Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
56 t., 2015, 63–69

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Ar galima dviem žodžiais pakalbėti apie tris dalykus?

Romualdas Kašuba[1], **Regina Rudalevičienė**[2]

[1] *Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*
Naugarduko 4, LT-03225 Vilnius
[2] *VšĮ Vilniaus „Versmės” katalikiškoji gimnazija*
Architektų 85, LT-04208 Vilnius
E. paštas: romualdas.kasuba@mif.vu.lt, rudaleviciene.regina@gmail.com

Santrauka. Šiame straipsnyje nagrinėjama ir aptariama, kokie paprasti, bet pamokomi dalykai ir uždaviniai gali kilti iš paprasčiausio dviejų ar kelių faktų sugretinimo.

Raktiniai žodžiai: uždavinių siūlymo specifika ir išvadų sugretinimas, panašios sąlygos uždavinių sprendimų skirtumai, uždavinio pateikimas ir objektyvus sprendimo prieinamumas, skaitinė konkretybė kaip ryškus uždavinio pateikimo elementas, uždavinių formuluočių strategija ir euristinis jos pateikimo kontekstas.

Vietoje įvado

Trumpiausias straipsnio idėjos poetinis apibūdinimas ir sumanymo esmė galėtų būti nusakyta žodžiais: „Prieš sekundę M ir N dar tebekybojo ten / M nukrito, N prapuolė, kas gi dar beliko ten?“. Nevarginsime skaitytojo eiliuotu atsakymu apie tai, kas liko nupuolus toms dviem ką tik taip ramiai kybojusioms ir mūsų pasakojimą pradedančioms raidėms M ir N. Logikos požiūriu uždavinių pasaulyje šią poetinę situaciją sumodeliuoti labai paprasta: M yra viena, N yra kita, o visa kita – kaip ir mūsų atveju – dažnai yra tiesiog jungtukas „ir“, kuris ir būtų loginis to galvosūkio sprendimas, atspindintis, apimantis ir nelyginant nulemiantis viską, kas yra tarp M ir N.

Ko galima laukti iš susiklostančios padėties?

Panagrinėkime keletą šios situacijos modelių, išreikštų (daugiau ar mažiau) paprastais uždaviniais. Pradėkime nuo gerai žinomo, nors ir ne paties paprasčiausio įmanomo tos rūšies uždavinio, kuriame kalbama apie dešimtį ratuku kokia tik bepageidautume tvarka surašomų skaičių 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9, kurie po tokio surašymo yra sumuojami visais galimais būdais sudedant po tris gretimus skaičius. Susumavus yra klausiama trijų dalykų: (A) ar tos visos trijų gretimų skaitmenų sumos gali būti nedidesnės už 13? (B) ar visos trijų gretimų skaičių sumos gali būti nedidesnės už 14? (C) ar visos trijų gretimų skaičių sumos gali būti nedidesnės už 15?

Tris sekundes pasižiūrėjus į šį uždavinį paaiškėja mažiausiai du dalykai: pirmas dalykas yra tai, kad jeigu toji privaloma trijų skaičių suma reikalaujamai vis mažėja, tai tokią sąlygą išpildyti yra kaskart vis sunkiau; ir antras, kad kaip žinoma iš patirties, jeigu yra trys skaičių sumų palyginimo atvejai ir yra tik du galimi tokių sumų įvertinimo būdai – kaip mūsų atveju – arba visų gretimų skaičių po tris suma bus visada nedidesnė už tam tikrą skaičių, arba nebus – tai tada su tarpine suma iš pradžių nėra labai aišku, kurion pusėn ji pakryps. Taigi dabar mes gerai suvokiame, kad sunkiausia yra išpildyti sąlygą, kad trijų gretimų skaičių suma būtų visada nedidesnė už 13 (ir taip turėtų nebūti), o lengviausia yra išpildyti sąlygą, kad trijų gretimų skaičių suma (visada) būtų nedidesnė už 15 (ir standartinės situacijos atveju taip *jau turėtų galėti būti*), o antrasis atvejis su skaičiaus 14 neviršijančia suma ir būtų tas tarpinis atvejis, kai reikėtų „sužiūrėti“, kas gausis. Žodžiu, mūsų loginiame eilėraštyje jis atliktų to tebelikusio kaboti jungtuko „ir“ vaidmenį.

