VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA

FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKA

RIZIKOS MATAI: SAVYBĖS IR PRAKTINIO PRITAIKYMO ASPEKTAI

RISK MEASURES: PROPERTIES AND PRACTICAL APPLICATION ASPECTS

Baigiamasis magistro darbas

Autorius: Laura Vyšniauskaitė

VU el. p.: laura.vysniauskaite@mif.stud.vu.lt

Darbo vadovas: Doc. dr. Martynas Manstavičius

Vilnius

2022

Turinys

Rizikos matai: savybės ir praktinio pritaikymo aspektai

Santrauka

Šiame darbe apžvelgiame pageidautinas rizikos mato savybes, dažniausiai praktikoje taikomus rizikos matus – vertės pokyčio riziką ir deficito vidurkį, bei jų įverčius. Remiantis pageidautinomis rizikos mato savybėmis, palyginame šių rizikos matų privalumus ir trūkumus. Daugiau dėmesio sutelkiame į šių rizikos matų įverčių jautrumą pokyčiams duomenyse. Palygindami įverčių jautrumo kreives įsitikiname, kad jautrumas duomenų pokyčiams priklauso ne tik nuo pasirinkto rizikos mato, bet ir nuo įverčio pasirinkimo. Atliekant grįžtamąjį patikrinimą įvertiname ar mažiau jautrūs rizikos matų įverčiai tiksliau įvertina riziką, bei nustatome, kad turimiems duomenims, tiksliausiai riziką įvertinama taikant Stjudento įvertį.

Raktiniai žodžiai : Rizikos matas, suderintieji rizikos matai, iškilumas, komonotoniškumas, jautrumas duomenų pokyčiams, statistinis paaiškinamumas, Vertės pokyčio rizika, Deficito vidurkis, empirinis modeliavimas, Cornish–Fisher įvertis, normalusis skirstinys, Stjudento skirstinys, grįžtamasis patikrinimas.

Risk measures: properties and practical application aspects

Abstract

In this thesis we take a look at the most desirable properties of risk measures, most commonly used risk measures – Value-at-risk and Expected Shortfall as well as their estimators. Based on these properties we highlight advantages and disadvantages of these risk measures. We focus on robustness of risk measure estimators. By comparing sensitivity functions of different estimators we see that robustness does not only depend on the risk measure, but also on the selected estimator. Afterwards we perform backtesting which allows us to see if less sensitive risk estimators lead to more accurate risk assessment as well as to identify that the Student's estimator fits our data the best.

Key words : Risk measure, coherent risk measures, convexity, comotonicity, robustness, elicitability, Value-at-Risk, Expected Shortfall, empirical estimator, Cornish–Fisher estimator, Normal distribution, Student's t-distribution, backtesting.

1 Įvadas

Finansų ir investicijų moksle dažnai susiduriama su poreikiu įvertinti turimų finansinių duomenų riziką. Nors prisiimdami riziką galime gauti tiek teigiamą rezultatą, tiek neigiamą, visgi dažniausiai ši sąvoka turi neigiamą atspalvį. Iš esmės rizikos sąvoka yra sutinkama įvairiuose kontekstuose ir bendruoju atveju gali būti apibrėžiama kaip neigiamų pasekmių atsiradimo galimybė, tačiau finansų srityje šį apibrėžimą galima susiaurinti ir riziką suprasti kaip galimybę investicijai prarasti savo vertę. Norint įvertinti galimus nuostolius, rizika yra matuojama kiekybiškai, t.y. skaičiuojamas rizikos matas, kurio tikslas yra kuo tiksliau įvertinti galimus nuostolius. Kadangi praktikoje yra naudojami skirtingi rizikos matai, bei skirtingi jų įverčiai, todėl svarbu suprasti kokių savybių tikimės iš rizikos mato, ką laikome „geru“ rizikos matu, bei kuris rizikos matas ir jo įvertis yra tinkamiausias turimiems duomenims.

Šio darbo pagrindinis tikslas yra palyginti skirtingų rizikos matų įverčių jautrumą pokyčiams duomenyse ir nustatyti, kuris rizikos mato įvertis yra tiksliausias turimiems duomenims. Vertės pokyčio rizikai ir deficito vidurkiui įvertinti taikysime keturis modelius – empirinį, Cornish–Fisher, aproksimaciją normaliuoju skirstiniu, bei aproksimaciją Stjudento skirstiniu. Pasižiūrėsime, kiek įtakos turi rizikos mato įverčio pasirinkimas vertinant jautrumą pokyčiams duomenyse, bei išsiaiškinsime ar mažiau jautrus įvertis tiksliau įvertina riziką turimiems duomenims.

Teorinėje darbo dalyje pirmiausiai apibrėšime ką laikome rizikos matu ir apžvelgsime pageidautinas rizikos mato savybes. Vėliau panagrinėsime, kuriomis iš šių savybių pasižymi dažniausiai praktikoje naudojami rizikos matai – vertės pokyčio rizika (VaR) ir deficito vidurkis (ES), bei aptarsime jų įverčių skaičiavimo metodus. Praktinėje darbo dalyje pristatysime tiriamus duomenis ir daugiau dėmesio sutelksime į rizikos matų įverčių jautrumą duomenų pokyčiams. Pateiksime įverčių jautrumo kreives bei grįžtamojo patikrinimo rezultatus.

2 Rizikos matai

Rizika ir rizikos matas gali būti suprantami ir interpretuojami skirtingai. Visgi finansinėms institucijoms tokioms kaip bankai ar draudimo bendrovės dažnai yra patogu riziką išreikšti vienu konkrečiu skaičiumi, kadangi tai leidžia lengviau tarpusavyje palyginti skirtingų investicijų riziką bei rizikos vertinimo modelius.

Nagrinėkime atvejį, kai periodo pradžioje atliekama investicija ir mus domina investicijos vertė periodo pabaigoje. Tarkime, kad ekonominių būsenų aibė Ω periodo gale yra baigtinė ir žinoma. Tuomet investuotojo diskontuotą pozicijos periodo gale vertę apibūdins atsitiktinis dydis $X : \Omega \to \mathbb{R}$, o $G = \{X | X : \Omega \to \mathbb{R}\}$ žymės visų galimų pozicijų aibę.

Apibrėžimas 2.1 Rizikos matu vadinsime atvaizdį iš visų rizikų aibės G į realiųjų skaičių aibę $\mathbb{R}$.

Rizikos matą, kurį toliau žymėsime ρ, galima suprasti kaip kapitalo dydį, kuriuo reikia sumažinti arba padidinti poziciją X, kad ji investuotojui arba jį prižiūrinčiai institucijai taptų priimtina. Jei $\rho(X)$ yra teigiamas, tai šis dydis yra sutapatinamas su papildomu kapitalo kiekiu, kurį reikia pridėti prie pozicijos X investuojant į nerizikingą aktyvą. Kuo didesnė rizikos mato reikšmė, tuo didesnė rizika. Kita vertus, jei $\rho(X)$ yra neigiamas, tai šį pinigų dydį galime iš pozicijos X pašalinti ir ji vis tiek išliks priimtina. Taigi rizikos matą galime suprasti kaip apsaugą nuo galimų ateities nuostolių [3].

3 Rizikos matų savybės

Praktikoje yra naudojama keletas skirtingų rizikos matų. Tam kad būtų galima įvertinti ar rizikos matas yra pakankamai „geras“ yra svarbu apsibrėžti pageidaujamas rizikos mato savybes.

3.1 Suderintieji rizikos matai

Pirmą kartą savybes, kurias turėtų tenkinti „geras“ rizikos matas ir suderintojo rizikos mato apibrėžimą pateikė P. Artzner ir bendraautoriai (1999).

Apibrėžimas 3.1 Rizikos matas vadinamas suderintuoju (*angl. coherent*) [3], jei tenkinamos aksiomos:

- Invariantiškumas poslinkiams (*angl. Translation Invariance*):

$$\rho(X + a) = \rho(X) - a, \ \ \forall X \in G, \forall a \in \mathbb{R}; \tag{3.1}$$

- Subadityvumas (*angl. Subadditivity*):

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2), \ \ \forall X_1, X_2 \in G; \tag{3.2}$$

- Teigiamas homogeniškumas (*angl. Positive Homogeneity*):

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \ \ \lambda \geq 0, \ \ \forall X \in G; \tag{3.3}$$

- Monotoniškumas (*angl. Monotonicity*):

$$\rho(X_1) \geq \rho(X_2), \ \ kai\ X_1 \leq X_2, \ \ \forall X_1, X_2 \in G. \tag{3.4}$$

Pirmoji aksioma apie invariantiškumą poslinkio atžvilgiu užtikrina, kad prie pozicijos vertės X pridėjus (arba atėmus) a dydžio kapitalą, trūkstamas papildomas kapitalas $\rho(X)$ sumažinamas (padidinamas) per a dydžio kapitalą. Subadityvumo aksioma užtikrina, kad firmos nebūtų suinteresuotos skaidyti rizikas ir taip sumažinti papildomo trūkstamo kapitalo reikalavimą. Tam kad pozicijos vertės dydis neiškreiptų trūkstamo kapitalo dydžio, kurį būtina sukaupti, svarbu, kad būtų tenkinama teigiamo homogeniškumo aksioma. Paskutinė monotoniškumo aksioma patikina, kad jei pozicijos X_1 vertė yra mažesnė už pozicijos X_2 vertę, tai atitinkamai papildomas kapitalas, kuriuo turime papildyti poziciją X_1, kad ji būtų mums priimtina, yra didesnis už papildomą kapitalą, kuriuo didinsime poziciją X_2.

Praktikoje naudojami rizikos matai nebūtinai tenkina visas keturias anksčiau pateiktas savybes, todėl H. Fölmer ir A. Schied (2011) [10] apibrėžė monetarinių rizikos matų klasę (*angl. monetary measures of risk*). Rizikos matas vadinamas monetariniu, jei jis tenkina monotoniškumo ir invariantiškumo poslinkiui savybes. Šios savybės laikomos minimaliu reikalavimu tam, kad galėtume rizikos matą interpretuoti kaip kapitalo rezervą dėl galimų ateities nuostolių.

