VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Plokštumos dengimų taisyklingaisiais daugiakampiais apžvalga

Overview of tilings with regular polygons

Baigiamasis magistro darbas

Atliko: Karolis Treinys
VU el. p.: karolis.treinys@mif.stud.vu.lt
Vadovas: prof. Paulius Drungilas

Vilnius 2022

Turinys

Įvadas

Daugelis dalykų aplinkiniame pasaulyje priklauso nuo įvairių objektų tvarkos ir tam tikro jų išsidėstymo. Įvairiose matematikos srityje tai yra įvairiausi matematiniai įrankiai - simboliai, funkcijos, loginiai sąryšiai, projekcijos, figūros ir t.t. Artimiausias ryšys tarp paminėtų matematikoje esančių ir realiame pasaulyje sutinkamų objektų yra geometrinės figūros - juos sieja vizualinė sąsaja bei plačios pritaikymo galimybės. Tad nenuostabu, kad istoriškai tai yra plati tyrinėjimo sritis. Viena iš jų - tai n-matės erdvės dengimas geometrinėmis figūromis, konkrečiai - daugiakampiais.

Šio darbas tikslas - susipažinti ir apžvelgti plokštumos dengimo daugiakampiais metodiką, jų klasifikavimo bei nagrinėjimo pobūdį, pasiekimus šioje srityje ir atviras problemas, susitelkiant ties pusiau taisyklinguoju dengimu t.y. dengiant plokštumą 2 arba daugiau skirtingais taisyklingaisiais daugiakampiais, kurių kraštinių ilgiai, bei kampai, yra vienodi.

Suformuluotos tokios darbo užduotys:

- Pateikti vizualius pusiau taisyklingų dengimų pavyzdžius su jų notacija, apibūdinant bendras jų savybes.

- Atlikti literatūrinę apžvalgą, aprėpiant kuo didesnį šios tematikos laikotarpį ir paliesti šio nagrinėjamo objekto aktualijas bei teorines ir praktines sritis.

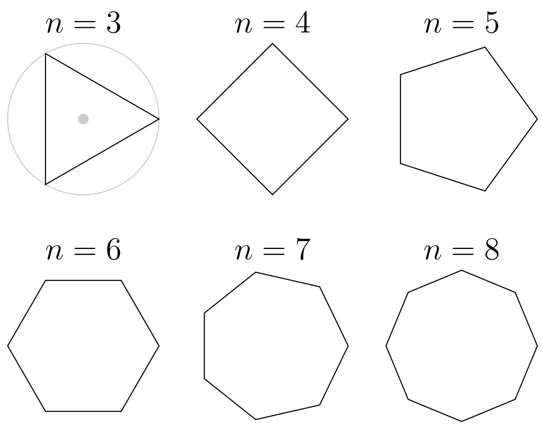
1 skyrius

Dengimų tipai ir jų klasifikacija

1.1 Apibrėžimai

Kad pradėtume nagrinėti plokštumų dengimą daugiakampiais, pirmiausia apsibrėšime, ką laikome **plokštuma**, kas yra **dengimas** ir kokiais daugiakampiais tai įmanoma padaryti. Plokštuma laikysime begalinę dvimatę Euklidinę erdvę, dengimu - plokštumos užpildymą norimais daugiakampiais taip, kad šie nepersidengtų ir nepaliktų tuščios erdvės t.y. visą plokštumą būtų užpildyta daugiakampiais.

Taisyklingasis daugiakampis (arba n-kampis poligonas) - geometrinė figūra, kurios visos ją sudarančios kraštinės ir kampai yra vienodi.



1.1 pav.: Keletas n-kampių pavyzdžių (brėžta naudojant LaTeX)

1.2 Dengimų rūšys

Vienas iš dengimų, charaterizavimo būdų, kuriuo šiame darbe vadovausimės, yra visus dengimus suskirstyti į 3 grupes pagal naudojamus daugiakampius:

- Taisyklingas - sudarytas iš vienos rūšies daugiakampių, kurie yra vienodų matmenų, įdentiškų kampų ir kraštinių dydžių (yra taisyklingieji).
- Pusiau taisyklingas - dviejų ar daugiau taisyklingų daugiaukampių derinių.
- Netaisyklingas - plokštuma dengiama netaisyklingaisiais daugiakampiais.