Taigi pagal mūsų prielaidas, lauktume ne per sunkiausio įrodymo, kad surašyti ratuku visus sveikuosius skaičius nuo 0 iki 9 taip, kad visų gretimų skaičių sumos po tris būtų nedidesnės už 15, turėtų būti galima, o kad visos skaičių sumos po tris būtų nedidesnės už 13 – turėtų būti negalima (ir po to dar būtų gražu ir privalu susigaudyti – ir geriausiai kaip nors labai trumpai, pamokomai ir netikėtai – kas atsitinka, kai norime, kad bet kurių trijų gretimų skaičių suma neviršytų 14).

Surašyti ratuku visus dešimt skaitmenų taip, kad visų gretimų skaičių sumos po tris būtų nedidesnės už 15, kaip matome iš žemiau pateikiamo pavyzdžio, yra visai paprasta ir tikrai nepainu:

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 9 & 4 & \\ 3 & & & & 1 \\ 7 & & & & 8 \\ & 5 & 0 & 6 & \end{array}$$

Taip pat nesunku yra įrodyti, kad surašyti ratuku visus tuos dešimt vienaženklių skaičių taip, kad bet kurių trijų gretimų skaičių sumos po tris visos lig vienos neprašoktų 13, yra niekaip negalima. Jeigu tai būtų įmanoma, tai mes galėtume išrašyti visas tas dešimt nelygybių, kurių kairiosiose (nedidesniosiose) pusėse yra surašytos trijų skaičių sumos, o dešiniosiose pusėse yra (visada po) 13. Sudėdami tas dešimt vienakrypčių nelygybių kairėje pusėje turėtume trisdešimties skaičių sumą ir būtinai pastebėkime, kad kiekvienas skaičius yra sumuojamas lygiai tris kartus, kartą kaip pirmasis, kitą kartą kaip vidurinysis ir trečią kartą kaip baigiamasis trejeto skaičius. Taigi tie trisdešimt dėmenų yra ne kas kita, kaip triguba visų skaičių suma nuo 0 iki 9 suma, arba $3 \cdot (0+1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 3 \cdot 45 = 135$. Didesniosiose dešiniosiose nelygybių pusėse buvo dešimtį kartų parašyta po 13, taigi susumavę gautume $13 \cdot 10 = 130$, arba apskritai paaiškėtų, kad $135 \leqslant 130$, o tai yra aiški prieštara, įrodanti, kad taip surašyti tuos skaičius ratuku mums niekaip nepavyktų. Na, o kaip būtų su tarpiniu atveju 14, atliekančiu, kaip sakėme, ir jungtuko „ir“ vaidmenį?

Abstrakti konkretybė arba mes įrodinėjame

Tarkime, kad galima visus dešimt minėtų skaičių $a0$, $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, $a5$, $a6$, $a7$, $a8$, $a9$ surašyti ratuku taip, kad visų gretimų skaičių sumos po tris neviršytų 14. Nemažindami bendrumo, galima įsivaizduoti, kad $a0 = 0$, o jie yra surašyti panašiai kaip mūsų anksčiau pateiktame „konkrečiame“ pavyzdyje (primename, kad $a0 = 0$):

$$\begin{array}{ccccc} & a9 & a0 & a1 & \\ a8 & & & & a2 \\ a7 & & & & a3 \\ & a6 & a5 & a4 & \end{array}$$

