VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS BAKALAURO STUDIJŲ PROGRAMA

Bakalauro baigiamasis darbas

Binominis skirstinys ir įsipareigojimų nevykdymo tikimybė

Binomial Distribution and Probability of Default

Atliko:
Evelina Juškevičiūtė
VU el. p.: evelina.juskeviciute@mif.stud.vu.lt

Vadovas:
doc. dr. Andrius Grigutis

Vilnius
2022

Turinys

Santrauka

Šiame bakalauro baigiamajame darbe nagrinėjame įsipareigojimų neįvykdymo tikimybę ir kaip ją rasti remiantis binominiu skirstiniu, Bernulio schema, pasikliautinaisiais intervalais bei konservatyvumo metodu. Apibrėžiame, kokia yra reitingų sistema ir kaip skolos reitingai susiję su įsipareigojimų neįvykdymo tikimybe. Tuomet tiriame, kaip įvertinti šias tikimybes, kai skolininkų portfelyje per paskutinį stebėjimo laikotarpį nėra užfiksuotų įsipareigojimų neįvykdymų ir kaip skaičiuoti tuomet, kai jų yra. Pastaruoju atveju sprendimas tampa daug sudėtingesnis, taigi analizuojame kaip į pagalbą galime pasitelkti aproksimaciją Puasono skirstiniu, binominio skirstinio keitimą į beta skirstinį, normaliąją aproksimaciją bei Muavro - Laplaso teoremą.

Raktiniai žodžiai: binominis skirstinys, įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė, Bernulio schema, konservatyvumo metodas, pasikliautinieji intervalai.

Summary

Binomial Distribution and Probability of Default

This Bachelor's thesis analyses the probability of default and how to estimate it based on binomial distribution, Bernoulli scheme, confidence interval and the most prudent estimation method. We describe the system of rating grades and how rating grades are related to probability of default. Then we analyse how to estimate these probabilities when there is no defaults in obligors portfolio and when at least one default occurred during the last observation period. In this case when we have defaults in our portfolio the estimation becomes more difficult so we analyse how to do it by using Poisson approximation, expressing binomial distribution of an appropriate beta distribution function, normal approximation and Moivre - Laplace theorem.

Keywords: binomial distribution, probability of default, Bernoulli scheme, the most prudent estimation method, confidence interval.

Įvadas

Vienas iš aktualiausių ir sudėtingiausių komercinio banko vykdomos kreditavimo veiklos aspektų yra kredito rizika ir jos valdymas [6]. Nors bankai susiduria ir su kitokių rūšių rizika, teikiant paskolas svarbiausia yra kredito rizika, kadangi yra rizikuojama neatgauti paskolintų lėšų ir priskaičiuotų palūkanų. Kad to išvengtų, bankams svarbu įvertinti paskolų portfelio riziką, pasinaudojus riziką apibūdinančiais rodikliais: tikėtinu nuostoliu, nuostoliu nemokumo atveju, kredito rizikos priemoka ir t.t., bet vienas iš pagrindinių rodiklių, kurį šiame darbe ir analizuosime - įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė.

Šio darbo tikslas - išnagrinėti, kaip rasti įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės įvertį, kai skolininkų portfelyje nėra praeityje įvykusių įsipareigojimų neįvykdymų, ir kitu atveju - kai jų yra. Pirmiausia aprašysime sprendimams reikalingą teoriją, tuomet abiem atvejais aptarsime, kokius metodus ir principus reikėtų taikyti. Tuo atveju, kai turėsime bent vieną įsipareigojimų neįvykdymą, sprendimui pasitelksime Puasono aproksimaciją, betą skirstinį, normaliąją aproksimaciją bei Muavro - Laplaso teoremą. Galiausiai, taip pat pamodeliuosime konkrečių sprendimo pavyzdžių.

1. Įsipareigojimų nevykdymo tikimybės įvertinimas

1.1. Įsipareigojimų nevykdymo tikimybė

Remiantis Martyno Manstavičiaus paskaitų konspektu „Rizikos valdymas“ [7], dažniausiai išskiriamos trys rizikos rūšys, kurios labai svarbios ir aktualios bankams: rinkos, kredito ir operacinė. Šiame darbe kalbėsime apie kredito riziką, kuri atsiranda, kai klientas neįvykdo savo pažado, jog išgalės sumokėti tam tikro dydžio pinigų sumą. Tokia rizika gali atsirasti įvairiomis formomis - paskolos, palūkanų negrąžinimas dėl finansinių problemų arba net piktybiškas atsisakymas mokėti įmokas ir sutartas palūkanas. Todėl kiekviena įstaiga, išduodanti paskolas, stengiasi kuo tiksliau įvertinti, ar klientas, būsimasis skolininkas, yra patikimas ir sugebės laiku įvykdyti įsipareigojimus ir mokėti įmokas. Vienas iš svarbiausių kredito rizikos rodiklių yra įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė ir ją šiame darbe vertinsime remiantis binominiu skirstiniu, kurį aptarsime vėliau.
Skolininkas yra laikomas nemokiu, kai galioja bent viena iš šių salygų:

- nustatyta, kad skolininkas neišgalės grąžinti visos paskolos sumos, palūkanų ir kitų mokesčių;
- nustatyta, kad skolininkas praeityje jau yra paskelbęs apie finansinius sunkumus, nuostolius, vykdęs restruktūrizaciją dėl skolų, palūkanų arba mokesčių, juos anuliavęs arba atidėjęs;
- nustatyta, kad skolininkas jau vėluoja grąžinti pinigus ir vykdyti savo įsipareigojimus daugiau nei 90 kalendorinių dienų;
- nustatyta, kad skolininkas yra paskelbęs bankrotą arba įstatymiškai apsisaugojęs nuo kreditorių.