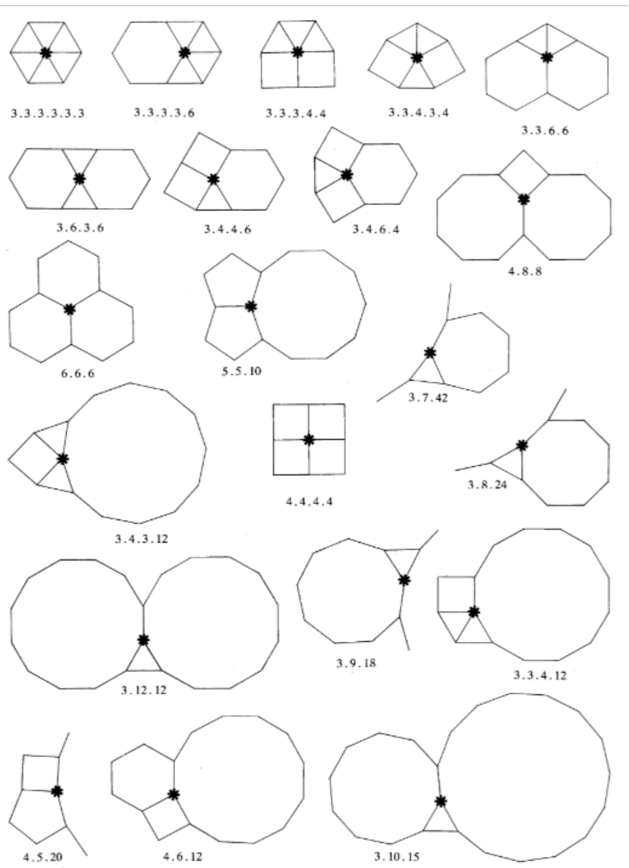
Iš šių sąlygų ateina svarbus pastebėjimas: visų daugiakampių, esančių vienas šalia kito ir besidalijančiais bendru tašku t.y. **viršune**, kampų suma privalės būti 360 laipsnių. Nagrinėjant dengimus su taisyklingaisiais daugiakampiais, ši sąlyga ženkliai susiaurina galimų daugiakampių variantų pasirinkimo kiekį. Yra paskaičiuota [15], jog yra 21 įmanomas viršūnės variantas 1.2 pav., dėliojant taisyklinguosius daugiakampius plokštumoje, kurioje vyrautų tik vienos rūšies viršūnė t.y. aplink kiekvieną plokštumoje esančią viršūnę butų vienodo kiekio ir tipo daugiakampiai.

Skaičiai po kiekvienu viršūnės tipu su ją gaubiančiais daugiakampiais parodo, kokie būtent n-kampiai dalinasi ta viršūnę. Jeigu apie vieną viršunę yra daugiau nei vienas vienos rūšies n-kampis, tada galima žymėti prie skaičiaus laipsnį, parodantį koks kiekis vienos rūšies daugiakampių supa konkrečia viršūnę.

Įdomu tai, kad iš paminėtų galimų viršūnių tipų pagal daugiakampių derinius, tik 11 iš jų leidžia užpildyti plokštumą taip, kad nebūtų persidengimų ir tarpų. Šie dengimai dar vadinami **Archimediniais**. Svarbu pastebėti, jog pats dengimas gali turėti ir daugiau nei vieno tipo viršūnes. Tai leidžia turėti daugiau plokštumos variantų, kadangi gali būti naudojama daugiau daugiakampių konkrečiam dengimui 1.3 pav. ir

Dar viena svarbi dengimų savybė (charakterizavimo bruožas) yra tarpusavio panašumas ir/arba vienodumas:

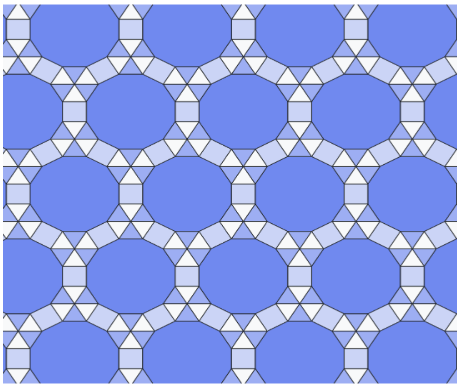
- Panašumas (eng. *congruent*) - kai atliekant sukimo, transliacijos ir/arba atspindžio veiksmus plokštumos atžvilgiu galima gauti iš vieno dengimo kitą.
- Vienodumas (eng. *equal*) - kai tarpusavyje plokštumos dengimai skiriasi tik savo masteliu (didinant/mažinant galima gauti vieną arba kitą tarpusavio dengimą).