3.2 Iškilieji rizikos matai

Teigiamo homogeniškumo savybė pateikta 3.1 apibrėžime neatsižvelgia į pinigų kiekio λ dydį ir teigia, kad tarp pozicijos vertės X ir rizikos mato $\rho(X)$ egzistuoja tiesinė priklausomybė. Visgi tikėtina, kad esant dideliems $\lambda \geq 0$ daugikliams galime susidurti su didesne rizika dėl pozicijos likvidumo ir koncentracijos kas reikštų, kad $\rho(\lambda X) > \lambda\rho(X)$. Todėl atsisakius prieš tai minėtų teigiamo homogeniškumo, bei subadityvumo aksiomų ir įtraukus iškilumo aksiomą galima apibrėžti naują iškilųjų (*angl. convex*) rizikos matų klasę.

Apibrėžimas 3.2.1 Rizikos matas tenkina iškilumo aksiomą (*angl. convexity*), jei visiems $X_1, X_2 \in G$,

$$\rho(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda\rho(X_1) + (1-\lambda)\rho(X_2), \;\; 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{3.5}$$

Apibrėžimas 3.2.2 Rizikos matas vadinamas iškiluoju rizikos matu (*angl. convex risk measure*), jei jis yra monetarinis rizikos matas ir tenkina iškilumo aksiomą.

Tarkime, kad investuotojas gali rinktis iš dviejų investavimo strategijų X_1 ir X_2. Jei investuotojas nuspręstų diversifikuoti savo portfelį ir dalį λ investuoti į X_1, o likusią dalį $(1-\lambda)$ investuoti į X_2, gautume poziciją $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$. Taigi iškilumo aksioma užtikrina, kad diversifikavimas nesukuria papildomos rizikos. Monetariniams rizikos matams iškilumas yra ekvivalentus ir silpnesnei iškilumo aksiomai [11].

Apibrėžimas 3.2.3 Rizikos matas tenkina kvazi-iškilumo aksiomą (*angl. quasi-convexity*), jei

$$\rho(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \max(\rho(X_1),\rho(X_2)), \;\; \forall X_1, X_2 \in G, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{3.6}$$

Galime įsitikinti, kad monetariniams rizikos matams (3.5) yra ekvivalentu (3.6). Iš tikrųjų, dešinioji (3.5) nelygybės pusė akivaizdžiai neviršija

$$\lambda \max(\rho(X_1), \rho(X_2)) + (1-\lambda)\max(\rho(X_1),\rho(X_2)) = \max(\rho(X_1),\rho(X_2)), \tag{3.7}$$

bet kuriam $\lambda \in [0,1]$, t.y. jei galioja (3.5), tai galioja ir (3.6). Kita vertus, bet kurioms dviems pozicijoms, kur $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$, galime rasti $m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tokį $\rho(X_1 - m) = \rho(X_2)$, kad kiekvienam $\lambda \in [0,1]$ gauname

$$\begin{aligned} \rho(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) &\leq \rho(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) + \lambda m \\ &\leq \max(\rho(X_1 - m),\rho(X_2)) = \rho(X_2) = \lambda\rho(X_1) + (1-\lambda)\rho(X_2) + \lambda m. \end{aligned}$$

3.3 Komonotoniški rizikos matai

Komonotoniškas adityvumas yra rizikos mato subadityvumo savybę papildanti aksioma. Apsibrėžkime, ką laikome komonotoniškais atsitiktiniais dydžiais ir komonotonišku adityvumu.

Apibrėžimas 3.3.1 ([8]) Du atsitiktiniai dydžiai X_1 ir X_2 yra komonotoniški (*angl. comonotonic*), jei egzistuoja atsitiktinis dydis Y ir nemažėjančios funkcijos f_1 ir f_2 tokios, kad

$$X_1 = f_1(Y) \text{ ir } X_2 = f_2(Y). \tag{3.8}$$

Jei atsitiktiniai dydžiai X_1 ir X_2 yra komonotoniški, tai reiškia, kad jie visada juda ta pačia kryptimi, t.y. juos sieja tiesioginė priklausomybė.

Apibrėžimas 3.3.2 Rizikos matas ρ yra komonotoniškai adityvus (*angl. comonotonically additive*), jei bet kurioms komonotoniškoms rizikoms X_1 ir X_2 yra teisinga lygybė

$$\rho(X_1 + X_2) = \rho(X_1) + \rho(X_2). \tag{3.9}$$

Jei rizikos matas yra subadityvus ir kartu komonotoniškai adityvus, tai reiškia, kad viena vertus rizikos matas teigiamai vertina diversifikaciją, tačiau visgi nemato diversifikacijos privalumų, jei rizikos yra komonotoniškos [8].

3.4 Skirstiniu pilnai apibrėžiami rizikos matai

Rizikos mato priklausomybė tik nuo rizikos X tikimybinio skirstinio yra viena svarbiausių rizikos mato savybių. Ši savybė leidžia rizikos matų įverčių skaičiavimą išskaidyti į dvi dalis. Pirmiausia yra nustatoma atsitiktinės rizikos X pasiskirstymo funkcija. Vėliau, naudojantis šia pasiskirstymo funkcija apskaičiuojamas rizikos mato įvertis [9].

Apibrėžimas 3.4.1 Rizikos matas ρ yra pilnai apibrėžiamas skirstiniu (*angl. law–invariant*), jei

$$P(X_1 \leq x) = P(X_2 \leq x), \forall x \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \rho(X_1) = \rho(X_2). \tag{3.10}$$

3.5 Jautrumas duomenų pokyčiams

Dar viena svarbi rizikos matų savybė yra jautrumas duomenų pokyčiams (*angl. robustness*). Jautrumas duomenų pokyčiams nusako kaip rizikos matas reaguoja į mažiausių arba didžiausių duomenų, kurie naudojami įvertinti rizikos matą, pokyčius. Paprastai rizikos mato jautrumas duomenų pokyčiams yra suprantamas kaip rizikos mato tolydumas [17].

Apibrėžimas 3.5.1 Rizikos matas ρ yra tolydus (*angl. qualitative robust*) jei kiekvienam $\epsilon > 0$ egzistuoja $\delta > 0$ tokie, kad

$$d(X,Y) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad d(\rho(X),\rho(Y)) \leq \epsilon, \tag{3.11}$$

kur X ir Y yra ateities verčių pasiskirstymo funkcijos ir d atstumo funkcija.

Tolydumo apibrėžimą galima suprasti intuityviai. Jei tarp dviejų pasiskirstymo funkcijų X ir Y atstumas yra labai mažas, tai pageidautina, kad ir atstumas tarp rizikos matų paskaičiuotų nuo šių pasiskirstymo funkcijų būtų pakankamai mažas. Kitaip tariant, pasiskirstymo funkcijoms, kurios yra artimos viena kitai, atsparus išskirtims rizikos matas turėtų priskirti artimus rizikos mato įverčius, t.y reikalaujame rizikos mato tolydumo.

Visgi 3.5.1 apibrėžimas praktikoje nėra dažnai naudojamas. Pirmiausia šis apibrėžimas mums neleidžia rizikos mato įverčio jautrumo duomenų pokyčiams įvertinti kiekybiškai. Taip pat jis gali susidurti su sunkumais, kai skirias pasiskirstymo funkcijų uodegų elgesys. Pasiskirstymo funkcijos gali būti artimos viena kitai pagal atstumo funkciją d, tačiau jų uodegų elgesys gali labai skirtis. Todėl yra labai svarbus atstumo funkcijos pasirinkimas naudojamiems rizikos matams. Rizikos matams, kurie sutelkia dėmesį į rizikos X pasiskirstymo funkcijos uodegą (pvz. Deficito vidurkis (ES)) tolydumas yra vertinamas naudojant Wassersteino atstumo (*angl. Wasserstein distance*) funkciją [8]. Wassersteino atstumo funkciją galime naudoti rizikos matų tolydumui vertinti, kadangi finansų moksle nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai turi baigtinius vidurkius.

Apibrėžimas 3.5.2 Tarkime, kad P ir Q yra du tikimybiniai matai, tuomet Wassersteino atstumas tarp jų yra mažiausias atstumas tarp atsitiktinių dydžių X ir Y, kurių skirstiniai yra P ir Q ($X \sim P, Y \sim Q$) ir $E|X| < \infty$, $E|Y| < \infty$

$$d_W(P,Q) = \inf\{E(|X - Y|) : X \sim P, Y \sim Q\}. \tag{3.12}$$

Apibrėžimas 3.5.3 Tarkime, kad $P_n, n \leq 1$ ir P yra tikimybiniai matai, tokie, kad $X_n \sim P_n, n \leq 1$ ir $X \sim P$. Tuomet rizikos matas ρ yra vadinamas tolydžiu taške X Wassersteino atstumo atžvilgiu, jei

$$\lim_{n\to\infty} d_W(P_n,P) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |\rho(P_n) - \rho(P)| = 0. \tag{3.13}$$

Taip pat pagal pateiktą rizikos mato tolydumo apibrėžimą rizikos matus suskaidome į dvi grupes – tolydžius ir netolydžius arba kitaip – jautrius ir nejautrius duomenų pokyčiams. Praktikoje galime susidurti su skirtingo laipsnio jautrumu duomenų pokyčiams, todėl teisingiau būtų ne priskirti rizikos matą vienai iš šių grupių, bet veikiau lyginti dviejų skirtingų rizikos matų jautrumą duomenų pokyčiams.

Tam, kad būtų galima palyginti rizikos mato jautrumą duomenų pokyčiams R. Cont (2010) pateikė rizikos mato jautrumo funkciją (*angl. sensitivity function*) [6], kuri yra skaičiuojama baigtinėms imtims. Jautrumo funkcija leidžia palyginti, kaip rizikos mato įvertis reaguoja, kai į duomenų rinkinį yra pridedami papildomi duomenys, bei leidžia įvertinti rizikos mato atsparumą išskirtims. Taigi naudodami jautrumo funkciją, galime palyginti pasirinktų rizikos mato įverčio skaičiavimo metodus ir kokią įtaką jie daro jautrumo funkcijos elgesiui.

Apibrėžimas 3.5.4 Rizikos mato ρ jautrumo funkcija laikome funkciją $S(z)$, kuri yra aprašoma formule

$$S(z) = \frac{\hat{\rho}(x_1, \ldots, x_n, z) - \hat{\rho}(x_1, \ldots, x_n)}{\frac{1}{n+1}}, \tag{3.14}$$

čia $z \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\hat{\rho}$ yra rizikos mato įvertis, o $x_1, \ldots, x_n$ žymi duomenų imtį, kuriai skaičiuojamas rizikos mato įvertis.