Dabar užtenka pastebėti, jog likusius devynis skaitmenis nuo $a1$ iki $a9$ galima suskirstyti į tris gretimus trejetus $(a1, a2, a3)$, $(a4, a5, a6)$ ir $(a7, a8, a9)$, kurių kiekvieno suma pagal prielaidą neviršija 14, vadinasi, visų devynių nelygių 0 skaičių suma, kuri yra lygi 45, neviršytų $14 \cdot 3$, kuri tėra 42, o tai yra aiškus prieštaravimas prielaidai, kad galima visus dešimt skaičių $a0$, $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, $a5$, $a6$, $a7$, $a8$, $a9$ surašyti ratuku taip, kad visų gretimų skaičių sumos po tris neviršytų 14.

Paprastesnė konkretybė ir (ne)pilna analogija

Pastebėkime, kad uždavinį galima pamėginti imti ir su mažesniais skaičiais (ir kaip tuoj paaiškės, išlaikant visą intrigą, ir tik lengvai pakreipiant uždavinio sprendimo pradžios fabulą). Vietoje 10 pirmųjų neneigiamų skaičių galima imti pirmuosius septynis skaičius 0, 1, 2, 3, 4, 5 ir 6 ir kelti tris panašius klausimus: ar galima juos surašyti ratuku taip, kad bet kurių trijų gretimų skaičių suma būtų: (A) nedidesnė už 9? (B) nedidesnė už 10? (C) nedidesnė už 11? (Norėtume atkreipti dėmesį, kad atveju (A) sumuodamas septynias vienakryptes nelygybes $a0 + a1 + a2 \leqslant 7$, $a1+a2+a3 \leqslant 7$, $a2+a3+a4 \leqslant 7$, $a3+a4+a5 \leqslant 7$, $a4+a5+a6 \leqslant 7$, $a5+a6+a0 \leqslant 7$, $a6 + a0 + a1 \leqslant 7$ skaitytojas iš karto prieštaros negaus, nes vietoj $135 \leqslant 130$ jis dabar turės $3 \cdot (0+1+2+3+4+5+6) = 3 \cdot 21 = 63 \leqslant 7 \cdot 9 = 63$ ir prieštaros kol kas nėra, o visos nelygybės virsta lygybėmis. Bereikia įsitikinti, kad visos nelygybės lygybėmis virsti negali. Jeigu taip galėtų būti, tai pasižiūrėję į pirmąsias dvi lygybėmis virtusias „buvusias“ nelygybes turėtume $a0+a1+a2 = 7$, $a1+a2+a3 = 7$. Tačiau iš tų dviejų lygybių jau išplaukia, kad $a0 = a3$, o taip negali būti, nes skaičiai $a0$ ir $a3$ (kaip ir bet kurie kiti du skaičiai) sutapti negali. Skaičius surašyti ratuku taip, kad bet kurių trijų gretimų skaičių sumos būtų nedidesnės už 11, vėl galima, pavyzdžiui, (su)rašant taip:

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 6 & 3 & \\ 0 & & & & 1 \\ & 4 & & 5 & \end{array}$$

O kad tarpinis atvejis su trijų skaičių suma, lygia 10, negalimas ir dabar, matytume vėl atskirdami 0 ir nagrinėdami likusius du trejetus. Gautume, kad visų skaičių nuo 0 iki 6 suma nebūtų didesnė už $0 + 10 + 10$, nors iš tikrųjų ji yra lygi 21.

Ar dvynių veidai visada liudija tą patį?

Mūsų nagrinėtais atvejais M, N ir „ir“ buvo kad ir panašios, bet vis tiek nevienodo „išpildymo sunkumo“ sąlygos. Tačiau suprantama, kad yra ir tokių atvejų, kai sąlygos M ir N skiriasi (dar) visai neaišku kuo. Panagrinėkime tokį pavyzdį: perstatydami skaičius 1, 2, 3 ir 4 vietomis mes galime rasti tokią tų skaičių perstatą 4, 1, 3, 2, kad apskaičiuodami iš eilės visus atitinkamus skirtumus (kai iš didesnio poros skaičiaus atimame mažesnį), gautume, jog visi tie skirtumai $4-1$, $2-1$, $3-3$, $4-2$ yra skirtingi. Tai patogu surašyti 1-jo lentelėje.