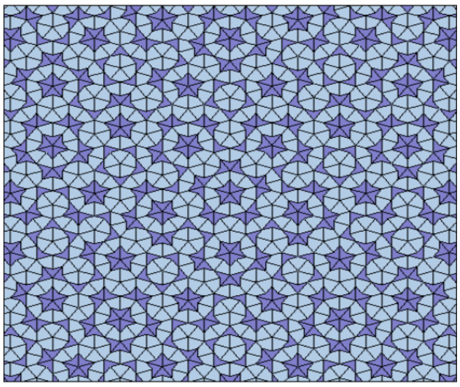
1.2 pav.: 21 įmanomi skirtingi viršūnių tipai [15]

Sekantis svarbus konkretaus dengimo bruožas - periodiškumas. Dengimai gali tiek atsikartoti (būti periodiški) ir neatsikartoti (būti neperiodiniai [23]. Dažniausiai beveik visi dengimai yra periodiniai - juose įmanona atrasti tai tam tikrą atsikartojantį erdvės bruožą. Vienas iš būdų dar detaliau atrinkti ir suskirstyti dengimus yra surasti to dengimo **paralerogramą** - mažiausią keturkampį ploto skirstinį, kurį atkartojant būtų įmanoma padengti visą plokštumą, išsaugant konkrečias tos rūšies dengimo savybes [11]. Dar vienas metodas tiksliau atvaizduoti dengimų panašumus yra jį sudarančių daugiakampių spalvinimas, taip palengvinant vaizdinę dengimo analizę.

Tačiau ne visiems dengimams tai galima pritaikyti paralerogramos schemą - vienas iš žinomiausių neperiodinių begalinių plokštumos dengimų yra *Penrose* dengimas [5]. Jis sudarytas dengiant plokštumą [3] rombais arba netaisyklingais keturkampiais 1.4, 1.5.



1.3 pav.: $3^6; 3^2.4.12$ dengimas su dviejų tipų viršūnėmis [16]

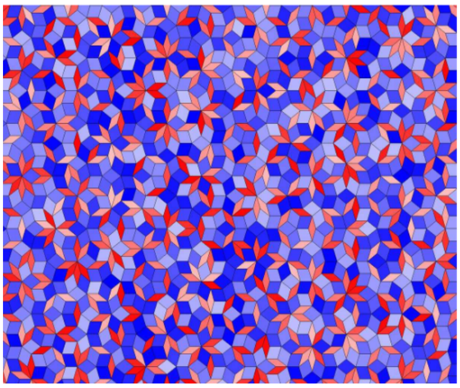


1.4 pav.: *Penrose* dengimas netaisyklingais keturkampiais [3]

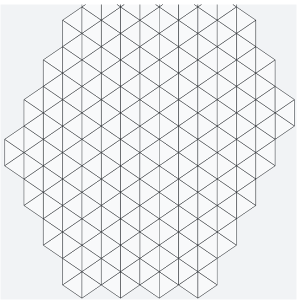
1.2.1 Taisyklingas dengimas

Tai yra pats paprasčiausias dengimas yra šio tipo, kadangi jame vyrauja tik viena geometrinė figūra, dengimo kartotinis ir ji yra taisyklingasis daugiakampis kuris yra **mažiausias šio dengimo elementas**, iš kurio vieno galima padengti begalinę plokštumą.

Egzistuoja tik trys dengimai: naudojant trikampį, keturkampį ir šešiakampį. Šios figūros vienintelės, kurių vidinių kampų kartotiniai yra 360 laipsnių, kas ir leidžia jiems dengti visą plokštumą. Visi šie dengimai priklauso vienai transityvumo klasei t.y. šiuos dengimus galima atvaizduoti vienas kitame [11]. Taip pat kaip ir buvo minėta anksčiau, šie trys dengimai (1.6, 1.7, 1.8 pav.) priklauso **Archimediniams** dengimams.



