

# Funkcijos portreto brėžimo semiotinė analizė

Ričardas Kudžma, Vitalija Rukaitė

*Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*

Naugarduko 4, LT-03225 Vilnius

E. paštas: ricardas.kudzma@mif.vu.lt, rukaitė.vitalija@gmail.com

**Santrauka.** A. J. Greimas, būdamas Paryžiaus semiotinės mokyklos lyderiu, išvystė semiotikos teoriją. Ypač didelis jo indėlis yra semiotinio kvadrato, naratyvinės gramatikos, bei jų sąryšio nustatymas. R. Kudžma ir jo mokiniai keliuose straipsniuose taikė Greimo semiotiką matematinių tekstų nagrinėjimui. Ankstesni tekstai būdavo iš mokyklinės matematikos kurso. Šiame darbe nagrinėjamas universitetinis matematinės analizės uždavinys.

**Raktiniai žodžiai:** semiotika, Greimas, semiotinis kvadratas, naratyvinė gramatika, funkcijos portretas.

## Įvadas

Semiotikos įvadą, taikomą matematinių tekstų nagrinėjimui ir kuriame apibrėžiamos visos reikalingos semiotinės sąvokos, galima rasti ankstesniuose R. Kudžmos ir kt. darbuose [3]. Šiame darbe nagrinėsime funkcijos portreto uždavinį, aprašytą H. B. Griffiths, A. J. Oldknow knygoje [1]. Dviejų argumentų funkcijos  $f(x, y)$  grafikas yra paviršius trimatėje erdvėje. Jį įsivaizduoti nėra paprasta. Todėl matematikai funkcijos grafiką pakeičia paviršiaus lygio linijomis  $f(x, y) = C$ . Minėti autoriai dviejų argumentų funkcijos  $f(x, y)$  lygio linijų šeimą vadina funkcijos portretu ir detalai aprašo jo braižymo procedūrą. Pagrindinis to braižymo matematinis įrankis yra neišreikštinės funkcijos teorema. Ypatinguose funkcijos taškuose, kur abi dalinės išvestinės  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  lygios nuliui negalioja neišreikštinės funkcijos teorema, reikia tirti funkcijos ekstremumus. Jei Hesės matricos determinantas neigiamas, tai tas ypatingas taškas yra balno taškas. Lygio linija einanti per balno tašką yra vadinama separatrise ir jos brėžimas yra esminė funkcijos portreto brėžimo dalis. Šis uždavinys bus išnagrinėtas naratyviniame ir loginiame-semantiniame lygmenyse. Taip pat išnagrinėsime to paties uždavinio sprendimą, atliktą studentų kontrolinio darbo metu.

## 1 Portreto brėžimo uždavinys

Portreto brėžimo uždavinys susideda iš šių žingsnių:

1. Surandame ir nubrėžiame kreives  $H$  ir  $V$ , kurios taške  $(x, y)$  tenkina sąlygą:

$$H : \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0,$$

$$V : \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Kreivės  $H$  ir  $V$  yra vadinamos funkcijos horizontalia ir vertikalia daugdara.

2. Ieškome horizontalios ir vertikalios daugdaros sankirtos taškų  $H \cap V$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

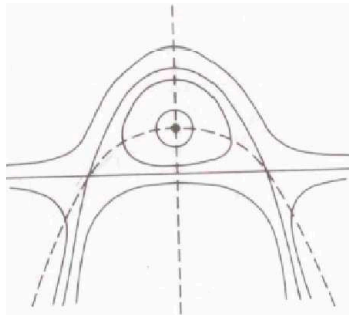
Rasti sankirtos taškai yra ypatingieji funkcijos  $f$  taškai. Jeigu Hesės matrica (antrųjų dalinių išvestinių matrica) yra teigiamai apibrėžta, tai ypatingasis taškas yra minimumo taškas, neigiamai apibrėžta – maksimumo taškas, jei neapibrėžta – balno taškas.

3. Randame funkcijos  $g(x, y) = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$  ženklą, kuris rodo lygio linijų didėjimą arba mažėjimą.
4. Lygio linijos, einančios per balno tašką  $P$ , lygtis yra tokia:  $f(x, y) = f(P)$ . Ta lygio linija vadinama separatrise ir jos brėžimas yra sunkiausia funkcijos portreto brėžimo vieta. Po separatrisės brėžimo yra pavaizduojamos kitos charakteringos lygio linijos.

