visą alksnio (taip, alksnio!) provaizdį savyje jau turi.

1.2. Kontrstrategija. Ir vis tik: ar skirtakil̃mių kūrybinių jėgų sąveika gali būti vaisinga? Tema netriviali: nors dabartiniai mokslo dokumentai multi- ir bidiscipliniškumui priskiria savaiminę vertę, bet juk kelių aibių sankirta dažniau dengia visų kertmenų[5] trūkumus, nei atveria naują portalą.

Pirma, ką reiškia pats paragrafo pavadinimas? Nors tai tik žaidimas, bet šis žodis tiksliai atspindi straipsnio dvasią bei įveda į matematikos-kalbos-poezijos sankirtos vaisingąją dalį. Struktūrinė ir matematinė lingvistika tekste tik trumpam bus paliesta (kiek labiau – skaičiuojamoji), bet pabrėžtina tai, kad racionalaus sąmonės prado dėmesys iracionaliajam visais meno ir mokslo sąveikos atvejais buvo ir yra gerokai didesnis, nei atvirkščiai. Dvi charakteringos citatos. Pirmoji – Zeligo S. Hariso:

> “However, the debt of mathematical linguistics to mathematics is chiefly the attitude and the way of thinking rather than any particular result. It is perhaps no accident that most graduate students in this field come from mathematics or logic rather than from linguistics” (Harris 1969: 191).[6]

Antroji – Olego Grinbaumo:

> «Главной причиной [малой интенсивности использования математических методов в литературоведении] мы считаем отсутствие в арсенале ученых-стиховедов, оперирующих понятием художественной целостности, такого формального аналитического аппарата, в котором целостность стиха могла бы быть представлена и описана на языке математики» (Гринбаум 2002: 12).[7]

[5] Pratęsiant Antano Baranausko matematinės terminijos idėjas, o dar labiau – Jono Jablonskio (kuris vietoj įsigalėjusio *dauginamojo* siūlė *daugmenį*): kaip kelių aibių sąjungoje pavadinti kiekvieną dalį – *jungmuõ*? O kelių aibių sankirtoje – *kertmuõ*? Čia tarytum dviejų upių santaka, kur kiekvieną iš jų galima įvardinti *sutekmenimi* (*sutekmuõ*). *Sutekmė* (‘santaka’)*, tekmė, įsrutis* (‘įtaka, žiotys’) netinka.

[6] „Reikia pasakyti, kad matematinė lingvistika iš matematikos greičiausiai pasiskolino požiūrį ir mąstymo būdą, bet ne kokį konkretų rezultatą. Todėl nenuostabu, kad dauguma šios srities magistrantų yra pabaigę ne lingvistikos, o matematikos ir logikos bakalauro studijas.“

[7] „Mūsų nuomone, pagrindinė priežastis, kodėl gi literatūrologijoje menkai naudojami matematiniai metodai, yra ta, kad mokslininkai, nagrinėjantys eilėdarą ir vartojantys meninio vientisumo

Todėl tie reti atvejai, kai poliai susikeičia, kai santykiškai iracionalesnis pradas įkvepia racionalesnį, yra ypač vertingi.

Taigi koks tas žaidimas su pavadinimu? Trys lietuvių kalbos žodžiai *antskrydis*, *bergždžias*, *kontržvalgyba* turi po penkių priebalsių kekę. Žodis *ko**ntrstr**ategija* ('veiksmai, skirti likviduoti priešininko strategijos poveikį') su šešių priebalsių keke, vartojamas specializuotoje literatūroje, savyje turi algoritmiškai suprogramuojamo[8] optimizavimo uždavinio grūdą: *rasti visus morfologiškai, fonetiškai ir praktiškai galimus lietuvių kalbos žodžius su maksimalia įmanoma funkcijos nuo žodį sudarančios raidžių sekos reikšme*. Žodis čia sutapatinamas su jį sudarančių raidžių seka. Pažymėkime ją ℓ. Tegul $\mathfrak{D}$ yra visas hipotetinis lietuvių kalbos žodynas. Tokių funkcijų pavyzdžiai:

1. $F(\ell) = 0$, jei žodyje yra nors viena balsė, nelygi a; priešingu atveju, balsių a skaičiui.
2. $G(\ell) = 0$, jei žodyje yra dvi balsės ar dvi priebalsės greta; priešingu atveju, žodžio ilgiui.
3. $H(\ell)$ yra ilgiausio posekio, sudaryto vien iš balsių, ilgis.

Panagrinėkime paskutinį pavyzdį. Neįprastai gaiviai skambantis Kėdainių *Paeismilgio* (upelis *Smilgaitis*, sen. *Eismilga*) gatvės pavadinimas nurodo galimą paieškų lauką. Taip žodyje *nuokalnė* sandą *kalnas* pakeitus į artimos reikšmės *uolą*, gaunama *nuouolė*. Šis žodis ir panaudotas poemos „Šiauriniai reliktai“ septintoje giesmėje[9]. Optimizavimo uždavinys formuluojamas taip: ar tiesa, kad $\max_{\ell \in \mathfrak{D}} H(\ell) = 4$? Tokiu atveju ieškomų žodžių aibė $H^{-1}(4)$.[10]

Aišku, užrašytos matematinės (loginės) formulės tik formalizuoja sakinius, kuriuos išreikšti žodžiais yra net paprasčiau. Visgi giliai tikiu, kad tik reguliarios slinktys pirmyn ir atgal tarp metakalbos, formulių, žargono, kaip vieno ekstremumo, ir poetinės kalbos, kaip kito, suteikia atramą kalbėti apie tikrą matematikos ir poezijos ryšį. Nuolatinė senųjų vertybių devalvacija ir naujųjų revalvacija. O švytuoklė toliau tesvyruoja.

1.3. B a r a n a u s k a s i r m a t e m a t i k a. Nors ir džiugu, kad Jonas Kubilius surinko matematines Baranausko dienoraščių ir laiškų vietas, bet dėl švytuoklės principo pažeidimo jo studija *Antanas Baranauskas ir matematika* (Kubilius 2001) vertintina rezervuotai. Knyga skirta moksleiviams susipažinti su pagrindinėmis

sąvoką, nėra įvaldę formalaus analitinio aparato, kurio dėka eilėdaros vientisumas gali būti pateiktas ir aprašytas matematikos kalba.“

[8] Algoritmas yra tai, ką gali atlikti baigtinė Turingo mašina.

[9] Plačiau apie poemą žr. Alkauskas 2022.

[10] Funkcijai $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ir elementui $b \in \mathcal{B}$ žymėjimas $f^{-1}(b)$ simbolizuoja b *pirmavaizdžių* aibę: visus elementus $a \in \mathcal{A}$, kuriems $f(a) = b$.

matematikos sąvokomis: pirminiai skaičiai, Eratosteno rėtis, asimptotikos dėsnis, laipsniai, kriptografija, Archimedo konstanta π, skritulio kvadratūra, begalybė, ir šį tikslą ji pasiekia. Tačiau skaitytojas, siekiantis pažinti Baranauską, skaitydamas nuliūs, nes nemažai teksto su juo mažai ką turi bendro.

Ir dar. Pavyzdžiui, ką autorius rašo apie Poeto atrastą formulę, kurią Karlas Hosfeldas (Carl Hossfeld) 1890 m. išspausdino žinomame žurnale *Zeitschrift für Mathematik und Physik*: „[...] tas rezultatas mėgėjui Baranauskui buvo svarbus. Iš tikrųjų jo vertė nėra didelė" (Kubilius 2001: 30). Švytuoklė tarytum viename ekstremume užstrigusi. Ir ką moksleivis skaitydamas pagalvos? Kad Baranauskas – nevykėlis? Kitas pavyzdys: Kubilius aptaria 1897 m. Varšuvoje išspausdintą Baranausko publikaciją „O progresji transcendentalnej oraz o skali i syłach umysłu ludzkiego". Joje Žemaičių vyskupas-sufraganas bet kuriam $a_1 \in \mathbb{N}$ rekurentiškai sukonstruoja seką $a_{s+1} = a_s^{a_s}$, kurią ir pavadina transcendentine. Pavyzdžiui, jei $a_1 = 2$, tai $a_2 = 4$, $a_3 = 256$, o a_4 jau turi 617 skaitmenų. Šiuolaikinėje matematikoje tokie skaičiai nėra egzotiniai. Tiuringo mašinų teorijoje egzistuoja funkcijos, augančios greičiau už bet kurią simboliais aprašomą funkciją, pavyzdžiui, tokią, kaip $f(n) = a_n$. Toliau Kubiliaus komentaras (ten pat, 84):

> „[Baranausko darbe] nagrinėjamos [šios] progresijos savybės, dėstomos jau mūsų cituotos iš laiškų mintys apie begalybę. Tačiau pagrindinė darbo dalis yra skirta filosofijos ir teologijos klausimams".

Esminiai – būtent *tie* klausimai – ir praleidžiami. Gerai, kad juos pamini du literatai:

> Sigitas Geda: „[Baranausko] titanišką prigimtį liudija dar viena – utopinė idėja. Sakiau, kad tikrai didelis poetas turi turėti utopinių idėjų. Apskaičiuoti pragaro tūrį!";
>
> Saulius Šaltenis: „apskaičiuodamas, tarytum suvarai viso pasaulio blogį į matematinę formulę lyg į spąstus. Įklampini Šėtoną lyg pasibaisėtiną vabalą gintaro gabale ir įvedi Dievo tvarką!" (Geda 1998: 155–156).

Juk švytuoklės orbitą sudaro lygiaverčių taškų kontinuumas. Bet kuris vienas iš jų tikėtiniausiai yra labai nereprezentatyvus[11]. Dar kartą pacituojant Gedą:

> „Nėra esminio skirtumo tarp aukštosios matematikos ir poezijos ar muzikos. Šitas Baranausko kosminis planas ir liudija, kad visai tai, ką jis darė „Anykščių šilely", kitais pavidalais prasiveržė kitoje veikloje" (ten pat, 156).

[11] Tai nėra visuotinis dėsnis. Pavyzdžiui, kompleksinio kintamojo funkcijų teorijoje visa lokali (vieno taško aplinkos) informacija apie analizinę funkciją nusako ją ir globaliai.

Labai mažai – tik pusė puslapio – Kubiliaus knygoje skirta Baranauskui, kaip lietuviškų matematikos terminų kūrėjui. Norėtųsi juk daugiau: kirčių, priegaidžių, kalbininkų komentarų, susirašinėjimo su Hugo Vėberiu ištraukų. Kubilius, pats iniciavęs matematikos terminų žodyno (MTŽ) kūrimą, laikytinas Baranausko darbų tęsėju. Gražią apžvalgą apie šių terminų istoriją yra parašęs Vidmantas Pekarskas (Pekarskas 2003).

1.4. Poezija ir dailė. Anot Benedikto Januševičiaus, „vizuali poezija – tai verbalinis tekstas, kuriam naują, papildomą dimensiją suteikia literatūrai nebūdinga vizuali aranžuotė“ (RP 17). Bet atrodo, kad šis papildinys suteiktas tik keliuose knygos *Raidžių paveikslai* puslapiuose. Kai kurie kūriniai tėra tekstai, tik suformuoti ne prasminių strofoidžių, o žiurkės, pasagos ir t. t. pavidalais (kam?! kas gi nežino, kaip atrodo koks nors malūnas?). Kiti – priešingai, tėra piešiniai iš grafemų. Betgi, anot sudarytojo, „poezijos knyga – ne laikraštis ar informacijos leidinys, ji turi teisę būti beprasmė ar nesuprasta“. Nesuprastà? Suprañtama! Tačiau beprasmė? Jei nėra prasmės, tai viskas galima? Lyg nuvulgarinta Fiodoro Dostojevskio mintis. Bet ne visai ir nuvulgarinta, nes kažkoks ryšys tarp tikėjimo, prasmės ir poezijos yra, kaip rodo ši Tomo Sternso Elioto citata:

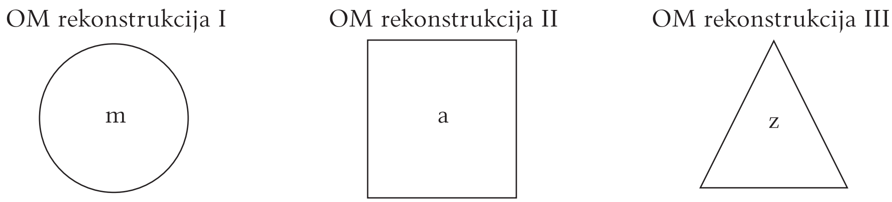
> „Išmanančiam poetui alegorija niekuo nesiskiria nuo *gryno regimojo vaizdo*. O gryni regimieji vaizdai tampa kur kas stipresni būdami prasmingi – mums nebūtina žinoti, kokia ta prasmė, bet įsisąmonindami vaizdą, privalome žinoti, kad jis turi ir prasmę“ (Eliotas 1927: 397).