1.5 pav.: *Penrose* dengimas rombais [3]



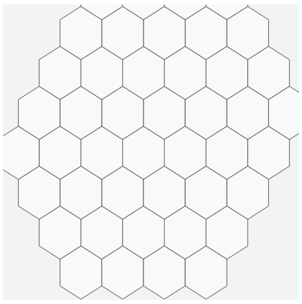
1.6 pav.: 3^6 dengimas [16]

1.2.2 Pusiau taisyklingas dengimas

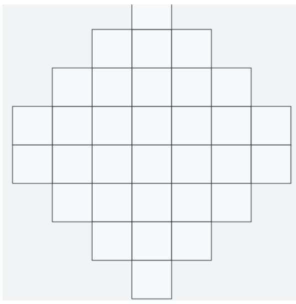
Šios rūšies dengimai turi daugiau atskirų kategorijų, nes šiems dengimams naudojama dviejų arba daugiau rūšių skirtingi daugiakampiai. Kaip ir buvo užsiminta, šiai klasei priklauso likę 8 Archimediniai dengimai, kadangi jiems galima priskirti ir taisyklingus dengimus, kadangi juose vyrauja vienodo tipo viršūnės tarp daugiakampių.

Pačių dengimų paveikslėliai pateikti 4.1.

Svarbu pabrėžti, jog į šią kategoriją galima įtraukti ir daugiau dengimų, atlaisvinant išsikeltus reikalavimus. Pavyzdžiui, leidžiant sudaryti tokius dengimus, kuriuose daugiakampiai nebūtinai dalinasi viršūnėmis, atsiranda tokie dengimai 1.9 pav. Iš jų vienas - **Pitagorinis** dengimas - yra gausiai nagrinėtas [7], [21]. Tai toks dengimas, kuomet plokštuma dengiama dviejais arba daugiau skirtingų matmenų kvadratais.



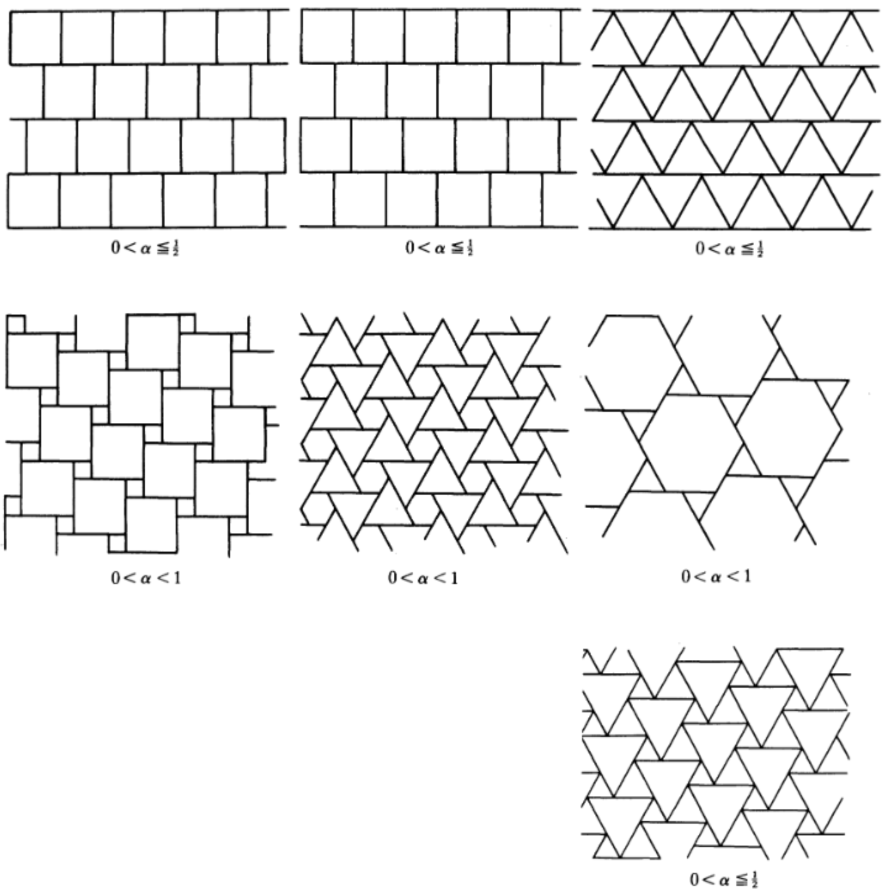
1.7 pav.: 6^3 dengimas [16]



1.8 pav.: 4^4 dengimas [16]