3.6 Statistinis paaiškinamumas

Paprastai rizikos matai yra apskaičiuojami naudojant istorinius duomenis. Kadangi turimiems duomenims įsivertinti riziką galime naudoti ne tik skirtingus rizikos matus, bet ir skirtingus rizikos matų įverčių skaičiavimo modelius, svarbu įsivertinti pasirinkto modelio tikslumą. Paprastai modelio tikslumą galime įvertinti naudodami vertinimo funkciją.

Statistinio paaiškinamumo (*angl. elicitability*) principą pirmą kartą paminėjo K. Osband (1985), o vėliau šią savybę tyrinėjo F. Lambert ir bendraautoriai (2008), bei T. Gneiting (2011), kuriuo remiantis apsibrėšime statistinio paaiškinamumo savybę [12].

Vertinimo funkcija (*angl. scoring function*) vadiname funkciją $V : I \times I \to [0, \infty)$, kur $I = (0,\infty)$. Tarkime, atsitiktinio dydžio Y pasiskirstymo funkcija yra F, kuri yra sukoncentruota teigiamoje pustiesėje I. Tuomet (daugiareikšmis) funkcionalas T yra atvaizdis $F \mapsto T(F) \subseteq I$. Vertinimo funkcija V yra suderinta (*angl. consistent*) su funkcionalu T, jei

$$\mathbb{E}_F[V(t,Y)] \leq \mathbb{E}_F[V(x,Y)], \tag{3.15}$$

kiekvienai F, kiekvienam $t \in T(F)$ ir kiekvienam $x \in I$.

Vertinimo funkcija V yra griežtai suderinta (*angl. strictly consistent*) su funkcionalu T, jei

$$\mathbb{E}_F[V(t,Y)] = \mathbb{E}_F[V(x,Y)] \quad \Longrightarrow \quad x \in T(F). \tag{3.16}$$

Funkcionalas T tenkina statistinio paaiškinamumo savybę, jei egzistuoja vertinimo funkcija, kuri yra griežtai suderinta su funkcionalu T.

Kelios dažniausiai naudojamos formulės apskaičiuoti $V(x,y)$:

- kvadratinė paklaida: $V(x,y) = (x - y)^2$,
- absoliuti paklaida: $V(x,y) = |x - y|$,

- absoliuti procentinė paklaida: $V(x,y) = |(x-y)/y|$,
- reliatyvi paklaida: $V(x,y) = |(x-y)/x|$,

čia x žymi prognozuotas reikšmes (įverčius), o y – tikrąsias reišmes.

F. Bellini ir V. Bignozzi (2015) [5] pateikė naują statistinio paaiškinamumo apibrėžimą. Funkcionalas T tenkina statistinio paaiškinamumo apibrėžimą, jei egzistuoja vertinimo funkcija V tokia, kad

$$T(F) = \arg\min_x \mathbb{E}[V(x,Y)]. \tag{3.17}$$

Kitame skyriuje kalbėdami apie vertės pokyčio rizikos matą, pateiksime jo vertinimo funkciją su kuria jis tenkina statistinio paaiškinamumo savybę. Nors statistinis paaiškinamumas yra pageidaujama rizikos matų savybė, visgi praktikoje, norint įvertinti skirtingų rizikos matų įverčių skaičiavimo modelius ji yra taikoma retai. Tolimesniuose skyreliuose, kalbėdami apie dažniausiai praktikoje taikomus rizikos matus, aptarsime ir praktikoje naudojamus grįžtamojo patikrinimo (*angl. backtesting*) metodus, kuriais remiantis yra vertinamas rizikos matų įverčių tikslumas.

4 Vertės pokyčio rizika (VaR)

Vienas populiariausias ir praktikoje dažniausiai naudojamas rizikos matas yra vertės pokyčio rizika (*angl. Value-at-Risk, VaR*). Pirmą kartą vertės pokyčio rizikos sąvoka pasirodė 1994 m., o platesnė šio rizikos mato metodologija buvo pateikta „J. P. Morgan“, 1996 m. leidinyje „RiskMetrics“ [14].

Vertės pokyčio rizika apibrėžiama kaip dydis, kuris nurodo minimalų portfelio nuostolį tarp 100α procentų blogiausių atvejų. Formaliai, jei $\alpha \in (0,1)$ ir X yra pozicijos vertė, tai

$$VaR_\alpha(X) = q_\alpha(X) = -\inf\{x : P(X \leq x) > \alpha\}. \tag{4.1}$$

Teiginys 4.1 ([3]) Vertės pokyčio rizikos matas nėra suderintasis rizikos matas, nes nors tenkina:

(a) invariantiškumo poslinkiams

(b) teigiamo homogeniškumo

(c) monotoniškumo

savybes, tačiau bendruoju atveju netenkina subadityvumo savybės.

Be aukščiau išvardintų savybių vertės pokyčio rizikos matas tenkina iškilumo, komonotoniško adityvumo savybes, yra tolydus, bei pilnai apibrėžiamas skirstiniu. Vienas didžiausių VaR rizikos mato trūkumų yra tai, kad jis nėra suderintasis, nes bendruoju atveju netenkinama subadityvumo savybė, t.y. rizikų apjungimas sukuria papildomą riziką. Taip pat VaR nesuteikia informacijos apie tai kokio dydžio nuostolius galima patirti 100α procentų blogiausių, kadangi nepriklauso nuo skirstinio uodegos formos.

Galime panagrinėti pavyzdį ir įsitikinti, kad vertės pokyčio rizikos matas nėra subadityvus [7]. Tarkime, kad ϵ ir η yra nepriklausomi a.d., $\alpha = 0{,}01$ ir laikykime, kad aktyvai X ir Y nepriklausomi, vienodai pasiskirstę a.d., kurie yra pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį, tačiau su maža tikimybe gali patirti didesnių svyravimų

$$X = \epsilon + \eta, \quad \epsilon \sim N(0{,}1), \qquad \eta = \begin{cases} 0, & \text{su tikimybe } \ 0{,}991; \\ -10, & \text{su tikimybe } \ 0{,}009. \end{cases}$$

Tuomet galime matyti, kad

$$\begin{aligned} F_X(x|\eta) &= P(X \leq x|\eta) = P(\epsilon \leq x - \eta|\eta) \\ &= \Phi(x-\eta) = \begin{cases} \Phi(x), & \text{su tikimybe } 0{,}991; \\ \Phi(x+10), & \text{su tikimybe } 0{,}009. \end{cases} \end{aligned}$$

Paskaičiavę vertės pokyčio rizikos matą aktyvams X ir Y, gauname, kad $VaR_{0{,}01}(X) = VaR_{0{,}01}(Y) = 3{,}09$. Iš tiesų,

$$\begin{aligned} P(\epsilon + \eta \leq x) &= P(\epsilon + 0 \leq x)P(\eta = 0) + P(\epsilon - 10 \leq x)P(\eta = -10) \\ &= P(\epsilon \leq x) \cdot 0{,}991 + P(\epsilon \leq x + 10) \cdot 0{,}009 \\ &= \Phi(x) \cdot 0{,}991 + \Phi(x+10) \cdot 0{,}009 = 0{,}01. \end{aligned}$$

Jei $x = -5$, tuomet $\Phi(x)$ yra apytiksliai lygus 0, o $\Phi(x+10)$ apytiksliai lygus 1, taigi gauname mažiau nei 0,01. Kita vertus, kai $x = 0$, tuomet $\Phi(x) = 0{,}5$, o $\Phi(x+10)$ apytiksliai lygus 1, taigi gauname daugiau nei 0,01. Vadinasi x reikšmė turėtų būti intervale $(-5{,}0)$. $\Phi(x+10)$ šiame intervale yra apytiksliai lygus 1, todėl gauname

$$\Phi(x)\cdot 0{,}991 + 0{,}009 = 0{,}01,$$
$$\Phi(x) = 0{,}001,$$
$$x = \Phi^{-1}(0{,}001) = 3{,}09.$$

Analogiškai užsirašome ir sumos $X+Y$ pasiskirstimo funkciją

$$F_{X+Y}(x|\eta) = \begin{cases} \Phi(x), & \text{su tikimybe } \ 0{,}982; \\ \Phi(x+10), & \text{su tikimybe } \ 0{,}017838; \\ \Phi(x+20), & \text{su tikimybe } \ 0{,}000081. \end{cases}$$

Paskaičiavę vertės pokyčio rizikos matą aktyvų X ir Y sumai gauname, kad $VaR_{0{,}01}(X+Y) = 9{,}8$. Taigi įsitikinome, kad vertės pokyčio rizikos matas nėra subatyvus, nes $VaR_{0{,}01}(X+Y) = 9{,}8 > VaR_{0{,}01}(X) + VaR_{0{,}01}(Y) = 6{,}18$.

Kita vertus, jei $X \sim N(0{,}1)$ ir $Y \sim N(0{,}1)$, gauname, kad

$$VaR_{0{,}01}(X) = VaR_{0{,}01}(Y) = \Phi^{-1}(0{,}01) = 2{,}32635.$$

Tuomet $X+Y \sim N(0{,}2)$, todėl

$$VaR_{0{,}01}(X+Y) = 4{,}65270 = VaR_{0{,}01}(X) + VaR_{0{,}01}(Y).$$

Taigi matome, kad jei aktyvai X ir Y yra pasiskirstę pagal normalujį skirstinį, subadityvumo savybė vertės pokyčio rizikos matui yra tenkinama.
Iš tiesų, bendruoju atveju, jei $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ir $\alpha < \frac{1}{2}$, turime

$$\mathbb{P}(X \le x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \alpha.$$

Sprendžiame lygtį

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha).$$

Gauname, kad

$$x = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha).$$

Taigi galime užrašyti VaR formulę, kai $X \sim N(\mu,\sigma)$, bendruoju atveju

$$VaR_\alpha(X) = -(\mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)).$$

Taip pat galime parodyti, kad jei $X \sim N(\mu_X,\sigma_X^2)$ ir $Y \sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$, tai subadityvumo aksioma galios ir bendruoju atveju:

$$X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_{X+Y}^2)$$
$$\sigma_{X+Y}^2 \leq D(X) + D(Y) + 2\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} = (\sqrt{D(X)} + \sqrt{D(Y)})^2 = (\sigma_X + \sigma_Y)^2$$
$$\sigma_{X+Y} \leq \sigma_X + \sigma_Y$$

Pasinaudojame šia nelygybe ir tuo, kad kai $\alpha < \frac{1}{2}$ turime $\Phi^{-1}(\alpha) < 0$, gauname, kad

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(X+Y) &= -(\mu_X + \mu_Y + \sigma_{X+Y}\Phi^{-1}(\alpha)),\\ &\leq -(\mu_X + \mu_Y + (\sigma_X + \sigma_Y)\Phi^{-1}(\alpha)),\\ &= VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y). \end{aligned}$$

Teiginys 4.3 Vertės pokyčio rizikos matas $VaR_\alpha(Y)$ tenkina statistinio paaiškinamumo savybę, kai vertinimo funkcija $S(x,y)$ yra lygi

$$S(x,y) = (\mathbb{1}_{x\geq y} - \alpha)(x - y).$$

Remiantis (3.19) formule turime, kad

$$VaR_\alpha(Y) = \arg\min_x \mathbb{E}[(\mathbb{1}_{x\geq y} - \alpha)(x - Y)].$$

Visgi praktikoje ši vertės pokyčio rizikos savybė yra naudojama retai. Vienas dažniausiai praktikoje naudojamas VaR įverčių grįžtamojo patikrinimo metodas yra atliekamas skaičiuojant kiek buvo kritimų žemiau VaR įverčio ir palyginant su planuotu kritimų skaičiumi pagal pasirinktą α-lygmenį. Plačiau šį grįžtamojo patikrinimo metodą ir jo taikymą apžvelgsime 6.3 skyrelyje.