Tačiau Januševičiaus formulė „grafinė poezija – tai eilėraštis, apsimetęs piešiniu“ žãvi, nes bendrai tinka bidiscipliniškumo apibrėžimui: akcentuodama grynuolio kokybę, kviečia išbandyti dirbinį (tvirtas puodas tik iš gero molio). „Teologija, apsimetusi fizika“ – tai galioja daliai straipsnių Česlovo Kavaliausko veikale *Teologijos žodynas* (Kavaliauskas 1992). Tiesa, poezijos su grafikos kauke personažą suvaidinti ir yra sunkiausia. Priežastys čia dvi: fizikinė ir fiziologinė. Literatūra yra nehomogeninio laiko, o grafika – homogeninės erdvės menas. Erdvės iškreivinimas galimas arba labai didelių mastelių, arba iliuzoriniams kūriniams. Kinas, muzika telpa į homogeninį laiką[12]. Tai, aišku, sąlygiška, bet grafikos ir poezijos ortogonalumas yra akivaizdus. Tuo pačiu yra itin sunku vienai

[12] Literatūros, kaip būtojo (nors ką tik praėjusio) laiko meno, ir muzikos, kaip privalomai esamojo laiko meno, skirtis, nors dažnai paminima, nėra visiškai įtikinama, ypač apmąstant meno raiškos-reikšmės (t. y. sintaksės-semantikos) intervalą kaip kontinuumą. Bet Rimvydo Stankevičiaus (Stankevičius 2015) mintis, kad poeto Antano Kalanavičiaus itin pamėgtas būtasis dažninis laikas (taikomas priesagos *-inėti* veiksmažodiniams vediniams iš veiksmažodžių, pavyzdžiui, *pareidinėju*, *užsegdinėjo*) – tai siekis kiekvieną veiksmą matyti kaip įvykstantį *dabar*, kas galimai nurodo į literatūros ir muzikos sintezę, yra nepaprastai įdomi.

iš šių dimensijų pavergti kitą. Añtra, smegenų moksle žinomos reakcijos, vadinamos ERP (*event-related potential*) (HNL). Jų tyrimuose išaiškinta, kiek trunka pojūčiais suvokti žodį ir derinti žodį prie konteksto. Žinomas momentas, kuomet vyksta prieiga prie semantinės informacijos. Ir viskas – pasąmoningai. Nesuvokiant prasmės, toliau tikslinama sąmonės lygmenyje. Grafikos ir poezijos sąveikos atveju tiesiog per dažnai prireikia sąmoningo suderinimo arba sampratos apie beprasmybę. Tokia veikla smegenis tiesiog perstimuliuoja.

Taip, grafinė poezija – plati sąvoka, apimanti daug technikų ir idėjų. Abstraktūs (ir matematiniai) Donaldo Apanavičiaus eilėraščiai šioje knygoje – tarp stipriausiųjų. Čia ir laikas, nyksmas (RP 80–81), kriptokalba, kabala (ten pat, 79), genezė *ab ovo* (ten pat, 78). Ypatingai paveikios trys OM rekonstrukcijos (ten pat, 75–77), kur sumišę kalba, matematika, mandala, riba, fonema, simbolis, paslaptis; pasąmonė stipriai į tai reaguoja (1 pav.).



1 PAV. D. Apanavičiaus triptikas

Knygoje yra ir nominalios matematikos: Euklido penktąjį postulatą (žr. 4.1) mini Rimas Vėžys (RP 23), o Vilma Fiokla Kiurė (ten pat, 51) naudoja matricas (deja, viskas šioje kompozicijoje pakrikę; net loginė klaida[13] labiau nepakenkia).

Tarp gerų idėjų minėtina Mato Gimžausko žaisminga „Suahilidada“ (ten pat, 86), kur tarytum pseudo-suahilių kalbos silabogramomis užrašyta „Tautiška giesmė“ stipriai koreliuoja ir su 4.2 temomis (atminties įrėminimas), ir su minėta ketvirtąja šio straipsnių ciklo dalimi. Arba S. Gedos „Vienatvės piešinys per Jonines“ (ten pat, 73), kuris kritikų, atrodo, išsamiai dar neišnagrinėtas[14]. Toliau pateikta trumpa bei itin subjektyvi šio grafinio teksto analizė (2 pav.).

Joninių paminėjimas suteikia užtikrintą atspirtį, Saulės kalendorių. Kauliukų kiekis kvadrato kraštinėse kinta nuo 1 iki 7, tad šios krūvelės perimetrą padalina į 24 dalis. Taigi turime mėnulio fazes, kur nelyginis skaičius, kaip metų

[13] A=MATRICA IR 4R, kai turi būti 3R.

[14] Nors pats eilėraštis nekart probėgšmais minėtas (pavyzdžiui, Valentas 1997: 149), taip pat Gyčio Norvilo interviu, kuris intuityviai čia pamini kosmosą (žr. https://www.bernardinai.lt/2012-02-22-gytis-norvilas-eilerastis-prieglobscio-zona/).

ir mėnesio pradžia (*kol jaunas, tol vienas*) žymi jaunatį. Pateiktas piešinys – tai tarp įvairių kultūrų populiariausias buvęs Saulės-Mėnulio kalendorius. Tokius iki šiol naudoja kinai, hebrajai, indai. Naudojo ir senovės skandinavai, nes štai „Vaftrūdnio eilių“ 23-ias posmas:

Mundilfioris vardu Mėnesio tėvas,
Saulė – dukra jo.
Jiems lemta kasdien keliauti per dangų –
taip laiką skaičiuojam (PE 101).

Skandinavų mitologijai (kaip ir šumerų, indų, hebrajų, graikų), o dar labiau – kosmojautai, Geda teikė ypatingą svarbą. Vien cikle „Septynių vasarų giesmės“ paminėti Odinas, Toras, Lokis. Toliau, Jehovos tvarką – pasaulio kūrimo užbaigtį, septintąją Dievo Dieną, jėgų pusiausvyrą – reprezentuoja pavasario ir rudens lygės, septyni kauliukai kairėje ir dešinėje. Ten pasaulio sąranga tvirčiausia, kismas – lėčiausias. Visa pasaulio masė, net vizualiai, sukoncentruota ties šiais stacionariais taškais, o saulėgrįžos – lūžiai, (per)virsmai, sukrėtimai, singuliarumai. Viršutinis vienetas (vienatvė, *singularis*) – Joninės, apatinis – Kalėdos. Dievo kalendoriuje pirmoji diena – tvarkos radimasis iš chaoso. Chaoso inversija – Tobulybė. Tvarka ties įmanomo riba, ties bedugne (gr. *χάος*). Tvarka, neišvengiamai panašėjanti į chaosą[15]. Ir dar: kol metskaitlis nebuvo sunormintas visoje planetoje, Pietų pusrutulio žiemos saulėgrįža sutapo su Šiaurės pusrutulio vasaros. Bet kam tie žodžiai – viską atstoja vienas grafinis Gedos eilėraštis.

I
II II
III III
IIII IIII
IIIII IIIII
IIIIII IIIIII
IIIIIII IIIIIII
IIIIII IIIIII
IIIII IIIII
IIII IIII
III III
II II
I

2 PAV. S. Gedos „Vienatvės piešinys per Jonines“

[15] Struktūralistinės, preciziškai matematinės muzikos kūrėjai netikėtai pastebėjo, kad tókios kompozicijos mažai besiskiria nuo sukurtų aleatoriniais principais.

1.5. Žymėjimai ir susitarimai. Matematikoje *skaičius* – tam tikrai standartinei *struktūrai* priklausantis elementas. Kadangi kitokių (išskyrus 4.1.–4.3.), neprireiks, skaičius čia reikš arba natūralųjį skaičių iš aibės $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, arba sveikąjį skaičių iš aibės $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$. *Struktūros* reikšmė yra tiksli, bet prireiks tik sąvokos *grupė*, kuri bus apibrėžta vėliau.

Kai $M, N \in \mathbb{N}$, funkcija $M \bmod N$ (skaitoma 'M moduliu N') rodo vienintelį sveikąjį skaičių L, $0 \leqslant L \leqslant N - 1$, tokį, kuris $M - L$ dalinasi iš N be liekanos. Pavyzdžiui, $20 \bmod 7 = 6$.

Kalbant apie eilėdarą, didžioji raidė žymės vyrišką, mažoji – moterišką, pastorinta mažoji kursyvu – daktilinį rimą (kai kirčiuotas trečiasis skiemuo nuo galo). Šios raidės indeksas rodys pėdų (dviskiemenių ar triskiemenių) skaičių eilutėje. Jei visos posmo eilutės jų turi vienodai, rašoma tiesiog 4-jambas, 3-amfibrachis ir pan.

2. POSMAI IR GRANDINĖS

Šiuolaikinės kalbos linkusios diferencijuoti
abstraktų mąstymą
(vienintelė universali kalba
šiandien liko matematika),
bet lotynų kalbos universalios savybės
būdingos florentietiškai Dantės šnekai.

Tomas Sternsas Eliotas

2.1. Eilėdara ir kalba. Dalį eilėdaros meno-mokslo sudaro matematikos (plačiąja prasme) adaptacija tam tikrai kalbai, jei ritmą, foniką, instrumentuotę, formą, rimą laikysime struktūros, simetrijos, balanso ir analogijos apraiškomis[16]. Štai pora pavyzdžių. Klasikinėje *sinkopio*[17] eilutėje kaitaliojasi 0, 1, 2 arba 4 nekirčiuotų skiemenų intervalai. Juozas Girdzijauskas tyrė pastarojo struktūrą ir nustatė tokius faktus:

> „Lietuvių poezijoje yra išryškėjusios dvi sinkopio grupės su šešiais[18] pagrindiniais metrais ir aštuoniolika detalesnių variantų. [...] Beveik visuose sinkopio variantuose (išskyrus vieną) vyrauja dviskiemenis nekirčiuotų skiemenų intervalas (nuo 51 proc. iki 75 proc.). [...] Taip yra ir todėl, kad jo dominavimas

[16] Plačiau apie poezijos terminus žr. Matulaitienė 1997.

[17] Terminas įvestas Kęstučio Nastopkos.

[18] V ir VI tipo sinkopyje leidžiami 3 ir 5 skiemenų nekirčiuoti intervalai (Girdzijauskas 1978: 220–230).

atitinka bendrinės lietuvių kalbos normas – jis vyrauja ir prozinėje kalboje“ (Girdzijauskas 1978: 225).

Antrasis pavyzdys: XX a. lietuvių poezijai itin būdingas keistas *penkiaskiemenio jambodaktilio*[19] metras.

Turint galvoje tokią eilėdaros priklausomybę nuo kalbos, toliau bus panagrinėti naujos fiksuotos formos[20] pentastichai ir jų pynimo būdai. Atrastoji konstrukcija, nors didžia dalimi teorinė, implikuoja netrivialų matematinį uždavinį bei keletą praktiškai taikomų, patrauklių eilėdaros formų.

