Matematikos ir informatikos fakultetas

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKA

NENEIGIAMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ LAPLASO TRANSFORMACIJOS

LAPLACE TRANSFORMS OF NON-NEGATIVE RANDOM VARIABLES

Baigiamasis magistro darbas

Autorius: Greta Kiršinaitė
VU el. p.: greta.kirsinaite@mif.stud.vu.lt

Darbo vadovas: Doc., Dr. Martynas Manstavičius

Vilnius
2022

Neneigiamų atsitiktinių dydžių Laplaso transformacijos

Santrauka

Magistro baigiamajame darbe nagrinėjamos sunkiauodegių skirstinių Laplaso transformacijos, aprašomi jų aproksimavimo metodai, praktinio panaudojimo galimybės. Nagrinėjimui pasirinkti neneigiami atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal Veibulo, Pareto ir lognormalųjį skirstinius, dažnai sutinkamus finansuose ir draudimo matematikoje. Pasinaudojus apibrėžimu įsitikinama, kad šie skirstiniai yra sunkiauodegiai. Vėliau išreiškiamos jų Laplaso transformacijos, kurios neturi paprastos analizinės išraiškos, todėl remiantis literatūra detaliai aprašomi jų aproksimavimo metodai. Pateikiami konkrečių skirstinių Laplaso transformacijų pavyzdžiai. Taip pat naudojantis *Matlab* programa nubraižomi jų bei atvirkštinių transformacijų grafikai, pademonstruojamas principas, kaip praktiškai sukonstruoti kopulas, indukuotas sunkiauodegių skirstinių Laplaso transformacijų.

Raktiniai žodžiai: Laplaso transformacijos, sunkiauodegiai skirstiniai, Veibulo skirtinys, Pareto skirstinys, Lognormalusis skirstinys, Archimedo kopulos.

Laplace transforms on non-negative random variables

Abstract

In the final master's thesis we investigate Laplace transforms of heavy-tailed distributions, also describe their approximation methods and their practical application options. We chose to investigate non-negative random variables that are Weibull, Pareto or lognormal distributed. These distributions are very popular in finance and actuarial mathematics. Using definition we assure that these distributions are heav-tailed. Laplace transforms, which do not have a simple analytical expression, are then expressed, and their approximation methods are described in detail according to the literature. Examples of specific Laplace transforms are given. Also, using *Matlab* program, graphs of them and inverse Laplase transforms are drawn. The principle of constructing copulas, induced by Laplace transforms of heavy-tailed distributions, was demonstrated.

Key words: Laplace transforms, heavy-tailed distributions, Weibull distribution, Pareto distribution, Lognormal distribution, Archimedean copulas.

Turinys

1 Įvadas

Momentus generuojančios funkcijos, Furjė, Laplaso transformacijos yra naudingos ir plačiai naudojamos įvairiose srityse. Šiame magistro darbe dėmesį skirsime Laplaso transformacijoms, kurios pavadintos prancūzų matematiko ir astronomo – Pierre-Simon Laplace (1749–1827) garbei. Laplaso transformacijų atsiradimo istorija siekia XIX a. [32]. Leonhard Euler 1744 m. [12] tyrė integralus

$$z(a) = \int e^{ax} X(x) dx, \quad z(a) = \int x^a X(x) dx,$$

kaip sprendinius diferencialinėms lygtims, tačiau reikšmingų darbų atlikti nepavyko. Vėliau Joseph Louis Lagrange [24], Euler'io pasekėjas, tęsė darbus ir tyrė šiek tiek kitokios formos integralus

$$\int e^{-ax} x^a X(x) dx.$$

Šie integralai 1782 m. atkreipė Pierre-Simon Laplace dėmesį, jis savo darbuose pradėjo taikyti transformacijas diferencialinių lygčių sprendiniams rasti [18]. Vėliau tęsė transformacijų panaudojimą ir tolimesniuose savo darbuose.

1.1 Naudojimo sritys

Šiais laikais Laplaso transformacijos toliau nagrinėjamos ir plačiai taikomos inžinerijoje, fizikoje, įvairiose srityse, pavyzdžiui, elektros srovės grandinėje analizei ar vibruojančios stygos svyravimo lygčių sprendiniams rasti.

Laplaso transformacijos taip pat panaudojamos tikimybių teorijos ir matematinės statistikos srityse, stochastiniuose procesuose. Jos tikimybių teorijoje yra apibrėžiamos kaip e^{sX} vidurkis, kai X yra atsitiktinis dydis. Laplaso transformacijos taikomos skirstinių tankio funkcijoms, pasiskirstymo funkcijoms bei pasiskirstymo funkcijų uodegoms. Plačiai taikomas būdas yra naudojant atvirkštinę Laplaso transformaciją rasti atsitiktinių dydžių sumos pasiskirstymą [32].

Laplaso transformacijų vienas iš praktinių panaudojimo būdų yra Archimedo kopulų generavimas. Kopulų funkcijos parodo ryšį tarp atsitiktinių dydžių. Generuojamos daugiamačių skirstinių pasiskirstymo funkcijos su skirtingomis priklausomumo struktūromis. Kopulos naudojamos modeliuoti priklausomumą įvairiose srityse, tokiose kaip ekonometrija, finansai, draudimo matematika. Pavyzdžiui, kopulos generuojamos modeliuojant nuostolių priklausomumą. Finansinių vertybinių popierių portfelio priklausomybės supratimas yra svarbus valdant, kontroliuojant portfelį, jo kainodaroje bei hedžinge. Marshall ir Olkin [30] įrodė, kad Archimedo kopulos gali būti lengvai sugeneruojamos pasinaudojus Laplaso transformacijomis. Kaip sukonstruoti tokias Laplaso transformacijų indukuotas kopulas pademonstruosime ir šiame darbe.

Taip pat svarbu paminėti, kad Laplaso transformacijos modifikacija dar vadinama Laplaso–Stiltjeso transformacija taikoma draudime, ieškant bankroto ir išlikimo tikimybių [9]. Šioms tikimybėms apskaičiuoti Laplaso transformacija taikoma žalas aprašantiems skirstiniams, dažniausiai sunkiauodegiams skirstiniams, kuriuos ir panagrinėsime šiame darbe.

1.2 Transformacijų skaičiavimas

Kai kurių skirstinių Laplaso transformacijos turi gerai žinomas, lengvai skaičiuojamas formas. Tačiau yra skirstinių, tarp jų ir sunkiauodegių, kurių Laplaso transformaciją aprašo sudėtingos funkcijos. Skirstiniai, turintys sunkias uodegas, kaip minėjome anksčiau naudojami draudime, aprašant žalas, taip pat ir kitose įvairiose srityse: tokiose kaip rizikos teorija, finansų valdymas [34].

Jie naudojami tada, kai įvyksta mažai tikėtinos labai didelės žalos. Šiais laikais sunkiauodegių skirstinių tyrinėjimo intensyvumas neblėsta, kadangi tai aktualu draudimo bendrovėms, patiriančioms nuostolius dėl žalų atsiradimo, pvz. stichinių nelaimių, taip pat aktualu bankams, siekiantiems apsisaugoti nuo didelių nuostolių.

Kai kuriems skirstiniams, pavyzdžiui, Pareto, Laplaso transformaciją galima išreikšti naudojant Gamą funkciją arba pasitelkiant Vitakerio funkciją. Šie būdai aprašyti Nadarayah straipsnyje [33], kurį plačiau panagrinėsime 6.2 skyrelyje.

Tačiau ne visas sunkiauodegių skirstinių Laplaso transformacijas galima aprašyti kitomis gerai žinomomis funkcijomis, todėl tokių skirstinių Laplaso transformacijoms taikomos aproksimacijos. S. Asmussen, J. L. Jensen, L. Rojas–Nandayapa [2] taikė šiek tiek pakoreguotą Laplaso metodą lognormaliajam skirstiniui, kuris šiame darbe nagrinėjamas 6.3 skyrelyje. Vėliau D. J. Gibbons [17] metodą išplėtė ir kitiems skirstiniams, tokiems kaip Veibulo ir Frešė. Kaip aproksimuoti Veibulo skirstinio Laplaso transformaciją nagrinėsime 6.1 skyrelyje.

1.3 Darbo tikslas

Šio magistro darbo tikslas yra detaliai pateikti sunkiauodegių skirstinių, taikomų draudimo matematikoje, Laplaso transformacijų aproksimavimo metodus, juos pailiustruoti konkrečiais pavyzdžiais bei parodyti principą, kaip būtų galima šias Laplaso transformacijas pritaikyti konstruojant Archimedo kopulas.

1.4 Darbo uždaviniai

- Įsitikinti, kad draudimo matematikoje naudojami skirstiniai tokie kaip Pareto, Veibulo ir lognormalusis yra sunkiauodegiai.
- Užrašyti šių skirstinių Laplaso transformacijas bei pasinaudojant literatūra išreikšti jas gerai žinomomis funkcijomis arba jomis aproksimuoti.
- Laplaso transformacijų aproksimacijas pailiustruoti konkrečiais pavyzdžiais.
- Aprašyti principą, kaip sugeneruojamos sunkiauodegių skirstinių Laplaso transformacijų indukuotos Archimedo kopulos.

1.5 Darbo struktūra ir taikyti metodai

Iš pradžių apsibrėšime, kokius atsitiktinius dydžius nagrinėsime, pateiksime darbe naudojamus apibrėžimus, glaustai aptarsime asimptotinės analizės žymėjimus, pristatysime teoremas, kuriomis vėliau remiamasi aproksimuojant Laplaso transformacijas. Vėliau, 6 skyrelyje, aprašysime sunkiauodegius skirstinius, bei įsitikinsime jų sunkiauodegiškumu. Pavyzdžiuose pateiksime konkrečių skirstinių Laplaso transformacijas, jas aproksimuosime. Pabandysime rasti atvirkštines Laplaso transformacijas, grafiškai palyginsime su skirstinių tankio funkcijomis. Paskutiniame, 7 skyrelyje bandysime parodyti praktinį Laplaso transformacijų panaudojimą, t.y., aprašysime kaip sugeneruoti Archimedo kopulas, indukuotas anksčiau pavyzdžiuose nagrinėtų sunkiauodegių skirstinių Laplaso transformacijų. Pabandysime rasti kopulą, indukuotą Pareto Laplaso transformacijos.

2 Integralinės transformacijos

Šiame magistro darbe nagrinėsime tolydžiuosius neneigiamus atsitiktinius dydžius X. Juos aprašo tankio funkcija *(angl. probability density function)* ir pasiskirstymo funkcija *(angl. cumulative distribution function)* $f(x)$ ir $F(x)$ atitinkamai, bei pasiskirstymo funkcijos uodega *(angl. tail probability function)*, kitaip dar vadiname išgyvenamumo funkcija *(angl. survival function)*, kuri apibrėžiama lygybe $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$. Kitaip tariant $\overline{F}(x) = \mathbb{P}(X > x) = \int_x^\infty f(x)dx$.

Pirmiausiai apibrėžkime integralines transformacijas, kuomet taikant integravimą vienos klasės vieno kintamojo funkcija gali būti pakeista kitos klasės kito kintamojo funkcija [32].

2.1 Apibrėžimas. Integralinė transformacija $\mathscr{T}\{f\}(k)$ – operatorius, kuris funkciją $f(x)$, apibrėžtą intervale $[a,b] \subset (-\infty, +\infty) \in \mathbb{R}$, keičia integraline funkcija

$$\mathscr{T}\{f\}(k) = \int_a^b K(x,k)f(x)dx, \tag{2.1}$$

čia $f(x)$ vadinama funkcijos $\mathscr{T}\{f\}(k)$ pirmavaizdžiu, $\mathscr{T}\{f\}(k)$ – funkcijos $f(x)$ vaizdu, o $K(x,k)$ vadinsime integralinės transformacijos branduoliu, čia k yra transformacijos kintamasis.

Pasirinkus skirtingus branduolius bei reikšmes a ir b, gaunamos skirtingos integralinės transformacijos, tokios kaip Laplaso, Furjė, Melino, Hankelio ir kitos. Panagrinėkime keletą iš jų.

2.2 Apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio X, kurio tankis yra $f(x)$, momentus generuojanti funkcija *(angl. moment generating function)* $M(t)$ yra atsitiktinio dydžio e^{tX}, $t \in \mathbb{R}$ vidurkis, t.y.

$$M(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)dx.$$

2.3 Apibrėžimas. Funkcijos $f(x)$ Laplaso transformacija $\mathscr{L}\{f\}(t)$ su parametru $t \in \mathbb{C}$, kai realioji t dalis yra teigiama, (žymėsime $\Re(t) > 0$) vadinsime integralą

$$\mathscr{L}\{f\}(t) = \int_0^\infty e^{-tx}f(x)dx. \tag{2.2}$$

Akivaizdu, kad Laplaso transformacija yra integralinė transformacija intervale $[0,\infty)$ su branduoliu $K(x,t) = e^{-tx}$. Taip pat, jei $f(x) = 0$, kai $x \leq 0$, tai $M(-t) = \mathbb{E}e^{-tX} = \mathscr{L}\{f\}(t)$.