Ar labai kas pasikeistų, jeigu imtume nebe skaičius nuo 1 iki 4, bet truputį daugiau – nuo 1 iki 5? Ar ir vėl galėtume rasti tokią tų skaičių 1, 2, 3, 4 ir 5 perstatą $a1$,

1 lentelė.

Skaičiai	1	2	3	4
Skaičių perstata	4	1	3	2
Skirtumai atimant iš didesnio skaičiaus mažesnį	$4-1=3$	$2-1=1$	$3-3=0$	$4-2=2$

2 lentelė.

Skaičiai	1	2	3	4	5
Skaičių perstata	5	3	1	4	2
Skirtumai atimant iš didesnio skaičiaus mažesnį	$5-1=4$	$3-2=1$	$3-1=2$	$4-4=0$	$5-2=3$

3 lentelė.

Skaičiai	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Skaičių perstata	9	8	7	1	5	4	6	3	2
Skirtumai atimant iš didesnio skaičiaus mažesnį	8	6	4	3	0	2	1	5	7

$a2$, $a3$, $a4$ ir $a5$, kad visi atitinkami skirtumai vėl būtų visi skirtingi? Tie du atvejai, apie kuriuos kalbame, yra panašūs nelyginant dvyniai. Į klausimą, ar dvyniai labiau panašūs negu nepanašūs, labiau norėtųsi atsakyti „taip“. Tačiau žinome, kad dvyniai yra skirtingi asmenys, taigi, nors ir daug kuo panašūs (kitaip dvyniais nesivadintų), bet apie jų panašumą kalbėti stiliumi „taip“ arba „ne“ derėtų kalbėti nors kiek pagalvojus, arba bent pasvarsčius. Tai ar tie du atvejai tikrai skirsis nors kiek ar visai nesiskirs?

Jei pavyktų išdėstyti skaičius nuo 1 iki 5 taip, kad visi minėti skirtumai būtų skirtingi, tuomet, matyt, imtume visus sveikuosius skaičius nuo 1 iki 6 ir vėl mėgintume padaryti tą patį. Kaip tada reikalai pakryptų? O dar toliau bandant kaip viskas klotųsi? Kurioje vietoje nebepavyktų (nes sunku patikėti, kad visur ir visada viskas taip jau „vis pasidarys ir pasidarys“).

Sunku, kaip jau atvirai užsiminta, garantuoti, kad visais atvejais skaičius perstatyti pavyks, bet su skaičių nuo 1 iki 5 perstata viskas pasiseka ir perstatą su visais skirtingais skirtumais vėl pavyksta surasti (žr. 2-ją lentelę).

Šis triukas, arba skirtumų nesikartojamumas, yra įmanomas ir tada, kai tų skaičių jau net ne keturi ar penki – o „ištisi“ devyni – prašome žiūrėti 3-ją lentelę.

Tačiau visų galimų atvejų su skirtingu skaičių kiekiu lentelėmis nepatikrinsime – nors jums primygtinai siūlytume pamėginti „prisikasti“ iki tikrųjų priežasčių, kas „konkrečiai“ nulemia skirtumų nesikartojamumą.