Nekeista, kad didžiausia silabotoninės eilėdaros įvairove pasižymėjo kūryba būtent tų poetų, kurie esmingai gilinosi į skirtingų tradicijų kultūras. Tarp tokių – Jonas Mačys-Kėkštas[21], Edmundas Steponaitis[22], Maironis, Vytautas Mačernis, S. Geda, Tomas Venclova. Todėl tinkamu įvadu į pagrindines šio skyriaus ãtspirtis pasitarnaus dvi oktavos – Kėkšto ir Aleksandro Puškino. Pirmasis išjuokia tautininkus, net antikinėje Graikijoje įžvelgusius kone lietuvišką dominantę („Homer’as esąs Omyras, Odisea – Adišius“), bei „Aušros“ *prastus eilemanus* (Mačys-Kėkštas 1910: 43). Tik Kėkšto posmas stebėtinai panašus į Puškino:

...Teisybę sakant, mesti šitą Oktavoms rašymą man bus sunku: Eiles čia sustatai į lygią glitą Kaip kareivius, kur tink ir paranku; Mintis smaigai sau, vieną-kitą Be didelės tvarkos arba pruntų, Gale, kam geluonį įvaręs, Sakai: gana tuo tarpu karės.	Четырёхстопный ямбъ мнѣ надоѣлъ: Имъ пишетъ всякой. Мальчикамъ въ забаву Пора бъ его оставить. Я хотѣлъ Давнымъ давно приняться за октаву. А въ самомъ дѣлѣ: я бы совладѣлъ Съ тройнымъ созвучіемъ. Пущусь на славу! Вѣдь рифмы запросто со мной живутъ; Двѣ придутъ сами, третью приведутъ.
J. Mačys-Kėkštas „Išsiliuosavęs“ (1902)	А. С. Пушкинъ «Домикъ въ Коломнѣ» (1830)

Forma be vaizdinijos, žodyno ir milašiško „sielos peizažo“ savaime dar nieko nereiškia, bet ypatingais atvejais ir formalūs išradimai jau turi autorinį krūvį. Taip nutiko su Onegino posmu (4-jambas aBaB ccDD eFFe GG, kurį naudojo ir

[19] Terminas įvestas Juozo Girdzijausko.

[20] Aliuzija į XIV–XV a. prancūzų poezijos ir muzikos *formes fixes*: *ballade*, *virelai*, *rondeaux*.

[21] Vienas pirmųjų Lietuvoje, kartu su Pranu Vaičaičiu, perėjęs vien prie silabotoninės eilėdaros (Girdzijauskas 2001).

[22] Jau debiutinio eilėraščio „Lietuvos aušra“ (Steponaitis 1988: 24) pirmasis posmas turi netrivialią formą $a_5b_6b_6c_5a_5c_4$ (jambas; panašus trečiasis, kiek kitoks antrasis posmai).

Jurgis Baltrušaitis lietuviškai parašytame 12 posmų kūrinyje „Dulkės ir žvaigždės“[23]), Michailo Lermontovo «Бородино» (jambas $a_4a_4B_3c_4c_4c_4B_3$) ir poema «Сашка» (5-jambas AbAbAccDDee), Edgaro Alano Po (Edgar Allan Poe) “Raven” (chorėjas $a_4a_4.B_8.c_4c_4.c_4B_4.B_8.B_4$; trys eilutės turi vidinius rimus, todėl čia perskeltos pusiau). Tarytum autorinis turinys be konkretaus turinio. Čia ir panašumas su matematika: pastaroji gyvena platoninėje realybėje, o visos praktiškos reinkarnacijos – tik netobuli idealo modeliai. Beieškant tokios formalios *prí̇ešpoezės*, toliau bus panagrinėti penkiaeiliai ir septyneiliai.

2.2. Tercinų pynimas. Patogumo dėlei, rimus šiame paragrafe žymės ne raidės, o skaičiai. Pavyzdžiui, „septyneilio schema yra 3142342“. Jei dviejų posmų metras yra tas pats, tik rimas paslinktas, jie vadinami *identiškos formulės posmais*. Taip pakartojus aukščiau parašytą septyneilį keturis kartus, tik cikliškai pastumtą per vieną, du ir, atitinkamai, per tris rimus, gaunami posmai 3142342 4253453 5364564 6475675. Rimas 4 čia pasitaiko du, du, du, vieną kartą.

Tercinos (*terza rima*) – tercetų 121 232 323 ir t. t. pynė. Ši schema pirmą kartą panaudota Dantės „Dieviškoje komedijoje“, parašytoje hendekasilabiniu[24] jambu. Įmanomos ir atvirkštinės tercinos, gal niekada dar nenaudotos. Būtent, 212 323 434 ir t. t. Kadangi kiekvieną Dantės giesmę užbaigia viena eilutė, vadinamoji *rime rilevate* (10-oje „Pragaro“ giesmėje tai būtų rimai 45–46–45 46), atvirkštinės tercinos gaunamos kiekvieną giesmę skaitant iš galo. Daugiau apie subtilią Dantės poemos architektūrą žr. Hart 1987.

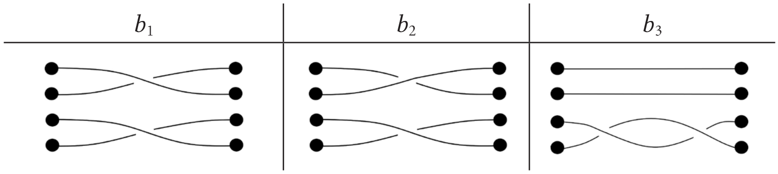
Žodis *pynimas* intuityviai čia tinka. Juk plaukų kuokštas įprastai dalijamas į tris dalis, ir tolesnis kasos formavimas tiek simboliškai, tiek topologiškai primena tercininės giesmės kūrimą. Maža to, Skirmantas Valentas (Valentas 1997: 19), tęsdamas Rüdiger’io Schmitt’o tyrimus, papildo rekonstruotą senąją indoeuropiečių metaforą „austi, pinti“ = „kurti poeziją“ baltų kalbų faktais, pavyzdžiui, lietuvių *pinti* ‘suktai, painiai kalbėti’, *austi* ‘malti liežuviu’ (LKŽe). Jei Dantės atveju metaforos tinkamumas yra akivaizdus, kodėl senovėje poezija irgi priminė audimą? Valentas pamini *dainiaus* ir *poeto* sinonimiškumą, bet nebaigia iki galo ryškinti viską paaiškinančios bendrystės. Būtent, muzikos. Pakaitinis chorų dainavimas ir recitavimas Antikos teatruose savaime jau primena audimą: balsų aukščiai keičiasi vietomis tarsi vijos, o dinamika (*garsiau – tyliau*) sukuria atstumo kismo pojūtį (*arčiau – toliau*). Šio teiginio pagrindimui galima pasiremti skandinavų poezijos *drotkveto* (*dróttkvæt*) metru, kuriam „vieninteliam iš skaldų metrų būdingi tarpusavyje persipinantys sakiniai“ (Ruseckienė, vert. 2017: 17). Tai reiškia, kad tik pabraukus posme tam tikras frazes, jų seka, kaip ir likusių frazių seka, tampa prasminga. Tokia metro konstrukcija aiškinama

[23] Tiesa, visi Baltrušaičio rimai, išskyrus G, yra moteriški.

[24] 11 skiemenų.

susiliejusiomis dviejų chorų partijomis, kurios per laiką redukavosi į vieną vokalinę liniją. Prisiminus 2.1. paminėtas *formes fixes,* taip pat *giesmės* ir *eilėraščio* sinonimiškumą iki pat XIX a., pateikta pynimo, kaip poezijos eufemizmo, muzikinės kilmės hipotezė įgauna pagrindą.

Pabaigai, matematinis šio audinio atkraštys. Topologijoje itin svarbios taip vadinamos *kasų grupės* (angl. *braid groups*; apie grupes žr. 3.1.). Grafinis pavyzdys (3 pav.) daug ką paaiškina jau be žodžių. Šiuo atveju $b_1 \cdot b_2 = b_3$



3 PAV. Kasų grupės elementų sandaugos pavyzdys

2.2. Tercinų apibendrinimas. Dantiškoji forma turi ciklinę simetriją, kurią matematiškai galima nusakyti taip. Pratęsus pynę į $-\infty$ ir $+\infty$, gaunama seka

$$\ldots.\ -2, -1, -2, -1, 0, -1, 0, 1, 0, \bar{1}, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 4, 5, \ldots\ .$$

Eilių formą ir nusako ši seka bei du papildomi parametrai: vieta, kur pynė prasideda (pažymėta brūkšneliu), bei posmo ilgis. Šiuo atveju – skaičius 3. O kas yra seka? Tai – bet kokia funkcija $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Pynė prasideda ties nariu $f(1)$. Jei įsivaizduotume, kad Dantės kūrinys pradedamas skaityti nuo antrojo posmo, tai atitiktų seką $f(n + 3)$. Naujos poemos forma liktų identiška senajai, tik rimai pasistumtų per vieną. Tada minėtoji ciklinė simetrija – tai lygybė

$$f(n + 3) = f(n) + 1.$$

Tokių sekų yra daug. Pavyzdžiui, $\{\ldots, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, \ldots\}$, bet ši seka nėra supinta. Panagrinėkime kitą seką $\{\ldots, \bar{1}, \boxed{5}, 1, 2, 6, 2, 3, 7, 3, 4, 8, 4, \boxed{5}, 9, 5, \ldots\}$. Ši turi reikiamą cikliškumą, bet tarpas tarp vienodų rimų, apvestų stačiakampiu, yra per didelis. Nuosekliai ieškant tercinų struktūros šerdies, išryškėja tokia konstrukcija.

Apibrėžimas. Tegul $Q \in \mathbb{N}$. Funkciją $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vadinsime *paprastąja Q-tina*, jei ji tenkina šias keturias sąlygas:

1. $f(n + Q) = f(n) + 1$, kiekvienam $n \in \mathbb{Z}$;

2. $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

Tegul $f^{-1}(1) = \{p_1, p_2, \ldots, p_Q\}$[25]. Su visais $r \in \mathbb{N}$, su kuriais abu indeksai prie p priklauso aibei $\{1, 2, \ldots, Q\}$, yra teisingos nelygybės

3. $p_{r+1} - p_r < Q$;

4. $p_{r+2} - p_r > Q$.

[25] Tai, kad kiekvieno skaičiaus pirmavaizdžių aibę sudaro Q elementų, išplaukia iš sąlygos **1**.

Paprastąją Q-tiną, kuri tenkina papildomą sąlygą

5. Dydis $p_Q - p_1$ yra mažiausias galimas tarp visų paprastųjų Q-tinų, vadinsime *minimaliąja* Q-tina.

Paprastąją Q-tiną, kuri tenkina kitą papildomą sąlygą

6. $|f^{-1}(1) \cap \mathbb{N}| \geqslant 2$ [26],

vadinsime *normalizuota* Q-tina. Jei Q-tina yra ir minimali, ir normalizuota, ją vadinsime *standartine*. Iš sąlygos **4** išplaukia, kad kiekvienai paprastajai Q-tinai f ir kiekvienam natūraliajam skaičiui ℓ, aibė $f^{-1}(1) \cap [-\ell Q + 1, -\ell Q + Q]$[27] turi 0, 1 arba 2 elementus. Tegul $\mathcal{T}(f)$ yra didžiausias skaičius ℓ, su kuriuo ši aibė turi lygiai vieną elementą. Standartinę Q-tiną, kuri tenkina paskutinę papildomą sąlygą

7. Dydis $\mathcal{T}(f)$ yra didžiausias galimas tarp visų standartinų Q-tinų, vadinsime *kanonine* Q-tina.

Jei šios sąlygos atrodo miglotai, iš pavyzdžių paaiškės, kaip jos išsiverčia į eilėdaros kalbą. Sąlyga **1** jau aptarta. Sąlyga **2** reikalinga užtikrinimui, kad pirmame posme pasitaikytų tik teigiami rimai, o taip pat rimas 1. Sąlyga **3** reikalauja, kad bet kurie gretimi du rimai būtų nutolę mažiau už posmo ilgį. Sąlyga **4** sako, kad bet kurioje Q eilučių sekoje (pavyzdžiui, viename posme) kiekvienas rimas pasikartoja ne daugiau dviejų kartų.