4.1 Vertės pokyčio rizikos (VaR) įvertinimo metodai

Vertės pokyčio riziką galima įvertinti naudojant parametrinius arba neparametrinius metodus. Parametriniai metodai daro prielaidą apie duomenų pasiskirstymą pagal tam tikrą skirstinį ir yra nesudėtingas būdas įvertinti VaR reikšmes, tačiau yra labai svarbu kuo tiksliau įsivertinti skirstinį ir jo parametrus. Naudojant neparametrinius metodus išvengiama rizikos klaidingai aproksimuoti duomenis pasirinktu skirstiniu, tačiau jei imtyje yra vienas ar keli didesni nuostoliai jie gali daryti didelę įtaką neparametriniam VaR įverčiui. Toliau šiame skyriuje apžvelgsime vienus populiariausių parametrinius ir neparametrinius metodus naudojamus vertės pokyčio rizikos įverčiui apskaičiuoti.

Empirinis VaR modeliavimas. Tai vienas populiariausių neparametrinių vertės pokyčio rizikos skaičiavimo metodų. Šio modeliavimo metu istorinės grąžos yra išrikiuojamos didėjimo tvarka, randamas apatinis α- kvantilis ir daroma prielaida, kad rizikos atžvilgiu istorija kartojasi, t.y. galime tikėtis, kad ateityje grąžos ir tuo pačiu nuostoliai bus panašūs į buvusius praeityje.

Tarkime, kad imties dydis yra n, o pasikliovimo lygmuo yra α. Tuomet empirinis VaR įvertis apskaičiuojamas pagal formulę

$$\widehat{VaR}_{\alpha}^{emp}(x) = -(x_{(\lfloor h \rfloor)} + (h - \lfloor h \rfloor)(x_{(\lfloor h \rfloor + 1)} - x_{(\lfloor h \rfloor)})), \tag{4.2}$$

čia $x_{(k)}$ yra k-oji pozicinė imties $x = (x_1, \ldots, x_n)$ statistika, reikšmė $\lfloor z \rfloor$ žymi skaičiaus $z \in \mathbb{R}$ sveikąją dalį, o $h = \alpha(n-1) + 1$.

Aproksimacija normaliuoju skirstiniu. Vienas populiariausių parametrinių VaR modeliavimo metodų, kuriuo gautas įvertis literatūroje dažnai vadinamas Gauso įverčiu. Naudojant šį metodą daroma prielaida, kad duomenys yra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį. Šis metodas yra ganėtinai paprastas, kadangi reikia įsivertinti tik turimų duomenų vidurkį ir standartinį nuokrypį. Formaliai įvertis naudojant aproksimaciją normaliuoju skirstiniu apskaičiuojamas taikant formulę

$$\widehat{VaR}_{\alpha}^{norm}(x) = -(\bar{x} + \bar{\sigma}(x) Z_c), \tag{4.3}$$

čia $\bar{x}$, $\bar{\sigma}(x)$ atitinkamai žymi imties $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vidurkį ir standartinį nuokrypį, o $Z_c = \Phi^{-1}(\alpha)$ yra atvirkštinė standartinio normaliojo skirstinio pasiskirstymo funkcija.

Cornish–Fisher įvertis. Dažnai finansuose susiduriame su skirstiniais, kurie yra nesuderinami su normaliuoju skirstiniu. Dėl šios priežąsties įvertis, kuris atsižvelgia į skirstinio ekscesą (*angl. kurtosis*) ir asimetrijos koeficientą (*angl. skewness*) tikėtina gali tiksliau įvertinti riziką. P. Zangari (1996) pateikė VaR įvertį, kuris remiasi Cornish–Fisher skleidiniu ir atsižvelgia į minėtus skirstinio ekscesą ir asimetrijos koeficientą [18]. Cornish–Fisher įvertis yra aprašomas formule

$$\widehat{VaR}_{\alpha}^{cf}(x) = -(\bar{x} + \bar{\sigma}(x) Z_{cf}), \tag{4.4}$$

čia Z_{cf} yra apskaičiuojamas pagal formule

$$Z_{cf} = Z_c + \frac{(Z_c^2 - 1)S}{6} + \frac{(Z_c^3 - 3Z_c)K}{24} - \frac{(2Z_c^3 - 5Z_c)S^2}{36}, \tag{4.5}$$

čia S žymi skirstinio asimetrijos koeficientą, o K – skirstinio ekscesą.

Pateiktas Cornish–Fisher skleidinys (4.7) yra prasmingas [13], kai $\mathbb{E}(X^3) < \infty$, $\mathbb{E}(X^4) < \infty$, S yra mažiau už $\sqrt{2} - 1 \approx 2{,}485$ ir K reikšmė yra tarp

$$\frac{1 + 11S^2 - \sqrt{S^4 - 6S^2 + 1}}{6} \leq K \leq \frac{1 + 11S^2 + \sqrt{S^4 - 6S^2 + 1}}{6} \tag{4.6}$$

Beje, kadangi normaliojo skirstinio asimetrijos koeficientas ir ekscesas yra lygūs nuliui, tai matome, kad normaliajam skirstiniui Cornish–Fisher įvertis sutampa su Gauso įverčiu.

Aproksimacija Stjudento skirstiniu. Stjudento skirstinys yra panašus į normalųjį skirstinį, tačiau pasižymi sunkesnėmis uodegomis. Kadangi, kaip jau minėjome, finansuose susiduriame su skirstiniais, kurie pasižymi sunkesnėmis uodegomis, todėl aproksimacija Stjudento skirstiniu galėtų padėti tiksliau įverti riziką, lyginant su aproksimacija normaliuoju skirstiniu. Stjudento skirstinį aprašo trys parametrai – vidurkis (μ), standartinis nuokrypis (σ), bei laisvės laipsniai (df). Laisvės laipsniai yra susieti su skirstinio ekscesu [2] ir gali būti apskaičiuojami naudojantis formule

$$\hat{\hat{df}} = 4 + \frac{6}{K}, \quad K > 3. \tag{4.7}$$

Tuomet VaR Stjudento įvertis yra apibrėžiamas

$$\widehat{VaR}_{\alpha}^{t}(x) = -\left(\bar{x} + \sqrt{\frac{\hat{df} - 2}{\hat{\hat{df}}}} \bar{\sigma}(x) t_{\hat{df},\alpha}\right), \tag{4.8}$$

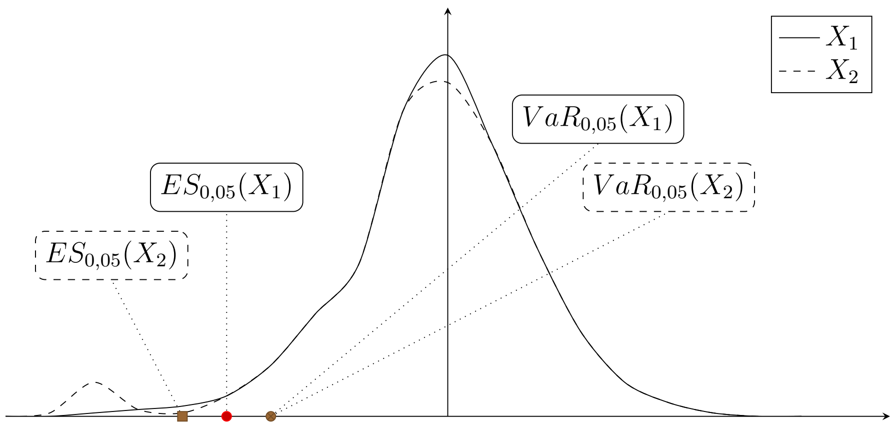
čia $t_{\hat{df},\alpha}$ žymi Stjudento skirstinio su $\hat{df}$ laisvės laipsniais α lygmens kvantilį.

5 Deficito vidurkis (ES)

Deficito vidurkis (*angl. Expected Shortfall, ES*) yra pagrindinė alternatyva prieš tai aprašytam vertės pokyčio rizikos matui (VaR). Literatūroje deficito vidurkis kartais dar vadinamas sąlygine vertės pokyčio rizika (*angl. Conditional Value–at–Risk, CVaR*) arba vidutine vertės pokyčio rizika (*angl. Average Value-at-Risk, AVaR*). Deficito vidurkis yra 100α procentų blogiausių grąžų vidurkis. Formaliai ES tolydžiam skirstiniui galime aprašyti formule

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_u(X)du. \tag{5.1}$$

Vienas pagrindinių ES privalumas lyginant su VaR yra tai, kad ES atsižvelgia į visą skirstinio uodegą ir suteikia informacijos apie nors galbūt ir mažai tikėtinus, tačiau didelius galimus nuostolius.



1 pav.: $VaR_{0,05}$ ir $ES_{0,05}$ palyginimas.

Teiginys 5.1 ([3]) Deficito vidurkis yra suderintasis rizikos matas, nes tenkina:

(a) invariantiškumo poslinkiams

(b) teigiamo homogeniškumo

(c) monotoniškumo

(d) subadityvumo

savybes.