Verta paminėti, kad apibrėžtoje Laplaso transformacijoje pakeitę $f(x)dx$ į $dF(x)$ gauname Laplaso–Stiltjeso transformaciją.

2.4 Apibrėžimas. Laplaso–Stiltjeso transformacija neneigiamam atsitiktiniam dydžiui X su pasiskirstymo funkcija $F(x)$ apibrėžiama kaip

$$\mathscr{L}^*\{F\}(t) = \int_0^\infty e^{-tx}dF(x), \quad \Re(t) \geq 0.$$

Atskiru atveju, kai atsitiktinis dydis X turi tankį $f(x)$, gauname tankio $f(x)$ Laplaso transformaciją.

Kadangi funkcija $F(x)$ gali būti išreikšta kaip

$$F(x) = \int_0^x dF(y) = \int_0^x f(y)dy,$$

tada Laplaso–Stiltjeso transformaciją galime apibrėžti kaip

$$\mathscr{L}^*\{F\}(t) = \int_0^\infty e^{-tx}dF(x) = \int_0^\infty e^{-tx}f(x)dx = \mathscr{L}\{f\}(t), \quad \Re(t) \geq 0.$$

Akivaizdu, kad gauta tankio $f(x)$ Laplaso transformacija.

Tikimybių teorijoje dažnai naudojamos skirtingos atsitiktinio dydžio X Laplaso transformacijos: Laplaso transformacija tankio funkcijai, pasiskirstymo funkcijai ir pasiskirstymo funkcijos uodegai. Šias transformacijas žymėsime $\mathscr{L}_X\{f\}(t)$, $\mathscr{L}_X\{F\}(t)$ ir $\mathscr{L}_X\{\overline{F}\}(t)$, be to jos yra glaudžiai susijusios [17].

2.5 Lema. ([17, 1.7 Lema]) Tegu X yra neneigiamas atsitiktinis dydis, kurio pasiskirstymo funkcija yra F, o tankio funkcija yra f. Tuomet

$$\mathscr{L}_X\{\overline{F}\}(t) = \frac{1-\mathscr{L}_X\{f\}(t)}{t} = \frac{1}{t} - \mathscr{L}_X\{F\}(t). \tag{2.3}$$

Įrodymas.

Pagal apibrėžimą turime

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_X\{\overline{F}\}(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\overline{F}(x)dx = \int_0^\infty e^{-tx}(1-F(x))dx = \\ = \int_0^\infty e^{-tx}dx - \mathscr{L}_X\{F\}(t) = \frac{1}{t} - \mathscr{L}_X\{F\}(t),\end{aligned}$$

o vidurinei (2.3) formulės lygybei gauti pasinaudojame integravimo dalimis formule bei pasiskirstymo funkcijos savybe, kad $F(0) = 0$:

$$\frac{1}{t} - \mathscr{L}_X\{F\}(t) = \frac{1}{t} + \int_0^\infty F(x)d\left(\frac{e^{-tx}}{t}\right) = \frac{1}{t} + \frac{e^{-tx}}{t}F(x)\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{t}f(x)dx = \frac{1-\mathscr{L}_X\{f\}(t)}{t}.$$

■

Paminėsime dar vieną svarbią teoremą, susijusią su tankio funkcijos Laplaso transformacija. Ją šiame darbe vėliau panaudosime generuojant Archimedo kopulas, kurių generatoriams imsime Laplaso transformacijų atvirkštines funkcijas.

2.6 Teorema. ([14, 1 Teorema]) Funkcija $\mathscr{L}_X\{f\}(t)$ yra tankio funkcijos $f(x)$ Laplaso transformacija, tada ir tik tada, jei

$$\lim_{t\to 0} \mathscr{L}_X\{f\}(t) = 1, \tag{2.4}$$

be to $\mathscr{L}_X\{f\}(t)$ yra be galo diferencijuojama ir tokia, kad

$$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\mathscr{L}_X\{f\}(t) \geq 0, \quad \forall t > 0,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Šią savybę tenkinančios funkcijos vadinamos visiškai monotoniškomis *(angl. completely monotonic)*.

Prieš generuojant Archimedo kopulas, aptarkime Laplaso transformacijų radimo būdus. Deja, bet skaičiuoti Laplaso transformacijas pagal (2.2) formulę ne visuomet yra paprasta. Kartais Laplaso transformacijų ar charakteristinių funkcijų apytikslių reikšmių radimui padeda Laplaso tipo integralai, kurie apibrėžiami formule:

$$\int_a^b e^{sh(x)}q(x)dx. \tag{2.5}$$

Vėliau, 4 skyrelyje aptarsime dažnai taikomas aproksimacijas Laplaso transformacijų skaičiavimams, tačiau prieš tai pristatysime vėliau naudojamus asimptotinės analizės žymėjimus.

3 Asimptotinė analizė

Pristatysime asimptotinės analizės žymėjimus [29, 31], pirmą kartą apibrėžtus Bachmann–Landau darbuose [3, 25].

3.1 Apibrėžimas. Tegul $f(x)$ ir $\xi(x)$ bus tokios funkcijos, kad $\exists A > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta$, taip kad $|g(x)| \leq A\ |\xi(x)|$. Tada žymėsime

$$g(x) = \mathcal{O}(\xi(x)), \quad x \to x_0. \tag{3.1}$$

3.2 Apibrėžimas. Tegul $f(x)$ ir $\xi(x)$ bus tokios funkcijos, kad $\forall A > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta$, taip kad $|g(x)| \leq A|\xi(x)|$. Tada žymėsime

$$g(x) = o(\xi(x)), \quad x \to x_0. \tag{3.2}$$

Jei $\xi(x) \neq 0$, tuomet (3.2) ekvivalentus apibrėžimas yra

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\xi(x)} = 0. \tag{3.3}$$

3.3 Apibrėžimas. Tegul $f(x)$ ir $\xi(x)$ bus tokios funkcijos, kad $\xi(x)$ nėra lygi nuliui x_0 aplinkoje. Be to

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\xi(x)} = 1. \tag{3.4}$$

Tada žymėsime

$$g(x) \sim \xi(x). \tag{3.5}$$

3.4 Apibrėžimas. Tegul $R(x)$ – tikroji funkcijos $f(x)$ reikšmė taške x, o $A(x)$ – aproksimuota reikšmė. Tada santykinę paklaidą *(angl. relative error)* taške x apibrėšime kaip santykį:

$$\frac{|A(x) - R(x)|}{|R(x)|}. \tag{3.6}$$

Verta pastebėti, kad asimptotinis ekvivalentumas yra glaudžiai susijęs su santykine paklaida.

3.5 Lema ([28, 1.1.1 Lema]). $A(x)$ ir $R(x)$ yra asimptotiškai ekvivalenčios taške a tada ir tik tada, kai santykinė paklaidos riba taške a yra 0:

$$\lim_{x \to a} \frac{|A(x) - R(x)|}{|R(x)|} = 0.$$

Įrodymas.

Pasinaudoję santykinės paklaidos apibrėžimu matome, kad

$$\frac{|A(x) - R(x)|}{|R(x)|} = \left| \frac{A(x)}{R(x)} - 1 \right| \to 0, \quad x \to a,$$

tada ir tik tada, jei $\frac{A(x)}{R(x)} \to 1,\ \ x \to a$, t.y. $A(x) \sim R(x)$.

■

Šiame darbe kitame skyrelyje pateiktame įrodyme naudojamos asimptotinio skleidinio sąvokos, todėl pirmiausia jas apsibrėšime [29].

3.6 Apibrėžimas. Funkcijų seka $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ vadinama asimptotine seka, kai $x \to x_0$, jei $\forall n$, yra teisinga, kad

$$\phi_{n+1}(x) = o(\phi_n(x)), \quad x \to x_0.$$

3.7 Apibrėžimas. Jei $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ yra asimptotinė funkcijų seka, kai $x \to x_0$, o $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ yra konstantų seka, tai funkcijos $f(x)$, $x \to x_0$ asimptotiniu skleidiniu *(angl. asymptotic expansion)* vadinsime eilutę

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x), \quad x \to x_0,$$

jei $\forall N \in \mathbb{N}$ teisinga, kad

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \phi_n(x) + o(\phi_N(x)), \quad x \to x_0. \tag{3.7}$$

Be to, asimptotinį skleidinį žymėsime

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x), \quad x \to x_0.$$

3.8 Pastaba. Ekvivalenti (3.7) savybė yra

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \phi_n(x) + \mathcal{O}(\phi_N(x)), \quad x \to x_0. \tag{3.8}$$

4 Aproksimacijos

Aproksimavimo metodai dažnai naudojami išreikšti sudėtingas funkcijas paprastesne forma arba gerai žinomomis specialiomis funkcijomis. Nors aproksimavus ne visuomet visoje apibrėžimo srityje gauname tikslias turėtų funkcijų reikšmes, tačiau galima plačiau panagrinėti aproksimuotų funkcijų elgesį, pasinaudojus žinomomis savybėmis. Be to, dėl paprastesnės išraiškos, jas lengviau pritaikyti praktikoje. Tuo įsitikinsime ir šiame darbe, 7 skyrelyje. Tačiau didžiausias aproksimavimo metodų trūkumas yra tas, kad ne visada visoje apibrėžimo srityje aproksimuota funkcija yra artima tikrajai, pavyzdžiui, neretai pasitaiko, kad aproksimavimas tikslesnis, kuo kintamasis didesnis.

4.1 Laplaso aproksimacija

Laplaso aproksimacija yra klasikinė technika aproksimuoti Laplaso tipo integralus apibrėžtus (2.5) formule. Šis metodas pirmą kartą aprašytas Pierre-Simon Laplace darbuose, 1774 m. [26]. Šiame darbe pateiksime modifikuotą Laplaso aproksimaciją.

4.1.1 Teorema. ([40, 6.2(2) Teiginys])

Tegul $-\infty \leq a < b \leq \infty$, o $h(x)$ apibrėžta intervale (a,b). Tarkime,

- $h(x)$ diferencijuojama intervale (a,b);
- $h(x)$ minimumas yra taške $x_0 \in (a,b)$;
- Egzistuoja $h''(x_0) > 0$;
- Integralas $\int_a^b e^{-th(x)} q(x) dx$ konverguoja absoliučiai;
- $\exists \quad \mu > 0, \quad \delta > 0: \quad h(x) > h(x_0) - \mu \quad \forall x \in (a,b) : |x - x_0| \geq \delta$;
- $q(x)$ yra tolydi intervale $[a,b]$ ir $q(x_0) \neq 0$.

Tada

$$\int_a^b e^{-th(x)} q(x) dx \sim e^{-th(x_0)} q(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{th''(x_0)}}, \quad t \to \infty.$$

4.2 Vatsono lema

Vatsono lemos technika yra glaudžiai susijusi su Laplaso aproksimacija. Ji pirmą kartą paminėta 1950 m. [44]. Nuo tada ši lema plačiai taikoma asimptotinėje analizėje. Tačiau asimptotines eilutes integruoti panariui ne visuomet galima, todėl Vatsono lemos pritaikymas yra labai ribotas.

4.2.1 Lema.([17, 3.12 Lema])

(1) Tegul $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ yra tolydi funkcija;

(2) Tegu egzistuoja skaičių seka $\{p_i\}$ tokia, kad $0 < p_0 < p_1 < p_2 < \cdots$ su kuria teisinga

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{p_k - 1}, \quad x \to 0+; \tag{4.1}$$

(3) Kažkokiam fiksuotam $c > 0$, $|f(x)| \le Me^{cx}$, $\forall x > 0$.

Tada turime

$$\int_0^\infty e^{-tx} f(x)dx \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \Gamma(p_k)}{t^{p_k}}, \quad t > 0, \quad t \to \infty, \tag{4.2}$$

kur Gama funkcija apibrėžta Eulerio integralu yra lygi

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-s} s^{u-1} ds.$$

Įrodymas.

Vatsono lemos įrodymas remiasi tuo, kad išskaidžius integralą, mažame intervale turime susitelkusią didžiąją funkcijos dalį, o likusiame integrale ši funkcija yra nereikšmingai maža, t.y. $o(t^{-p_N})$. Tai įrodę, įsitikinsime lemos teisingumu [4].