Kai $Q = 5$, pirmas keturias sąlygas tenkina net 25 skirtingos paprastosios kvintinos. Paimkime dvi iš jų: 32132 ir 32312. Dabar užrašykime po tris šias schemas atstovaujančius posmus:

3	4	5	3	4	5
2	3	4	2	3	4
1	2	3	3	4	5
3	4	5	1	2	3
2	3	4	2	3	4.

Kairiajame pavyzdyje atstumas tarp pirmo ir paskutinio rimo 3 yra 12 eilučių, o dešiniajame – 13. Perrinkus visus 25 atvejus paaiškėja, kad 12 ir yra minimalus galimas atstumas. Skaičiavimai rodo, kad sąlygą **5** tenkina penkios minimalios kvintinos:

32132, 13213, 21321, 13243, 21324.

Kita vertus, sąlygą **6** tenkina devynios normalizuotos kvintinos:

31231, 23121, 31213, 13231, 13213, 21321, 12341, 12314, 12134.

[26] Simboliu $|\mathcal{A}|$ žymimas baigtinės aibės $\mathcal{A}$ elementų skaičius, o $\cap$ – aibių sankirta.

[27] Laužtiniai skliaustai $[a, b]$ žymi uždarą intervalą.

Ši sąlyga reikalauja, kad rimą 1 pirmajame posme (kuris tik jame ir pasitaikys) atstovautų bent 2 eilutės, antraip viena eilutė poemoje liktų be rimo. Dvi išrašytos aibės iš penkių ir, atitinkamai, iš devynių elementų, turi du bendrus narius. Tai ir yra standartinės kvintinos: 21321 ir 13213. Pirmajai iš jų $\mathcal{T}(f) = 2$, o antrajai $\mathcal{T}(f) = 1$. Taigi kanoninė kvintina yra vienintelė: 21321. Eilėdaros lygmenyje sąlyga **7** reiškia, kad eilutė, kuri neturi rimo pirmame posme, atitinka didžiausią galimą rimą. Akivaizdu, kad 21321 (rimas 3 neturi poros) laiko tėkmės atžvilgiu yra natūralesnė forma, nei 13213 (poros neturi rimas 2).

Matematinių samprotavimų pagalba, įrodomas ir bendresnis rezultatas.

Teiginys. *Kiekvienam nelyginiam* $Q = 2q - 1 \geqslant 3$ *egzistuoja vienintelė kanoninė* Q*-tina*

$(q - 1)\,(q - 2) \ldots 1q\,(q - 1)\,(q - 2) \ldots 1.$

Kaip minėta, egzistuoja 25 paprastosios kvintinos. Kompiuterinė programa perrankos būdu suskaičiuoja, kad sekstinų yra 96, o septinų – net 427. Tegul bendrai skaičius $b(Q)$ rodo paprastųjų Q-tinų kiekį. Gaunama įdomi seka

1, 2, 3, 8, 25, 96, 427, 2176, 12465, 79360, ...

Koks čia dėsningumas? Tokiais atvejais privalu pasitikrinti internetiniame sekų duomenyne. Atrastoji seka ten jau yra užfiksuota, žr. OEIS A065619. Aišku, ji buvo apibrėžta visai kitaip, jokio ryšio su tercinomis. Toks, beje, yra vienas pagrindinių kombinatorikos principų: *suskaičiuoti dviem būdais*. Tai stebėtinai dažnai leidžia įžvelgti objekto struktūrą. Žinoma ir sekos *eksponentinė generuojanti funkcija*:

$$\sum_{Q=1}^{\infty} \frac{b(Q) \cdot x^{Q}}{Q!} = \frac{x(1 + \sin x)}{\cos x}$$

(čia $Q! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot Q$). Tokios lygybės fizinių mokslų atstovų jau nebestebina, nes stebuklų gausa atbukina. Gaila, nors natūralu. Kiti čia iškylantys klausimai: kiek yra minimalių; normalizuotų; standartinių Q-tinų? O kas yra kitaip, jei Q – lyginis skaičius? Šiuo atveju situacija sudėtingesnė. Taip konstrukcija, įkvėpta poezijos, implikuoja netrivialios struktūros matematinį uždavinį.

Telieka jis grynajai matematikai. Poezijos kontekste įdomiau kitkas: jokia konkreti kalba (pavyzdžiui, lietuvių) kanoninių Q-tinų apibrėžime nefigūruoja. Pradėjus eiliuoti, iškart paaiškėja, kad kvintina 21321 (kuri toliau straipsnyje ir plėtojama), savyje turi dar per mažai vidinės struktūros. Tikrajai formaliai autorystei privalu aptarti ir metrą, ir kalbą.

Dantė fiksuoja skaičių **trys**: 3 poemos dalys; 3 eilutės, 33 skiemenys posme; 33 giesmės kiekvienoje dalyje. Trejybė, trijų pasaulių medis, trinaris, trifunkcis indoeuropiečių panteonas[28]. Tuo tarpu **penki** – tai pitagoriečių *hugieia (ὑγιεία)*

[28] Kalbininko, religijotyrininko Georgo Dumèzilio teorija.

pentagrama ir Pitagoro skaičius[29] 5 = 2 + 3, kuris taip pat lygus mažiausio pitagorinio trejeto (3, 4, 5) įžambinei[30]. Taigi, matematika ne tik atskleidžia kanoninės kvintinos struktūrą, bet ir veikia ją per simbolius.

2.3. Pentastichai su trigubu rimu. Dantiškose tercinose iš trijų eilučių surimuota $\lfloor 3/2 \rfloor=2$. Norint tiek pat surimuoti penkiaeilyje, reikia išskirti $\lfloor 5/2 \rfloor=3$ eilutes[31]. Jei likę du rimai vienodi, kombinatoriškai gaunama dešimt variantų: 22111, 21211, 21121, 21112, 12211, 12121, 12112, 11221, 11212, 11122. Toliau pateikti keturi skirtingų schemų pavyzdžiai iš lietuvių poezijos, atitinkantys formulę 12112[32].

Mes gyvastį sunkų praskurstam urvuose
Ne dienos, bet amžiai vargais ant mūs krinta!
Bet svietas veltui mus tamsybėms apjuosia,
Į aukštį greit kilsim kitokiuos vinduose –
Jau saulė giedresnė užšvinta!

Juozas Mačys-Kėkštas
„Duonos ir žaislų“ (1902)
Amfibrachis $a_4b_4a_4a_4b_3$

Išdainuosi, rodos, gėlą
Su svaiginančia daina!
Kaip vienužis beržas žėlė –
Kaip vėjužis bangą kėlė –
Kaip atlankė mylima ––

Balys Sruoga
„Dievų takais“ XVI (1923)
4-chorėjas aBaaB

Nuplėškit baltą nuo stiebo burę,
Į gelmę vairą skandinsime!
Tik karštas širdis draugėn subūrę,
Valia aistringai per audrią jūrę
Į krantą laivą plukdinsime.

Vincas Mykolaitis-Putinas
„Žvejų daina“ (1920)
Jambodaktilis $a_4\boldsymbol{b}_3a_4a_4\boldsymbol{b}_3$

Mus žegnojo aštriais kalavijais,
ugnimi gydė mūsų pilis,
tvenkiniuos skleidės juodos lelijos,
baisūs žvėrys riaumodami vijos,
gal savaitę, gal amžius kelis.

Aivaras Veiknys
„Prieglobstis“ (2014)
3-anapestas aBaaB

Dar būtų galima pridurti – ir visos schemos skirtingos! – A. Veiknio eilėraščius „Trys paveikslai apie vienatvę“ (2021, 4-jambas AbAAb) ir „Durys“ (2014, 5-jambas aBaaB), Bernardo Brazdžionio „Tu man buvai“ (1944, 4-jambas

[29] Pitagorinis muzikos instrumentų derinimas pagrįstas grynosios kvintos intervalu, t. y. bazinių tonų dažnių santykiu $\frac{3}{2}$. Pagal enciklopediją *Encyclopedia Britannica*, skaičius 5 pitagoriečiams taip pat yra moteriško (2) ir vyriško (3) pradų visareikšmė jungtis.

[30] Natūraliųjų skaičių trejetas (a, b, c) vadinamas pitagoriniu, jei $a^2 + b^2 = c^2$. Pagal Pitagoro teoremą, tokio ilgio atkarpos sudaro statųjį trikampį.

[31] Skliaustai $\lfloor x \rfloor$ žymi realiojo skaičiaus x sveikąją dalį (angl. *floor function*, iš čia ir vizualus žymens panašumas į grindis).

[32] Penkiaeilis 12112 taip pat yra populiariausias XV–XVI a. ispanų *Quintilla* žanre.

aBaaB), Kornelijaus Platelio „Mėnulio darželis“ (1984, 5-amfibrachis aBaaB), V. Mykolaičio-Putino „Pesimizmo himnai“ V (1925, 4-amfibrachis ***a***B***aa***B), Albino Bernoto „Po ilgo tylėjimo“ (1978, 4-amfibrachis aBaaB), V. Mačernio „Žmogus“ (1943, jambas $a_7B_7a_8\boldsymbol{a}_5B_5$) ir „***“ (daktilis $a_4B_4a_4a_4B_3$; eilėraštyje trys eilutės turi daktilines anakrūzes – po vieną nekirčiuotą skiemenį pradžioje), Juozo Erlicko „Baladė apie žmogų su šakėmis“ (1987, pirmasis posmas – jambas $A_4b_3A_4A_4\boldsymbol{b}_3$; kitose pėdų skaičius kiek varijuoja, išlaikant schemą 12112).

Visuose šiuose posmuose yra pauzės: katalektinės (trūksta vieno skiemens), arba pėdà sutrumpėjusios eilutės. Ekstrapoliuojant tai į kvintinas, galima teigti: natūralus teksto kvėpavimas tokiame penkiaeilyje reikalauja pauzių. Katalektinių eilučių alternatyva atkrenta dėl perpynimo: sunku įsivaizduoti natūralią teksto tėkmę, kai kiekvieną rimą atitinka ir 3 vyriškos, ir 2 moteriškos kadencijos (arba atvirkščiai). Telieka antroji alternatyva.

Tiesa, yra viena išimtis. Kvintinoms tinka ir grynas hendekasilabinis jambas. Čia kiekviena eilutė baigiasi pauze, papildančia ją iki šešių pėdų. Vienos pauzės mãža, bet kitos eilutės anakruzė, veikdama kaip prieštaktis, pauzę tarytum išplečia iki dviejų skiemenų. Ir tikrai, pirmas atrastas eilėraštis su rimų schema 12112, kuriame sutampa ir skiemenų kiekis eilutėse, ir jų kadencijų tipai, yra Aido Marčėno „Iš pakraščių į centrą“ (2000, 5-jambas abaab). Šio skyriaus kontekste pirmąjį posmą pacituoti tiesiog privalu:

Suiręs Dante, dantenos kraujuotos,
senukas ten, kur vakar būta berno,
peizažas iš fragmentų suklijuotas –
dangus ir žemė, moteris ir luotas,
šviesa – lyg čia prasideda inferno (ŠLPCh 142).

Jambinis tetrametras tinka mažiau, nes, jei pauzė būtų įskaičiuota, kiekvieną eilutę sudarytų penkios, o posmą – 25 pėdos. Šio skaičiaus nelyginumas ir nulemia staigius posūkius teksto tėkmėje.