1.2.3 Netaisyklingas dengimas

Ši dengimų klasė yra pati plačiausia ir sąlyginai dažniausiai sutinkama, todėl jai charakterizuoti reiktų daugiausiai laiko. Bendrai paėmus, vyrauja bent kokių matmenų, ir įvairiakampiai daugiakampiai. Iš šito išplaukia daugybė įdomių ir kasdienybėje sutinkamų dengimų, tiek architektūroje ir mene, tiek daugelyje svarbių matematinių struktūrų nagrinėjimuose. Galbūt pats paprasčiausias dažniausiai sutinkamas kasdienybėje tokio tipo dengimas - stačiakampių plytelių dengimas. Nesunku atkreipti dėmesį, jog vien tai, kad galima naudoti daugiakampius su skirtingų dydžių kampais, leidžia sukurti begalę įvairių nevienodų dengimų.



1.9 pav.: 7 rūšių dengimai (paveiklėlis iš [15]. α parametras parodo santykį tarp persidengiančių kraštinių ilgių nuo viršūnių (pirmiems trims dengimams); k kraštinių ilgių santykį (sekantiems trims viduryje esantiems dengimams) ir trikampių kraštų santykį (apatiniam dešiniam dengimui).

2 skyrius

Literatūros apžvalga

2.1 Dengimų tyrinėjimai

Dengimų nagrinėjimo istoriją galima atsekti nuo antikos laikų - yra išlikusių raižynių, dekoracijų [26], [15]. Mėginimai priskirti tam tikrus dengimus tam tikroms klasėms nebuvo pradėti iki 17 amžiaus - 1619 metais vokiečių astronomas, matematikas Johanesas Kepleris savo knygoje *The Harmony of the World* [19]. Jis ir buvo pirmasis, priskyręs dengimus, dabar žinomus kaip Archimedinius. Didesnį proveržį dengimų nagrinėjimo srityje lygiagrečiai paskatino kristalografija, simetrijų nagrinėjimas ir jų klasifikavimas. Tolesni tyrimai ir straipsiai, diskutuojantys dengimus ir jų kategorizavimą pradėti leisti nuo 1960-tųjų metų [15], [11]. Svarbu paminėti, jog didelį indelį į šią sritį įdėjo ne tik matematikai, bet ir menininkai. Patys dengimai iš savęs turi vizualinį patrauklumą - žmogus yra pratęs laikyti simetriškus objektus gražiais. Daugiakampių motyvai yra įžvelgiami daug kur, ir nors ne konkrečiai dažnai pasitaikantys, tačiau savo taisyklingumu ir ganėtinu paprastu yra pakerėję ne vieną [25], [26].

Pačių dengimų charakterizavimui yra naudojami keli būdų: visualiniai, simetrijų, viršūnių charakterizavimo metodu. Kiekvienas pasižymi kitokiu informacijos pobūdžiu ir svarba pvz. visualinis charakterizavimas naudingas praktiniams tikslams projektuojant tam tikrus geometrinius plotus, rengiant planus teritorijų išdėstymui, taip pat gali leisti gretai aptikti panašius tarpusavyje dengimus. Taip pat šis metodas yra greičiausiai suprantamas plačiajai auditorijai, bei neretai atrodo estetiškai, iš ko gali, ir yra, kilę įkvėpimu meno kūriniuose.

Simetrijų klasifikacija, nors ir nenurodo, kokio tipo daugiakampiai yra naudojami, tačiau ji yra arčiausiai kitų nagrinėjimų matematinių objektų ir gali būti greitai matematiškai manipuliuojama ir palyginima su kitų geometrinių figūrų simetrijomis - tiek pavienėms, tiek jų derinių.

Viršūnių charakterizavimo metodas, pagal savo pritaikomumą ir ženklinimą, turi daugiausiai informacijos apie konkrečius dengimus, sukoncentruotos į mažiausią reikšmę (skaičių eilutę, nurodančią apie viršūnę išsidėsčiusius daugiakampius). Viena vertus, šis metodas apsiriboja tik taisyklingais daugiakampiais ir nesuteikia konkrečių duomenų apie kiekvieną daugiakampį, jeigu yra charakterizuojami netaisyklingieji dengimai ir/arba dengimas paremtas sudėtingų figūrų motyvais. Kita vertus, toks charakterizavimo metodas leidžia greitai suprasti, apie kokį dengimą kalbamą, net ir jo nematant.