Kadangi ES tenkina ir iškilumo, komonotoniškumo savybes, yra pilnai apibrėžiamas skirstiniu, bei tolydus, todėl gali būti laikomas gera alternatyva VaR. Visgi deficito vidurkis sulaukia ir kritikos.

Teiginys 5.1 ([12]) Deficito vidurkio rizikos matas netenkina statistinio paaiškinamumo savybės.

Visgi kaip jau minėjome 3.6 skyrelyje, praktikoje ši savybė naudojama retai. C. Acerbi ir B. Szekely (2014) [1] pateikė tris metodus, kurie galėtų būti naudojami atliekant ES grįžtamąjį patikrinimą. Šiame darbe ES grįžtamąjį patikrinimą atliksime remdamiesi antruoju metodu.

Tarkime, kad nagrinėjame investicinių grąžų rinkinį ir X_t žymi pozicijos X grąžą laiko momentu $t = 1,\ldots,T$. Indikatoriaus funkcija $I_t = \mathbb{1}_{\{X_t < -VaR_\alpha(X)\}}$, parodys kiek buvo X_t reikšmių viršijančių VaR. ES galime užrašyti kaip nesąlyginį vidurkį

$$ES_{\alpha,t} = -\mathbb{E}\left[\frac{X_t I_t}{\alpha}\right]. \tag{5.2}$$

Tuomet testo statistika Z yra aprašoma formule

$$Z(\mathbf{X}) = \sum_{t=1}^{T} \frac{X_t I_t}{T\alpha ES_{\alpha,t}(X)} + 1, \tag{5.3}$$

čia $\mathbf{X}$ žymi grąžų vektorių $(X_1,\ldots,X_T)$. Pažymėkime F_t atsitiktinės grąžos X_t pasiskirstymo funkciją, o P_t tegu žymi pasiskirstymo funkciją reikšmių, kuriomis remiantis skaičiuojamas ES įvertis. Taip pat, $P_t^{[\alpha]} = \min(1,P_t(x)/\alpha)$, kur $x < VaR_{\alpha,t}$ žymės skirstinio uodegos pasiskirstymo funkciją. Tuomet testo nulinė hipotezė bus

$$H_0 : P_t^{[\alpha]} = F_t^{[\alpha]}, \forall t \tag{5.4}$$

ir alternatyvi hipotezė

$$H_1 : \; ES^F_{\alpha,t} \geq ES_{\alpha,t}, \forall t \text{ ir } > \text{kuriam nors } t \tag{5.5}$$

$$VaR^F_{\alpha,t} \geq VaR_{\alpha,t}, \forall t \tag{5.6}$$

Jei $\mathbb{E}[Z] = 0$, tuomet nulinė hipotezė yra neatmetama, kitu atveju, jei $\mathbb{E}[Z] < 0$, tai parodo, kad modelis nuvertina riziką.

5.1 Deficito vidurkio (ES) įvertinimo metodai

Analogiškai kaip ir vertės pokyčio rizikos matui, deficito vidurkio įvertį galime paskaičiuoti keliais skirtingais metodais:

Empirinis ES modeliavimas. Vienas paprasčiausių neparametrinių metodų apskaičiuoti deficito vidurkį. Empirinis deficito vidurkio įvertis yra apskaičiuojamas pagal formulę

$$\widehat{ES}_{\alpha}^{emp}(x) = -\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{\{x_i + VaR_{\alpha}^{emp}(x) < 0\}}}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i + VaR_{\alpha}^{emp}(x) < 0\}}}\right). \tag{5.7}$$

Aproksimacija normaliuoju skirstiniu. Jei darome prielaidą, kad duomenys yra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį, tuomet deficito vidurkį galime aprašyti formule

$$\widehat{ES}_{\alpha}^{norm}(x) = -\left(\bar{x} + \bar{\sigma}(x)\frac{\phi(Z_c)}{\alpha}\right), \tag{5.8}$$

čia $Z_c = \Phi^{-1}(\alpha)$ yra atvirkštinė standartinio normaliojo skirstinio pasiskirstymo funkcija, o ϕ žymi standartinio normaliojo skirstinio tankio funkciją.

Cornish–Fisher ES įvertis. Jei duomenys pasižymi sunkesnėmis uodegomis lyginant su normaliuoju skirstiniu, tuomet galime naudoti Cornish–Fisher deficito vidurkio įvertį, kuris yra aprašomas formule

$$\widehat{ES}_{\alpha}^{cf}(x) = -\left(\bar{x} + \bar{\sigma}(x)\frac{\phi(Z_{cf})}{\alpha}\right), \tag{5.9}$$

kur

$$Z_{cf} = 1 + \frac{Z_c S}{6} + \frac{(Z_c^2 - 1)K}{24} - \frac{(1 - 2Z_c^2)S^2}{36}, \tag{5.10}$$

čia S žymi skirstinio asimetrijos koeficientą, o K – skirstinio ekscesą [4].

Aproksimacija Stjudento skirstiniu. Jei darome prielaidą, kad duomenys yra pasiskirstę pagal Stjudento skirstinį, tuomet deficito vidurkį galime aprašyti formule

$$\widehat{ES}_{\alpha}^{t}(x) = -\left(\bar{x} + \bar{\sigma}(x)\frac{\hat{df} + (T^{-1}(\alpha))^2}{\hat{df} - 1}\frac{\tau(T^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha}\right), \tag{5.11}$$

čia $\hat{df}$ žymi laisvės laipsnius, $T^{-1}(\alpha)$ yra standartinio Stjudento skirstinio α-lygmens kvantilis, o $\tau(x)$ yra standartinio Stjudento skirstinio tankio funkcija [15].

Aukščiau pateiktose formulėse $\bar{x}$, $\bar{\sigma}(x)$ atitinkamai žymi imties $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vidurkį ir standartinį nuokrypį.

6 Praktinė dalis

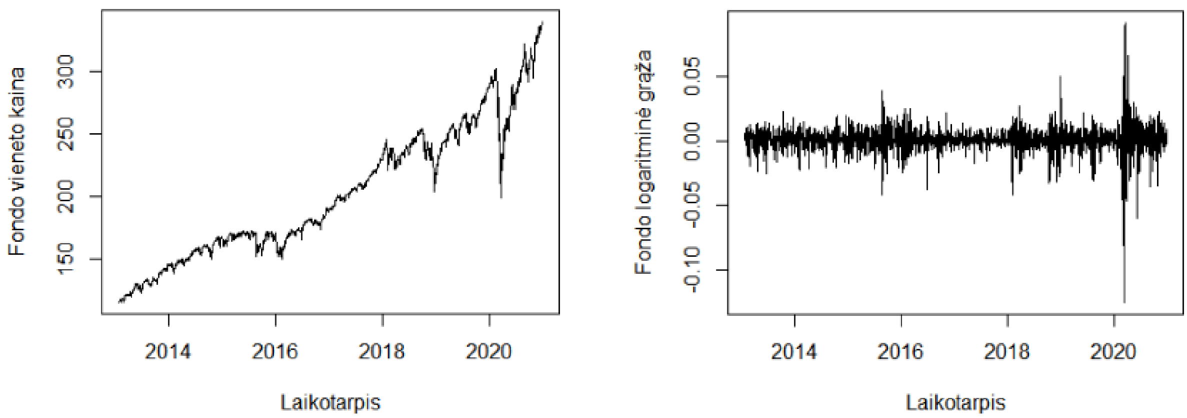
Praktinėje dalyje palyginsime aukščiau aprašytų rizikos matų ir jų įverčių jautrumą išskirtims (*angl. outlier*) duomenyse. Vėliau atliksime rizikos matų įverčių grįžtamąjį patikrinimą bei įvertinsime ar mažiau jautrūs rizikos matų įverčiai geriau pasirodo grįžtamajame patikrinime.

6.1 Duomenys

Atliekant skaičiavimus naudosime biržoje prekiaujamo fondo Vanguard S&P 500 (VOO) vieneto kainas nuo 2013-01-23 iki 2020-12-31 imtinai. Duomenų rinkinį sudaro 2001 stebėjimas. Turėdami fondo vieneto kainas, galime apskaičiuoti logaritmines grąžas pagal formulę

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right), \tag{6.1}$$

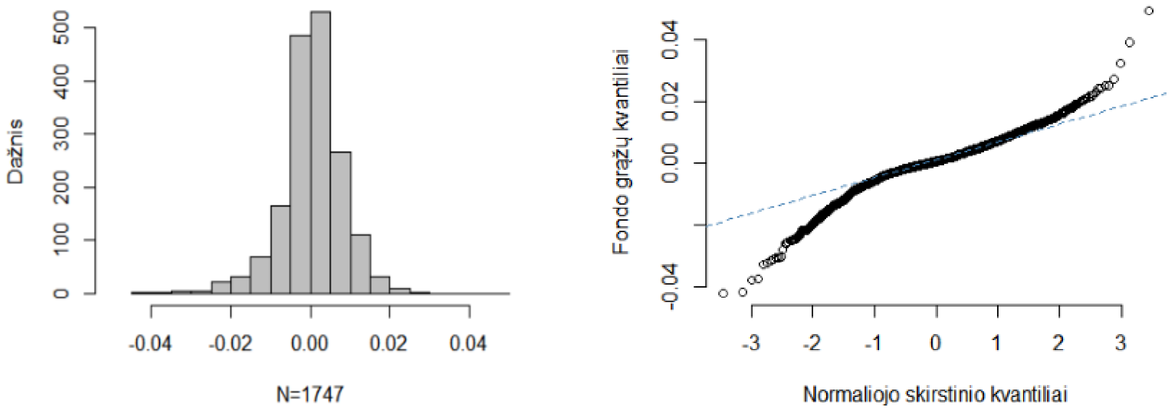
čia P_t ir P_{t-1} yra atitinkamai einamosios dienos ir prieš ją buvusios dienos fondo vieneto kainos. Apačioje pateikiamos fondo vienetų kainos ir grąžos per pasirinktą laikotarpį.



2 pav.: Vanguard S&P 500 (VOO) vieneto kainos ir grąžos

Per pasirinktą laikotarpį fondo grąžos svyravo tarp $-12{,}49\%$ ir $9{,}12\%$. Didžiausi svyravimai buvo stebimi 2020 metais. Dėl šios priežasties rizikos matų ir jų įverčių jautrumo palyginimui naudosime duomenis iki 2019-12-31 imtinai. Iš viso turėsime 1747 stebėjimus per kuriuos fondo grąžos svyravo tarp $-4{,}19\%$ ir $4{,}94\%$.