Taigi, pirmiausiai išskaidome (4.2) integralą į dvi dalis: vienas bus aplink tašką $x = 0$, kur asimptotinis skleidinys (4.1) galioja, o kitas – likusi integralo dalis. Parodysime, kad pirmoje integralo dalyje funkcija yra didelė, o likusioje integralo dalyje funkcija yra labai maža, artima 0.

Taigi laisvai pasirenkame $\epsilon > 0$ ir išskaidome integralą:

$$\int_0^\infty e^{-tx} f(x)dx = \int_0^\epsilon e^{-tx} f(x)dx + \int_\epsilon^\infty e^{-tx} f(x)dx. \tag{4.3}$$

Dabar įvertinkime lemoje apibrėžtos aproksimacijos paklaidą. Pažymėkime ją $S_N(t)$:

$$S_N(t) = \left| \int_0^\infty e^{-tx} f(x)dx - \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k \Gamma(p_k)}{t^{p_k}} \right|.$$

Norint įrodyti užrašyto asimptotinio skleidinio teisingumą, reikės parodyti, kad $S_N(t) = o(t^{-p_N})$.

Dalinę eilutės sumą galime išreikšti kaip

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{a_k \Gamma(p_k)}{t^{p_k}} = \int_0^\infty e^{-tx} \sum_{k=0}^{N} a_k x^{p_k - 1} dx. \tag{4.4}$$

Čia pasinaudojome, kad

$$\int_0^\infty e^{-tx} x^{\lambda - 1} dx = \frac{\Gamma(\lambda)}{t^\lambda}. \tag{4.5}$$

Įsitikinti, kad (4.5) lygybė teisinga, integralui naudojame keitinį $u = tx$:

$$\int_0^\infty e^{-tx} x^{\lambda-1} dx = \frac{1}{t} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{t}\right)^{\lambda - 1} du = \frac{\Gamma(\lambda)}{t^\lambda}.$$

Taigi, pasinaudoję (4.3) bei (4.4) turime:

$$S_N(t) = \left| \int_0^\epsilon e^{-tx} f(x)dx + \int_\epsilon^\infty e^{-tx} f(x)dx - \int_0^\infty e^{-tx} \sum_{k=0}^{N} a_k x^{p_k-1} dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^\epsilon e^{-tx} (f(x) - \sum_{k=0}^{N} a_k x^{p_k - 1}) dx + \int_\epsilon^\infty e^{-tx} f(x)dx - \int_\epsilon^\infty e^{-tx} \sum_{k=0}^{N} a_k x^{p_k-1} dx \right|.$$

Pritaikę trikampio nelygybę, gauname

$$
\begin{aligned}
S_N(t) = \Big| \int_0^\epsilon e^{-tx}(f(x) - \sum_{k=0}^N a_k x^{p_k-1})dx + \int_\epsilon^\infty e^{-tx} f(x)dx - \int_\epsilon^\infty e^{-tx} \sum_{k=0}^N a_k x^{p_k-1} dx \Big| \leq \\
\leq \Big| \int_0^\epsilon e^{-tx}(f(x) - \sum_{k=0}^N a_k x^{p_k-1})dx \Big| + \Big| \int_\epsilon^\infty e^{-tx} f(x)dx \Big| + \Big| \int_\epsilon^\infty e^{-tx} \sum_{k=0}^N a_k x^{p_k-1} dx \Big| \leq \\
\leq \int_0^\epsilon e^{-tx} \Big| f(x) - \sum_{k=0}^N a_k x^{p_k-1} \Big| dx + \int_\epsilon^\infty e^{-tx} |f(x)| dx + \Big| \int_\epsilon^\infty e^{-tx} \sum_{k=0}^N a_k x^{p_k-1} dx \Big| = \\
=: S_1 + S_2 + S_3.
\end{aligned}
$$

Įrodysime visų šių trijų sumų aprėžtumą:

Pritaikę (3.8) savybę S_1 pointegralinei funkcijai gauname

$$
|f(x) - \sum_{k=0}^N a_k x^{p_k-1}| \leq M_1 |x^{p_{N+1}-1}|.
$$

Įstatę šią nelygybę, vėliau pritaikę Gama funkcijos apibrėžimą, turime

$$
S_1 \leq M_1 \int_0^\epsilon e^{-xt} x^{p_{N+1}-1} dx \leq M_1 \int_0^\infty e^{-xt} x^{p_{N+1}-1} dx = M_1 \frac{\Gamma(p_{N+1})}{t^{p_{N+1}}} = \mathcal{O}(t^{-p_{N+1}}),\ t \to \infty.
$$

Norėdami parodyti S_2 aprėžtumą, pasinaudojame trečiąja lemos sąlyga:

$$
S_2 < \int_\epsilon^\infty e^{-xt} e^{cx} M dx = \int_\epsilon^\infty M e^{(c-t)x} dx = M \frac{e^{(c-t)\epsilon}}{t-c} = \mathcal{O}(t^{-1} e^{-\epsilon t}),\ t \to \infty.
$$

Pritaikę keitinį $u = t(x - \epsilon)$ integralui S_3, gauname

$$
S_3 = \Big| \int_\epsilon^\infty e^{-t(x-\epsilon)-t\epsilon} \sum_{k=0}^N a_k x^{p_k-1} dx \Big| = \frac{e^{-\epsilon t}}{t} \Big| \int_0^\infty e^{-u} \sum_{k=0}^N a_k \Big(\epsilon + \frac{u}{t}\Big)^{p_k-1} du \Big| < M_3 \frac{e^{-\epsilon t}}{t}.
$$

Paskutinė nelygybė galioja, kai $t \to \infty$. Gavome, kad S_3 yra aprėžtas mažėjančia eksponentine funkcija.

Taigi, parodėme, kad visi trys S_N nariai yra $o(t^{-p_N})$. Tai galioja visiems $N \geq 0$. Todėl iš čia išplaukia, kad

$$
\int_0^\infty e^{-tx} f(x) dx = \sum_{k=0}^N \frac{a_k \Gamma(p_k)}{t^{p_k}} + o(t^{-p_N}), \quad t \to \infty.
$$

■

5 Atvirkštinės Laplaso transformacijos

Šiame skyrelyje aptarsime atvirkštines Laplaso transformacijas, aptarsime jų savybes. Laplaso transformaciją, apibrėžtą formule (2.2), paprastumo dėlei pažymėkime $\mathscr{L}\{f\}(x) = L(t)$.

5.1 Apibrėžimas. Jei $L(t)$ yra funkcijos $f(x)$ Laplaso transformacija, tada $f(x)$ vadinsime $L(t)$ atvirkštine Laplaso transformacija *(angl. inverse Laplace transform)*. Tai yra,

$$\mathscr{L}^{-1}\{L\}(x) = f(x).$$

Atvirkštinė Laplaso transformacija yra apibrėžiama formule:

$$\mathscr{L}^{-1}\{L\}(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \to \infty} \int_{\sigma - i\tau}^{\sigma + i\tau} e^{st} L(t) dt. \tag{5.1}$$

tokiam σ, kad $L(t)$ yra apibrėžtas $\Re(s) \geq \sigma > 0$ kur $s = \sigma + i\tau$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Laplaso transformacijoms ir jų atvirkštinėms Laplaso transformacijoms literatūroje dažnai pateikiamos lentelės [32]. Pateikiame keletą pavyzdžių:

$f(x)$	$\mathscr{L}_X\{f\}(t)$
1	$\frac{1}{t}$
x	$\frac{1}{t^2}$
e^{ax}	$\frac{1}{t-a}$
x^n	$\frac{n!}{t^(n-1)}$
$\sin(ax)$	$\frac{a}{t^2+a^2}$
$\cos(ax)$	$\frac{t}{t^2+a^2}$
...	...

1 lentelė: Laplaso transformacijos

Aptarsime atvirkštinių Laplaso transformacijų radimo būdus. Atvirkštinės Laplaso transformacijos gali būti randamos algebriškai arba pasitelkiant algoritmus randamos jų skaitinės reikšmės.

Kai Laplaso transformacija išreikšta sudėtinga trupmena, tuomet ją galime išreikšti paprastesnių trupmenų suma arba skirtumu ir panariui rasti atvirkštines Laplaso transformacijas, pasinaudojus Laplaso transformacijų tiesiškumo savybe, kad

$$\mathscr{L}\{af + bg\}(t) = a\mathscr{L}\{f\}(t) + b\mathscr{L}\{g\}(t).$$

Šią savybę įrodyti galima pasinaudojus integralų tiesiškumu:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{af + bg\}(t) &= \int_0^\infty e^{-tx}(af(x) + bg(x))dx = a\int_0^\infty e^{-tx} f(x)dx + b\int_0^\infty e^{-tx} g(x)dx \\ &= a\mathscr{L}\{f\}(t) + b\mathscr{L}\{g\}(t).\end{aligned}$$

5.2 Pavyzdys. Tarkime, Laplaso transformaciją apskaičiavę gavome

$$L(t) = \frac{t+3}{t^3 + 8t^2 + 12t}.$$

Vardiklį prisilyginę 0 ir išsprendę lygtį gauname, kad lygties $t^3 + 8t^2 + 12t = 0$ sprendiniai yra $t = 0,\ t = -2,\ t = -6$. Taigi galime Laplaso transformacija išreikšti:

$$L(t) = \frac{t+3}{t^3 + 8t^2 + 12t} = \frac{t+3}{t(t+2)(t+6)} = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t+2} + \frac{A_3}{t+6},$$

čia A_i reikia rasti.

Pirmiausiai abi puses pasidauginame iš t, tuomet prilyginus $t = 0$, gauname, kad $A_1 = \frac{3}{12}$. Padauginę iš $t + 2$ ir prisilyginę $t = -2$, gauname $A_2 = -\frac{1}{8}$. Ir galiausiai, kad gautume A_3 pasidauginame abi puses iš $t + 6$ ir įstatę $t = -6$, gauname $A_3 = -\frac{1}{8}$.

Išsprendę ir radę koeficientus, Laplaso transformaciją galime užrašyti taip

$$L(t) = \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{t} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{t+2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{t+6}.$$

Pagal 1 lentelę galime užrašyti, kad

$$f(x) = \frac{3}{12} - \frac{1}{8}e^{-2s} - \frac{1}{8}e^{-6s}.$$

Tačiau ne visuomet Laplaso transformacija išreikšta paprasta forma, tuomet naudojami skaitiniai metodai *(angl. numerical algorithms)*. Populiariausi jų yra Furjė eilučių metodas, Gaverio–Stefesto bei Talboto metodai [10]. Šiame darbe praktinėje dalyje bus naudojamas Gaverio–Stefesto algoritmas, todėl jį aptarsime kiek plačiau [23].

Gaverio–Stefesto algoritmas aproksimuoja $f(x)$ funkcijų seka

$$f_n(x) = \ln(2)x^{-1} \sum_{k=1}^{2n} a_k(n) L(k \ln(2) x^{-1}),\ n \geq 1,\ x > 0, \tag{5.2}$$

čia funkcija $L(t)$ žymi Laplaso transformaciją, o koeficientai $a_k(n)$ apibrėžti kaip

$$a_k(n) = \frac{(-1)^{n+k}}{n!} \sum_{j=(k+1)/2}^{\min(k,n)} j^{n+1} \binom{n}{j} \binom{2j}{j} \binom{j}{k-j},\ n \geq 1,\ 1 \leq k \leq 2n.$$

Koeficientai a_k priklauso tik nuo pasirinkto skaičiaus n. Skaitiniai metodai gali pagelbėti randant bankroto tikimybę, tuomet tikslumo ir laiko atžvilgiu dažniausiai imamas $2n = 7$ ar $2n = 8$ [27]. Tokį būdą su pavyzdžiais aprašė Usabel [43].

6 Sunkiauodegiai skirstiniai

Šiame skyrelyje apsibrėšime sunkiauodegius skirstinius, taip pat panagrinėsime keletą jų, kurie sutinkami nagrinėjant draudimines žalas.

6.1 Apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio X skirstinys turi (dešinę) sunkią uodegą *(angl. heavy tail)* tada ir tik tada, jei jo momentus generuojanti funkcija yra begalinė visiems t:

$$\int e^{tx} dF(x) = \infty, \quad \forall t > 0. \tag{6.1}$$

Kairioji sunkioji uodega apibrėžiama sunkios dešiniosios uodegos apibrėžime pakeitus X į $-X$ [38].