2.2 Aktualijos ir pritaikymai

Į dengimus galima žiūrėti grynai geometriškai, pasitelkiant vizualinį elementą, imant mažiausą pasikartojantį dengimo elementą, atliekant vaizdines simuliacijas su kompiuterinėmis programomis ir panašiomis vizualinėmis priemonėmis arba apsibrėžti dengimus kaip topologinius objektus, kuriuose daugiakampiai - tai nepersidengiantys aibės elementai tolopoginėje grupėje ir taip suvesti dengimus į grupių teoriją. Straipsniuose „Classification of disordered tilings“ [4], „Tilings whose members have finitely many neighbors“ [8] būtent taip ir yra nagrinėjama konkretūs išsikelti klausimai.

Literatūroje daugiausia dėmesio yra skirta netaisyklingų dengimų rūšims, kadangi į ją įeina didžiausia įvairovė dengimų. Šiame darbe plačiau aptarta **taisyklingaisiais daugiakampiais padengta begalinė plokštuma**, tačiau literatūroje ir leistuose straipsniuose yra labai įvairių nagrinėjamų klausimų su konkrečiais ieškomais tyrimo objektais, kaip pavyzdžiui dengimai ribotame plokštumos plote [3], dengimai pačiose geometrinėse figūrose [24], [10], [2] (kas taip pat yra susiję su fraktaliniais plokštumos dengimais - dar viena įdomia dengimų tematiką [18], [5]), spalvinimo problemos atitinkantiems dengimams [17], Fibonacci numerių nagrinėjimas [13] ir daugeliui kitų matematinių problemų, tiesiogiai arba netiesiogiai susijųsių su dengimais ir juos sudarančiais elementais - įvairiais daugiakampiais, [27], [14], [22], [20], [9], [1], [6].

Dar vieni paieškų objektai literatūroje - suskirtymo problemos t.y. surasti visus įmanomus dengimus konkretiems pradiniams parametrams, sąlygoms, pvz. [4] - iškraipytų dengimų klasifikavimas. Viename iš straipsnių - „The classification of 2-isohedral tilings of the plane“ [12] yra nagrinėjami ir pavaizduoti visi dengimai, kuriuose yra du dviejų rūšių daugiakampiai. Šis darbas naudojasi grupių, simetrijos ir topologijos sričių metodika ir jų pagalba pateikia visų nagrinėtų dengimų vaizdinius pavyzdzius (visus 1270 tipus). Kituose darbuose aprėpiami ekvitransityvūs dengimai (tokie dengimai, kurie priklauso tai pačiai transityvumo klasei) [11], [21] kurie pažiūri į dengimus iš kitos perspektyvos ir juos tarpusavyje sugretina su kitais, panašiais matematiniais objektais, kuriems galima būtų taikyti minėtus parametrus.

3 skyrius

Apibendrinimas

Nors ši tema ir yra gana paprasta bei nesudėtinga, gilinantis į tam tikrus dengimų atvejus galima dar atrasti neišaiškintų klausimų bei tyrinėti naujas tarpdisciplinines problemas. Šiame darbe susitelkta į taisyklingųjų daugiakampių dengimus, kurie, nors ir nesudėtingi bei lengvai nagrinėjami, atveria kelią ir supratimą į daugelį kitų rūšių plokštumos dengimų, aptartų minėtuose straipsniuose. Juose vyravo įvairių klasių dengimai, kuriems dažnu atveju buvo iškeltos tai laisvesnės tai griežtesnės salygos dengimams, imtas platesnis apžvalgos ratas.

Visuose nagrinėjimuose atsispindi tikslūs, bet tuo pačiu ir neapibrėžti nagrinėjamų dengimų klasifikavimo bei tarpusavio tapatumo klausimai. Vis dar yra daugybė porūšių, kurių apimtis vis dar nežinoma, nėra suklasifikuota. Ir tai yra tik kalbant apie dengimus dvimatėje erdvėje. Esant tiek daug galimų pasirinkimo variantų, yra nemažas iššūkis pasirinkti, ką nagrinėti. Bendrai literatūroje vyrauja požiūris, jog dar tikrai ne viskas šioje, plokštumos dengimo daugiakampiais, srityje yra ir dar bus žinoma.