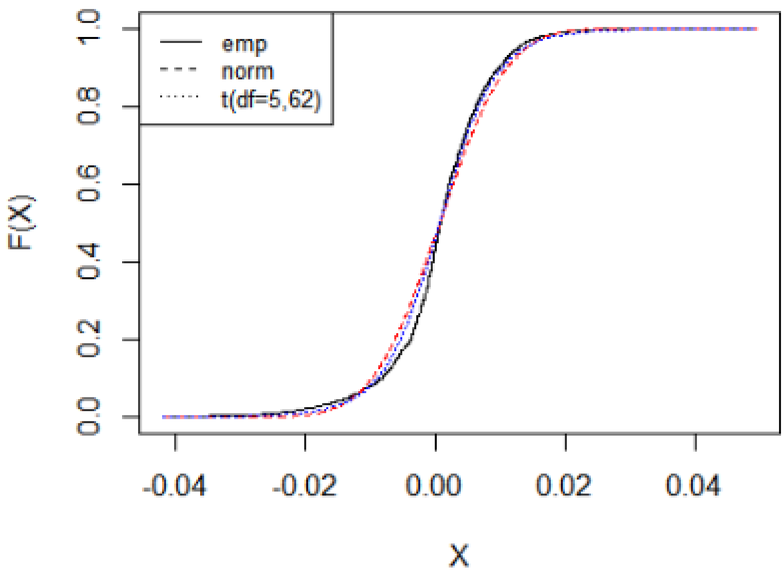
Pirmiausia pasižiūrime kaip yra pasiskirsčiusios fondo grąžos ir įvertiname ar grąžų skirstinys yra panašus į normalųjį skirstinį.



3 pav.: Vanguard S&P 500 (VOO) grąžų histograma ir kvantilių palyginimo (QQ) diagrama

Grąžų histograma akivaizdžiai nesiskiria nuo normaliojo skirstinio tankio funkcijos grafiko. Tačiau duomenų nesuderinamumą su normaliuoju skirstiniu parodo nubrėžta kvantilių palyginimo diagrama. Brūkšninė linija žymi normaliojo skirstinio kvantilius, o taškai – nagrinėjamos imties kvantilius. Iš diagramos galime matyti, kad nagrinėjama imtis pasižymi uodegų sunkumu. Papildomai buvo paskaičiuotas imties ekscesas, kuris lygus 3,70. Taip pat naudojamai imčiai atlikome Shapiro–Wilk testą [16], kuris patvirtino duomenų nesuderinamumą su normaliuoju skirstiniu.

Kadangi įsitikinome duomenų nesuderinamumu su normaliuoju skirstiniu, patikrinsime ar Stjudento skirstinys yra labiau tinkamas aprašyti turimus duomenis. Pirmiausiai paskaičiuojame laisvės laipsnius remiantis (4.10) formule. Gauname, kad labiausiai mūsų duomenims tinkamas Stjudento skirstinys su laisvės laispniais $\hat{df} = 5{,}62$.



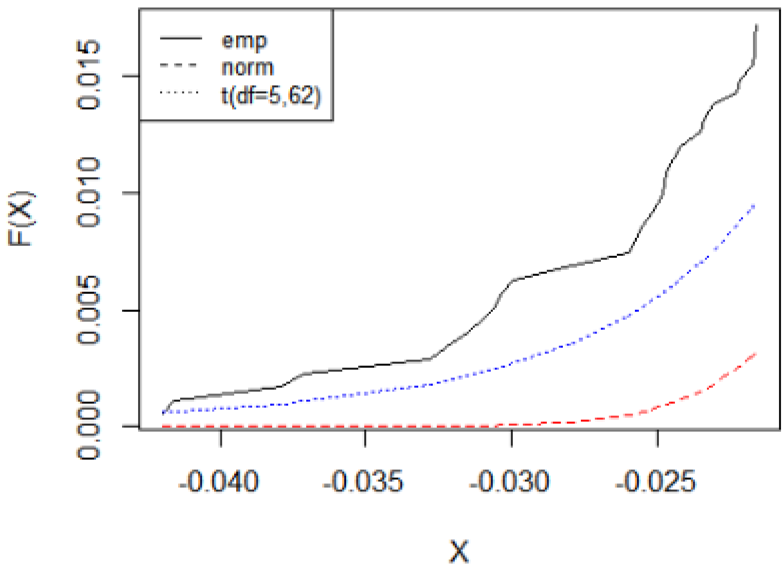
4 pav.: Empirinės, Normaliojo skirstinio ir Stjudento skirstinio pasiskirstymo funkcijų palyginimas

Remiantis 4 pav. matome, kad Stjudento pasiskirstymo funkcija yra artimesnė empirinei, tačiau tiksliai įvertinti yra sunku. Dėl šios priežasties pasinaudosime Kolmogorov–Smirnov testu, kuris leidžia įvertinti atstumą tarp dviejų pasiskirstymo funkcijų. Gauti rezultatai pateikiami lentelėje žemiau

Pasiskirstymo f-ja	Testo statistika D	p-reikšmė
Normalusis	0,093875	0,0000004
Stjudento-t(df=5,62)	0,065827	0,001031

1 lentelė: Kolmogorov–Smirnov testo rezultatai, kai lyginamos lentelėje pateiktos pasiskirstymo funkcijos su empirine pasiskirstymo funkcija.

Kolmogorov testo statistika D parodo didžiausią atstumą tarp dviejų pasiskirstymo funkcijų, o kritinė p reikšmė yra 0,05. Jei $p < 0{,}05$, tuomet yra atmetama nulinė hipotezė, kad duomenys yra pasiskirstę pagal lentelėje pateiktą pasiskirstymo funkciją. Taigi iš gautų rezultatų matome, kad Stjudento skirstinys turėtų geriau tikti aproksimuoti mūsų turimus duomenis, kadangi statistika D yra mažesnė lyginant su normaliojo skirstinio pasiskirstymo funkcija, tačiau $p < 0{,}05$, tai reiškia, kad turime atmesti nulinę hipotezę, jog duomenys yra pasiskirstę pagal Stjudento skirstinį su $\hat{df} = 5{,}62$. Nors ir teko atmesti nulinę hipotezę, tačiau papildomai galime pasižiūrėti, kuri iš šių pasiskirstymo funkcijų yra arčiau empirinės pasiskirstymo funkcijos kairėje uodegoje.



5 pav.: Empirinės, Normaliojo skirstinio ir Stjudento skirstinio pasiskirstymo funkcijų kairės uodegos palyginimas

Matome, kad Stjudento su $\hat{df} = 5{,}62$ pasiskirstymo funkcijos kairė uodega yra sunkesnė už normaliojo skirstinio pasiskirstymo funkciją ir yra artimesnė empirinei pasiskirstymo funkcijai, todėl galime daryti prielaidą, kad rizikos matai skaičiuojami aproksimuojant Stjudento skirstiniu turėtų būti tikslesni už aproksimuotus normaliuoju skirstiniu.

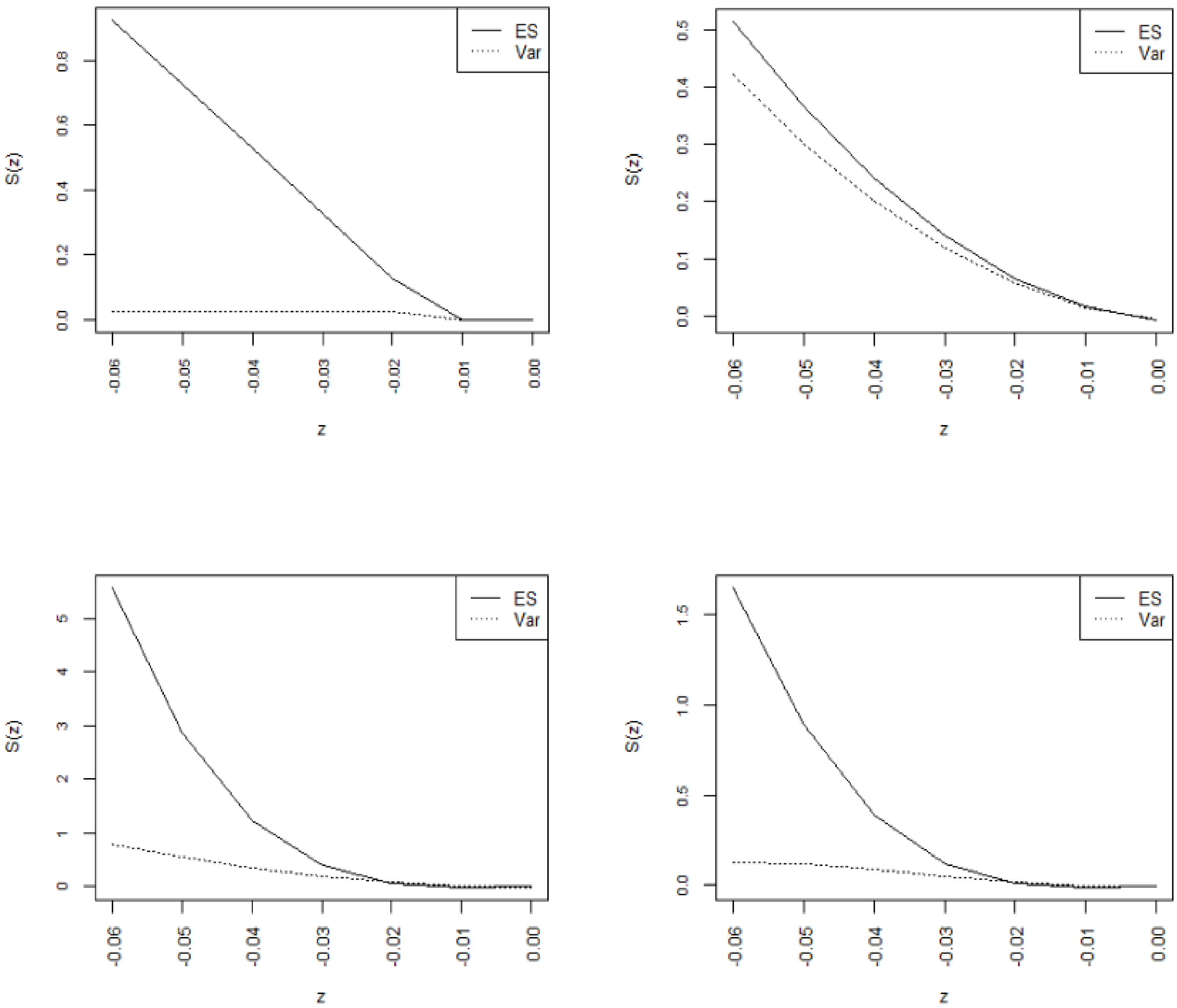
6.2 Rizikos matų jautrumo palyginimas

Šioje dalyje palyginsime kaip vertės pokyčio rizika (VaR) ir deficito vidurkis (ES) jautriai reaguoja į imtyje pridedamus naujus narius. Kaip minėjome aukščiau, pradinė imtis bus sudaryta iš $n = 1747$ narių. Pridėjus papildomą narį turėsime imtį sudarytą iš $n = 1748$ narių. Pirmiausia bus paskaičiuota rizikos mato reikšmė pradinei imčiai, vėliau analogiškai paskaičiuosime rizikos mato reikšmę imčiai su papildomais nariais. Tuomet apskaičiuosime jautrumo funkciją $S(z)$ naudojantis 3.5 skyriuje pateikta (3.14) formule. Skaičiavimuose naudosime $\alpha = 0{,}05$. Žemiau pateikta lentelė su rizikos matų reikšmėmis pradinei imčiai.