6.2 Apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio X skirstinys turi lengvą uodegą *(angl. light tail)*, tada ir tik tada, jei jo momentus generuojanti funkcija yra baigtinė kokiam nors $t > 0$:

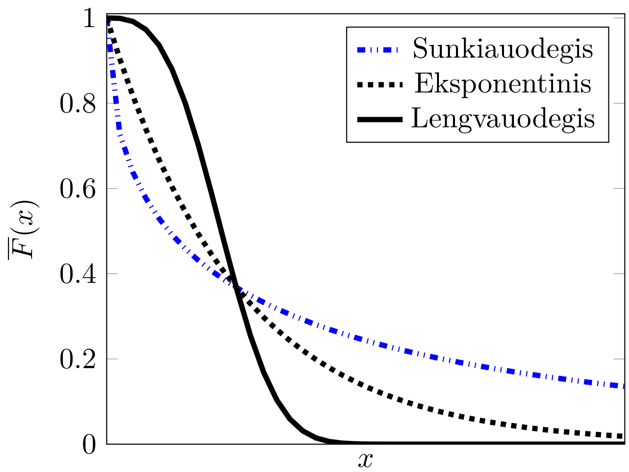
$$\int e^{tx} dF(x)dx < \infty, \quad t > 0. \tag{6.2}$$

Sunkiauodegio skirstinio apibrėžime pateikta formulė (6.1) nėra patogi taikyti praktikoje, todėl pateiksime ekvivalentų apibrėžimą, kuris teisingas skirstiniams, turintiems tiek kairę, tiek dešinę sunkią uodegą. Skirstinys bus sunkiauodegis tuo atveju, jei jo uodega nėra aprėžta mažėjančia eksponentine funkcija.

6.3 Apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio X skirstinys turi sunkią uodegą, tada ir tik tada, kai

$$\limsup_{x \to \infty} e^{tx} \overline{F}(x) = \infty, \quad \forall t > 0. \tag{6.3}$$

Iš apibrėžimų matome, kad sunkiauodegių skirstinių pasiskirstymo funkcijų uodegos artės į nulį lėčiau už eksponentinės funkcijos ir, žinoma, lengvauodegių skirstinių pasiskirstymo funkcijas.



1 pav.: Skirstinių uodegų palyginimas

Populiariausia sunkiauodegių skirstinių klasė yra subeksponentiniai skirstiniai *(angl. subexponential distributions)*.

6.4 Apibrėžimas. Neneigiamo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija $F(x)$ vadinama subeksponentine, jei

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2,$$

čia $\overline{F^{*2}}(x) = 1 - F^{*2}(x)$, o $F^{*2}(x) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq x)$, tai yra pasiskirstymo funkcijos sąsūka su pačia savimi.

Subeksponentinių skirstinių klasės kaip naudingos sunkiauodegių skirstinių klasės svarbą tikimybių teorijoje bei draudimo matematikoje pabrėžė Teugels [42]. Kiek vėliau Embrechts ir kiti [11] pademonstravo šių skirstinių svarbą modeliuojant didelių žalų skirstinius. Subeksponentinei klasei priklauso gerai žinomi skirstiniai, tokie kaip Pareto, lognormalusis, Veibulo ir loggama. Trumpai apžvelkime keletą jų [13].

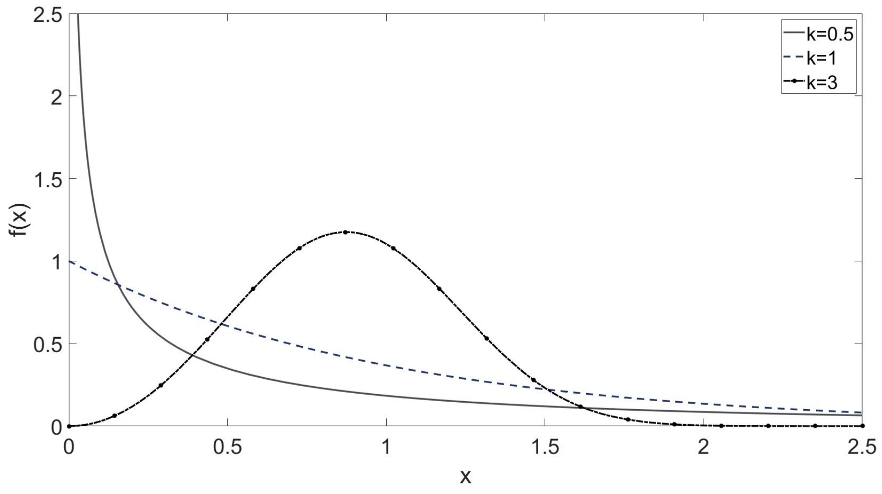
6.1 Veibulo skirstinys

Veibulo atsitiktiniai dydžiai yra neneigiami, absoliučiai tolydūs su $k > 0$ ir $\lambda > 0$ parametrais. Veibulo pasiskirstymas yra tinkamas modeliuoti duomenis su dideliu teigiamu asimetrijos koeficientu, o tai gali būti pritaikoma žalos dydžiams. Skirstinys tinkamas, kai įvyksta mažai tikėtinos labai didelės žalos. Veibulo skirstinys naudojamas modeliuojant daugybę realaus pasaulio reiškinių, įskaitant vėjo greičio pasiskirstymą, gedimų pasiskirstymą patikimumo inžinerijoje, taip pat aprašyti potvynių, sausrų ir katastrofiškų draudimo nuostolių dydžius, rasti bankroto ir išlikimo tikimybes [9].

Veibulo atsitiktinių dydžių tankio funkcija yra

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{6.4}$$

Matome, kad esant skirtingiems Veibulo skirstinio parametrams, jo tankio funkcija įgauna skirtingas formas. Pavyzdžiui, kai $k = 1$, tuomet turėsime eksponentinį skirstinį. Kai $k \geq 3$, Veibulo tankio funkcijos kreivė panašėja į varpo formos, kaip normaliojo skirstinio tankio, tačiau priešingai nei jis, Veibulo tankis yra asimetrinis.



2 pav.: Veibulo tankio funkcijos skirtingoms k reikšmėms

Veibulo pasiskirstymo fukcija yra

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/\lambda)^k}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{6.5}$$

Pirmiausiai įrodykime, kad šis skirstinys yra sunkiauodegis. Taigi, turime

$$\limsup_{x\to\infty} e^{tx}\overline{F}(x) = \limsup_{x\to\infty} e^{tx-\frac{x^k}{\lambda^k}}.$$

Nagrinėkime du atvejus, kai $k > 1$ ir $k < 1$. Jei $k < 1$, tai tx, esant dideliam x, didės greičiau nei $\frac{x^k}{\lambda^k}$, todėl $tx - \frac{x^k}{\lambda^k}$ bus didelis ir teigiamas, todėl riba bus begalinė, taigi ir skirstinys bus sunkiauodegis.

Kita vertus, kai turime $k > 1$, tai esant dideliam x, $\frac{x^k}{\lambda^k}$ didės greičiau nei tx, todėl skirtumas bus didelis ir neigiamas, todėl viršutinė riba bus 0.

Įsitikinome, kad Veibulo skirstinys yra sunkiauodegis, kai parametras $0 < k < 1$.

Toliau laikykime, kad $\lambda = 1$.

Veibulo skirstinio Laplaso transformacija:

$$\mathscr{L}_X\{f\}(t) = \int_0^\infty e^{-tx}kx^{k-1}e^{-x^k}dx. \tag{6.6}$$

Šio integralo paprastai paskaičiuoti negalime. Tačiau D. J. Gibbons aprašė kaip pasinaudojus Vatsono lema Laplaso transformaciją nuo Veibulo tankio funkcijos galime aproksimuoti [17].

Pirmiausiai išskleisime Veibulo tankio funkcijos eksponentinę dalį Teiloro eilute. Žinome, kad Teiloro eilute galima aproksimuoti bet kurią tolydžią be galo diferencijuojamą funkciją $f(x)$, skaičiaus a aplinkoje:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Kai $a = 0$, funkcijos e^x Teiloro eilutė yra lygi

$$e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}.$$

Pažymėję $y = -x^k$, gauname, kad

$$e^{-x^k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-x^k\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{kn}}{n!}.$$

Todėl Veibulo tankio funkciją galime užrašyti kaip

$$f(x) = kx^{k-1}e^{-x^k} = kx^{k-1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^{ks}}{s!} = k\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^{ks+k-1}}{s!}. \tag{6.7}$$

Matome, kad funkciją $f(x)$ galime išreikšti (4.1) lygybe su $a_s = k\frac{(-1)^s}{s!}$ ir $p_s = ks + k$.

Laplaso transformacija įsistačius gautą (6.7) tankio $f(x)$ išraišką atrodys:

$$\mathscr{L}_X\{f\}(t) = \int_0^\infty e^{-sx} k \sum_{a=0}^{\infty} \frac{(-1)^a x^{ka+k-1}}{a!} dx. \tag{6.8}$$

Pagal Vatsono lemą turime, kad

$$\mathscr{L}_X\{f\}(t) = k \sum_{a=0}^{\infty} \Gamma(ka+k) \frac{(-1)^a}{t^{ka+k} a!} \quad (t \to \infty). \tag{6.9}$$

Pasinaudoję *Matlab* programa galime išskaičiuoti Veibulo Laplaso trasnformacijos reikšmes skirtingiems t.

6.1.1 Pavyzdys. Tarkime, kad Veibulo skirstinio koeficientas $k = 0{,}5$.
Apskaičiuojame Veibulo tankio funkcijos, apibrėžtos formule

$$f(x) = 0{,}5 x^{-0{,}5} e^{-x^{0{,}5}}, \quad x \geq 0, \tag{6.10}$$

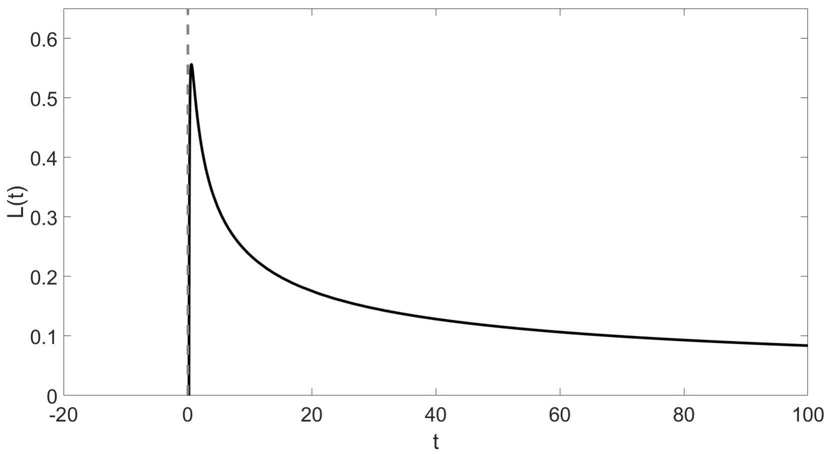
Laplaso transformaciją:

$$\mathscr{L}_X\{f\}(t) = 0{,}5 \sum_{a=0}^{\infty} \Gamma(0{,}5a + 0{,}5) \frac{(-1)^a}{t^{0{,}5a+0{,}5} a!} \quad (t \to \infty). \tag{6.11}$$

Pavyzdžiui, paėmę 4 Laplaso transformacijos sumos eilutės narius gauname

$$\hat{\mathscr{L}}_X\{f\}(t) = 0{,}5 \Big(\frac{\Gamma(0{,}5)}{t^{0{,}5}} - \frac{\Gamma(1)}{t^1} + \frac{\Gamma(1{,}5)}{2! t^{1{,}5}} - \frac{\Gamma(2)}{3! t^2} \Big). \tag{6.12}$$

Pasinaudojant kompiuterine programa *Matlab* brėžiame $\hat{\mathscr{L}}_X\{f\}(t)$:



3 pav.: Aproksimuota Laplaso transformacija Veibulo tankio funkcijai, kai $k = 0{,}5$

Iš grafiko matome, kad aproksimacija nėra tiksli, kai $t \to 0+$.

Patikrinkime, ar Veibulo tankio funkcijos Laplaso transformacijos aproksimacija yra tiksli, kai $t \to \infty$. Paskaičiuosime šios aproksimacijos santykines paklaidas skirtingiems t, o rezultatus pateikiame 2 lentelėje.