Plokštumos dengimų taisyklingaisiais daugiakampiais apžvalga

Santrauka

Geometriniai objektai turi didelę įvairovę ir paplitimą daugelyje sričių - mokslo, architektūros ir meno pasaulyje. Jų deriniai bei erdvės padengimas jais turi daugybę tiek paprastų, tiek ir neįprastai svarbių ir įdomių savybių, kurios turi plačių pritaikymų minėtose srityse teoriškai ir praktiškai. Nors ir iš pirmo žvilgsnio nesudėtinga tema, joje pilna dar daugelis sudėtingų ir įdomių matematinių klausimų bei tyrinėjimo tekmių.

Šio darbo tikslas - apžvelgti plokštumos dengimo taisyklingaisiais daugiakampiais metodus, susipažinti ir išnagrinėti atliktus tyrimus su jais, paliesti atviras problemas šioje, arba artimose šiai, srityje ir apibendrinti naujausiuose straipsniuose esančią tiriamąją medžiagą.

Raktiniai žodžiai: Taisyklingieji daugiakampiai, plokštumos dengimas

Overview of tilings with regular polygons

Summary

Geometric shapes are rich with variety and are of great importance in various fields of mathematics, architecture and art. Their combinantions and numerous tillings of a particular space have various theoretical and practical properties: ones simple, others quite complex, both containing some significance ir their fields of interest.

The object of this thesis is to overview regular polygon tilings of a plane: their properties, classification, theoretical and practical applications, mentions in mathematical articles and try to approach open questions in this or other similar topics.

Keywords: regular polygons, tilings of a plane

Literatūra

[1] Shigeki Akiyama, Jonathan Caalim, Katsunobu Imai, and Hajime Kaneko. Corona limits of tilings: Periodic case. *Discrete & Computational Geometry*, 61(3):626–652, 2019.

[2] V. Aksenov and K. Kokhas. Domino tilings and determinants. *Journal of Mathematical Sciences*, 200(6):647–653, 2014.

[3] Federico Ardila and Richard P. Stanley. Tilings, 2005.

[4] Ludwig Balke. Classification of disordered tilings. *Annals of Combinatorics*, 1(1):297–311, 1997.

[5] C. Bandt and P. Gummelt. Fractal penrose tilings i. construction and matching rules. *aequationes mathematicae*, 53(1):295–307, 1997.

[6] Bushra Basit and Zsolt Lángi. On monohedral tilings of a regular polygon, 2021.

[7] Attila Bölcskei. Classification of unilateral and equitransitive tilings by squares pf three sizes. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 41, 01 2000.

[8] Marilyn Breen. Tilings whose members have finitely many neighbors. *Israel Journal of Mathematics*, 52(1):140–146, 1985.

[9] Frederic Chavanon and Eric Remila. Rhombus tilings: Decomposition and space structure. *Discrete & Computational Geometry*, 35(2):329–358, 2006.

[10] Ho Man Cheung and Hoi Ping Luk. Rational angles and tilings of the sphere by congruent quadrilaterals, 2022.

[11] Ludwig Danzer, Branko Grünbaum, and G. C. Shephard. Equitransitive tilings, or how to discover new mathematics. *Mathematics Magazine*, 60(2):67–89, 1987.

[12] Olaf Delgado, Daniel Huson, and Elizaveta Zamorzaeva. The classification of 2-isohedral tilings of the plane. *Geometriae Dedicata*, 42(1):43–117, 1992.

[13] Tomislav Došlić and Luka Podrug. Tilings of a honeycomb strip and higher order fibonacci numbers, 2022.

[14] A Dranishnikov and Viktor Schroeder. Aperiodic colorings and tilings of coxeter groups. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 1(3):311–328, 2007. Free Sample Available: contact publisher.

[15] Branko Grunbaum and Geoffrey C. Shephard. Tilings by regular polygons. *Mathematics Magazine*, 50(5):227–247, 1977.

[16] Harrison Hogg. Antwerp v3.0.6: Application for nets and tessellations with edge-to-edge regular polygons. `https://antwerp.hogg.io/library`.

[17] D. H. Huson. A four-color theorem for periodic tilings. *Geometriae Dedicata*, 51(1):47–61, 1994.

[18] R. Kenyon. The construction of self-similar tilings. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 6(3):471–488, 1996.

[19] J. Kepler, E.J. Aiton, A.M. Duncan, J.V. Field, and American Philosophical Society. *The Harmony of the World*. American Philosophical Society: Memoirs of the American Philosophical Society. American Philosophical Society, 1997.