1.2. Reitingai ir jų sistema

Remiantis šaltiniu [7], skolos reitingas labai glaudžiai susijęs su įsipareigojimų nevykdymo tikimybe ir jį galima vadinti banko kredito patikimumo matu. Kuo aukštesnis skolos reitingas, tuo mažesnė įsipareigojimų nevykdymo tikimybė. Bankai, norėdami turėti aukštą skolos reitingą, privalo turėti didelį kapitalą lyginant su prisiimama rizika. Skolos reitingus suteikia nepriklausomos agentūros ir žinomiausios iš jų yra Standard&Poor's (S&P), Moody's bei Fitch. Kuo mažesnis banko reitingas, tuo jis tampa mažiau patrauklus investuotojams ir klientams, kurie nebenorės nei investuoti, nei laikyti savo santaupų tame banke, nes tai taps tiesiog per daug rizikinga. Skirtingų agentūrų reitingavimo sistema šiek tiek skiriasi, tačiau jų interpretacija išlieka panaši. Lentelėje 1 pateikiame Standard&Poor's reitingų lentelę:

Reitingas	Reitingo apibūdinimas
AAA	aukščiausios kokybės kreditas, finansinių įsipareigojimų atžvilgiu klientas itin patrauklus
AA	labai geros kokybės kreditas, klientas labai patikimas
A	vis tiek geros kokybės kokybės kreditas, klientas truputį jautrus ekonominėms sąlygoms
BBB	žemiausias investicinio lygio kreditas
BB	būtina elgtis atsargiai, geriausias neinvesticinio lygio kreditas
B	klientas jautrus ekonominėms sąlygoms, pajėgus vykdyti savo finansinius įsipareigojimus
CCC	klientas gali tapti nemokus, jei ekonominės sąlygos taps nebepalankios
CC	klientas labai rizikingas, greit gali tapti nemokus
C	klientas arti bankroto arba jau bankrutavęs, įsiskolinimų grąžinimas dar vykdomas
D	klientas jau yra neįvykdęs bent vieno iš savo įsipareigojimų

1 lentelė. „Standard&Poor's" ilgalaikio skolinimosi reitingai ir jų interpretacija. [7]

1.3. Bernulio schema

Kaip rašoma Alfredo Račkausko paskaitų konspekte [9], atsitiktinis dydis, kuris gali įgyti tik dvi reikšmes 1 arba 0, vadinamas Bernulio atsitiktiniu dydžiu. Tikimybė, kad toks dydis įgis reikšmę 1 lygi p, o kad įgis reikšmę 0, lygi $1 - p$. Reikšmes 1 ir 0 atitinkamai galime vadinti „sėkme" ir „nesėkme", kuomet vienas bandymas gali tik pavykti arba nepavykti. Pavyzdžiui: darbdavys sprendžia ar priimti kandidatą į darbą, krepšininkas meta baudos metimą, metame monetą ir stebime, kuria puse atsivers, ir t.t.. Visos šios situacijos turi tik dvi galimas baigtis. Vydo Čekanavičiaus ir Gedimino Murausko vadovėlyje „Statistika ir jos taikymai. 1" [10] Bernulio eksperimentų schema apibūdinama taip: eksperimento sėkmės tikimybė lygi p. Jei atliekame n nepriklausomų eksperimentų, tikimybė, kad eksperimentas pavyks k kartų, bus lygi

$$\mathbb{P}(\text{iš } n \text{ bandymų } k \text{ sėkmingų}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{1.1}$$

Įrodysime šią lygybę remiantis Vydo Čekanavičiaus ir Gedimino Murausko vadovėliu „Statistika ir jos taikymai. 1“ [10].

Įrodymas. Atliekant bandymą vieną kartą, jis pavyks su tikimybe p, o pasinaudojus priešingo įvykio tikimybe, bandymas nepavyks su tikimybe $1-p$. Bandymo sėkmę pažymėkime raide S, o nesėkmę N. Tarkime, kad iš n atliktų bandymų k kartų bandymas pavyko. Realizacijų, kaip išsidėstė bandymų sėkmės ir nesėkmės yra be galo daug, o visi atlikti bandymai yra nepriklausomi, tai tikimybę, kad visose skirtingose realizacijose k kartų bandymas pasiseks, apibrėžiame taip:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S...NS...S \cup N...SSN... \cup ...) = \mathbb{P}(S...NS...S) + \mathbb{P}(N...SSN...) + ...\\
&= \mathbb{P}(S)...\mathbb{P}(N)\mathbb{P}(S)...\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(N)...\mathbb{P}(S)\mathbb{P}(S)\mathbb{P}(N)... + ...\\
&= p...(1-p)p...p + (1-p)...pp(1-p)... + ...\\
&= p^k(1-p)^{n-k} + p^k(1-p)^{n-k} + ... + p^k(1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Kadangi kiekvienoje realizacijoje bandymas pavyks k kartų, tai kaip matome, nesvarbu kaip jose išsidėstys sėkmės ir nesėkmės atvejai, kiekvieno palankaus įvykio (realizacijos) tikimybė bus vienoda ir lygi $p^k(1-p)^{n-k}$. Tokių įvykių yra tiek, kiek ir būdų iš n eksperimentų gauti k sėkmingų, o tai yra lygu $\binom{n}{k}$. Taigi, įrodėme (1.1) lygybę. ▲

1.4. Binominis skirstinys

Remiantis Alfredo Račkausko paskaitų konspektu „Atsitiktiniai procesai“ [9], jei atliekame n bandymų, iš kurių kiekvienas turi tik dvi baigtis su tikimybėmis p ir $1-p$, tada įvykio pasirodymų skaičius X yra binominis atsitiktinis dydis. Jį žymėsime $X \sim \mathcal{B}in(n,p)$. Tokio atsitiktinio dydžio tikimybės gaunamos iš (1.1) formulės ir žymimos $\mathbb{P}(X=k)$, kai $k = 0, 1, ..., n$.
Be to

$$\mathbb{E}X = np,\ \mathbb{D}X = np(1-p). \tag{1.2}$$

Įrodykime šias (1.2) savybes remiantis [3].