Tokiu būdu ryškėja trys – chorėjo, daktilio ir jambo – kvintinoms tinkamos formos:

2	–∪–∪–∪–∪	–∪∪–∪∪–∪	∪–∪–∪–∪–∪–∪
1	–∪–∪–∪	–∪∪–∪	∪–∪–∪–∪–∪–∪–
3	–∪–∪–∪–∪	–∪∪–∪∪–∪	∪–∪–∪–∪–∪–∪
2	–∪–∪–∪–∪	–∪∪–∪∪–∪	∪–∪–∪–∪–∪–∪
1	–∪–∪–∪	–∪∪–∪	∪–∪–∪–∪–∪–∪.

Kaip minėta, lietuvių kalbai būdingiausias dviskiemenis nekirčiuotų skiemenų intervalas. Būtent todėl daktilinis pavyzdys ir panaudojamas šio straipsnio autoriaus poemos „Šiauriniai reliktai“ pradžios giesmei „Pirmasis kovas be Ãsgardo“. Pirmieji du posmai:

Skelia gilėjantį plotą	Šiaurę klyksmai suakėja,
Gervių noragas...	Trupina gruodą,
Grūdui, laimėjusiam sėją,	Nerimas virpa paviršiuje,
Nieko neduota. Tik duotas	Atveria Visatverėja
Amžinas Ratas.	Akį žydruotą.

2.4. Septinos. Kanoninės septinos jau mažiau praktiškos. Nes, pirma, kiekvienas rimas pasikartotų septynis kartus, o tai gresia rimta vienãskamba. Antra, rimai cikliškai pasislinktų tik po septynių eilučių. Nagrinėjant įvairias 7-ciklines sekas, praktiškiau būtų imti kas antrą posmą. Taip randamos kelios itin patrauklios septinos. Pavyzdžiui, ši, kuri ir bus panaudota antrojoje tetralogijos poemoje (žr. Alkauskas 2022):

1-as posmas	3	1	4	2	3	4	2
2-as posmas	5	3	6	4	5	6	4
3-ias posmas	7	5	8	6	7	8	6.

Nelyginiai rimai kartojasi tris kartus su tarpais 3, 3, o lyginiai – keturis su atitinkamais tarpais 2, 4, 2.

3. GRUPĖS

Matematika, greta kalbos ir muzikos, yra viena
iš žmogaus proto
laisvos kūrybinės jėgos pirminių išraiškų.
Hermanas Veilis

3.1. Grupės struktūra ir metatezės. Binarinė operacija – tai tokia stebuklinga dėžė su durelėmis kairėje, dešinėje ir viršuje. Iš abiejų pusių įdėjus po elementą, dėžė suveikia ir kažką, ką jau galima išimti per viršų, sugeneruoja. Matematiškai tai užrašoma $a \square b = c$. Paprastumo dėlei, dėžei žymėti naudojamas ne simbolis „□“, o standartinis „·“.

Grupė $(\Gamma, \cdot)$ – tai aibė su binarine operacija, jei pora tenkina šias aksiomas:

1) *Neutralusis elementas (vienetas)*: egzistuoja toks $e \in \Gamma$, kad $a \cdot e = e \cdot a = a$ kiekvienam $a \in \Gamma$;

2) *Atvirkštinis elementas*: kiekvienam a egzistuoja b toks, kad $a \cdot b = e$;

3) *Asociatyvumas*: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
Remiantis šiomis aksiomomis įrodoma, kad neutralusis elementas yra vienintelis, kaip ir kiekvieno elemento atvirkštinis. Pastarasis tuomet pažymimas a^{-1}. Binarinė operacija gali tenkinti ir lygybę $a \cdot b = b \cdot a$. Tokia grupė vadinama *komutatyviąja*. Realiame pasaulyje tai yra netipiška: juk ne tas pats, ar pirma mauti kojinę, ar auti batą. Ir ne tas pats, kas įvyksta anksčiau: autobuso sustojimas ar keleivio šuolis iš jo[33]. Grupėje po vieneto paprasčiausi yra antrosios eilės elementai (jei jie egzistuoja), kuriems galioja $a \cdot a = e$. Tokie vadinami *atspindžiais* arba *involiucijomis*.

Veidrodinio atspindžio tema kalbotyroje tikrai nenauja. Taip galima traktuoti ir metatezę (liet. *kepti* // slav. *пекти*), ir Algirdo Patacko vystytą virsmo dėsnį (Patackas 2014: 85), aprašantį žodžių prasmines ir simbolines sąsajas: ***plat**-us* // ***talp**-us*; ***gyl**-is* // ***lyg**-is*[34] ir t. t. Nežiūrint pelnytos kalbininkų kritikos, nereikėtų pastarojo reiškinio atmesti kaip visiškai nemokslinio (Saudargas 2014: 100). Juo labiau, kad, anot Dainiaus Razausko,

> „Vienu atžvilgiu A. Patacko su A. Žarskumi darbai išlieka aktualūs. Būtent tuo, kad juose galima įžvelgti bandymą S. Valento aukščiausiu filologiniu lygiu [knygoje *Mė(lynojo)nulio lingvistika*] nagrinėjamą kalbos reiškinį aptikti ne autorinėje poezijoje, bet pačioje lietuvių kalboje“ (Razauskas 2006: 59).

Veidrodinio atspindžio tema gali būti pratęsta, bet visai kitu principu. Pavadinkime tai *atvirkštiniu teksto dizainu* (ATD). Tai tokia kūrybos forma, kai dėl išankstinių taisyklių priemonės tekstui konstruoti yra ribotos, paliekant visą laisvę jo interpretacijai, įprasminimui per kontekstą, aliuzijas ir manipuliacijas. Toliau pateikiami autoriniai pavyzdžiai. Minėta išankstinė taisyklė aiškėja jau po kelių iš jų.

3.2. Tekstas.

Metatezinės pasakėčios-metamorfinės nutylėčios,
arba
*kalbinės autopsijos dviskiemenių žodžių **x**(e) (ė) (ie)-**l** (ė) (ia) (iai) (e) tema*

***

Apie šalnas ir neišvengiamą lapkričio anapusumą
VYSTA GĖLĖS – GYSTA VĖLĖS.

***

Apie kovo mėnesį nuskaidrėjantį ainų gyvenimą prie Išikario upės

[33] Iš esmės, čia kalbama apie funkcijų kompoziciją, kuri pagal apibrėžimą jau yra asociatyvi, tačiau jos komutatyvumas – itin reta savybė.

[34] Ypatingai įdomūs matematiniai atvejai: ilgis – tūris, vertikalė – horizontalė.

SAKUROS VĖLEI. VAKARO SIELIAI.

***

Romansas apie nelaimingą meilę violončelei solo

GĖLĖS RĖŽIA – ČĖLĖ GRIEŽIA.

***

Pasakėčia apie nemarią viltį ir suplaktą grietinę

VÍENOS PẼLĖS PIENĄ VELIA.

***

Odžibvų, gyvenančių prie Didžiųjų ežerų, rojus

VALGO ŽELẼ ŽVALGO VĖLẼ.

***

Apie beribį smalsumą ir žaislus-robotus vaikystėje

RIEKIA – LĖLĖ. LIEKA RĖLĖ.

***

Sovijaus mitas ir mirusiųjų laidojimas vandenin

DĖLĖS VĖLUOJA. VĖLĖS DVĖLUOJA.

***

Kaip ant žemės – taip ir danguje (istorija apie paukščių karalienę, nelyg dangiškąją Mariją Antuanetę, kuri per badmetį maisto jos prašantiems atšovė: „Nėra duonos? Valgykite pyragus!“)

KAISTA MIELĖS – MAISTAS KIELEI.

***

Latgalių slinktis link Deltuvos ir Nalšios VII amžiuje

SĖLINA VĖLEI. VĖLINA SĖLIAI.

***

Išganytojo pamokslas apie prarandamą žemiškumą ir tuo įgyjamą dangiškumą (Lk 9, 24, tik perpasakotas Skapiškio turguje)

VIELÕS CELĖS – CÍELOS VĖLĖS.

***

Istorija apie senolį sedukiejų kuris, besodininkaudamas, atrado plytgalį iš antrosios Jeruzalės šventyklos

ŽABALAS KĖLĖ. GABALAS ŽẼLĖ. KABALA GẼLĖ.

***

Apie rinkėjų ir medžiotojų pirmykštę bendruomenę (kurioje ir medžiotojai, panaudodami spąstus, tampa rinkėjais)

PELĖS STRINGA – STRĖLĖS PINGA.

***

Istorija apie Atilą Huną, be jokių riteriškumų laimėjusį Ildikės ranką

GREITA STRĖLĖ – RAITA GĖLĖ.

***

Kas yra didelio daikto menka, bet esmingiausia dalis?
DRELĖS – RATAS, RELĖS – DRATAS.
***

Viskas čia logiška. Fizikai patvirtins, kad esminis grąžto (n. svet. *drelė*) mechanizmas yra sraigtas, o relės – elektromagnetas, sudarytas iš vielos (sen. svet. *drato*) vijų ir feromagnetiko.

Galima sugalvoti ir kitų schemų ATD taikymui. Imkime charakteringas frazes, priežodžius, tik paverstus oksimoronais ar kalambūrais. Pavyzdžiui, *niekur nedingsi – teks iš čia dingti*; *dar nedega tilto padegti*; *dar pamatysim, ar tą pamatysim*; *tai menu nuo neatmenamų laikų*; *šis kultas jau nekultivuojamas*; *niekas nesirengia nusirengti* ir t. t. Įdomiausia, aišku, tokį vienaeilį interpretuoti. Bet idėja, kad eilėraščio pavadinimo semantinė įkrova gali būti lemiama, tikrai nenauja – dalis eilių S. Gedos knygoje *Skrynelė dvasioms pagauti* (Geda 1994) iššifruojama tik *a posteriori* pakartotinai perskaičius pavadinimą.

3.3. Sinonimija ir šaknys iš vieneto. Pirma, apibrėžimas:

> „Tikraisiais sinonimais yra laikomi artimos ar tapačios reikšmės žodžiai, kurie reiškia tą pačią sąvoką ir vartojami įvairiems prasminiams atspalviams ar stilistinėms ypatybėms žymėti. [...] Dėl polisemijos, žodis vienomis savo reikšmėmis gali sueiti į sinoniminius santykius su vienais žodžiais, o kitomis reikšmėmis – su kitais“ (Lyberis 1981: 3).

Įsivaizduokime dabar, kad žodžiai α_1 ir α_2 yra tikrieji sinonimai. Ideografiniai, žanriniai, emociniai, darybiniai – tinka visi. Ir užfiksuoti žodyne, ir naujai sukonstruoti, jei tik kalbinis pojūtis suteikiamam sinonimiškumui neprieštarauja. Šį santykį pažymėkime $\alpha_1 \sim \alpha_2$. Tegul dabar sekoje $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ kiekviena gretima pora bus sinonimai (skirtingose porose tą patį žodį galima naudoti homonimiškai). Jeigu ieškotume pavyzdžių, kuriuose $\alpha_1 \sim \alpha_n$, sunkiai išvengtume vienos sinonimų kekės. Bet pridėtas papildomas reikalavimas $\exists\, p,\ 1 < p < n\colon \alpha_1 \nsim \alpha_p$, jau sukuria reikiamą įtampą. Kitas klausimas: kada $\alpha_1 \sim -\alpha_n$? Kitais žodžiais tariant, ar gali sinonimų grandinė nuvesti prie antonimo? Šiame klausime ir slypi poezija. Būtent reliatyvo (metaforos) ir absoliuto santykyje. Vėl cituojant Lyberį:

> „*Žiema, užklojus baltais patalais, nukąs jūsų pumpurą žalią* (Maironis). Čia žodis *patalai* reikšmę ‘sniegas’ įgyja tik kontekste ir yra vaizdinga metafora“ (ten pat).