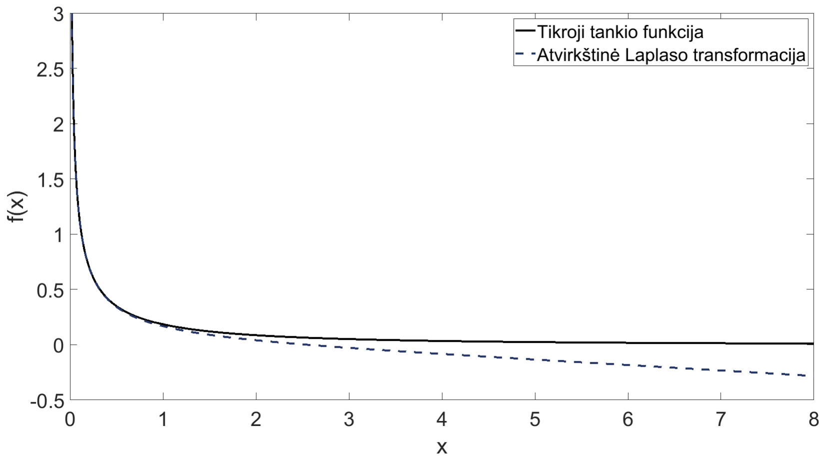
t	$\mathscr{L}_X\{f\}(t)$	$\hat{\mathscr{L}}_X\{f\}(t)$	RE
10	0,236502	0,236422	0,0338
50	0,115926	0,115926	0,0009
100	0,0838362	0,0838359	0,0004
1000	0,0275319	0,0275319	0

2 lentelė: Veibulo Laplaso transformacijos aproksimacijos santykinės paklaidos

Akivaizdu, kad aproksimacija tikslesnė, kai $t \to \infty$.

Pabandysime rasti atvirkštinę Veibulo skirstinio Laplaso transformaciją. Šio tankio funkcijos ieškojimo pavyzdžių tikslas yra pažiūrėti, kiek aproksimacijos turi įtakos atvirkštinių Laplaso transformacijų radimui, tuo atveju, jei tankio funkcija nebūtų žinoma iš anksto. Taigi, pasinaudoję kompiuterine programa *Matlab* su funkcija *ilaplace* lygybei (6.12) gauname, kad

$$\hat{\mathscr{L}}^{-1}\{L\}(x) = \hat{f}(x) = \frac{7982422502469483}{9007199254740992\sqrt{x}\sqrt{\pi}} - \frac{x}{12} + \frac{7982422502469483\sqrt{x}}{18014398509481984\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2}. \tag{6.13}$$



4 pav.: Atvirkštinė Laplaso transformacija Veibulo tankio funkcijai, kai $k = 0{,}5$

Akivaizdu, kad rasta atvirkštinė Laplaso transformacija tikslesnė, kai x artimas 0. Kai $x > 2{,}55$, apskaičiuota atvirkštinė Laplaso transformacija tampa neigiama. Vadinasi, nežinant tikrosios tankio funkcijos, ją suradus iš aproksimuotos Laplaso transformacijos, x dideliam gautume labai netikslią, t.y. nebegauname sunkiauodegio skirstinio tankio.

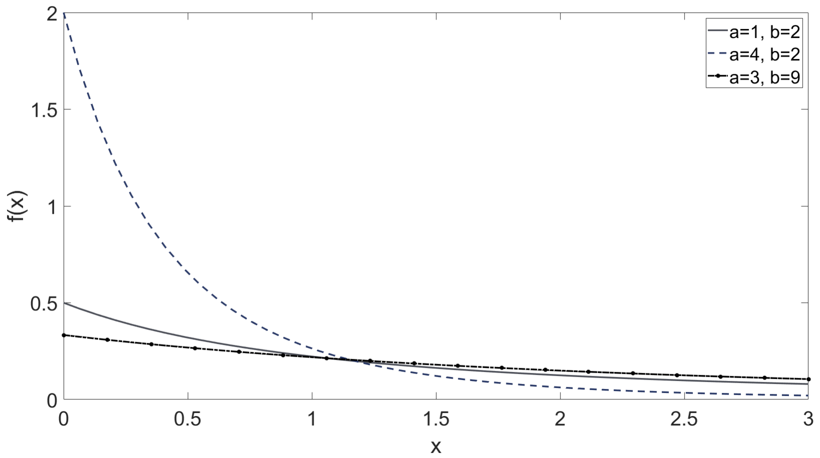
6.2 Pareto skirstinys

Pareto skirstinys plačiai naudojamas rizikos valdyme, taip pat apibūdinti socialinius, kokybės kontrolės, geofizinius bei aktuarinius procesus. Šis skirstinys pirmą kartą paminėtas pajamų pasiskirstymui aprašyti (1895) [36]. Pareto skirstinys labai populiarus dėl paprastos analizinės formos [5].

Pareto skirstinio tankio funkcija yra

$$f(x) = \frac{ab^a}{(b+x)^{a+1}}, \tag{6.14}$$

čia $a > 0, b > 0, x > 0$.



5 pav.: Pareto tankio funkcija skirtingiems a ir b koeficientams

Pareto pasiskirstymo funkcija aprašoma formule:

$$F(x) = 1 - \frac{b^a}{(b+x)^a}. \tag{6.15}$$

Įsitikinkime, kad Pareto skirstinys yra sunkiauodegis.

Taigi, turime

$$\limsup_{x\to\infty} e^{tx}\overline{F}(x) = \limsup_{x\to\infty} e^{tx}\frac{b^a}{(b+x)^a} = b^a \limsup_{x\to\infty} \frac{e^{tx}}{(b+x)^a}.$$

Pasinaudojus Liopitalio taisykle, kad

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

tiek kartų, kad vardiklio $(b+x)^a$ laipsnis a taptų neigiamas. Tuomet

$$\limsup_{x\to\infty} e^{tx}\overline{F}(x) = b^a \limsup_{x\to\infty} \frac{te^{tx}}{a(b+x)^{a-1}} = \cdots = \frac{\infty}{0} = \infty.$$

Taigi Pareto skirstinys yra sunkiauodegis.

Pažiūrėkime, kaip atrodys Pareto skirstinio Laplaso transformacija:

$$\mathscr{L}_X\{f\}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{ab^a}{(b+x)^{a+1}} dx. \tag{6.16}$$

Kaip gautą integralą išreikšti paprastesne forma aprašė Nadarayah ir Kotz [33].
Pažymėję $u = t(b+x)$, turime

$$\mathscr{L}_X\{f\}(t) = \int_0^\infty e^{bt-u} \frac{ab^a}{(\frac{u}{t})^{a+1}} d\Big(\frac{u}{t} - b\Big).$$

Kadangi $x = \frac{u}{t} - b$, tai $dx = \frac{1}{t}du$ ir kai $x = 0$, gausime $u = bt$. Todėl turime

$$\mathscr{L}_X\{f\}(t) = \int_{bt}^\infty e^{bt-u} \frac{ab^a}{(\frac{u}{t})^{a+1}} du = a(tb)^a e^{bt} \int_{bt}^\infty e^{-u} u^{-a-1} du.$$

Panaudoję nupjautinę Gamą funkciją, apibrėžtą kaip

$$\Gamma(a,x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt,$$

Pareto skirstinio Laplaso transformacija gali būti apibrėžta kaip

$$\mathscr{L}_X\{f\}(t) = a(tb)^a e^{bt} \Gamma(-a,bt). \tag{6.17}$$

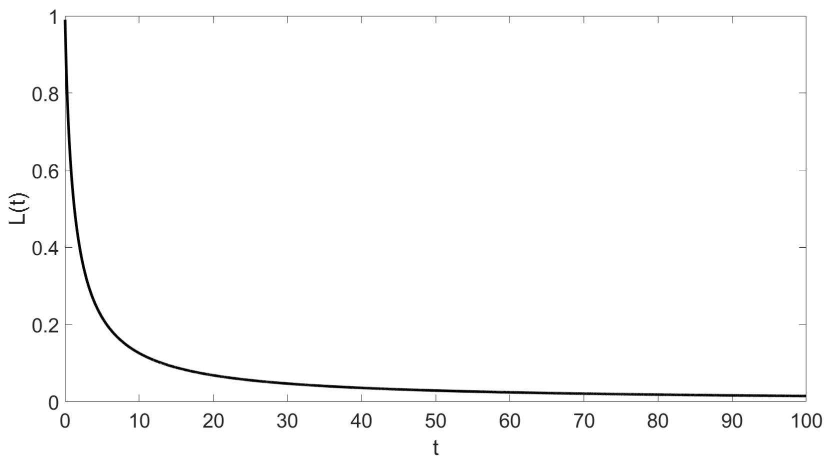
6.2.1 Pavyzdys. Nagrinėkime skirstinį, apibrėžtą tankio funkcija

$$f(x) = \frac{3 \cdot 2^3}{(2+x)^{3+1}} = \frac{24}{(2+x)^4},$$

kurio Laplaso transformacija yra

$$\mathscr{L}_X\{f\}(t) = 3 \cdot (2t)^3 \cdot e^{2t} \cdot \Gamma(-3,2t) = 24t^3 \cdot e^{2t} \cdot \Gamma(-3,2t).$$

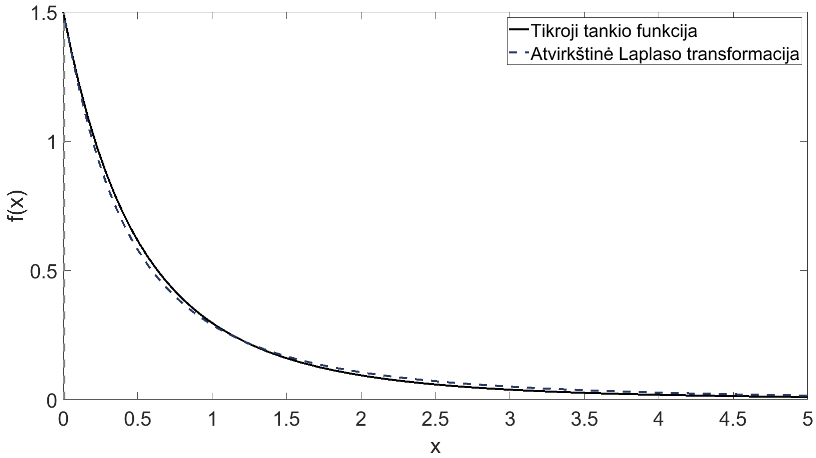
Pasinaudojus kompiuterine programa *Matlab* nubraižome šią Laplaso transformaciją.



6 pav.: Laplaso transformacija Pareto tankio funkcijai, kai $a = 3,\ b = 2$

Kaip ir ankstesniame pavyzdyje, pabandysime surasti Pareto pasiskirstymo funkcijos atvirkštinę Laplaso transformaciją. Pasinaudojus *Matlab* programa funkcija *inverse* kitaip nei ankstesniame pavyzdyje, funkcijos neapskaičiuojame. Todėl Pareto pasiskirstymo funkcijos atvirkštinei Laplaso transformacijai rasti naudosime Gaverio–Stefesto algoritmą, kuris pagal funkcijų seką $f_n(x)$, apibrėžtą (5.2), aproksimuoja $f(x)$.

Pasirenkame $n = 4$ ir pasinaudojame *Matlab* programa parašytu algoritmu [41], kuris sukurtas remiantis 5 skyrelyje aprašytu Gaverio–Stefesto metodu.



7 pav.: Atvirkštinė Laplaso transformacija Pareto tankio funkcijai, kai $a = 3$, $b = 2$

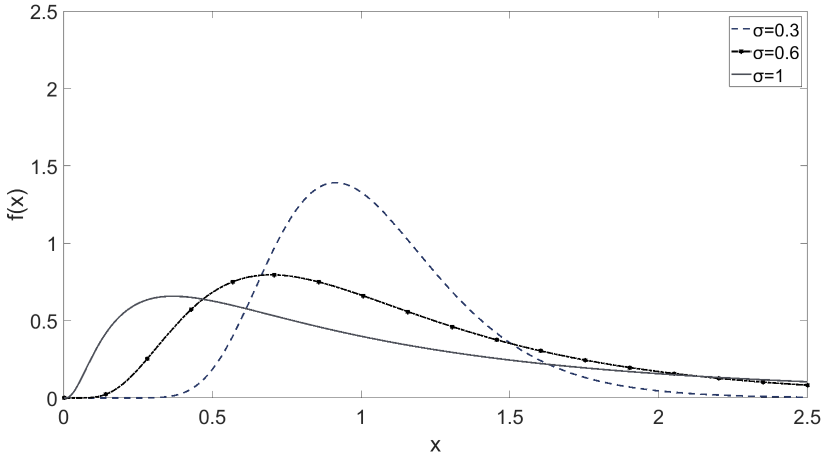
Šiame pavyzdyje Pareto Laplaso transformacija išreikšta ne aproksimuota, o tikslia reikšme, tačiau rasti jos atvirkštinės Laplaso transformacijos negalėjome. Todėl panaudojus Gaverio–Stefesto metodą matome, kad atvirkštinė Laplaso transformacija šiek tiek skiriasi nuo tikros Pareto tankio funkcijos dėl metodo paklaidų, tačiau jų šiame darbe plačiau nenagrinėsime.

6.3 Lognormalusis skirstinys

Lognormalusis skirstinys yra plačiai naudojamas tikimybių teorijoje ir statistikoje. Pavyzdžiui, iš centrinės ribinės teoremos išplaukia, kad atsitiktinių dydžių sandaugos skirstinį galima aproksimuoti naudojantis lognormaliuoju skirstiniu [2]. Šis skirstinys naudojamas įvairiose srityse, pavyzdžiui, inžinerijoje, ekonomikoje, tiksliųjų mokslų srityse, taip pat draudime ir finansuose.