Įrodymas. Binominis atsitiktinis dydis X turi skirstinį

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}. \tag{1.3}$$

Naudojant bendrą vidurkio formulę, tokio dydžio X vidurkis lygus

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \mathbb{P}(X=k). \tag{1.4}$$

Įstatome lygybę (1.3) į užrašytą vidurkio lygtį (1.4)

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}. \tag{1.5}$$

Pastebėkime, jog kai $k = 0$, pirmasis sumos narys būtų lygus 0, taigi sumavimą galime pradėti nuo $k = 1$. Pertvarkome (1.5) lygybę

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\\
= \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}p \cdot p^{k-1}(1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Galime pastebėti, jog paskutiniame žingsnyje gauta suma paprasčiausiai yra visų galimų rezultatų tikimybių suma, kuri akivaizdu bus lygi 1. Taigi, gauname, jog

$$\mathbb{E}X = np.$$

Dabar įrodykime, jog dispersija lygi $\mathbb{D}X = np(1-p)$. Dispersiją galime užrašyti taip

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2. \tag{1.7}$$

Jau žinome ir įrodėme, kad $\mathbb{E}X = np$, taigi lieka rasti, kam lygu $\mathbb{E}X^2$. Pasinaudojame lygtimi (1.3) ir užrašome

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{1.8}$$

Kaip ir anksčiau, pastebėkime, jog kai $k = 0$, pirmasis sumos narys būtų lygus 0, taigi sumavimą galime pradėti nuo $k = 1$. Pertvarkome (1.8) lygybę

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} kn \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}.\end{aligned}$$

Išskaidykime paskutiniame žingsnyje gautą sumą į dvi sumas

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X^2 &= np \sum_{k=1}^{n} (k-1+1) \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ &= np \left(\sum_{k=1}^{n} (k-1) \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \right).\end{aligned} \tag{1.9}$$

Pastebėkime, kad lygybėje (1.9) gautos sumos yra binominio pasiskirstymo tikėtinoji vertė ir visų galimų rezultatų tikimybių suma. Taigi, (1.9) galime perrašyti taip

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X^2 &= np(p(n-1)+1) = np(np-p+1) = (np)^2 - np^2 + np \\ &= (np)^2 + np(1-p).\end{aligned} \tag{1.10}$$

Įstatykime mums jau žinomą vidurkio išraišką ir gautą lygybę (1.10) į anksčiau išreikštą lygybę (1.7)

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = (np)^2 + np(1-p) - (np)^2 = np(1-p).$$

Įrodėme (1.2) savybes. ▲

1.5. Pasikliautinieji intervalai

Remiantis Vydo Čekanavičiaus ir Gedimino Murausko vadovėliu „Statistika ir jos taikymai. 1“ [10], kai turime nežinomą parametrą, labai svarbu žinoti, kokiam intervalui jis gali priklausyti. Nežinomo parametro įverčiai yra atsitiktiniai dydžiai ir jie visaip išsidėstę aplink tikrąją reikšmę, todėl mums reikia sukonkretinti parametro reikšmę. Tarkime, turime atsitiktinį dydį X, kurio skirstinys yra P_θ. Egzistuoja toks nežinomas parametras θ, priklausantis tam skirstiniui. Įsivedame tokį skaičių γ, kad jis tenkintų nelygybę $0 < \gamma < 1$. Tuomet egzistuoja įverčiai $\hat{\theta}_1$ ir $\hat{\theta}_2$ tokie, kad būtų teisinga ši lygybė

$$P(\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2) = \gamma.$$

Intervalą $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ vadinsime parametro θ pasikliautinuoju intervalu, o skaičių γ - pasikliovimo lygmeniu.

1.6. Konservatyvumo metodas

Konservatyvumo metodas aprašytas Katja Pluto ir Dirk Tasche straipsnyje „Estimating Probabilities of Default for Low Default Portfolios“ [8]. Skolininkus suskirstome į klases A_1, A_2,..., A_N su atitinkamais klientų skaičiais n_{A_1}, n_{A_2},..., n_{A_N}. Patikimiausi skolininkai priklauso grupei A, o mažiausiai patikimi - grupei A_N. Per paskutinį stebėjimo periodą nei vienoje klasėje neužfiksuota įsipareigojimų neįvykdymų. Laikome, kad nemokumo tikimybėms (klasės A_1 - p_{A_1}, A_2 - p_{A_2},..., A_N - p_{A_N}), kurias vėliau įvertinsime, galioja nelygybė

$$p_{A_1} \leq p_{A_2} \leq ... \leq p_{A_N}. \tag{1.11}$$

Pagal (1.11) nelygybę matome, jog klasės A_1 tikimybė p_{A_1} privalo būti ne didesnė už klasės A_2 tikimybę p_{A_2}, taip tęsiant iki klasės A_N, kurios tikimybė p_{A_N} turi būti ne mažesnė už klasės A_{N-1} tikimybę $p_{A_{N-1}}$. Atsargiausia ir tiksliausia tikimybės p_{A_1} vertė būtų gaunama padarius prielaidą, kad tikimybės p_{A_1} ir p_{A_N} yra lygios. Tuomet iš (1.11) išplaukia

$$p_{A_1} = p_{A_2} = ... = p_{A_N}. \tag{1.12}$$

Pagal nelygybę (1.11), klasės A_2 nemokumo tikimybė p_{A_2} negali viršyti klasių A_3,..., A_N tikimybių p_{A_3},..., p_{A_N}. Taigi, konservatyviausia tikimybės p_{A_2} vertė būtų gaunama padarius prielaidą, jog $p_{A_2} = ... = p_{A_N}$. Tuomet klasės A_3 tikimybė p_{A_3} būtų vertinama padarius prielaidą, jog $p_{A_3} = ... = p_{A_N}$ ir analogiškai tęstume ir su kitų klasių tikimybėmis.