Išties, viena iš metaforos rūšių yra įkontekstinimas, skirtingiems žodžiams ar frazėms suteikiantis sinonimų bruožų. Bet įkontekstinimą galima pakeisti algoritmu, kuris žodį α_1 sinonimų grandine nuveda prie žodžio α_n. Taip ši grandinė įgyja metaforos bruožų. Sinonimų, nekonfliktuojančių su kalbine intuicija, pseudopavyzdžių kūrimas irgi gali būti gera poezija.

Tegul $n \in \mathbb{N}$. Kompleksinis skaičius ϱ vadinamas *n-tojo laipsnio šaknimi iš minus vieneto*, jei $\varrho^n = -1$. Pavyzdžiui, $i^2 = -1$, $\left(\frac{1}{2}+\frac{3i}{2}\right)^3 = -1$ [35], Grandinė $\alpha_1 \sim -\alpha_n$ ir yra kalbinis šaknies iš minus vieneto analogas. Pavyzdžiui:

šiluma, *kaitra*, *džiova*, *liga*, *šaltkrėtis*, *šalimas*, *šaltis*.

Žodis *džiova* čia pavartotas homonimiškai – ir kaip 'sausra', ir kaip 'tuberkuliozė'. Lyberio formuluotėje sinonimas – tai atspalvis. Optinės spalvos sinonimu gali būti ir kita, dvigubo banginio dažnio spalva. Tarkime, ribinei raudonai šviesai (400 terahercų) sinonimiška violetinė (800 terahercų). Jei optikoje tai nėra pakankamai įtikinama (abu dažniai yra regimosios šviesos paribiuose), padeda akustika, nes sudvigubintas dažnis atitinka aiškiai sinoniminį (bendravardį) grynosios oktavos intervalą (pavyzdžiui, pirmos ir antros oktavų *sol*). Todėl optikos ir akustikos atveju antonimas būtų lygiai per vidurį, ten, kur bangų dažnių santykis yra $\sqrt{2} \approx 1.4142$. Tačiau akivaizdu, kad nuo vieno iki kito galima lėtai judant stumtis vien per atspalvius ir atgarsius[36]. Kalbos kontekste tokie atvejai yra singuliarūs. Tuo jie įdomesni. Aukščiau pateiktas *šilumos – šalčio* pavyzdys gal nėra itin įdomus (gero ir neieškota), bet pati tema kažką giliai iš kalbinės sietuvos užkabina. Telieka sukti valą[37].

4. POEZIJOS MATEMATINIAI TAIKYMAI

Sibire susidomėjau tiksliaisiais mokslais –
fizika, matematika.
Naktimis studijavau aibių teoriją,
rašiau eilėraščius.
Kun. Česlovas Kavaliauskas

4.1. Archimedo konstanta. Skaičius π yra svarbiausias iš vadinamųjų *periodų*[38]. Šios konstantos vertė lygi apskritimo ilgio ir skersmens santykiui, apytiksliai

[35] Menamas vienetas *i*, tenkinantis lygybę $i^2 = -1$, matematinėje platoninėje realybėje yra tikras, egzistuojantis objektas, bet toks klaidinantis pavadinimas prigijo istoriškai.

[36] Artimų dažnių akustinės bangos ryškiai disonuoja dėl vadinamojo *mušimo* efekto. Bet jei atgarsis – iš atminties atkartotas garsas (žinia), kurio dažnis gali kiek nukrypti nuo originalo, tuomet *atgarsis* tampa tiesioginiu optinio *atspalvio* analogu.

[37] Šiai negudriai alegorijai priešingą reikšmę turi frazeologizmas *vynioti meškeres*, kurio abu sandai šiaip yra pirmojo sandų beveik leksiniai sinonimai.

[38] Tikslus *periodų* apibrėžimas yra gana techniškas (žr. Kontsevich, Zagier 2001).

3.1415926535897932384626433832795.

Tai, tiesa, nėra pirminis apibrėžimas. Euklidinė geometrija plokštumoje operuoja tiesėmis ir taškais, kurių tarpusavio santykius nusako *Euklido postulatai*. Girdint žodžius *taškas* ir *tiesė* matematiškai, įsivaizduojami realūs objektai, tačiau operuoti galima tik sąvokomis, kurios paklūsta iš anksto apibrėžtiems ryšiams, vadinamiems *aksiomomis*. Tai – duotybės, grūdai, išauginantys želmenis (teoremas) ir derlių (teoriją). Aksiomos pavyzdys:

Per tašką, nesantį duotojoje tiesėje, eina vienintelė tiesė, kuri jos nekerta.

Tai yra žymusis penktasis Euklido postulatas (aksioma), kurį ilgai bandyta išvesti iš kitų. Jeigu būtų pavykę, penktasis nebebūtų reikalingas. Galima prisiminti matematiko bei poeto Omaro Chajamo veikalą *Euklido knygos pirmųjų postulatų komentarai* (apie 1100 m.), kuriame jis manėsi išvedimą radęs. Deja, XIX a. buvo įrodyta, kad penktasis Euklido postulatas yra nepriklausomas nuo kitų. Jo alternatyvos ir pagimdė vadinamąsias neeuklidines geometrijas. Apie pastarąsias Ivanas Karamazovas kalbėjo Aliošai:

> «Между тѣмъ находились и находятся даже и теперь геометры и философы, и даже изъ замѣчательнѣйшихъ, которые сомнѣваются въ томъ, чтобы вся вселенная или, еще обширнѣе, – все бытiе было создано лишь по эвклидовой геометрiи, осмѣливаются даже мечтать, что двѣ параллельныя линiи, которыя, по Эвклиду, ни за чтò не могутъ сойтись на землѣ, можетъ-быть, и сошлись бы гдѣ-нибудь въ безконечности» (Dostojevskis 1879: 396).

Tik autorius, beje, čia ne visai tikslus: minėdamas neeuklidinę, jis greičiau nusako *projektyvinės geometrijos* esmę. Pastarojoje visada teisingas toks teiginys: dvi nesutampančios *tiesės* kertasi viename *taške*. Ši geometrija turi dar tokią ypatybę: bet kurioje jos teoremoje sukeitus *taškų* ir *tiesių* sąvokas vietomis, gaunama teisinga teorema. Ankstesniam teiginiui dualus tvirtinimas: per du skirtingus *taškus* eina vienintelė *tiesė*. Tuo pačiu tai yra puiki iliustracija, kad *tiesė* ir *taškas* tėra abstrakcijos. Įsivaizduojant menamą sėlių kalbą, kurioje žodžių *teisē* ir *taskis* reikšmės yra sukeistos, visos lietuviškos teoremos galios ir sėliškai. Tam, kad būtų paryškinta, kaip matematinė abstrakcija skiriasi nuo vaizduotėje esančio objekto, pasakytina, kad vienas iš projektyvinės plokštumos modelių yra trimatė erdvė su fiksuotu nuliniu tašku **O**, kurioje „taškas“ – tai per **O** einanti tiesė, o „tiesė per du taškus“ – per dvi tokias tieses išvesta plokštuma. Todėl greta Dostojevskio nepaprastai tinka ir Justinas Marcinkevičius:

Visą laiką ieškau vieno taško,
iš kurio išeina visos tiesės. [...]

Visą laiką ieškau vieno žodžio...
Nors žinau, kad niekada nerasiu (DALP2 18).

Intuityvaus π apibrėžimo trūkumas dabar paaiškinamas paprastai. Euklidinės geometrijos rėmuose tiesiog neįmanoma apibrėžti kreivių (pavyzdžiui, apskritimo) ilgio. Tam reikalinga kita matematikos šaka, *analizė,* su savomis aksiomomis. Pirminis π apibrėžimas gali nustebinti:

$$\pi = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \, .$$

Šis integralas – puikus tramplynas į Dantės „Rojaus“ 33-ios giesmės 45-ą tercetą:

Qual è'l geomètra che tutto s'affige per **misurar lo cerchio**, e non ritrova, pensando, quel principio ond'elli indige.	Sakytum geometras, kur mėgino **paversti ratą kvadratu**, galop suvokęs, kad veltui stengias ir kankinas.

Kodėl šiuo atveju *išmatuoti skritulį* ir *paversti ratą kvadratu* yra gana tikslus vertimas? Dantė kalba apie antikinį *skritulio kvadratūros* uždavinį. Šis klausia, ar įmanoma tik skriestuvo ir liniuotės pagalba sukonstruoti kvadratą, kurio plotas lygus vienetinio skritulio plotui. Tai, kad atsakymas yra neigiamas, įrodė Ferdinandas von Lindemanas 1882 m. Daugiau nebesigilinsime – šis „Commedia“ pjūvis, tobula teologijos, poezijos ir matematikos ***tri***disciplinija, yra neblogai išnagrinėtas (Herzman, Towsley 1994). Apie π bei pačios poemos geometrinę struktūrą, preciziškai suplanuotą paties autoriaus (žr. Hart 1987). Skritulio kvadratūros uždavinį, lygindamas jo neišsprendžiamumą su bausmių sulyginimu už tuos pačius nusikaltimus, Dostojevskis mini „Užrašuose iš mirusiųjų namų“. Šis faktas praleistas šiaip gana išsamiame sąvade *The Palgrave Handbook of Literature and Mathematics* (PHLM).

4.2. M n e m o n i k a i. Darijo Kasteljanos (Castellanos 1988: 152–153) aptaria įvairių kalbų mnemonikus, padedančius atsiminti π skaitmenis dešimtainėje skaičiavimo sistemoje. Koduotė čia paprasta: žodžio raidžių kiekis atitinka skaitmenį. Gerai žinomas angliškas variantas, kiek mažiau – graikiškas:

How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics!	Αεί ο Θεός ο Μέγας γεωμετρεί, το κύκλου μήκος ίνα ορίση διαμέτρω, παρήγαγεν αριθμόν απέραντον...

Toliau autorius pateikia rimuotus pavyzdžius prancūziškai ir ispaniškai. Akivaizdu (tai patvirtina ir tyrimai), kad poezija šiam tikslui tinkamesnė nei proza (Levitin 1999: 200–211). Išties, žmogaus atmintis detalėms yra gana silpna: iš eilinio pokalbio daugelis atsimins tik akcentą, emociją, nuotaiką. Šio fakto šviesoje senųjų baladžių ir epų atlikėjų atmintis atrodo kone fenomenali. Vis tik tyrimais atskleista, kad atlikėjai visų detalių neįsimena: ritmas, rimas, aliteracijos, melodika, gramatika, semantika teksto laisvę riboja, kas ir padeda nesuklysti. Lygiai taip taktiliniai pojūčiai įrėmina pianistų atmintį. Tačiau po pertraukos pakartotinai ištyrus vienuolika epų dainininkų paaiškėjo, kad tekstas ne visada atkartojamas identiškai, tačiau paklūsta semantiniams ir poetiniams suvaržymams: leksika sinonimiškai varijuoja, o mažakrūvius žodžius, nekeisdami prasmės, kartais keičia kiti.

Atminties rekordų kontekste, čia ir slypi potencialus pavojus. Išdainuojama poezija užkoduos daugybę π skaitmenų, bet vienas nelemtas sinonimas viską gali sugriauti. Pavyzdžiui, Kasteljanos (Castellanos 1988: 153) pateikia 1717 m. prancūzišką eilėraštį, kuris paremtas 126 π skaitmenų apskaičiavimu. Deja, 113-as yra klaidingas. Tai pastebėjus, žodį *secteur* (7 raidės) teko pakeisti į *quadrant* (8), o su juo besirimuojantį *antérieur* (9) – į *précédent* (9). Yra dar vienas šio kodavimo trūkumas. Neabejojama (nors tai dar nėra įrodyta), kad skaičius π yra *normalusis* visose skaičiavimo sistemose. Tai yra, jo dešimtainėje išraiškoje skaitmuo 0 pasitaikys asimptotiškai su tikimybe $^1/_{10}$ [39]. Kadangi nėra beraidžių žodžių, nulį gali koduoti dešimtraidžiai. Antra, iš vienaraidžių žodžių poezijoje galimi *o* ir *į*, keli ištiktukai, tarmybės[40] bei neįprastai naudojamos abėcėlės raidės[41]. Tačiau akivaizdu, kad, jeigu kas dešimtas žodis – vienaraidis, tekstas nebus natūralus. Visi šie žodžiai išskirtini į atskirą klasę – lai vienaraidžiai nieko nekoduoja.