Dar apie skirtingą dvynių būdą

Įsivaizduokime, kad kas nors mūsų paklausia, kas yra bendro tarp dviejų skaičių 18 ir 19? Ilgai reikėtų ieškoti žmogaus, kuris iš karto neišpoškintų, kad bendra yra jų kaimynystė, arba kad tai yra gretimi sveikieji skaičiai. Jautresnis žmogus gal net sakytų, jog nėra sveikųjų skaičių, kurie būtų nors per plauką arčiau vienas kito kaip šitie. Na o jeigu mūsų paklaustų, ar tarp skaičių 19 ir 20 yra dar kas nors papildomai bendro kaip kad tarp skaičių 18 ir 19? Nelauktas atsakymas būtų, kad yra. Dar labiau galėtų nustebinti tai, kad tas papildomas bendrumas yra ne kokios nors vietinės reikšmės, tačiau gana „globalaus pobūdžio“ faktas. Tai koks tas papildomas globalaus pobūdžio faktas? Ogi tai faktas, kad abiejų tų gretimų skaičių 19 ir 20 skaitmenų suma yra lyginė. Lyginumas nėra „vietinės reikšmės“ faktas, nes lyginumas (kaip ir nelyginumas) yra viena iš pačių bendriausių ir dažniausiai minimų ir nagrinėjamų „globalių“ sveikųjų skaičių savybių.

Taigi pavyzdys rodo, jog skaičiai gali būti gretimi, o jų abiejų skaitmenų sumos gali būti lyginės, kitaip sakant, abi jos dalijasi iš 2. Tai ne vienintelis toks nutikimas, nes dviejų gretimų skaičių skaitmenų sumos abi atskirai gali dalintis ne tik kad iš 2, bet pavyzdžiui, net ir iš 4, kaip tai aiškiai rodo dviejų gretimų skaičių 39 ir 40 pavyzdys.

Kiek telpa „nuo čia iki ten“?

Geras M ir N „kybojimo“pavyzdys – nepamirštant ir jungtuko „ir“ (o taip pat pagerbiant dvynių panašumų skirtingumus) galėtų būti klausimas: Ar gali dviejų gretimų sveikųjų skaičių skaitmenų sumos abi dalintis be liekanos: (A) iš 7? (B) iš 8? (C) iš 9?

Na, iš 7 jos abi kartu dalintis tikrai gali, pavyzdžiu gali būti du gretimi skaičiai 69 999 ir 70 000.

Taigi kaip jau skaitytojas suprato, mes mėginame – kaip ir matematika, ar aritmetika, ar kokie kiti tikslūs ar bent kiek tikslesni mokslai nuo amžių kad daro – nagrinėti tokią situaciją, kai yra sugretinami du kokie nors įdomūs faktai, o jungtukas „ir“ šiuo atveju nejučia atlieka katalizatoriaus (ar jeigu norite) provokatoriaus gerąja prasme vaidmenį, nes „būtent jis“ čia klausia „ir kas iš to?“, arba „ir kas dar“. Beje, epigramų ir kitų smulkiųjų poetinių formų rašymo menas (ir pačių poetų atsiliepimai), rodo, kad taip gimsta ir „ri(t)muoti produktai“: pirmiausiai atsiranda M ir N, pavyzdžiui, kaip du puikiai besirimuojantys, arba vienas kitam gerai atliepiantys žodžiai (ar skiemenys), o paskui atsiranda (yra sukuriamas) poetinis juos jungiančio jungtuko „ir“ atitikmuo, kuriuo tampa tai, ką eiliuojantysis sugeba ta proga įterpti tarp tų taip puikiai (ar neatremiamai) vienas prie kito limpančių žodžių (ar kitokių sąskambių).

Grįžkime prie mums labiau pažįstamų „aritmizuotų ritmų“ ir panagrinėkime keletą panašių kiekvienam Gelgaudiškio vaikui suvokiamų uždavinių. Pavyzdžiui, situacija, nutikusi 2011 metais atveju $(M, N) = (4000, 1003)$, leidžia paklausti, ko čia apskritai galima būtų teirautis, kas čia labiausiai galėtų „atlikti“ jungtuko „ir“ vaidmenį? Na, čia suprantama, galima duoti valią fantazijai ir prigalvoti visokių sudėtingų dalykų. Mes gi pirmiausiai norėtume kažko labai aiškaus, skaidraus ir, žinoma, „ne taip sunkiai perprantamo“ ir todėl klausiame absoliučiai paprastai:

1 uždavinys. Barbora tvarkingai į eilę surašo visus keturženklius skaičius, kurių skaitmenų suma yra lygi keturiems, pradėdama nuo paties didžiausio tokio skaičiaus ir baigdama pačiu mažiausiu tokiu keturženkliu skaičiumi 1003. Barbora yra labai atidi ir tvarkinga, todėl jos sąraše nėra praleistas joks skaičius. Kelintoje vietoje Barboros sąraše yra atsidūręs tų metų skaičius 2011?

Ne visada pavyksta pasakyti taip ir kas toliau

2 uždavinys. Tomas kišenėje turi tris korteles su užrašytais jose sveikaisiais nebūtinai skirtingais skaičiais (po vieną skaičių kiekvienoje kortelėje) ir stovi prie stebuklingo prietaiso, kuris Tomui palietus kurias nors dvi korteles, sušnabžda jam į ausį tose kortelėse parašytų skaičių sumą. Po pirmosios kortelių poros pasirinkimo stebuklingasis prietaisas sušnabždėjo Tomui „12“, o po kitos poros pasirinkimo – „14“. Ar po trečiosios tų pačių trijų skaičių poros pasirinkimo stebuklingasis prietaisas gali sušnabždėti jam „13“?

Atsakymas yra, deja, „ne“. Tikrai, jeigu taip galėtų būti, tai, sudėję visus sušnabždėtus skaičius, gautume dvigubą visų trijų Tomo kišenėje esančių kortelių skaičių sumą arba skaičių $12 + 13 + 14 = 39$, kuris yra nelyginis, o taip niekaip negalėtų būti, nes dviguba bet kokių sveikųjų skaičių suma gali būti, daryk tu ką tinkamas, tačiau tik lyginiu skaičiumi.

3 uždavinys. Apie apskritimą ratuku tam tikra eile yra surašyti visi sveikieji skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir 10. Po to kiekvienas skaičius yra „pripliusuojamas“ prie abiejų savo kaimynų ir taip, apėjus visą ratą, yra gaunama 10 naujų sveikųjų skaičių. Po to iš visų naujai pasirodžiusiųjų skaičių išrenkame patį **mažiausiąjį** skaičių. Koks galimai **pats didžiausias** gali būti tas pats **mažiausias** skaičius?

Pirmiausiai galime įvertinti, ko galėtume laukti. Visų aplink apskritimą surašytų skaičių suma yra, suprantama, lygi $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$. Po kiekvieno skaičiaus pridėjimo prie abiejų jo kaimynų (kad ir pasislėpusi sumose) rasis triguba visų skaičių nuo 1 iki 10 suma ir todėl visų dešimties padidėjusių dėmenų suma bus lygiai trigubai didesnė negu buvo (o buvo 55) ir todėl dabar ji bus triskart po 55, arba 165. Todėl vidutiniškai vienam dėmeniui tenka 16,5. Vadinasi, daugiausiai galima tikėtis gauti 16, o jei nepavyktų gauti 16, tada mėgintume gauti 15 ir taip toliau. Šiek tiek paeksperimentavę aptinkame dėstinį

	2	10	6	
4				1
9				8
	3	5	7	

po pridėjimų duodantį dėstinį

	16	18	17	
15				15
16				16
	17	15	20	

kurio mažiausias narys yra 15.

Beliko „išsamprotauti“, kad didesnės sumos jau nebegausime. Tam reiktų mėginti tarti, kad galėtume gauti 16. Tada apskritime susirastume skaičių 10 ir nagrinėtume likusius devynis skaičius, natūraliai sudarančius tris gretimus trejetus ir, pagal padarytą prielaidą, turinčius sumą mažų mažiausiai lygią triskart po 16, arba prie jų sumos pridėjus praleistąjį 10, būtų mažų mažiausiai 58, kai tuo tarpu pirmųjų dešimties skaičių suma yra 55.