Vadovaujantis (1.12) sąryšiu ir padarytomis prielaidomis visų klasių nemokumo tikimybėms, reikia nustatyti pasikliovimo intervalą šioms tikimybėms p_{A_1}, p_{A_2},..., p_{A_N} su pasikliovimo lygmeniu γ. Tokį intervalą dar galėtume apibūdinti kaip visų galimų p_{A_1}, p_{A_2},..., arba p_{A_N} reikšmių rinkinį, kuris turi savybę, jog tikimybė per stebėjimo laikotarpį neužfiksuoti jokių įsipareigojimų neįvykdymų, yra ne mažesnė nei $1 - \gamma$ (pavyzdžiui $\gamma = 95\%$).

2. Įvykiai, kai nėra įsipareigojimų nevykdymų

2.1. Sprendimas bendru atveju

Šiame skyriuje apžvelgsime atvejį, kai portfelyje nėra įsipareigojimų neįvykdymų. Kad rastume p_{A_1} tikimybę, taikysime konservatyvumo metodą, kurį jau aptarėme 1.6 skyrelyje. Nepaisant to, į kiek rizikingumo grupių skolininkai būtų suskirstyti, taikant konservatyvumo metodą, jų visų įsipareigojimų nevykdymų tikimybes laikysime lygiomis ir nemokumo tikimybės tyrimo principas išliks toks pat. Tarkime, kad turime N rizikingumo klasių: A_1, A_2,...,A_N. Vadovaudamiesi lygtimi (1.12) turime $p_{A_1} = p_{A_2} = ... = p_{A_N}$ ir tai reiškia, jog grupės A_1, A_2,...,A_N savo rizikingumu nesiskiria. Dėl to visus skolininkus galime sujungti ir tirti vieną $n_{A_1} + n_{A_2} + ... + n_{A_N}$ dydžio aibę. Darant prielaidą, jog įsipareigojimų neįvykdymo įvykiai yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, ir remiantis Bernulio schema bei lygtimi (1.1), tikimybė, kad neužfiksuosime nei vieno tokio įvykio, bus lygi

$$\binom{n_{A_1} + n_{A_2} + ... + n_{A_N}}{0} p_{A_1}^0 (1 - p_{A_1})^{n_{A_1}+n_{A_2}+...+n_{A_N}} = (1 - p_{A_1})^{n_{A_1}+n_{A_2}+...+n_{A_N}}.$$

Tuomet, norėdami rasti tikimybę p_{A_1}, turime rasti jos pasikliovimo intervalą. Tai padarysime išspręsdami nelygybę, kuri skamba taip: tikimybė, jog mūsų tiriamame periode neužfiksuosime nė vieno įsipareigojimo neįvykdymo, privalo būti ne mažesnė už $1-\gamma$ (čia γ - reikšmingumo lygmuo):

$$1-\gamma \leq (1-p_{A_1})^{n_{A_1}+n_{A_2}+\ldots+n_{A_N}}.$$

Atlikus keletą veiksmų gauname

$$\begin{aligned} p_{A_1} &\leq 1-\sqrt[n_{A_1}+n_{A_2}+\ldots+n_{A_N}]{1-\gamma} \\ &\leq 1-(1-\gamma)^{1/(n_{A_1}+n_{A_2}+\ldots+n_{A_N})}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Gavome tikimybės p_{A_1} pasikliautinąjį intervalą. Tam, kad vertintume rizikingiausią atvejį, kuomet nemokumo tikimybė yra didžiausia, tikimybės p_{A_1} įverčiu laikysime intervalo viršutinį rėžį.

Kad rastume klasės A_2 įsipareigojimų nevykdymo tikimybę p_{A_2}, vėlgi remiamės konservatyvumo metodu ir laikome, jog klasės A_2 tikimybė p_{A_2} negali viršyti klasės A_N tikimybės p_{A_N}. Tuomet, kad gautume tiksliausią ir saugiausią tikimybės įvertį, turime laikyti, jog $p_{A_2} = \ldots = p_{A_N}$. Šiuo atveju tiriame $n_{A_2}+\ldots+n_{A_N}$ dydžio skolininkų aibę ir toliau tikimybės p_{A_2} įverčio ieškome analogiškai, kaip ir p_{A_1} tikimybės. Tikimybė, jog neužfiksuosime nei vieno įsipareigojimų neįvykdymo, lygi

$$\binom{n_{A_2}+\ldots+n_{A_N}}{0} p_{A_2}^0 (1-p_{A_2})^{n_{A_2}+\ldots+n_{A_N}} = (1-p_{A_2})^{n_{A_2}+\ldots+n_{A_N}}.$$

Tuomet ieškome pasikliovimo intervalo, kurio viršutinį rėžį laikysime tikimybės p_{A_2} įverčiu

$$1-\gamma \leq (1-p_{A_2})^{n_{A_2}+\ldots+n_{A_N}}$$

ir galiausiai

$$\begin{aligned} p_{A_2} &\leq 1-\sqrt[n_{A_2}+\ldots+n_{A_N}]{1-\gamma} \\ &\leq 1-(1-\gamma)^{1/(n_{A_2}+\ldots+n_{A_N})}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Analogišku principu ieškotume ir visų kitų rizikingumo klasių nemokumo tikimybių įverčių, iki kol pasiektume paskutinę, rizikingiausią grupę A_N. Norint šiai klasei surasti įsipareigojimų nevykdymo tikimybę, konservatyvumo metodo nebetaikome ir tiriame tik n_{A_N} dydžio skolininkų aibę, nes pažiūrėjus į nelygybę (1.11) matome, kad nėra akivaizdžios viršutinės ribos tikimybei p_{A_N}. Taigi, pasikliovimo intervalą su reikšmingumo lygmeniu γ skaičiuojame iš nelygybės

$$1-\gamma \leq (1-p_{A_N})^{n_{A_N}}. \tag{2.3}$$

Pertvarkome (2.3) nelygybę ir gauname

$$\begin{aligned} p_{A_N} &\leq 1-\sqrt[n_{A_N}]{1-\gamma} \\ &\leq 1-(1-\gamma)^{1/n_{A_N}}. \end{aligned}$$