Sakysime, kad atsitiktinis dydis X yra pasiskirstęs pagal lognormalųjį skirstinį, jei $X = e^Y$, kur $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Tuomet atsitiktinio dydžio X tankis apibrėžiamas kaip

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{6.18}$$



8 pav.: Lognormaliojo skirstinio tankio funkcijos

Lognormaliojo skirstinio tankis skirtingiems σ. Kuo jis didesnis, tuo uodega sunkesnė. Pasiskirstymo funkcija lognormaliajam skirstiniui aprašoma formule

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right), \tag{6.19}$$

čia erf – paklaidos funkcija, apibrėžiama kaip

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Įsitikinkime, kad lognormalusis skirstinys turi sunkią uodegą:

$$\limsup_{x\to\infty} e^{tx}\overline{F}(x) = \limsup_{x\to\infty} e^{tx}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right).$$

Kadangi $\ln x \to \infty$, kai $x \to \infty$, tai pagal apskaičiuotą Gauso integralą, apibrėžtą kaip

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

kurio įrodymą galima rasti [8], gausime, kad $\operatorname{erf}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \to \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, kai $x \to \infty$. Iš čia akivaizdu, kad

$$\limsup_{x\to\infty} e^{tx}\overline{F}(x) = \infty.$$

Taigi, lognormalusis skirstinys yra sunkiauodegis.

Atsitiktinio dydžio X, pasiskirsčiusio pagal lognormalųjį dėsnį, Laplaso transformacija yra [2]:

$$\mathbb{E}[\exp(-tX)] = \mathbb{E}[\exp(-t(X_0+\mu)] = e^{-t\mu}\mathbb{E}(\exp(-tX_0) = e^{-t\mu}\mathbb{E}(\exp(-te^{Y_0}), \quad Y_0 \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2).$$

Dėl šio sąryšio Laplaso transformacija gali būti apibrėžiama kaip:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_X\{f\}(t) = \mathbb{E}(\exp(-te^{Y_0}) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\ln^2 x}{2\sigma^2}}dx = \int_0^\infty e^{-te^y}\frac{1}{e^y\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}de^y = \\ = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-te^y-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy.\end{aligned} \tag{6.20}$$

Pažymėkime

$$h_t(y) = te^y + \frac{y^2}{2\sigma^2}.$$

Tada

$$\mathscr{L}_X\{f\}(t) = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-h_t(y)}dy. \tag{6.21}$$

Lognormaliojo skirstinio uždaros formos Laplaso transformacija, kaip ir kitų sunkiauodegių skirstinių, neegzistuoja. S. Assmusen, J. L. Jensen bei L. Rojas–Nandayapa straipsnyje [2] lygino skirtingus metodus, nustatė jų tikslumus. Vienas iš metodų remiasi Laplaso metodu. Panagrinėkime jį plačiau.

Pasinaudoję Laplaso aproksimacija ir apibrėžę, kad $q(x) = 1$, o $h(x) = h_t(y)$ paskaičiuokime $h_t(y)$ pirmą ir antrą išvestines:

$$h'(y) = te^y + \frac{y}{\sigma^2},$$

$$h''(y) = te^y + \frac{1}{\sigma^2}.$$

Pirmąją išvestinę prisilyginame 0 ir gauname, kad

$$-ye^{-y} = t\sigma^2,$$

$$y = -W(t\sigma^2),$$

čia $W(z)$ yra Lamberto W funkcija, apibrėžiama kaip lygties $W(z)e^{W(z)} = z$ sprendinys.

Patikriname, ar teisinga, kad antroji išvestinė yra teigiama. Pagal gautą išraišką akivaizdu, kad $h''(y) > 0, \forall y$, nes $\sigma^2 > 0$ ir $e^y > 0,\forall y$, o $t > 0$. Todėl ir

$$h''(y) = h''(-W(t\sigma^2)) = te^{-W(t\sigma^2)} + \frac{1}{\sigma^2} = \frac{W(t\sigma^2)}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2} > 0.$$

Taigi Laplaso transformacijos aproksimacija yra lygi

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathscr{L}}_X\{f\}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-h_t(y)} dy \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-te^{-W(t\sigma^2)} - \frac{W(t\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \right) \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\frac{W(t\sigma^2)}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+W(t\sigma^2)}} \exp\left(\frac{-t\sigma^2 e^{-W(t\sigma^2)}}{\sigma^2} - \frac{W(t\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+W(t\sigma^2)}} \exp\left(\frac{-W(t\sigma^2)}{\sigma^2} - \frac{W(t\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \right), \quad t \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned} \tag{6.22}
$$

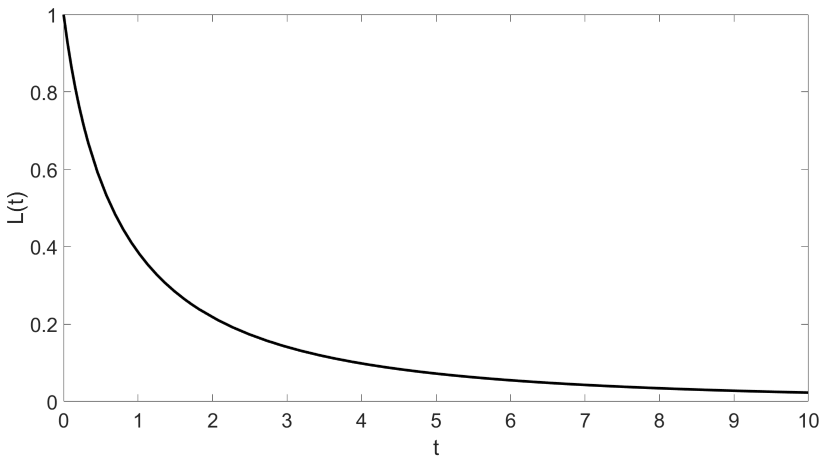
S. Asmusen, J. L. Jensen, L. Rojas–Nandayapa straipsnyje [2] palyginamos transformacijų aproksimacijos pasirenkant skirtingas σ ir t reikšmes. Pastebėta, kad visiems teigiamiems t Laplaso transformacijos aproksimacija yra artima tikrajai. Tačiau tikslesni rezultatai buvo gauti su mažesnėmis σ reikšmėmis.

6.3.1 Pavyzdys. Nagrinėsime skirstinį, kurio tankio funkcija yra

$$
f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{6.23}
$$

t.y. lognormalųjį skirstinį su pasirinktu parametru $\sigma = 1$.

Brėžiame šio skirstinio aproksimuotą Laplaso transformaciją pagal (6.22) formulę.

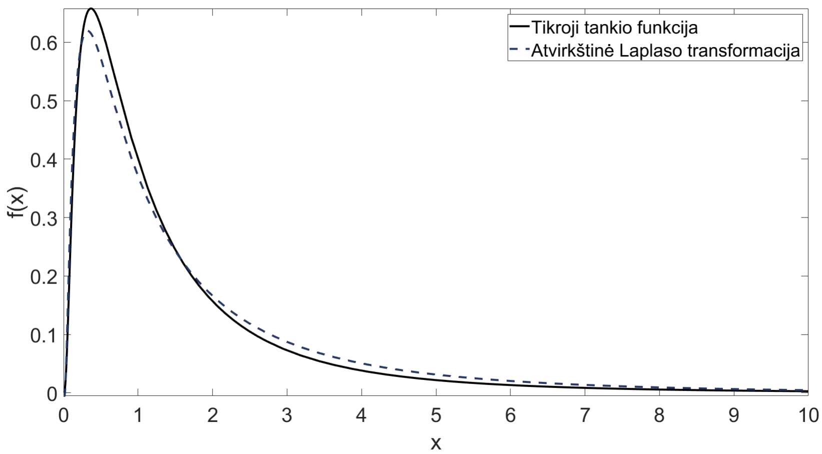


9 pav.: Laplaso transformacija lognormaliojo tankio funkcijai, kai $\sigma = 1$

Iš grafiko matome, kad šiuo atveju yra tenkinama (2.4) sąlyga, kad

$$
\lim_{t \to 0} \hat{\mathscr{L}}_X\{f\}(t) = 1.
$$

Kaip ir ankstesniuose pavyzdžiuose nubrėšime atvirkštinę Laplaso transformaciją.



10 pav.: Atvirkštinė Laplaso transformacija lognormaliojo tankio funkcijai, kai $\sigma = 1$

Pasinaudojus Gaverio–Stefesto algoritmu su $n = 4$ randame atvirkštinę Laplaso transformaciją. Nors paklaidų grafike matosi, tačiau kitaip nei Veibulo skirstinio pavyzdyje, gauta $f(x)$ yra panašesnė į tikrąją tankio funkciją visoje apibrėžimo srityje. Taip yra dėl didesnio tikslumo pačios Laplaso transformacijos visiems teigiamiems t.

7 Archimedo kopulos

Šiame skyrelyje nagrinėsime, kaip kopulos susijusios su Laplaso transformacijomis. Pirmiausiai apsibrėžkime, kas yra kopula ir kada jos taikomos [35]. Trumpai tariant, kopula yra daugiamatė pasiskirstymo funkcija, parodanti priklausomumo struktūras. Daugiamačio priklausomumo modeliavimas yra svarbi sritis aktuariniame moksle, finansuose, todėl kopulos labai išpopuliarėjo (Cherubini [6], Salvadori [37], Frees ir Valdez [16]). Prieš tai daugiamatis priklausomumas buvo modeliuojamas pritaikant daugiamatį normalųjį skirstinį, tačiau minėtose srityse empiriniai duomenys būna netinkami prielaidoms: nėra simetriški, turi sunkias uodegas.

7.1 Apibrėžimas. Kopula, vadinsime funkiją $C : [0{,}1]^2 \to [0{,}1]$, kuri tenkina šias savybes:

- $C(u, 0) = C(0{,}v) = 0, \quad \forall (u{,}v) \in [0{,}1]$
- $C(u, 1) = u, \quad C(1{,}v) = v, \quad \forall (u{,}v) \in [0{,}1]$
- Funkcija C yra 2–nemažėjanti *(angl. 2-increasing)*:

$$C(u_2{,}v_2) - C(u_2{,}v_1) - C(u_1{,}v_2) + C(u_1{,}v_1) \geq 0, \quad \forall u_1{,}u_2{,}v_1{,}v_2 \in [0{,}1], \quad u_1 \leq u_2, \quad v_1 \leq v_2.$$

Nagrinėjant kopulų teoriją, viena svarbiausių, jei ne pati svarbiausia teorema yra Sklaro teorema, pirmą kartą pasirodžiusi 1959 m. [39]. Ji parodo ryšį tarp daugiamačių pasiskirstymo funkcijų ir jų vienmačių ribinių skirstinių.

7.2 Apibrėžimas. Daugiamatė pasiskirstymo funkcija *(angl. joint distribution)* yra funkcija F, su apibrėžimo sritimi $[-\infty, \infty] \times [-\infty, \infty]$, tokia kad:

- F yra 2-nemažėjanti;
- $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$ ir $F(\infty, \infty) = 1$.

Dėl tokios apibrėžimo srities daugiamatei pasiskirstymo funkcijai F galime apibrėžti tokius F_1 ir F_2, kad $F_1(x) = F(x, \infty)$ ir $F_2(x) = F(\infty, y)$.

7.2 Teorema. (Sklaro) ([35, 2.3.3 Lema]) Tegul X – atsitiktinis dydis su pasiskirstymo funkcija F, o F_1 bei F_2 vienmačiai ribiniai skirstiniai. Tada egzistuoja kopula C tokia, kad

$$F(x_1{,}x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)).$$

Kopulų funkcijos išskiriamos į skirtingas klases bei šeimas. Joe [21] ir Nelsen [35] pateikia išsamią jų apžvalgą. Viena plačiausiai tirtų kopulų klasių yra Archimedo kopulos.

7.3 Apibrėžimas. Kopulą $C(u{,}v)$ vadinsime Archimedo kopula, jei ji apibrėžta lygybe

$$C(u{,}v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)), \quad 0 \leq u, \quad v \leq 1. \tag{7.1}$$

čia φ - Archimedo generatorius.

7.4 Apibrėžimas. Archimedo generatoriumi vadinsime tolydžią, griežtai mažėjančią, iškilą į apačią funkciją $\varphi : I = [0{,}1] \to \mathbb{R}^+$, tokią, kad $\varphi(1) = 0$.