$\widehat{VaR}^{emp}_{0,05}$	0,01347	$\widehat{ES}^{emp}_{0,05}$	0,02053
$\widehat{VaR}^{norm}_{0,05}$	0,01280	$\widehat{ES}^{norm}_{0,05}$	0,01618
$\widehat{VaR}^{cf}_{0,05}$	0,01339	$\widehat{ES}^{cf}_{0,05}$	0,02368
$\widehat{VaR}^{t}_{0,05}$	0,01330	$\widehat{ES}^{t}_{0,05}$	0,02292

2 lentelė: VaR ir ES reikšmės pradinei imčiai

Pradinės imties, kuri sudaryta iš $n = 1747$ narių vidurkis yra lygus 0,00052, o mažiausias narys kaip jau minėjome anksčiau yra $-0{,}0419$. Papildomo nario z reikšmės buvo pasirinktos taip, kad galėtume pamatyti kaip funkcija $S(z)$ reaguoja į papildomą narį, kuris yra artimas imties vidurkiui ir kaip funkcija $S(z)$ kinta, kai į imtį pridedamas narys mažėja ir pralenkia mažiausią pradinės imties narį. Tai leis įvertinti rizikos mato ir jo įverčių jautrumą išskirtims. Taigi paskaičiuosime jautrumo funkciją, kai papildomas narys z yra lygus $-0{,}06$, $-0{,}05$, $-0{,}04$, $-0{,}03$, $-0{,}02$, $-0{,}01$ ir 0. Žemiau pateiktuose grafikuose pateiktas rizikos matų jautrumo funkcijų palyginimas taikant skirtingus įverčius.



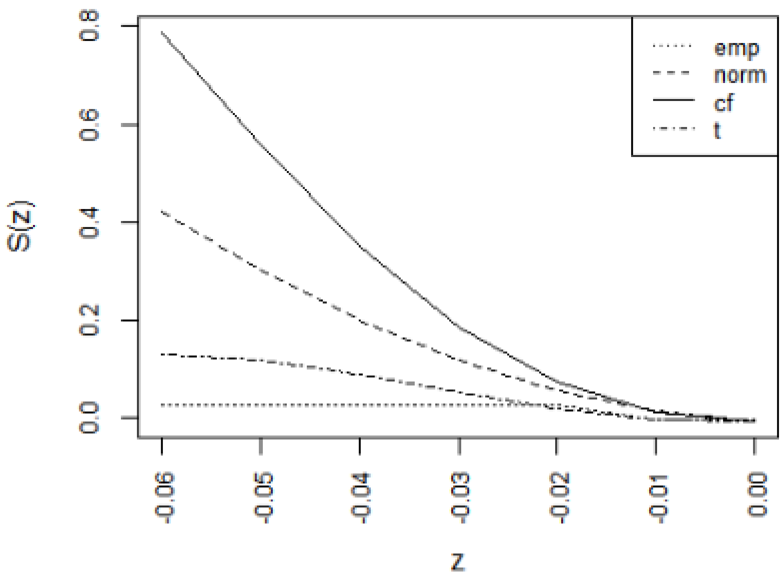
6 pav.: VaR ir ES jautrumo funkcijų palyginimas taikant skirtingus įverčių metodus, kai $\alpha = 0{,}05$ ir $n = 1748$.

Viršutinis kairėje – empirinių įverčių palyginimas, viršutinis dešinėje – Gauso įverčių palyginimas.

Apatinis kairėje – Cornish–Fisher įverčių palyginimas, apatinis dešinėje – Stjudento įverčių palyginimas.

6.3 VaR įverčių jautrumo palyginimas

Šioje dalyje palyginsime vertės pokyčio rizikos įverčių jautrumą ir įvertinsime, ar mažiau jautrūs įverčiai geriau pasirodo atliekant grįžtamąjį patikrinimą. Kaip įsitikinome 6.1, skyrelyje mūsų duomenys nėra suderinami su normaliuoju skirstiniu, todėl nevertėtų tikėtis tikslaus VaR įvertinimo taikant Gauso įvertį, tačiau dėl šio įverčio populiarumo praktikoje jis bus įtrauktas į palyginimą. Žemiau pateiktame grafike galime matyti skirtingų VaR įverčių jautrumo funkcijas.



7 pav.: VaR įverčių jautrumo palyginimas

Remiantis pateiktu grafiku galime vertinti VaR įverčių jautrumą išskirtims. Matome, kad empirinis vertės pokyčio rizikos įvertis $\widehat{VaR}_{0,05}^{emp}$ yra nejautrus išskirtims. Ties papildoma reikšme $z = -0{,}02$ įvertis nusistovi ir nepriklausomai kokia maža z reikšmė – išlieka napakitęs, kadangi nepasikeičia α dydžio blogiausioji imties dalis. Daug jautresni išskirtims duomenyse yra $\widehat{VaR}_{0,05}^{norm}$ ir $\widehat{VaR}_{0,05}^{cf}$ įverčiai, kurie priklauso nuo empirinių vidurkių. Tai galime matyti ne tik iš grafiko, bet ir palyginę kaip procentaliai skiriasi minėti įverčiai į pradinę imtį įtraukus reikšmę $z = -0{,}06$ lyginant su pradine imtimi. Nors į pradinę imtį buvo įtrauktas tik vienas papildomas narys, kuris nebuvo ženkliai mažesnis už pradinės imties mažiausią narį $-0{,}0419$, tačiau $\widehat{VaR}^{norm}_{0,05}$ įvertis išaugo 1,89%, o $\widehat{VaR}^{cf}_{0,05}$ net 3,37%.

Toliau pasižiūrėsime, kuris VaR įvertis yra tiksliausias atliekant grįžtamąjį patikrinimą. Taikysime standartinę VaR grįžtamojo patikrinimo metodiką aprašytą P. Giot and S. Laurent (2003). Naudosime Vanguard S&P500 (VOO) fondo grąžas nuo 2013-01-23 iki 2020-12-31 imtinai. Iš viso turime 2000 stebėjimų, kuriuos suskirstome į 25 poaibius sudarytus iš 80 narių. Kiekvienam poaibiui apskaičiuojame VaR įvertį. Tuomet palyginame i-ojo poaibio VaR įvertį su $(i+1)$-ojo poaibio nariais ir suskaičiuojame kiek narių iš $(i+1)$-ojo poaibio yra mažesni už i-ojo poaibio VaR įvertį. Šiuos narius laikysime išskirtimis. Vėliau suskaičiavus kiek išskirčių buvo atlikus aprašytą procedūrą su visais poaibiais, gautą skaičių padalinsime iš $24 \times 80 = 1920$. Jei įvertis yra tikslus, tuomet gautas rezultatas turėtų būti artimas pasirinktai α reikšmei (mūsų atveju $\alpha = 5\%$). Jei gauta reikšmė yra mažiau už α, tuomet galime teigti, kad įvertis pervertina riziką. Analogiškai, jei gauta reikšmė yra didesnė už α, tuomet rizika yra nuvertinama. Rezultatai gauti atliekant grįžtamąjį VaR įverčių patikrinimą pateikiami 3 lentelėje.

Įvertis	Išskirtys	Išskirtys (%)
$\widehat{VaR}^{emp}_{0,05}$	139	7,24
$\widehat{VaR}^{norm}_{0,05}$	131	6,82
$\widehat{VaR}^{cf}_{0,05}$	122	6,35
$\widehat{VaR}^{t}_{0,05}$	116	6,04

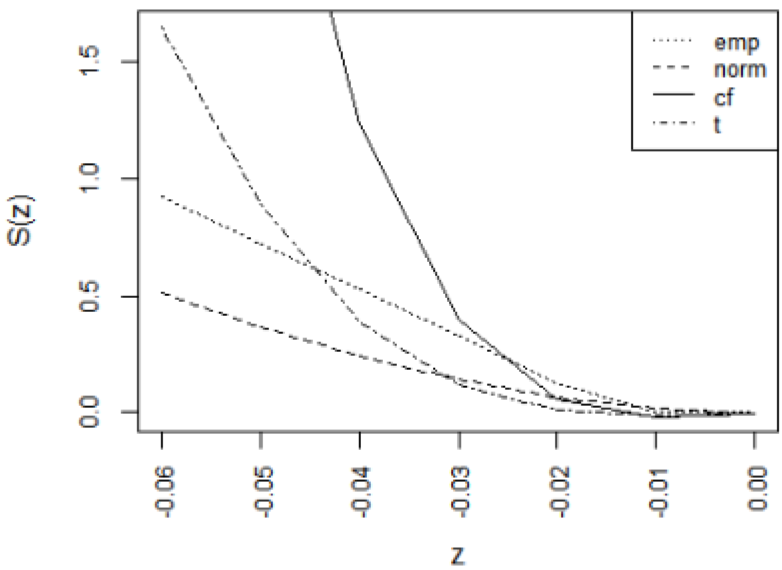
3 lentelė: VaR įverčių grįžtamojo patikrinimo rezultatai

Iš gautų rezultatų matome, kad tiksliausiai riziką turimiems duomenims įvertino Stjudento įvertis, kuris kaip matėme grafike (pav. 4) buvo antras pagal jautrumą išskirtims. Prasčiausiai pasirodė nejautrus išskirtims empirinis VaR įvertis, kuris labiausiai nuvertino riziką ir vietoje planuotų 96 išskirčių buvo 139, tai yra net 44,79% daugiau nei planavome. Pats jautriausias įvertis Cornish–Fisher, lyginant su empiriniu ir Gauso įverčiu pasirodė taip pat neblogai. Tačiau jei lygintume tik Cornish–Fisher ir Stjudento įverčius, kurie atsižvelgia į skirstinio uodegos sunkumą, visgi tiksliau riziką vertina įvertis, kuris yra mažiau jautrus išskirtims.