2.2. Pavyzdys

Panagrinėkime pavyzdį su konkrečiais skaičiais. Tarkime, kad turime $n = 930$ skolininkų portfelį, kuriame nebuvo užfiksuota įsipareigojimų neįvykdymų. Skolininkai suskirstyti į keturias klases A_1, A_2, A_3 ir A_4 ir jose pasiskirstę taip:

$$n_{A_1} = 300,\ n_{A_2} = 450,\ n_{A_3} = 100,\ n_{A_4} = 80. \tag{2.4}$$

Toliau skaičiuosime remdamiesi 2.1 skyriuje aptartu sprendimo principu. Pasirenkame kelis reikšmingumo lygmenis γ ir su kiekvienu iš jų apskaičiuojame įsipareigojimo nevykdymo tikimybes visoms skolininkų klasėms.

Tarkime, mūsų pasirinkti reikšmingumo lygmenys γ yra $0.5,\ 0.7,\ 0.8,\ 0.9,\ 0.95$. Pirmiausia, raskime tikimybę p_{A_1}, kai $\gamma = 0.5 = 50\%$. Sustatome skaičius į nelygybę (2.1) ir gauname

$$\begin{aligned} p_{A_1} &\leq 1 - (1-0.5)^{1/(300+450+100+80)} \\ &\leq 1 - 0.5^{1/930} \approx 0.000745 \approx 0.075\%. \end{aligned}$$

Tokiu pat principu rastume ir kitas tikimybes su visais reikšmingumo lygmenimis. Nors sprendimas ir nesudėtingas, bet paprastumo ir greitumo dėlei likusioms tikimybėms rasti pasinaudosime programa R, programavimo kodas pateiktas prieduose (A). Gauti rezultatai pateikti 2 lentelėje.

γ	50%	70%	80%	90%	95%
$\hat{p_{A_1}}$	0.075%	0.129%	0.173%	0.247%	0.322%
$\hat{p_{A_2}}$	0.110%	0.191%	0.255%	0.365%	0.474%
$\hat{p_{A_3}}$	0.384%	0.667%	0.890%	1.271%	1.651%
$\hat{p_{A_4}}$	0.863%	1.494%	1.992%	2.837%	3.675%

2 lentelė. $n = 930$ dydžio portfelio skolininkų klasių A_1, A_2, A_3 ir A_4 įsipareigojimų nevykdymo tikimybių įverčiai su atitinkamais reikšmingumo lygmenimis γ.

Kad galėtume palyginti du skirtingus skolininkų portfelius, ištirkime dar vieną didesnį skolininkų porfelį, kai $n = 1700$ ir jie klasėse pasiskirstę taip:

$$n_{A_1} = 500,\ n_{A_2} = 600,\ n_{A_3} = 400,\ n_{A_4} = 200. \tag{2.5}$$

Skaičiuojame įsipareigojimų nevykdymo tikimybių įverčius analogiškai, kaip darėme su 2.4 portfeliu ir gautus rezultatus pateikiame 3 lentelėje.

γ	50%	70%	80%	90%	95%
$\hat{p_{A_1}}$	0.041%	0.071%	0.095%	0.135%	0.176%
$\hat{p_{A_2}}$	0.058%	0.100%	0.134%	0.192%	0.249%
$\hat{p_{A_3}}$	0.115%	0.200%	0.268%	0.383%	0.498%
$\hat{p_{A_4}}$	0.346%	0.600%	0.801%	1.145%	1.487%

3 lentelė. $n = 1700$ dydžio portfelio skolininkų klasių A_1, A_2, A_3 ir A_4 įsipareigojimų nevykdymo tikimybių įverčiai su atitinkamais reikšmingumo lygmenimis γ.

Lygindami lenteles 2 ir 3 matome, jog nemokumo tikimybių viršutinių rėžių įverčiai priklauso ne tik nuo pasirinkto reikšmingumo lygmens γ, bet ir nuo portfelio dydžio, t.y. skolininkų kiekio. Kuo daugiau turime skolininkų ir kuo mažesnį reikšmingumo lygmenį γ pasirenkame, tuo įsipareigojimų nevykdymo tikimybės įvertis yra mažesnis. Natūralu, kad kuo didesnis įsipareigojančių asmenų skaičius mūsų portfleyje, tuo didesnio mes tikimės kreditingumo. Kaip bebūtų, kuo daugiau turime skolininkų, tuo dažniau kai kuriose klasėse gali atsirasti įsipareigojimų neįvykdymų.

3. Įvykiai, kai yra įsipareigojimų nevykdymų

Praėjusiame skyriuje aptarėme atvejį, kaip rasti įsipareigojimų neįvykdymo tikimybę, kai skolininkų portfelyje nebuvo užfiksuota nei vieno įsipareigojimų neįvykdymo. Kadangi gyvenimiškoje praktikoje nebus taip, kad skolininkai be išimties visada laikosi savo įsipareigojimų, turime aptarti atvejį, kaip reikia ieškoti įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės, kai skolininkų portfelyje buvo tokių neįvykdymų. Tokiu atveju skaičiavimas taps sudėtingesnis ir šiame skyriuje aptarsime keletą sprendimo būdų.