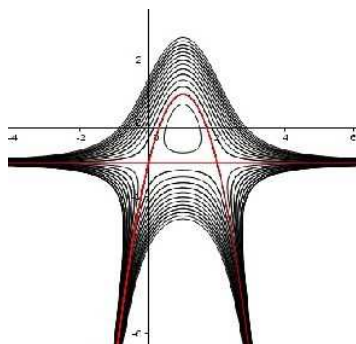
## 2 Konkretūs uždaviniai

Nagrinėsime du uždavinius:

1. Knygoje [1] pateikiamas 8.4.2 pavyzdys, kuriame tiriama funkcija  $f(x, y) = x^2 + 6x^2y + y^2$ . Jos portretas yra vaizduojamas taip:



2. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Ekonometrijos programos rinktinių analizės skyrių kontrolinio darbo uždavinys, kuriame brėžiamas funkcijos  $f(x, y) = y^2 + 2yx^2 - 4xy + 2y + 2x^2 - 4x$  portretas. Šis kontrolinis susidėjo iš trijų dalių: nubrėžti funkcijos portretą, parašyti portreto brėžimo programą su GeoGebra, sulyginti gautus portretus, ir jeigu jie nesutampa – ieškoti klaidų. Šis uždavinys yra analogiškas knygoje pateiktam. Pateikiame funkcijos portretą, nubrėžtą su GeoGebra:



### 3 Naratyvinė analizė

Šių tekstų naratyvinės gramatikos fazės:

*Manipuliacija.* Pirmajame tekste veikia episteminis adresantas, kurio funkciją atlieka knygos autoriai. Tuo tarpu antrajame tekste aiškiai nusakytas adresantas – dėstytojas. Jie formuluoja portreto brėžimo užduotį konkrečioms funkcijoms. Adresatas viename tekste yra knygos skaitytojas, o kitame – studentas.

*Kompetencija.* Ši fazė yra apibrėžiama nusakant funkcijos portreto brėžimo teoriją, kuri yra aprašyta knygos 8.3. *Constructing the portrait of a function* (Funkcijos portreto konstravimas) skyriuje, o dėstytojas ją pateikia paskaitų metu. Kompetencijos fazėje dėstytojas keičia savo aktantinį vaidmenį, jis tampa pagalbininku, pateikdamas matematinius pagalbininkus – neišreikštinės funkcijos teoremą ir jos panaudojimą lygio linijų brėžime.

Atlikties fazėje subjektas-veikėjas atlieka visus portreto brėžimo žingsnius. Lemiamas testas yra separatisės brėžimas. Pirmajame tekste separatisė yra brėžiama apytikriai, naudojant funkcijos  $g$  ženklus, nusakančius lygio linijų didėjimą ir mažėjimą. Antrajame tekste yra detalčiau nusakomas separatisės brėžimas. Kadangi abiejuose uždaviniuose horizontalios daugdaros viena dalis yra ir lygio linija, ši lygio linija eina per balno taškus, tai ji yra separatisės dalis. Tai leidžia išskaidyti separatisės lygtį daugikliais  $y^2 + 2yx^2 - 4xy + 2y + 2x^2 - 4x + 1 = (y+1)(y+2x^2 - 4x + 1) = 0$ . Šį išskaidymą galima panaudoti atpažinimo testui, nes separatisę sudaro dvi paprastos kreivės: tiesė  $y = -1$  ir parabolė  $y = -2x^2 + 4x - 1$ . Analogiškai buvo galima išskaidyti ir knygos uždavinio separatisės lygtį, tačiau ji net nebuvo užrašyta. Studentai kontrolinio metu GeoGebros programą galėjo naudoti kaip atpažinimo testo pagalbininką.

*Sankcija.* Knygoje formalios sankcijos nėra. Ji yra tik nujaučiama – subjektas-veikėjas teisingai nubrėžė funkcijos portretą, todėl adresantas suteikia teigiamą įvertinimą, kas atitinka kitos užduoties pradėjimą. Studentų spęstą uždavinį sankcionuoja (vertina taškais) dėstytojas. Studento gauti taškai už uždavinio sprendimą yra apdovanojimas.

### 4 Semiotinis kvadratas

Prieš aprašant šio teksto semiotinį kvadratą, pasigilinkime į R. Kudžmos sukonstruotą semiotinį kvadratą straipsnyje apie semiotikos naudojimą mokyje (*Semiotics in Education*) [2]. Ten konstruojamas toks semiotinis kvadratas:

Algebra            Geometrija  
Ne algebra        Ne geometrija

Kaip rašoma šiame straipsnyje, algebra ir geometrija yra dvi skirtingos šakos, tiek aprašančios gamtoje vykstančius procesus, tiek ir dvi skirtingos matematinės kalbos. Šis semiotinis kvadratas nėra išbaigtas, nes neaprašytos likusios dvi jo semos su neigimais. Knygos tekste apie funkcijos portretą taip pat galima įžvelgti šias dvi kalbas: algebra ir geometriją. Jos tekste keičia viena kitą, t. y. atliekami algebriniai veiksmai, gauti rezultatai atvaizduojami koordinatinių plokštumoje. Šio teksto pagrindinė semiotinio kvadrato sėma būtų skaičiavimas. Jam priešingas terminas – brėžimas. Taigi, semiotinis kvadratas turėtų atrodyti taip:

Skaičiuoti        Brėžti  
Ne brėžti        Ne skaičiuoti

Tarp šių visų semų turi galioti ir šie sąryšiai: priešingumo, prieštaravimo ir papildymo. Likusias dvi semas galima pakeisti tokiais terminais: *ne brėžti = tirti*, *ne skaičiuoti = vaizduoti*. Sukonstruojame galutinį semiotinį kvadratą:

Skaičiuoti        Brėžti  
Tirti              Vaizduoti

Semiotinio kvadrato semos tirti, vaizduoti ir brėžti reikalauja detalesnio paaiškinimo. Visų pirma, tarp semų *A* ir *ne B*, *B* ir *ne A* turi būti apibrėžtas subordinacijos ryšys, t. y., *ne B* turi apimti (papildyti) sėmą *A*, analogiškai su semomis *B* ir *ne A*. Iš to seka, kad sėmą *ne brėžti* reikia pakeisti tokiu terminu, kuris reikštų daugiau nei tik skaičiavimą, ir sėmą *ne skaičiuoti* reikia pakeisti tokiu terminu, kuris reikštų daugiau nei tik brėžti. Sėmą *ne brėžti* keičiame į tirti. Šią sėmą reikia suprasti taip, kad tyrimo metu mes norėdami iširti kažką, pavyzdžiui, iširti ar ypatingasis taškas yra balno taškas, atliekame skaičiavimus, kurių dėka gaunamas tam tikras atsakymas, kuris yra tyrimo rezultatas. Sėmą *ne skaičiuoti* pakeičiame terminu vaizduoti. Labai svarbu yra tai, kad brėžti ir vaizduoti neturi tos pačios reikšmės. Kai kalbame apie sėmą brėžti, turime omenyje, kad atliekamas pats brėžimo veiksmas. Tuo tarpu sėma vaizduoti apima platesnę brėžimo sąvokos prasmę.

Panagrinėkime kaip semiotinis kvadratas valdo naratyvinės gramatikos atlikties fazę. Detalės pateikiamos 1-je lentelėje.

1 lentelė.

Skaičiuoti	Randame horizontalią daugdarą $H : \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 12xy = 2x(1 + 6y) = 0$ .
Vaizduoti	Išsprendžiame lygtį $2x(1+6y) = 0$ . Iš čia, $x = 0$ ir $y = -\frac{1}{6}$ . Gauname, kad horizontali daugdara bus vaizduojama kreivėmis $x = 0$ , $y = -\frac{1}{6}$ .
Tirti	Kadangi ieškodami horizontalios daugdaros, gavome, kad $y = -\frac{1}{6}$ . Vadinasi reikia patikrinti, kam yra lygu $f(x, -\frac{1}{6})$ , t. y., reikia iširti ar $y = -\frac{1}{6}$ nėra lygio linija.
Skaičiuoti	Atliekame skaičiavimus: $f(x, -\frac{1}{6}) = x^2 + 6x^2(-\frac{1}{6} + (-\frac{1}{6})^2) = x^2 - x^2 + \frac{1}{36} = \frac{1}{36}$ .
Vaizduoti	Kadangi gavome, kad $f(x, -\frac{1}{6}) = \text{const}$ , vadinasi tiesė $y = -\frac{1}{6}$ yra lygio linija. Vadinasi, ji bus vaizduojama galutiniame funkcijos portrete.
Brėžti	Rastas kreives reikia nubrėžti koordinatinių plokštumoje: tiesė $x = 0$ bus vaizduojama punktyrine linija, o tuo tarpu tiesė $y = -\frac{1}{6}$ – ištisine.

## 5 Išvados

Semiotinė teksto analizė leidžia giliau pažvelgti į teksto struktūrą. Aiškiai išreikštos sankcijos nebuvimas knygoje kartais gali leisti suabejoti jo teisingumu. Mokymo diskurse sankcija yra būtina naratyvinio lygmens fazė. Savarankiškai besimokantys kompiuterinę programą gali panaudoti atpažinimo testui.

## Literatūra

- [1] H.B. Griffiths and A.J. Oldknow. *Mathematics of Models: Continuous and Discrete Dynamical Systems*. Ellis Horwood, New York, 1993, pp. 177–195.
- [2] R. Kudžma. Semiotics in education. In C. Bergsten and B. Grevholm(Eds.), *Conceptions of Mathematics*, Proceedings of Norma 01, Third Nordic Conference on Mathematics Education, pp. 177–195, 2001.
- [3] R. Kudžma ir V. Rukaitė. Semiotinis kvadratas ir naratyvinė gramatika viename pirmos klasės matematikos tekste. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, (55):55–59, 2014.

## SUMMARY

### **Semiotic analysis of portrait drawing problem**

*R. Kudžma, V. Rukaitė*

In this article full semiotic analysis of portrait drawing problem is presented. Two texts are being considered, one from the book of H.B. Griffiths and A.J. Oldknow and other from Vilnius University students control test. Main result is the semiotic square of the text.

*Keywords:* semiotic, Greimas, semiotics square, narrative grammar, portrait drawing.