[20] Miklos Laczkovich. Irregular tilings of regular polygons with similar triangles. *Discrete & Computational Geometry*, 66(4):1239–1261, 2021.

[21] Casey Mann, Joseph DiNatale, Emily Peirce, and Ellen Vitercik. Unilateral and equitransitive tilings by squares of four sizes. *ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA*, 10(1):135–167, 2015.

[22] Peter McMullen. Duality, sections and projections of certain euclidean tilings. *Geometriae Dedicata*, 49(2):183–202, 1994.

[23] Charles Radin. Conway and aperiodic tilings. *The Mathematical Intelligencer*, 43(2):15–20, 2021.

[24] Richard L. Roth. Isohedral tilings of a ribbon. *Geometriae Dedicata*, 29(2):185–191, 1989.

[25] Theo P. Schaad. A challenging 7-fold tiling puzzle, 2021.

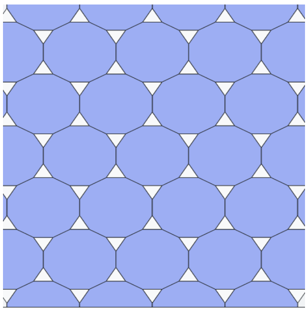
[26] Doris Schattschneider. The fascination of tiling. *Leonardo*, 25(3/4):341–348, 1992.

[27] Nikolay Vereshchagin. A family of non-periodic tilings of the plane by right golden triangles. *Discrete & Computational Geometry*, 2022.

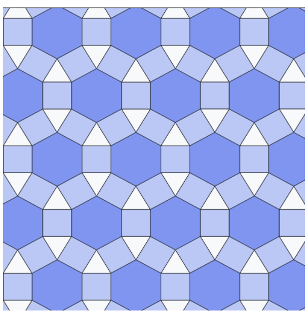
4 skyrius

Priedai

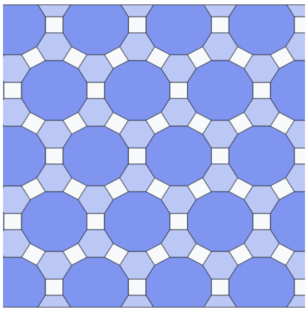
4.1 Pusiau taisyklingų dengimų grafiniai pavyzdžiai



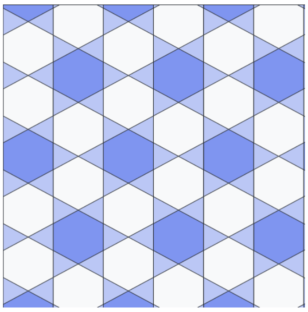
4.1 pav.: 3.12^2 dengimas



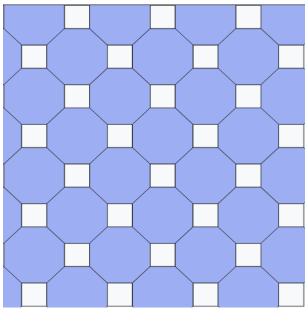
4.2 pav.: 3.4.6.3 dengimas



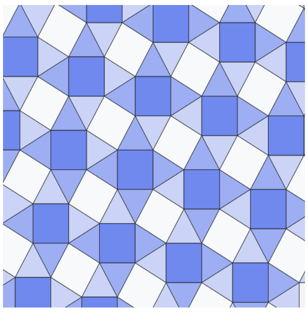
4.3 pav.: 4.6.12 dengimas



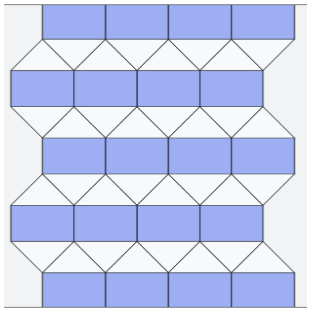
4.4 pav.: $(3.6)^2$ dengimas



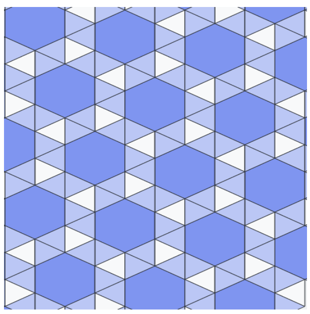
4.5 pav.: 4.8^2 dengimas



4.6 pav.: $3^2.4.3.4$ dengimas



4.7 pav.: $3^3.4^2$ dengimas



4.8 pav.: $3^4.6$ dengimas