3.1. Sprendimas bendru atveju

Tarkime, jog žinome, kad mūsų turimame skolininkų portfelyje bent vienoje iš rizikingumo klasių buvo užfiksuotas įsipareigojimų neįvykdymas. Norint rasti įsipareigojimų neįvykdymo tikimybes visoms klasėms, naudosimės Bernulio schemos lygybe (1.1) ir pritaikysime ją mūsų situacijai. Darome prielaidą, kad įsipareigojimų neįvykdymo įvykiai yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Pažymėkime, kad m - bendras portfelio įsipareigojimų neįvykdymo atvejų skaičius, tai tikimybė, kad portfelyje užfiksuosime tokių įvykių, bus lygi

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \; \textit{kai } m \geq 0. \tag{3.1}$$

Tarkime, kad turime N rizikingumo klasių: A_1, A_2,...,A_N ir skolininkai jose atitinkamai pasiskirstę n_1, n_2,..., n_N. Kiekvienos klasės įsipareigojimų neįvykdymo skaičius taip pat atitinkamai yra m_1, m_2,..., m_N. Pirmiausia ieškokime A_1 rizikingumo klasės įsipareigojimų nevykdymo tikimybės p_{A_1}. Kaip ir 2.1 skyriuje aptartu atveju, pasirėmę konservatyvumo metodu, aprašytu skyriuje 1.6, kad gautume saugiausią tikimybės įvertį, galime laikyti, jog rizikingumo grupės savo rizikingumu nesiskiria ir tiriame bendrą $n_1 + n_2 + ... + n_N$ dydžio skolininkų aibę. Pertvarkome lygybę (3.1) ir gauname

$$\sum_{k=0}^{m_1+...+m_N} \binom{n_{A_1} + n_{A_2} + ... + n_{A_N}}{k} p_{A_1}^k (1-p_{A_1})^{n_{A_1}+n_{A_2}+...+n_{A_N}-k}.$$

Tuomet turime rasti p_{A_1} tikimybės pasikliautinąjį intervalą. Tam pasinaudosime nelygybe

$$1-\gamma \leq \sum_{k=0}^{m_1+...+m_N} \binom{n_{A_1} + n_{A_2} + ... + n_{A_N}}{k} p_{A_1}^k (1-p_{A_1})^{n_{A_1}+n_{A_2}+...+n_{A_N}-k}. \tag{3.2}$$

Išsprendę šią nelygybę, gausime tikimybės p_{A_1} pasikliautinąjį intervalą ir jos įverčiu laikysime intervalo viršutinįjį rėžį.

Toliau ieškome rizikingumo klasės A_2 įsipareigojimų nevykdymo tikimybės p_{A_2}. Pritaikę konservatyvumo metodą laikome, kad tikimybė p_{A_2} negali viršyti rizikingiausios klasės įsipareigojimų nevykdymo tikimybės p_{A_N} ir tiriame $n_{A_2} + ... + n_{A_N}$ dydžio aibę. Taigi, tikimybė, jog klasėje A_2 įvyks įsipareigojimų neįvykdymas, bus lygi

$$\sum_{k=0}^{m_2+...+m_N} \binom{n_{A_2} + ... + n_{A_N}}{k} p_{A_2}^k (1-p_{A_2})^{n_{A_2}+...+n_{A_N}-k}.$$

Ieškome tikimybės p_{A_2} pasikliautinojo intervalo iš nelygybės

$$1-\gamma \leq \sum_{k=0}^{m_2+...+m_N} \binom{n_{A_2} + ... + n_{A_N}}{k} p_{A_2}^k (1-p_{A_2})^{n_{A_2}+...+n_{A_N}-k}. \tag{3.3}$$

Ją išsprendę gausime tikimybės p_{A_2} pasikliautinąjį intervalą ir jos įverčiu vėlgi laikysime intervalo viršutinįjį rėžį.

Analogišku sprendimo principu ieškotume visų kitų rizikingumo klasių įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių, išskyrus rizikingiausios klasės A_N. Norint rasti šios klasės įsipareigojimų neįvykdymo tikimybę, konservatyvumo metodo nebetaikome ir tiriame n_{A_N} dydžio aibę, kadangi pagal nelygybę (1.11) nebėra akivaizdžios viršutinės ribos tikimybei p_{A_N}. Užrašome kam lygi klasės N įsipareigojimų nevykdymo tikimybė

$$\sum_{k=0}^{m_N} \binom{n_{A_N}}{k} p_{A_N}^k (1-p_{A_N})^{n_{A_N}-k}.$$

Surandame tikimybės p_{A_N} pasikliautinąjį intervalą iš nelygybės

$$1-\gamma \leq \sum_{k=0}^{m_N} \binom{n_{A_N}}{k} p_{A_N}^k (1-p_{A_N})^{n_{A_N}-k} \tag{3.4}$$

ir jos įverčiu laikome viršutinįjį intervalo rėžį.

Pabandykime išspręsti nelygybę (3.4) ir iš jos išsireikšti tikimybę p_{A_N}:

$$\begin{aligned} 1-\gamma \quad &\leq \quad \binom{n_{A_N}}{1} p_{A_N}^1 (1-p_{A_N})^{n_{A_N}-1} + \binom{n_{A_N}}{2} p_{A_N}^2 (1-p_{A_N})^{n_{A_N}-2} + \ldots + \\ &+ \quad \binom{n_{A_N}}{m_N} p_{A_N}^{m_N} (1-p_{A_N})^{n_{A_N}-m_N}. \end{aligned}$$

Kadangi turime m_N įsipareigojimų neįvykdymų, matome, kad nelygybės sprendimas tokiu atveju jau tampa pernelyg sudėtingas ir iš jos išsireikšti tikimybę p_{A_N} paprastai nepavyks. Tad toliau aptarsime, kokius metodus galima pasitelkti į pagalbą, jog nelygybes (3.2), (3.3), (3.4) išspręsti taptų paprasčiau.

3.1.1. Aproksimacija Puasono skirstiniu

Pirmiausia apibrėžkime, kas yra Puasono skirstinys. Remiantis Vydo Čekanavičiaus ir Gedimino Murausko vadovėliu „Statistika ir jos taikymai. 1“ [10], Puasono skirstinys priklauso nuo vieno parametro $\lambda > 0$ ir šį skirstinį žymėsime $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Puasono skirstinys dar vadinamas retų įvykių skirstiniu ir jo tikimybės nusakomos formule

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Be to, skirstinio vidurkis yra $\mathbb{E}X = \lambda$, o dispersija $\mathbb{D}X = \lambda$. Tad kaip matome, $\mathbb{E}X = \mathbb{D}X$.