7.5 Apibrėžimas. Tarkime, $\varphi : I = [0{,}1] \to \mathbb{R}^+$ tolydi, griežtai mažėjanti funkcija. Tuomet φ pseudo-atvirkštine funkcija *(angl. pseudo-inverse)* vadinsime $\varphi^{[-1]}$, apibrėžtą kaip

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases} \tag{7.2}$$

7.1 Archimedo kopulos ir Laplaso transformacijos

Archimedo kopulos gali būti lengvai generuojamos naudojant Laplaso transformacijos atvirkštinę funkciją, kaip parodė Marshall ir Olkin [30]. Tai yra, jei $F(s)$ yra pasiskirstymo funkcija su $F(0) = 0$ ir $L(t)$ žymi jos Laplaso transformaciją:

$$L(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(s), \quad t \geq 0,$$

tai $\varphi = L^{-1}$ yra Archimedo kopulos generatorius, o pačią kopulą galima rasti pagal (7.1).

Tarkime, kad $F(x)$ yra neneigiamo atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija. Tada egzistuoja vienintelė pasiskirstymo funkcija G, su kuria

$$F(x) = \int_0^{\infty} G^z(x) dH(z) = L(-\ln G(x)), \tag{7.3}$$

čia $L(-\ln G(x))$ yra Laplaso transformacija pasiskirstymo funkcijai $H(z)$, kurios teisingumu galima įsitikinti pasinaudojus pagrindine logaritmų tapatybe $a^{\log_a b} = b$.

Iš (7.3) lygybės galime išreikšti $G(x)$:

$$G(x) = \exp(-L^{-1}(F(x))).$$

Dabar tegul F – dvimatė pasiskirstymo funkcija. Pažymėkime

$$G_k(x_k) = \exp(-L^{-1}(F_k(x_k))), \quad k = \{1{,}2\}.$$

Tada

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \int_0^{\infty} (G_1(x_1) G_2(x_2))^z dH(z) = L(-\ln(G_1(x_1) G_2(x_2)) \\ &= L(-\ln(G_1(x_1) - \ln G_2(x_2))) = L(L^{-1}(F_1(x_1)) + L^{-1}(F_2(x_2))). \end{aligned}$$

Todėl remiantis Sklaro teorema, kopulą galime apibrėžti kaip

$$C(u_1{,}u_2) = L(L^{-1}(u_1) + L^{-1}(u_2)), \quad 0 \leq u_1, \ u_2 \leq 1. \tag{7.4}$$

Taigi, Archimedo kopulas pilnai apibrėžia jų generatoriaus funkcija. Svarbu paminėti, kad Kimberling [22] pateikė būtinąją ir pakankamą sąlygą Archimedo generatoriui apibrėžti [20].

7.1.6 Teorema. (Kimberlingo, [20, 2.2 Teorema]) Tegul $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1]$ yra tolydi ir griežtai mažėjanti su $\varphi(0) = 1$ ir $\varphi(\infty) = 0$. Tada funkcija, apibrėžta (7.1) formule, yra kopula tada ir tik tada, kai φ yra visiškai monotoniška.

Taigi, kopuloms konstruoti galime imti visiškai monotoniškas funkcijas, tenkinančias sąlygas $\varphi(0) = 1$ ir $\varphi(\infty) = 0$. Tokių funkcijų ir Laplaso–Stiltjeso transformacijų ryšį apibrėžia Bernšteino teorema.

7.1.7 Teorema. (Bernšteino, [20, 2.3 Teorema]) Generatorius $\varphi : [0, \infty)$ yra pasiskirstymo funkcijos Laplaso–Stiltjeso transformacija tada ir tik tada, jei φ yra visiškai monotoniška ir $\varphi(0) = 1$.

Populiariausios Archimedo kopulų šeimos yra Franko (Frank, 1979), Gumbelio (Gumbel, 1960) ir Kleitono (Clayton, 1978). Jų kopulų funkcijos žinomos iki vieno parametro, kuris apskaičiuojamas pagal duomenis.

Kleitono kopula gaunama panaudojus Gama skirstinio, kuris yra lengvauodegis, Laplaso transformaciją $L(t) = (1+t)^{-\frac{1}{\theta}}$. Taigi, kopulos generatorius bus lygus $L^{-1}(t) = t^{-\theta} - 1$, o pati kopula apibrėžiama kaip $C(u_1,u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{1/\theta}$, $\theta \geq 0$.

Gumbelio kopula gali būti gauta, kai turime Laplaso transformaciją $L(t) = \exp(-t^{\frac{1}{\theta}})$. Ši kopula apibrėžiama kaip $C(u_1,u_2) = \exp(-(-\ln u_1)^{\theta} + (-\ln u_2)^{\theta})^{\frac{1}{\theta}}$, $\theta \geq 1$, o kopulos generatorius lygus $L^{-1}(t) = (-\ln t)^{\theta}$.

Tačiau ne visuomet Laplaso transformacijos turi paprastas išreikštines formas, tuo įsitikinome ir praeitame skyrelyje. Kopulų taikymas draudimo srityje yra svarbus, nes yra įvykių, kurie sukelia kelis nuostolius vienu metu, todėl reikalingas nuostolių priklausomybės modeliavimas. Vienas iš variantų yra kopulos – technika, kuri buvo plačiai naudojama nuo 1990 metų. Svarbu ištirti, kaip susiję nuostoliai. Teigiamas priklausomumas rodo, kad didelės (arba mažos) atsitiktinių dydžių reikšmės pasirodo kartu, o neigiamas priklausomumas siejamas su tuo, kad didelė vieno atsitiktinio dydžio reikšmė pasirodo su kito atsitiktinio dydžio maža reikšme [35].

7.2 Kopulų generavimas

Dėl minėto Archimedo kopulos generatoriaus ryšio su Laplaso transformacija, galima sugeneruoti šios kopulos imtį, žinant tik jos pasiskirstymą ir nežinant kopulos tankio. Tokį algoritmą pristatė Marshall, Olkin [30]. Šis algoritmas tinkamas generuoti ir didelėms dimensijoms d.

Maršalo–Olkino algoritmas.

- Sugeneruojame $V \sim f = \mathscr{L}^{-1}\{L\}(x)$
- Sugeneruojame d nepriklausomų atsitiktinių dydžių $X_i \sim U[0,1], i \in \{1,\cdots d\}$,
- Randame $U_i = \varphi(-\log(X_i)/V), i \in \{1,...,d\}$.

Pabandysime sukonstruoti kopulas, indukuotas Laplaso transformacijomis, aptartomis 6 skyrelyje.

7.2.1 Pavyzdys. Anksčiau parodėme, kad Pareto skirstinio Laplaso transformaciją galime apibrėžti kaip

$$\mathscr{L}_X\{f\}(t) = a(tb)^a e^{bt}\Gamma(-a,bt). \tag{7.5}$$

Norint sugeneruoti kopulą, reikia rasti jos generatorių, kuris šiuo atveju yra lygus atvirkštinei (7.5) funkcijai. Tačiau dėl sudėtingos šios funkcijos išraiškos, tai nėra paprasta. Jeigu pavyktų tai padaryti, būtų galima nuo sudėtų gautų atvirkštinių funkcijų, kaip argumento, paskaičiuoti Pareto Laplaso transformaciją ir gauti kopulos funkciją.

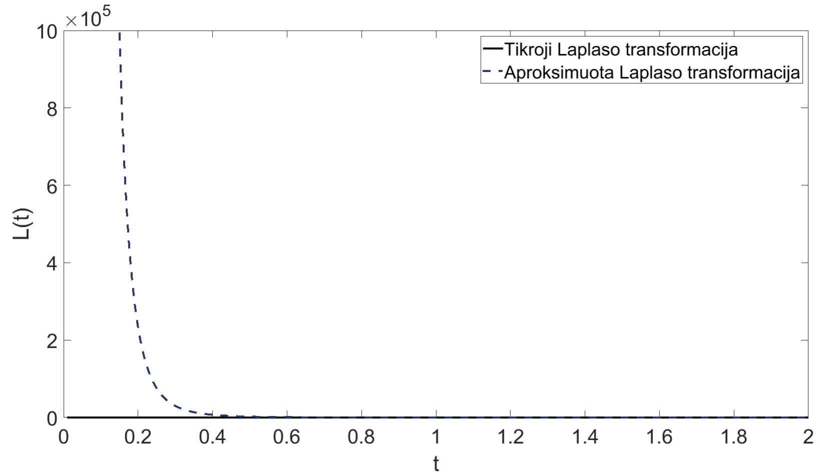
Pareto Laplaso transformacija nebuvo aproksimuota, tačiau pabandysime tai padaryti, kad galėtume rasti jos atvirkštinę funkciją.

Aproksimuoti galime nupjautinę Gamą funkciją $\Gamma(-a,bt)$.

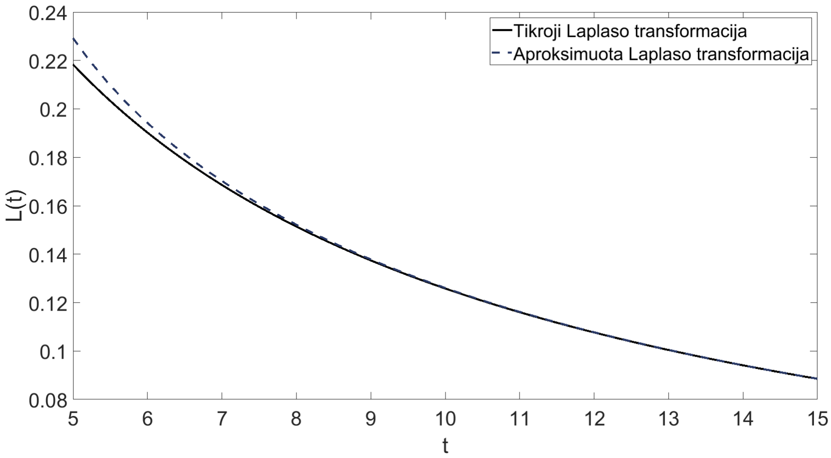
Plačiai naudojama aproksimacija yra eilutė [1]:

$$\Gamma(a,x) \approx x^{a-1}e^{-x}\Big(1 + \frac{a-1}{x} + \frac{(a-1)(a-2)}{x^2} + \cdots\Big), \quad x \to \infty.$$

Paėmus 5 šios eilutės narius, nubraižome grafiką. Matome, kad aproksimacija yra tikslesnė, kai x didesnis, o kai x artimas 0, matome, kad aproksimuota Laplaso transformacija įgyja labai dideles reikšmes ir yra netiksli.



11 pav.: Aproksimuota Laplaso transformacija mažiems t

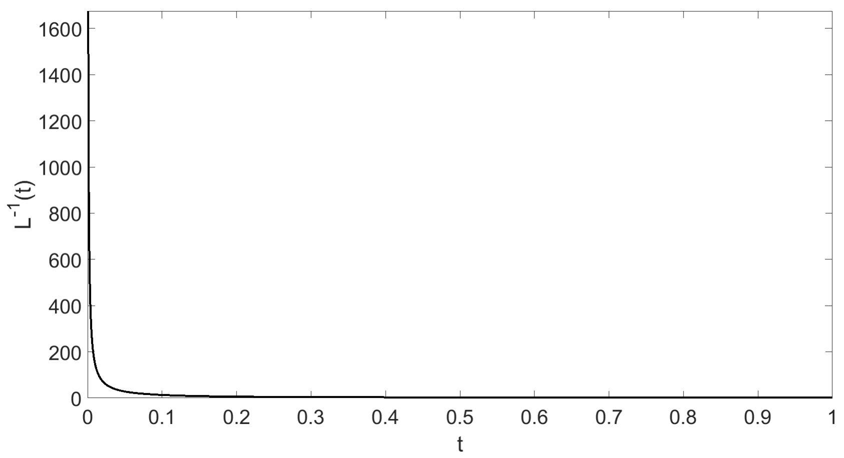


12 pav.: Aproksimuota Laplaso transformacija, kai $t \in [5{,}15]$

Surandame šios aproksimuotos Laplaso transformacijos atvirkštinę funkciją, kuri yra lygi

$$
\begin{aligned}
L^{-1}(t) =& 1/\left(\sqrt[3]{(\frac{t}{15} + \sqrt{\left(\frac{t}{15} - \frac{37}{3375}\right)^2 + \frac{1331}{11390625}} - \frac{37}{3375}} - \right. \\
& \left. - \frac{11}{225\sqrt[3]{\frac{t}{15} + \sqrt{(\frac{t}{15} - \frac{37}{3375})^2 + \frac{1331}{11390625}} - \frac{37}{3375}}} + \frac{2}{15} \right).
\end{aligned}
$$

Nubrėžus grafiką matome, kad Archimedo kopulos generatoriui ši funkcija nėra tinkama, nes netenkinama savybė, kad $\varphi(0) = 1$.