Dar vienas žinomo modelio variantas

4 uždavinys. Berniukas skaičių *šliaužtuko* ekrane gali įvesti bet kokį natūralųjį skaičių N ir tada jis gali tą skaičių „*reguliuoti*“ padarydamas, kad *šliaužtų* arba *pirmyn*, arba *atgal*. Skaičiui N *pašliaužus pirmyn* gaunamas skaičius $2N+1$, o *pašliaužus atgal* iš skaičiaus N, jeigu *jis yra dalus* iš 3, gaunamas skaičius $N/3$. Šiuo metu skaičių šliaužtuko ekrane yra įvestas skaičius 12. Apdairusis Aivaras teigia, kad iš skaičiaus 12 keliais pošliaužiais galima gauti skaičius 29 ir 2047 bei dar klausia, ar iš tų 12 „iššliaužus“ būtų galima nušliaužti iki 100 ir dar iki 1023?

Kad skaitytojas negalvotų, jog viskas daroma vienu mirksniu

Kad skaitytojas negalvotų, kad viskas, kas suformuluojama tokiu stiliumi, yra labai paprasta, suformuluosime dar du uždavinius, kurių vienas yra apskritai dar neišspręsta mokslo problema, „padabinta“ trijų žinomų mokslininkų vardais, o kitas yra normaliai išsprendžiamas ir Tarptautinės komandinėje „Baltijos kelio“ olimpiadoje „jau pasitaikęs“ uždavinys. Dėl papildomos intrigos siūlytume skaitytojui pabandyti atskirti dar neišspręstą problemą nuo įprastinio (nors ir olimpiadinio) uždavinio.

5 uždavinys. Skaičių šliaužtukas, turėdamas ekrane įvestą skaičių N, gali šliaužti pirmyn ir pasidaryti skaičių $3N+1$ ir gali šliaužti atgal ir gauti skaičių $N/2$, jeigu tas skaičius N yra lyginis. Aivaras nustatė, kad pradedant nuo skaičių 100 ir 2015 keliais šliaužimais galima nušliaužti iki pat 1. Ar galima iki 1 nušliaužti pradėjus nuo bet kurio natūralusis skaičiaus N?

6 uždavinys. Skaičių šliaužtukas, turėdamas ekrane įvestą skaičių N, gali šliaužti pirmyn ir „pasidaryti11 skaičius $2N$ ir $3N+1$, bei turėdamas skaičius $3N+1$ ir $2N$ jis gali šliaužti atgal ir „pasidaryti“ skaičių N. Aivaras nustatė, kad pradedant nuo skaičių 100 ir 2015 keliais šliaužimais galima nušliaužti iki pat 1. Ar galima iki 1 nušliaužti pradėjus nuo bet kurio natūralusis skaičiaus N? Pakartosime, kad vienas iš jų yra iki šiol neišspręsta trijų mokslininkų pavardėmis papuošta problema, o kitas yra tik Tarptautinės komandinės Baltijos kelio olimpiados uždavinys, kurį nėra taip jau labai sunku išspręsti. Gal jau norėtumėte išsakyti savo nuomonę, kuris čia yra tas neįveikiamas uždavinys?

Literatūra

[1] R. Kašuba ir R. Rudalevičienė. 5–8 klasių mokinių problemų sprendimų gebėjimų ugdymas „kengūros“ vasaros stovykloje. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, (54):117–122, 2013.

SUMMARY

Is it possible with two words to touch three subjects?

R. Kašuba, R. Rudalevičienė

In the paper an attempt to describe what a unexpected consequencies a comparison of some two (even strickingly similiar) matters might imply.

Keywords: The specifics of problem posing and comparison of consequences; distinction of solutions of similar problems; the posing of problems and their real accessibility; concrete number as possible breaking element in representing of tasks; the strategy of problem posing and its heuristical context.