Šiame darbe įsipareigojimų nevykdymo tikimybės tyrimą aprašome remdamiesi binominiu skirstiniu $\mathcal{B}in(n,p)$. Sakykime, kad mūsų tiriamo portfelio skolininkų skaičius n labai didelis, palyginus su jų įsipareigojimų neįvykdymų tikimybėmis p. Pavyzdžiui, $n > 1000$, o $p < 0.001$. Remiantis šaltiniu [5], tokiu atveju binominį skirstinį gerai atitinka Puasono skirstinys $\mathcal{P}(np)$. Puasono aproksimaciją atliekame taip: sulyginame binominio skirstinio ir Puasono skirstinio teorinius vidurkius $(np \sim \lambda)$ ir tolimesnius skaičiavimus jau galime atlikti naudodami Puasono skirstinį. Taigi, kai turime labai daug skolininkų ir jų įsipareigojimų nevykdymo tikimybė labai maža, turėsime

$$\mathbb{P}(X=k) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{3.5}$$

Įrodysime lygtį (3.5) remiantis Mindaugo Bloznelio mokymo priemone „Tikimybių teorijos paskaitos“ [2].

Įrodymas. Turime, kad $np = \lambda \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n}$. Tada pažymėkime

$$a_n = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Šiek tiek pertvarkykime šią lygybę ir ją suprastinkime

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \\ &= \frac{n(n-1)...(n-k+1)(n-k)!\lambda^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{k!(n-k)!n^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \\ &= \frac{n(n-1)...(n-k+1)\lambda^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{k!n^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Patogumo dėlei pažymėkime

$$A_n = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}$$

$$B_n = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k$$

$$C_n = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n.$$

Tuomet lygtį (3.6) galime užsirašyti taip:

$$a_n = \frac{A_n C_n}{B_n} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}. \tag{3.7}$$

Dabar skaičiuokime ribas

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Šios ribos yra akivaizdžios. Kad rastume C_n ribą, pasiremsime iš ribų savybių žinoma riba

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Ieškome C_n ribos

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \left(-\frac{\lambda}{n}\right)\right)^{\frac{n}{-\lambda}(-\lambda)} = e^{-\lambda}.$$

Gautas ribas sustatome į lygtį (3.7)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1 \cdot e^{-\lambda}}{1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Įrodėme (3.5) lygybę. ▲

3.1.2. Keitimas beta skirstiniu

Kai skolininkų portfelyje turime užfiksuotų įsipareigojimų neįvykdymų, jų tikimybes galime rasti į pagalbą pasitelkę beta skirstinį. Pirmiausia apibrėžkime kas yra beta atsitiktinis dydis ir aptarkime keletą jo savybių.

Remiantis Andriaus Grigučio konspektais „Binominės tikimybės asimptotika“ [4], tolydusis atsitiktinis dydis Y, kurio tankis

$$\frac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}, \text{ čia } \alpha > 0,\ \beta > 0 \tag{3.8}$$

yra vadinamas beta atsitiktiniu dydžiu. Pažymėkime $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ ir tankį (3.8) perrašykime

$$\frac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}.$$

Oilerio gama funkcija Γ yra apibrėžiama taip

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Apibrėžkime beta atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkciją

$$\mathcal{B}_{\alpha,\beta}(p) := \mathbb{P}(Y \le p) = \frac{\int_0^p u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du}{B(\alpha,\beta)}.$$

Teiginys. Beta ir binominio atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkcijas sieja toks ryšys

$$1 - \mathcal{B}_{k+1,n-k}(p) = \mathcal{B}_{n-k,k+1}(1-p) = \mathcal{B}in_{n,p}(k) = \sum_{i=0}^{k} P_n(i). \tag{3.9}$$

Įrodykime, kad sąryšis (3.9) yra teisingas.

Įrodymas. Pirmiausia įrodykime pirmąją (3.9) lygybės dalį, jog

$$1 - \mathcal{B}_{k+1,n-k}(p) = \mathcal{B}_{n-k,k+1}(1-p).$$

Įveskime keitinį $u = 1 - x$. Tuomet

$$\mathcal{B}_{n-k,k+1}(1-p) = \frac{\int_0^{1-p} u^{n-k-1}(1-u)^k du}{B(n-k,k+1)} = -\frac{\int_1^p (1-x)^{n-k-1}x^k dx}{B(n-k,k+1)}$$
$$= \frac{\int_p^1 x^k(1-x)^{n-k-1}dx}{B(k+1,n-k)} = \frac{B(k+1,n-k) - \int_0^p x^k(1-x)^{n-k-1}dx}{B(k+1,n-k)} = 1 - \mathcal{B}_{k+1,n-k}(p).$$

Dabar įrodykime antrąją lygybės (3.9) dalį, jog

$$\mathcal{B}_{n-k,k+1}(1-p) = \mathcal{B}in_{n,p}(k). \tag{3.10}$$

Kad būtų patogiau, įveskime pakeitimus

$$k \mapsto k+1,\ j \mapsto n-k,\ p \mapsto 1-p \tag{3.11}$$

ir lygybę (3.10) užrašykime taip:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{n-k,k+1}(1-p) = \mathcal{B}_{j,k}(p) = \frac{\int_0^p u^{j-1}(1-u)^{k-1}du}{B(j,k)} &= \frac{1}{B(j,k)}\frac{1}{j}\int_0^p (1-u)^{k-1}du^j \\ = \frac{1}{B(j,k)}\frac{1}{j}\left(u^j(1-u)^{k-1}\Big|_0^p - \int_0^p u^j d(1-u)^{k-1}\right)& \\ = \frac{1}{B(j,k)}\frac{1}{j}\left(p^j(1-p)^{k-1} + (k-1)\int_0^p u^j(1-u)^{k-2}du\right).& \end{aligned} \tag{3.12}$$