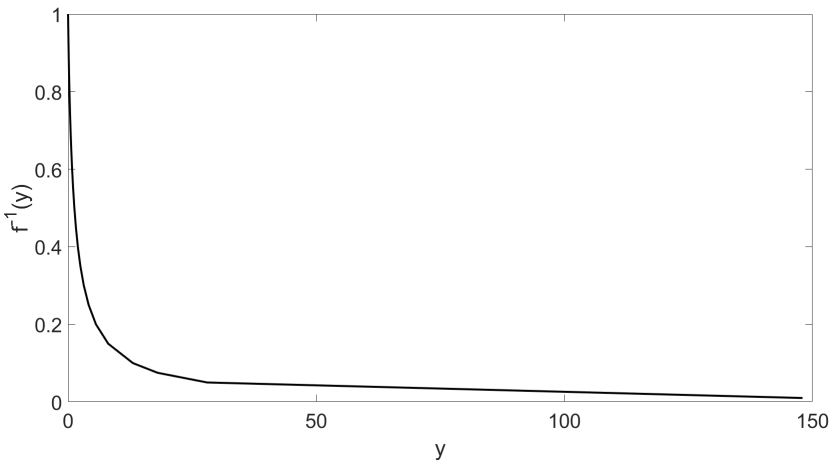


13 pav.: Aproksimuotos Pareto Laplaso transformacijos atvirkštinė funkcija

Reikia rasti nupjautinės Gama funkcijos aproksimaciją, kuri būtų tinkama mažiems x. Kitos literatūroje rastos pateiktos aproksimacijos reikalauja, kad parametras a būtų teigiamas. Tačiau jei rastume būdą tiksliau aproksimuoti funkciją, galėtume radę atvirkštinę funkciją, sukonstruoti kopulą. Kadangi šiuo atveju aproksimavimas yra labai netikslus intervale $[0, 1]$, todėl sugeneruota kopula būtų taip pat labai netiksli.

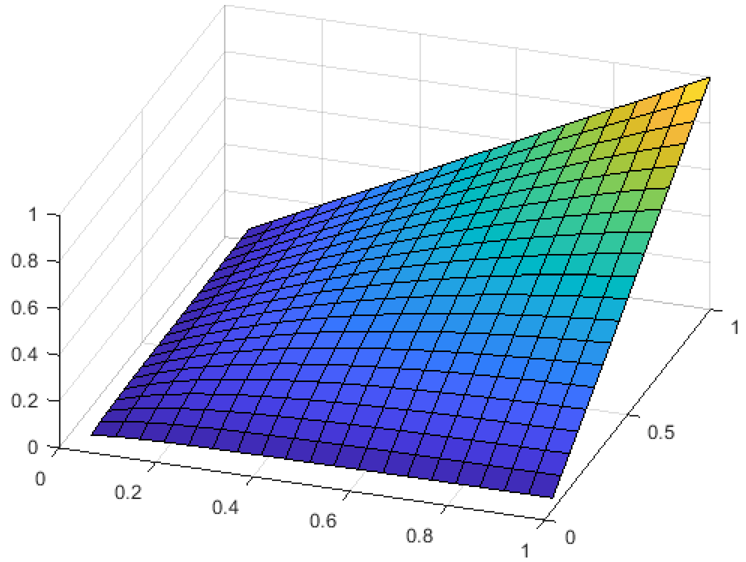
Taigi, kadangi rasta aproksimuotos Laplaso transformacijos atvirkštinė funkcija nėra tinkama, rasime (7.5) funkcijos tikslius taškus sprendžiant lygtį $\mathscr{L}_X\{f\}(t) = y,\ y \in [0{,}1]$.

Pasinaudojus *Matlab* programa, apskaičiuojame ir nubraižome grafiką.



14 pav.: Pareto Laplaso transformacijos atvirkštinė funkcija

Tuomet įsistačius į (7.4) formulę, sugeneruojama kopula, kurios pasiskirstymo funkcija atrodo taip:



15 pav.: Kopula

8 Išvados

Sunkiauodegiai skirstiniai naudojami mažai tikėtinų didelių žalų skirstiniams aprašyti, todėl dėl didesnės rizikos, svarbu ištirti jų priklausomumą. Tam naudojamos kopulos, kurios gali būti konstruojamos naudojant Laplaso transformacijų atvirkštines funkcijas kaip kopulų generatorius. Deja, bet sunkiauodegių skirstinių Laplaso tranformacijų išraiškų sudėtingumas neleidžia paprastai sugeneruoti kopulų funkcijų. Tam gali pagelbėti aproksimavimo metodai. Šiame darbe pateikėme literatūroje rastas sunkiauodegių skirstinių Laplaso transformacijų aproksimacijas: Veibulo skirstinio, remiantis Vatsono lema, lognormaliojo skirstinio – Laplaso aproksimacijos metodu. Jas aprašėme, pateikėme konkrečių pavyzdžių, panagrinėjome jų tikslumą. Įsitikinome, kad Veibulo Laplaso transformacija tikslesnė, kai jos argumentas t – didesnis. Pateikėme būdą, kaip Pareto Laplaso transformaciją išreikšti naudojant Gamą funkciją. Vėliau pritaikius nupjautinės Gama funkcijos asimptotinę eilutę, gavome naują aproksimuotą Pareto Laplaso transformaciją. Nors mažiems Laplaso transformacijų argumentams t gaunamos didžiulės paklaidos, tačiau, kai t didėja, šios aproksimacijos tikslumas išauga. Naudojant šią aproksimaciją, pademonstravome Archimedo kopulų generavimo principą. Deja, bet dėl aproksimacijos netikslumo rasta atvirkštinė Laplaso transformacijos funkcija nebuvo tinkama sukonstruoti Archimedo kopulą. Dėl šios priežasties tyrimas galėtų būti tęsiamas siekiant pagerinti rezultatus, ieškant tinkamesnio aproksimavimo metodo, kuris leistų sukonstruoti kopulą.

Literatūra

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*, New York: Dover publications, 1965, 252–266.

[2] S. Asmussen, J. L. Jensen, L. Rojas–Nandayapa. On the Laplace Transform of the Lognormal Distribution, *Methodology and Computing in Applied Probability*, 2014, 18 (2), 441–458.

[3] P. Bachmann, *Die Analytische Zahlentheorie. Zahlentheorie*, 1894, 2.

[4] R. Chaping. Asymptotic methods, 2016.
https://rc476.user.srcf.net/asymptoticmethods/am_notes.pdf

[5] A. Charpentier, E. Flachaire. Pareto models for risk management, 2019.
https://arxiv.org/abs/1912.11736

[6] U. Cherubini, E. Luciano, W. Vecchiato. *Copula Methods in Finance*, Chichester: John Wiley & Sons, 2004, 312.

[7] D. G. Clayton. A model for association in bivariate life tables and its applications in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence, *Biometrika*, 1978, 65, 141–151.

[8] K. Conrad. The Gaussian Integral.
https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/gaussianintegral.pdf.

[9] J. Das, D. C. Nath. Weibull Distribution as an Actuarial Risk Model: Computation of its Probability of Ultimate Ruin and the Moments of the Time to Ruin, Deficit at Ruin and Surplus Prior to Ruin, *Journal of Data Science*, 2019, 17(1), 161–194.

[10] P. W. Den Iseger. *Fourier and Laplace Transform Inversion with Applications in Finance*, Rotterdam: ERIM, 2014, 22, 59–60.

[11] P. Embrechts, C. Kluppelberg, T. Mikosch. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Berlin: Springer-Verlag, 1997, 33, 648.

[12] L. Euler. De constructione aequationum, *Opera Omnia*, 1744, 22(1), 150–161.

[13] L. Fei. Heavy-Tailed distribution in the presence of Dependence in Insurance and Finance, 2013.
https://core.ac.uk/download/pdf/80771495.pdf

[14] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, John Wiley & Sons, 1971, 2, 439–442.

[15] M. J. Frank. On the simultaneous associativity of $F(x,y)$ and $x + y - F(x,y)$, *Aequationes Math*, 1979, 19, 194–226.

[16] E. Frees, E. Valdez. Understanding relationships using copulas, *North American Actuarial Journal*, 1998, 2, 1–25.

[17] D. J. Gibbons. Approximating Integral Transforms in Probability Theory, 2014.
https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.722.4509&rep=rep1&type=pdf

[18] I. Grattan–Guinnes. "Laplace's integral solutions to partial differential equations". *Pierre-Simon Laplace 1749—1827: A Life in Exact Science*, Princeton: Princeton University Press, 2018, 259–270.

[19] E. J. Gumbel. Distributions des valeurs extremes en plusieurs dimension, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 1960, 9, 171–173.

[20] M. Hofert. Sampling Archimedean copulas, 2007.

https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi/forschung/PreprintServer/2007/preprintmariushofert.pdf

[21] H. Joe. *Multivariate Models and Dependence Concepts*, London: Chapman and Hall, 1997.

[22] C. H. Kimberling. *A probabilistic interpretation of complete monotonicity*, Aequationes Mathematicae, 1974, 10, 152–164.

[23] A. Kuznetsov. On the convergence of ther Gaver–Stehfest Algorithm, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2013, 51.

[24] J. L. Lagrange. *Mémoire sur l'utilité de la méthode*, 1773, 2, 171–234.

[25] E. Landau. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, 1909, 2.

[26] P. S. Laplace. "Mémoire sur la Probabilité des Causes par les évènemens", *Mémoires de Mathematique et de Physique, Presentés à l'Académie Royale des Sciences, Par Divers Savans & Lus Dans ses Assemblées*, 1774, 6, 621–656.

[27] O. Le Courtois, Randrianarivony R. On the Bankruptcy Risk of Insurance Companies, *Finance*, 2013, 34(1), 43–72.

[28] E. Lehmann. *Elements of Large-Sample Theory*, Berkeley: Springer-Verlag New York, 1999.

https://www.esalq.usp.br/departamentos/lce/arquivos/aulas/2011/LCE5866/Springer_-_E.L.Lehmann_-_Elements_of_Large-sample_Theory.pdf

[29] J. A. Malham. An introduction to asymptotic analysis.

http://www.macs.hw.ac.uk/~simonm/ae.pdf

[30] A. W. Marshall, I. Olkin. Families of Multivariate Distributions, *Journal of the American Statistical Association*, 1988, 83, 834–841.

[31] N. Mondal, P. Ghosh. Another asymptotic notation: "Almost", 2013.

https://www.researchgate.net/publication/236248134_Another_Asymptotic_Notation_Almost

[32] Z. N. Morris. Laplace Transform in Probability Distributions and in Pure Birth Processes, 2015.

http://erepository.uonbi.ac.ke/bitstream/handle/11295/95040/Morris_Laplace%20Transform%20in%20Probability%20Distributions%20and%20in%20Pure%20Birth%20Processes.pdf?sequence=1.

[33] S. Nadarajah, S. Kotz. On the Laplace transform of the Pareto distribution, *Queueing Syst*, 2006, 54, 243–244.

[34] L. Rojas–Nandayapa. Risk Probabilities: Asymptotics and Simulation, 2008.

https://data.math.au.dk/publications/phd/2008/imf-phd-2008-lrn.pdf.

[35] R. B. Nelsen. *An Introduction to Copulas*, New York, NY: Springer, 2006.

[36] V. Pareto. *La legge della domanda. In Pareto (Ed.), Ecrits d'conomie politique pure*, Genve: Librairie Droz, 1895, Chapter 11, 295–304.

[37] G. Salvadori, C. D. Michele, N. T. Kottegoda, R. Rosso. Extremes in Nature: An Approach Using Copulas. *Water Science and Technology Library*, Dordrecht, Netherlands: Springer, 2007, 56.

[38] Sergey, Serguei, S. G. Foss, D, Korshunov. Heavy-tailed and Long-Tailed Distributions, *An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions*, 1970, 7–38.

[39] A. Sklar. *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges.* Paris: Inst Statist Univ, 1959, 8, 229–231.

[40] C. G. Small. *Expansions and Asymptotics for Statistics*, Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2010, 195–200.

[41] W. Srigutomo. Gaver–Stehfest algorithm for inverse Laplace transform, *MATLAB Central File Exchange*, 2021.

https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/9987-gaver-stehfest-algorithm-for-inverse-laplace-transform

[42] J. L. Teugels. The class of Subexponential distributions. *Annals of probability*, 1975, 3, 1000–1011.

[43] M. Usabel. Calculating multivariate ruin probabilities via Gaver–Stehfest inversion technique, *Insurance: Mathematics and Economics*, Elsevier, 1999, 25(2), 133–142.

[44] G. Watson. The harmonic functions associated with the parabolic cylinder, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1950, 2, 116–148.