Didžiausi grąžų svyravimai buvo stebimi 23-iame poaibyje ($-12{,}49\%$ ir $9{,}12\%$). Cornish–Fisher įvertis šiam poaibiui buvo didžiausias lyginant su kitais trimis įverčiais, net 19% didesnis už empirinį VaR įvertį ir 12% didesnis už Stjudento VaR įvertį. Tačiau 24-jame poaibyje tokių didelių gražų svyravimų nebuvo stebima ir nei vienas poaibio narys neviršijo VaR įverčių gautų 23-iame poaibyje. Taigi labiau išskirtims jautrus Cornish–Fisher įvertis smarkiai pervertino riziką, lyginant su mažiau jautriu Stjudento įverčiu.

6.4 ES įverčių jautrumo palyginimas

Šioje dalyje palyginsime ES įverčių jautrumą ir analogiškai kaip 6.3 skyrelyje įvertinsime, ar mažiau jautrūs įverčiai geriau pasirodo grįžtamajame patikrinime. Žemiau pateiktame grafike galime matyti skirtingų ES įverčių jautrumo funkcijas.



8 pav.: ES įverčių jautrumo palyginimas

Remiantis pateiktu grafiku galime matyti, kad rezultatai šiek tiek skiriasi nuo gautų 6.3

skyrelyje. Jautriausias išskirtims išliko Cornish–Fisher įvertis, kuris kaip matome labai staigiai kinta į imtį pridėjus naują narį, kuris yra didesnis už 0,02. Į pradinę imtį įtraukus $z = -0{,}06$ reikšmę, $\widehat{ES}^{cf}_{0,05}$ įvertis padidėjo 13,45% lyginant su pradine imtimi. Stjudento įvertis nors yra jautrus didesnėms išskirtims, tačiau lyginant su Cornish–Fisher pasižymi didesniu atsparumu duomenų pokyčiams. Mažiausiai išskirtims jautrus ES įvertis kaip matome iš grafiko yra ne empirinis, bet Gauso įvertis. Tokį rezultatą galime paaiškinti tuo, kad empirinis įvertis vertina tik kairės skirstinio uodegos vidurkį, kuriame ir vyksta pasikeitimai pridedant naują imties narį, kai Gauso įvertis vertina visą imtį ir vienas papildomas narys turi mažesnę įtaką galutiniam rezultatui.

Toliau, kaip ir 6.3 skyrelyje, pasižiūrėsime, kuris ES įvertis yra tiksliausias atliekant grįžtamąjį patikrinimą. Taikysime ES grįžtamojo patikrinimo testą aprašytą formule (5.3). Mūsų atveju testo statistika Z yra aprašoma formule

$$Z := \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{24}\left(\frac{1}{80}\sum_{j=1}^{80}\frac{x_j^{i+1}\mathbb{1}_{\{x_j^{i+1}+\widehat{VaR}^i_{0,05}<0\}}}{0{,}05\widehat{ES}^i_{0,05}}\right)+1, \tag{6.2}$$

čia i žymi poaibį, o j – poaibio narį. Jeigu testo statistikos Z reikšmė yra artima 0, tai reiškia, kad poaibių narių, kurie yra mažesni už VaR įvertį, vidurkis yra artimas ES įverčiui. Kita vertus, neigiamos Z reikšmės parodo, kad ES įvertis riziką nuvertino. Rezultatai gauti atlikus ES įverčių grįžtamąjį patikrinimą pateikiami žemiau lentelėje.

Įvertis	Z
$\widehat{ES}^{emp}_{0,05}$	$-1{,}0436$
$\widehat{ES}^{norm}_{0,05}$	$-1{,}5362$
$\widehat{ES}^{cf}_{0,05}$	$-0{,}8673$
$\widehat{ES}^{t}_{0,05}$	$-0{,}7062$

4 lentelė: ES įverčių grįžtamojo patikrinimo rezultatai

Kadangi mūsų duomenys nebuvo pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį, todėl labiausiai išskirtims atsparus Gauso įvertis visgi riziką nuvertino labiausiai. Lyginant Stjudento ir Cornish–Fisher įverčius, kurie atsižvelgia į duomenų uodegų sunkumą matome, kad geriau ES grįžtamajame patikrinime pasirodė išskirtims atsparesnis Stjudento įvertis, kadangi statistikos

Z reikšmė yra arčiausiai nulio. Remiantis Z testo kritinių reikšmių lentele, kurią pateikė C. Acerbi ir B. Szekely (2014) ([1], psl. 10), pasirenkame testo kritinę reikšmę $Z^* = -0{,}7$ su 5% reikšmingumo lygmeniu. Matome, kad turime atmesti nulinę hipotezę visiems įverčiams, tačiau arčiausiai kritinės reikšmės yra Stjudento įvertis. Taigi turimiems duomenims tiksliausias ES įvertis yra gaunamas aproksimuojant duomenis Stjudento skirstiniu.

7 Išvados

Šiame darbe apžvelgėme vertės pokyčio rizikos (VaR) ir deficito vidurkio (ES) rizikos matų pagrindines savybes. Įsitikinome, kad rizikos mato savybės gali priklausyti ne tik pasirinkto rizikos mato, bet ir pasirinkto rizikos mato įverčio.

Palyginę keturių praktikoje dažniausiai taikomų rizikos matų jautrumo funkcijas nustatėme, kad jautriausias duomenų pokyčiams VaR ir ES rizikos matams yra Cornish–Fisher įvertis. Kita vertus mažiausiai jautrus duomenų pokyčiams VaR įvertis yra empirinis, o ES – gautas aproksimuojant duomenis normaliuoju skirstiniu. Taip pat įsitikinome, kad taikant visus aprašytus įverčius VaR rizikos matas pasižymi mažesniu jautrumu duomenų pokyčiams lyginant su ES.

Panagrinėjome, kuris iš skirtinių – normalusis ar Stjudento yra tinkamesnis aprašyti tiriamiems duomenims. Įsitikinome, kad tinkamesnis, turimiems duomenims turėtų būti Stjudento skirstinys, tai patvirtino ir grįžtamojo patikrinimo rezultatai. Tiksliausiai riziką tiriamiems duomenims įvertino Stjudento įvertis. Prasčiausiai riziką įvertino VaR empirinis įvertis ir ES įvertis gautas aproksimuojant normaliuoju skirstiniu, kurie pasižymėjo mažiausiu jautrumu duomenų pokyčiams.

Tolimesniuose darbuose būtų galima panagrinėti Medianos deficito (*angl. Median Shortfall*), bei Ekspektilių (*angl. Expectiles*) jautrumą duomenų pokyčiams, kurie galėtų būti gera alternatyva VaR ir ES rizikos matams. Taip pat, būtų galima daugiau dėmesio skirti ir paanalizuoti Stjudento skirstinio tinkamumą modeliuoti grąžas, palyginti įverčio elgesį taikant skirtingus laisvės laipsnius.

Literatūra

[1] C. Acerbi, B. Szekely. Backtesting Expected Shortfall, MSCI, 2014.

[2] J. Arnerić, E. Jurun, S. Pivac. Parametric Forecasting of Value at Risk Using Heavy Tailed Distribution, 2008.
https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2997235.pdf

[3] P. Artzner, F. Delbaen, E. Jean-Marc, Eber, D. Heath. Coherent Measures of Risk, Mathematical Finance, 1999, 9, 203–228.

[4] M. Barczy, A. Dudas, J. Gall. On approximations of Value at Risk and Expected Shortfall involving kurtosis, 2018.
https://arxiv.org/abs/1811.06361

[5] F. Bellini, V. Bignozzi. Elicitable Risk Measures, Quant. Finance, 2015, Vol 15(5), 725–733.

[6] R. Cont, R. Deguest, G. Scandolo. Robustness and Sensitivity Analysis of Risk Measurement Procedures, Quantitative Finance, 2008, 10, 593–606.

[7] J. Danielsson, B. Jorgensen, S. Mandira, G. Samorodnitsky, C. Vries. Subadditivity Re-Examined: the Case for Value-at-Risk, 2005.
https://people.orie.cornell.edu/gennady/techreports/VaRsubadd.pdf

[8] S. Emmer, M. Kratz, D. Tasche. What is the best risk measure in practice? A comparison of standard measures, Journal of Risk, 2015, 18, 31–60.

[9] M. Fischer, T. Moser, M. Pfeuffer. A Discussion on Recent Risk Measures with Application to Credit Risk: Calculating Risk Contributions and Identifying Risk Concentrations, Risks, 2018, 6, 142.

[10] H. Föllmer, A. Schied. Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time, Walter de Gruyter, 3rd edition, 2011.

[11] H. Föllmer, A. Schied. Convex and coherent risk measures, Encyclopedia of Quantitative Finance, John Wiley Sons, 2010, 355–363.

[12] T. Gneiting. Making and Evaluating Point Forecasts, Journal of the American Statistical Association, 2011, 106:494, 746–762.

[13] D. Maillard. A User's Guide to the Cornish–Fisher Expansion, 2020. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02987694/document

[14] J. P. Morgan, Risk Metrics—Technical Document, J.P. Morgan/Reuters, New York, 1996.

[15] M. Righi, P. Ceretta. Individual and Flexible Expected Shortfall Backtesting, Journal of Risk Model Validation, 2013, 7, 3–20.

[16] S. S. Shapiro, M. B. Wilk. An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples), Biometrika, 1965, 52(3/4), 591-–611.

[17] G. Stahl, J. Zheng, R. Kiesel, R. Rühlicke. Conceptualizing Robustness in Risk Management, SSRN Electronic Journal, 2012.

[18] P. Zangari. A VaR Methodology for Portfolios That Include Options, RiskMetrics Monitor, 1996, JP Mogran-Reuters, First Quarter, 4–12.