4.3. Atminties kontrolė. Problemos sprendimą dėl atminties nepatikimumo detalėms pasiūlo algoritmas, įdiegtas brūkšniniuose ir įvairios paskirties QR (*quick response*) koduose, kreditinių kortelių numeriuose, knygų žymenyse ISBN ir EAN sistemomis. Būtent, *kontrolinės sumos metodas* (Stakėnas 2007: 127). Prireikus atsiminti skaitmenis 3603735 paprasčiausias kontrolinis skaitmuo būtų $3 + 6 + 0 + 3 + 7 + 3 + 5 \bmod 10 = 7$. Taigi, siekiant eilutės *jau knygos suguldytos lyg vėgėlės ant suolo*[42] žodžių ilgius sukontroliuoti, galima ją papildyti septynraidžiu žodžiu, pavyzdžiui, *jau knygos suguldytos lyg vėgėlės ant suolo* ***priekio*** (deja, tai tropą sudarko). Kai kurios teksto formai paklūstančios klaidos (*jau* → *ir*, *lyg* → *kaip*) bus pastebėtos, bet jei netyčia deklamuotojas sukeistų

[39] Tarkime, reikia įrodyti, kad aibė $\mathcal{A}$ turi tam tikrą savybę, kuri nėra būdinga tipinei, statistinei aibei. Todėl egzistuoja tam tikra $\mathcal{A}$ varžanti vidinė struktūra, ir aibė statistikai nepaklūsta. Dažnai reikiama savybė įrodoma būtent užčiuopus šią struktūrą. Kita vertus, uždaviniai, kuriuose prašoma įrodyti, kad konkreti aibė (π skaitmenų seka) paklūsta statistiniams dėsniams, yra patys sudėtingiausi.

[40] Žymusis „Anykščių šilelio“ *Ė* (o, bet, ogi).

[41] Juozo Erlicko pamėgta stilistinė priemonė, pavyzdžiui, „Daug daugiau suteikia sielai / džiaugsmo ir t. t.“, „Aš tartum traukinys kuris kursavo / Iš A į B ir dingo C paskui“ ir pan.

[42] Eilutė iš S. Gedos eilėraščio „Karvaičių kaime, kuris užpustytas smėlio“, tik originalus *ir* pakeistas į *jau*.

žodžius *knygos* ir *suguldytos* vietomis, jambo su cezūra nesugadintų, bet šios klaidos kontrolinis skaitmuo, deja, nefiksuos. Matematika vis tik gali reikšmingiau padėti, nes pasirinktas algoritmas nėra pakankamai geras. Jei būtų naudojama *Luhn'o formulė*, ji fiksuotų ir vieno skaitmens neatitikimo, ir beveik visas dviejų gretimų skaitmenų sukeitimo klaidas (tik klaidos 09 $\leftrightarrow$ 90 nepastebėtų).

4.4. Algoritmas. Duota baigtinė skaitmenų seka $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, ..., s_r\}$.

1. Ji yra pakeičiama seka $K = \{2s_1, s_2, 2s_3, s_4, 2s_5, s_6, ...\}$, t. y., kas antras narys padvigubinamas.

2. Visi dviženkliai skaičiai, esantys K, pakeičiami į jų skaitmenų sumas (pavyzdžiui, $12 \to 3$,$14 \to 5$, ir t. t.), tokiu būdu gaunama seka L.

3. Visi L nariai sudedami, ir norimas kontrolinis skaitmuo lygus šiai sumai moduliu 10.

Pavyzdžiui, panagrinėkime tuos pačius 3603735. Čia $K = \{6, 6, 0, 3, 14, 3, 10\}$, $L = \{6, 6, 0, 3, 5, 3, 1\}$. Kontrolinis skaitmuo $6 + 6 + 0 + 3 + 5 + 3 +1 \bmod 10 = 4$, todėl žodis ***galo*** fiksuos daugiau galimų klaidų nei žodis ***priekio***.

Mnemoniko su kontrole algoritmas dabar bus nusakytas tik apytiksliai, nes prieš tai reikia atlikti kruopščią pavyzdinio teksto statistinę analizę bei aptarti galimas komplikacijas. Tuomet vietoj Luhn'o metodo geriau naudoti olandų matematiko Jakobo Verhiofo (Jacobus Verhoeff) sugalvotą algoritmą, kuris aptinka dar daugiau klaidų, taip pat ir 09 $\leftrightarrow$ 90[43].

Mnemonikui rašomas tekstas klasikinėmis tercinomis, kur kiekviena eilutė turi 11 skiemenų. Šiek tiek statistikos. Grafike pavaizduota Sigito Gedos išverstos „Pragaro" X giesmės visų 45 tercetų ilgis raidėmis (skyrybos ženklai neskaičiuojami). Visos eilutės, išskyrus po vieną tercetuose 7, 11, 21, 23, 30 ir 33 (kur skiemenų skaičius yra arba 9, arba 13) turi 11 skiemenų. Matematiškai „nedantiškos" eilutės buvo pakoreguotos. Šis jau griežtai hendekasilabinio jambo tekstas ir naudojamas statistikai. Raidžių vidurkis tercetuose yra 84,44, skiemenį vidutiniškai sudaro 2,558 raidės. Juoda linija žymi normuotą pasiskirstymo funkciją, interpoliuotą tiesiškai[44].

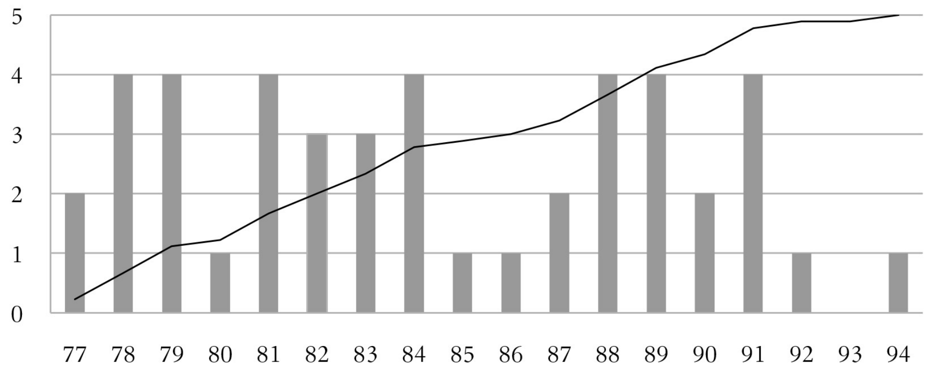
Algoritmas. Tegul $\{p_s, s \in \mathbb{N}\}$ bus skaičiaus π skaitmenų seka. T. y., $p_1 = 3$, $p_2 = 1$, $p_3 = 4$, $p_4 = 1$, $p_5 = 5$ ir t. t. Suskirstykime skaitmenis blokais po 10. Dabar kiekvieną bloką užbaikime kontroliniu skaitmenimi pagal

---

[43] Olandų kalboje skaičiai paprastai skaitomi poromis. J. Verhoeff'as, tyrinėdamas pašto indeksus, suskaičiavo, kad fonetinės klaidos, kai skaičius $1x$ sumaišomas su $x1$ (pavyzdžiui, 15, *Vijftien* ir 50, *Vijftig*) tarp visų klaidų sudaro 0,49 proc. Tai yra nežymi, bet matoma dalis.

[44] Atsitiktinio dydžio Z pasiskirstymo funkcija $F(x)=P(Z < x)$ rodo tikimybę, su kuria jis įgyja reikšmę, mažesnę už x. Tokios funkcijos maksimumas yra 1. Grafike ši reikšmė padauginta iš 5, kad visi duomenys išsitektų vienoje iliustracijoje.

Luhn'o formulę, kuris įterpiamas į seką. Tegul gauta nauja seka bus $\{q_s, s \in \mathbb{N}\}$. Kiekvieną 0 pakeiskime į 12, o kiekvieną likusį skaitmenį s keiskime į $s + 2$. Tegul $R = \{r_s, s \in \mathbb{N}\}$ yra gautoji seka. Vienaraidžius ir dviraidžius žodžius kuriant poemą-mnemoniką galima naudoti bet kada, jie dekoduotėje ignoruojami. Tarkime, kad pirmieji v sekos R nariai jau paskirstyti į posmus. Vidutinė sekos R narių reikšmė yra $\frac{3+12}{2} = 7{,}5$. Tegul $j - 1$ yra didžiausias natūralusis skaičius, kuriam $r_{v+1} + r_{v+2} + \ldots + r_{v+j-1} < 80$ (šis rėžis pasirinktas tam, kad pridėjus kitą sekos narį, vidurkiškai gaunamas trokštamas raidžių kiekio tercete vidurkis, t. y. 84,5). Kitą posmą sudarys $r_{v+1}, r_{v+2}, \ldots, r_{v+j}$ ilgio žodžiai. Telieka sukurti atitinkamą tercetą. Beje, ši koduotė fiksuos ir kitokio pobūdžio, būtent, trūkstamų ar perteklinių žodžių klaidą. Pavyzdžiui, padeklamuoti buvo du, kai reikėjo vieno žodžio (tame pačiame pavyzdyje su vėgėlėmis, *glaudžiai guli* ↔ *suguldytos*). Po tokio apsirikimo beveik visi kontroliniai skaitmenys fiksuos klaidą, todėl nesunku nustatyti, kuriame posme žodžių kiekis pakito.



4 PAV. „Pragaro" X giesmės tercetų kiekis duotam raidžių skaičiui

Tikram algoritmui reikia ištirti visas galimas komplikacijas. Tai, kad Luhn'o formulė nefiksuoja klaidos 09 ↔ 90 reiškia, kad kontrolinis skaičius neparodys, jei deklamuojant būtų sukeisti vietomis 12 ir 11 raidžių žodžiai. Potencialiai tai yra įmanoma dviskiemeniame metre (pavyzdžiui, *šakiabarzdis jaunikaitis*[45]). Šiame skyriuje nesiekta sukurti geriausio algoritmo, tačiau akivaizdu, kad pastangos prasmingos. Tobulesnis algoritmas atskleistų subtilesnių statistinių skirtumų tarp šnekamosios, literatūrinės ir poetinės-metrinės kalbos. Tai, ką tyrė ir J. Girdzijauskas, tik kiek kitaip.

[45] Pakoreguota Maironio baladės „Čičinskas" eilutė „ožkabarzdis jaunikaitis". Svenas Šakiabarzdis (Svein Tjugeskjegg 963–1014 m.) buvo Danijos karalius.

Visą „Pragarą“ sudaro apie 25.000 lietuviškų žodžių. Epų dainininkai įrodė, kad tiek išmokti žmogaus smegenys pajėgia. Atmetus kontrolinius, lieka apie 22.000 skaitmenų. Prieš 40 metų panašus ir buvo pasaulinis π atminties rekordas (dabar jis perkopęs 70.000). Bet kokia prasmė mokytis tuos plikus skaičius? Kas kita, kai yra poema, kurioje įdomioji matematika – tik šalutinis rezultatas.

5. IŠVADOS

Dviejų menų, dviejų mokslų, ar meno-mokslo sąveika bei bidiscipliniškumas slepia daugiau pavojų, nei suteikia naujų galimybių. Straipsnyje siekta atskleisti potencialius tokių jungčių trūkumus: profanacija, kai vienas menas / mokslas dviejų sąveikoje dalyvauja itin elementariu lygmeniu; dirbtinė adaptacija, kai vienas menas / mokslas paklūsta kito dėsniams, arba kai kūrėjas į sąjungą artėja šališkai (tokia yra didžioji dalis tiksliųjų mokslų atstovų tekstų apie muziką ir matematiką); išorinis pripažinto genijaus (Baranausko, Dantės, Gėtės ir t. t.) kūrybos ir asmenybės dezintegravimas, kai į jos / jo santykiškai šalutinę veiklą žvelgiama izoliuotai nuo pagrindinės; skirtingi kognityvinio-emocinio veikimo-poveikio mechanizmai.

Tačiau yra daugybė pavyzdžių, kur tokios jungtys pasiteisina. Straipsnyje atskleista, kad matematikos ir poezijos, matematikos ir kalbos atvejais įmanomos neišreikštinės bei išreikštinės sąveikos. Prie pirmųjų priskirtinos poezijos formos, kur matematiniai instrumentai reikalingi tik jų teoriniam pagrindimui, bet pačioje poezijoje šių instrumentų nebelieka. Prie išreikštinių sąveikų priskirtini įvairūs atvirkštinio teksto dizaino atvejai, kai matematika ir gramatika riboja teksto konstravimo galimybes (tai palygintina su įvairiomis muzikos harmonijos teorijomis – diatonika, serializmu, proporciniais kanonais ir t. t.) bei poezijos matematiniai taikymai, kurie, patys nebūdami itin funkcionalūs, atskleidžia gilesnius reiškinius apie poetinę kalbą bei formą.

LITERATŪRA

Alkauskas Giedrius 2018: Music-Mathematics Interconnections: An Approach through Science (Works by Mathematicians), and an Approach through the Arts (Musica mathematica by Rima Povilionienė). – *Lietuvos muzikologija* 19, 331–350.

Alkauskas Giedrius 2019: Kalba poezijoje: filologija vs. biofilija. – *Acta Linguistica Lithuanica* 81, 235–250.

Alkauskas Giedrius 2020: Prasmė legiruota garsu: poezija kaip muzika. – *Acta Linguistica Lithuanica* 83, 331–350.

Alkauskas Giedrius 2022: Raštijos dėlionė kaip kūrybos kodas. – *Kultūros barai* 1/2, 35–43.

Baranauskas Antanas 1994: *Rinktinė*: poezija, giesmės, dienoraštis, laiškai, sud. R. Mikšytė, Vilnius: Baltos lankos.

Baranauskas Antanas 1995: *Raštai* 1 (Poezija), par. R. Mikšytė, M. Daškus, Vilnius: Baltos lankos.

Castellanos Dario 1988: The Ubiquitous π. – *Mathematics Magazine* 61(3), 148–163.

DALP2 – *Dvidešimto amžiaus lietuvių poezija* 2, sud. V. Kubilius, Vilnius: Vaga, 1995.

Dantė 2007: *Dieviškoji Komedija: Pragaras*, vertė S. Geda, Vilnius: Lietuvos rašytojų sąjungos leidykla.

Elliot Thomas S. 1921: Dantė, vertė K. Platelis. – *Dieviškoji Komedija: Pragaras*, vertė S. Geda, Vilnius: Lietuvos rašytojų sąjungos leidykla, 388–409.

Geda Sigitas 1994: *Skrynelė dvasioms pagauti*: eilėraščiai, Vilnius: Vaga.

Geda Sigitas, 1998: *Man gražiausias klebonas – varnėnas*: interviu, Vilnius: Vaga.

Girdzijauskas Juozas 1978: Tarp silabotonikos ir verlibro: sinkopis lietuvių poezijoje. – *Poezijos pavasaris*, Vilnius: Vaga, 220–235.

Girdzijauskas Juozas 2001: Eilėdara. – *Lietuvos literatūros enciklopedija*, Vilnius: Lietuvos literatūros ir tautosakos institutas, 125–127.

Grinbaum Oleg N. 2002: Гринбаум Олег Н. Строка, строфа и стих как ритмическая система [Stroka, strofa i stikh kak rifmicheskaia sistema]. – *Материалы XXXI Всероссийской научно-методич. конф. преподав. и аспир. Филологического ф-та СПбГУ* [Materialy XXXI Vserossiiskoi nauchno-metodich. konf. prepodav. i aspir. Filologicheskogo f-ta SPbGU] 4(2), 12–28.

Harris Zellig 1969: Mathematical linguistics. – *The Mathematical Sciences*. A Collection of Essays, Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 190–196.

Hart Thomas Elwood 1987: The Cristo-Rhymes and Polyvalence as a Principle of Structure in Dante's "Commedia". – *Dante Studies* 105, 1–42.

Herzman Ronald B., Towsley Gary W. 1994: Squaring the Circle: "Paradiso" 33 and the Poetics of Geometry. – *Traditio* 49, 95–125.

HNL – *Handbook of the Neuroscience of Language*, eds. B. Stemmer, H. Whitaker, USA: Academic Press Elsevier, 2008.

Kontsevich Maxim, Zagier Don 2001: Periods. – *Mathematics unlimited 2001 and beyond*, Berlin, New York City: Springer, 771–808.

Kubilius Jonas 2001: *Antanas Baranauskas ir matematika*, ser. *Iš Lietuvos matematikos istorijos*, kn. 1, Vilnius: Matematikos ir informatikos institutas.

Levitin Daniel J. 1999: Mechanisms of Memory for Musical Attributes. – *Music, Cognition, and Computerized Sound: An Introduction to Psychoacoustics* 1, ed. P. R. Cook, Cambridge, Mass: M.I.T. Press.

LKŽe – *Lietuvių kalbos žodynas* 1–20 (1941–2002), red. kolegija G. Naktinienė, J. Paulauskas, R. Petrokienė, V. Vitkauskas, J. Zabarskaitė, vyr. red. G. Naktinienė, e. variantas, Vilnius: Lietuvių kalbos institutas, 2008 (atnaujinta versija, 2017). Prieiga internete: https://ekalba.lt/lietuviu-kalbos-zodynas.

Mačys-Kēkštas Jonas 1910: *Eilēs*, Pittsburg: Leidimas ir spauda Brolių Baltrušaičių.

Matulaitienė Stasė 1997: *Poezijos gramatika*, Vilnius: Gimtasis žodis.

Pekarskas Vidmantas 2003: Pirmųjų lietuviškų matematikos terminų istorijos fragmentai. – $\alpha+\omega$ 3, 76–86. Prieiga internete: http://web.vu.lt/mif/v.stakenas/a+o/2003-3/2003-3-74-86.pdf

Povilionienė Rima 2013: *Musica Mathematica: tradicijos ir inovacijos šiuolaikinėje muzikoje*, Vilnius: Lietuvos muzikos ir teatro akademija. Prieiga internete: https://www.tornado-beta.lt/en/musica-mathematica/.

Razauskas Dainius 2008: Mė(lynas)nulis ir dangaus kiaulių paslaptis: „žaidimas žodžiais“ lietuvių tradicijoje. – *Liaudies kultūra* 6, 58–60.

Ruseckienė Rasa, vert. 2017: *Edda. Snorri Sturluson*, atsak. red. I. Steponavičiūtė-Aleksiejūnienė, Vilnius: VšĮ Akademinė leidyba.

Stakėnas Vilius 2007: *Kodai ir šifrai: informacijos kodavimo ir kriptografijos pagrindai*, Vilnius: TEV, Vilniaus Universitetas.

Stankevičius Rimvydas, sud., 2015: A. Kalanavičius. Dvi saujos laiko: eilėraščiai (kartu su P. Dumšiene), Vilnius: Lietuvos rašytojų sąjungos leidykla.

Steponaitis Edmundas 1998: *Rinktinė*, par., įvadą ir komentarus parašė R. Karmalavičius, Poezijos biblioteka *Versmės*, Vilnius: Vaga.

Subačius Giedrius 2010: *Lietuvių kalbos ekspertai Rusijos imperijos tarnyboje*, Vilnius: Lietuvių kalbos instituto leidykla.

Valentas Skirmantas 1997: *Lingvistinis pasaulis poezijoje*, Vilnius: Mokslo ir enciklopedijų leidybos institutas.

MTŽ – *Matematikos terminų žodynas*, red. J. Kubilius, Vilnius: Mokslo ir enciklopedijų leidykla, 1994.

OEIS – *The online encyclopedia of integer sequences*, seka A065619. Prieiga internete: https://oeis.org/A065619.

PE – *Poetinė Eda*, vertė A. Vijūnas, Vilnius: Aidai, 2009.

PHLM – *The Palgrave Handbook of Literature and Mathematics*, eds. R. Tubbs, A. Jenkins, N. Engelhardt, London: Palgrave Macmillan, 2021.

RP – *Raidžių paveikslai*: vizualioji poezija lietuvių kalba, sud. B. Januševičius, G. Skudžinskas, Vilnius: Nerutina, 2018.

ŠLPCh – Šiuolaikinės lietuvių poezijos chrestomatija, sud. S. Parulskis, Vilnius: Alma Literra, 2002.

Mathematics, Language, Poetry: Interactions and Attractions

SUMMARY

This text is the third in a series of four texts devoted to various aspects of poetic language. The aim of this part is to present a few constructions where the interaction of two domains of creativity occurs (two out of poetry, language or mathematics), which *a posteriori* has a non-trivial intersection with the remaining domain. In our opinion, this is the instance where interdisciplinarity is truly fertile. Generally, this is not the case. Dealing with questions of quality in bidiscilinary art or science, our main standpoints are as follows.

First, both domains should participate in an interaction on the comparable level of sophistication, each of the subjects being not subordinate to the laws of the other. As a non-example, most books on music and mathematics are written by mathematicians with a natural-scientific attitude. To make our case more substantial, we examine the book devoted to concrete poetry, finding both fruitful and artificial examples.

Second (this brings a human dimension to the subject), we postulate that the legacy of any great artist should be considered not in isolation but in its entirety. This means the following: the area of distinction and the area of (a conditional) amateurism should not be separated from one another. The examples include the mathematical writings of Daniil Kharms, or the treatise in optics *Zur Farbenlehre* by Goethe. We examine the book *Antanas Baranauskas and mathematics* by Jonas Kubilius more thoroughly. Baranauskas was a poet who also worked extensively in the fields of homiletics, dialectology, orthography,

terminology, and mathematics. However, Baranauskas' output in the latter is investigated by Kubilius purely from a professional point of view. Qualitative judgements are generally correct. However, if we take into account that a part of Baranauskas' mathematical work is integrated into his philosophical and theological treatises, it is natural to hope for a much more ambitious immersion in the mathematical legacy of Baranauskas.

We further propose several interactions of mathematics-language-poetry, which, hopefully, have the needed qualities.

We explore *terza rima*, the poetic invention by Dante, and find its core. This leads to the definitions of *simple*, *minimal*, *normalized*, and, correspondingly, *canonical Q-tines*. The latter is a straightforward generalization of Dante's form. Now we can prove the following result: for every odd positive integer Q, canonical Q-tine is unique. The construction, however, does not take into account any particular language. If we do so for $Q = 5$, it emerges that a smooth flow of the text requires such a pentastich to possess few incomplete lines (hendecasyllabic iamb is an exception). Since the interval of two unstressed syllables is the most frequent in spoken Lithuanian, it is natural to write 5-tines in a dactylic meter. The example of two such strophes is presented.

As a further example of fruitful bidisciplinary interaction, we propose the linguistic analogue of *roots of unity*. We finish the paper with presenting an improved method for a mnemonic technique. The standard procedure uses poetry, but the encoding itself employs only rudimentary arithmetics. Our method, however, uses also check digit algorithm. When developed in full, the method may reveal interesting facts in the field of computational linguistics.

Įteikta 2022 m. vasario 28 d.

GIEDRIUS ALKAUSKAS
Vilniaus universitetas, Informatikos institutas
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva
giedrius.alkauskas@mif.vu.lt