Tarkime, jog j ir k yra natūralieji skaičiai. Tai galime užrašyti $\Gamma(j) = (j-1)!$ ir tuomet

$$\frac{1}{jB(j,k)} = \frac{1}{j}\frac{(j+k-1)!}{(j-1)!(k-1)!} = \frac{(j+k-1)!}{j!(k-1)!} = \binom{j+k-1}{k-1}$$

ir

$$\frac{k-1}{jB(j,k)} = \frac{(j+k-1)!}{j!(k-2)!} = \frac{1}{B(j+1,k-1)}.$$

Šias išraiškas įstatome į prieš tai gautą lygybę (3.12) ir turime

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{j,k}(p) &= \binom{j+k-1}{k-1}p^j(1-p)^{k-1} + \frac{\int_0^p u^j(1-u)^{k-2}du}{B(j+1,k-1)} \\ &= \binom{j+k-1}{k-1}p^j(1-p)^{k-1} + \mathcal{B}_{j+1,k-1}(p).\end{aligned}$$

Taip pat galime užrašyti

$$\mathcal{B}_{j+1,k-1}(p) = \binom{j+k-1}{k-2}p^{j+1}(1-p)^{k-2} + \mathcal{B}_{j+2,k-2}(p).$$

Tokiu pat principu galėtume užrašyti ir $\mathcal{B}_{j+2,k-2}(p)$, $\mathcal{B}_{j+3,k-3}(p)$ ir taip toliau. Taigi turėsime

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{j,k}(p) &= \binom{j+k-1}{k-1}p^j(1-p)^{k-1} + \binom{j+k-1}{k-2}p^{j+1}(1-p)^{k-2} + \mathcal{B}_{j+2,k-2}(p) \\ &= \binom{j+k-1}{k-1}p^j(1-p)^{k-1} + \binom{j+k-1}{k-2}p^{j+1}(1-p)^{k-2} + \binom{j+k-1}{k-3}p^{j+2}(1-p)^{k-3} \\ &\quad +\ldots + \binom{j+k-1}{1}p^{j+k-2}(1-p) + \mathcal{B}_{j+k-1,1}(p).\end{aligned}$$

Dar galime pastebėti, kad

$$\mathcal{B}_{j+k-1,1}(p) = \frac{(j+k-1)!}{(j+k-2)!0!}\int_0^p u^{j+k-2}du = t^{j+k-1}\Big|_0^p = p^{j+k-1}.$$

Galiausiai

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{j,k}(p) &= \binom{j+k-1}{k-1}p^j(1-p)^{k-1} + \binom{j+k-1}{k-2}p^{j+1}(1-p)^{k-2} + \mathcal{B}_{j+2,k-2}(p) \\ &= \binom{j+k-1}{k-1}p^j(1-p)^{k-1} + \binom{j+k-1}{k-2}p^{j+1}(1-p)^{k-2} + \binom{j+k-1}{k-3}p^{j+2}(1-p)^{k-3} \\ &\quad +\ldots + \binom{j+k-1}{1}p^{j+k-2}(1-p) + \binom{j+k-1}{0}p^{j+k-1}(1-p)^0 \\ &= \sum_{i=0}^{k-1}\binom{j+k-1}{i}p^{j+k-1-i}(1-p)^i.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Atkeičiame atgal kintamuosiuos (3.11), kuriuos paprastumo dėlei buvome pakeitę, ir iš lygties (3.13) gauname

$$\mathcal{B}_{j,k}(p) = \mathcal{B}_{n-k,k+1}(1-p) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \mathcal{B}in_{n,p}(k).$$

Įrodėme (3.9) lygybę. ▲

Apibrėžkime dar vieną svarbią lygybę, kuri padės mums skaičiuoti įsipareigojimų nevykdymo tikimybes. Remiantis [8], jeigu X yra binominis atsitiktinis dydis su parametrais n ir p, tai su sąlyga $0 \leq k \leq n$ turėsime

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq p) = \frac{\int_p^1 t^k (1-t)^{n-k-1} dt}{\int_0^1 t^k (1-t)^{n-k-1} dt}. \tag{3.14}$$

Čia Y - beta atsitiktinis dydis su parametrais $\alpha = k+1$ ir $\beta = n-k$.

3.1.3. Normalioji aproksimacija

Įsipareigojimų nevykdymo tikimybės radimui sudėtingesniais atvejais, kuomet naudojantis vien tik binominiu skirstiniu jas rasti tampa nebepatogu ir sudėtinga, į pagalbą galime pasitelkti ir normaliąją aproksimaciją bei Muavro-Laplaso teoremą. Mes jau nagrinėjome atvejį, kai mūsų tiriamo portfelio skolininkų skaičius n labai didelis, o įsipareigojimų nevykdymo tikimybė p labai maža, ir šiuo atveju taikėme Puasono aproksimaciją. Dabar tarkime, kad tikimybė p nėra nei labai maža, nei labai didelė ir svyruoja apie vidutinę, idealiausia, kai $p = \frac{1}{2}$. Tokiu atveju binominį skirstinį gerai atitinka normalioji aproksimacija.

Pirmiausia aptarkime kas yra normalusis skirstinys. Remiantis [9], atsitiktinį dydį X vadinsime normaliuoju ir žymėsime $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, kai jo tankio funkcija lygi

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Skirstinio parametrai (μ, σ^2) atitinkamai yra vidurkis ir dispersija. Kai vidurkis lygus 0, o dispersija lygi 1, atsitiktinį dydį X vadinsime standartiniu normaliuoju ir žymėsime $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Tokio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija žymima Φ ir yra lygi

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-s^2/2} ds, \ x \in \mathbb{R}.$$

Remiantis Algimanto Aksomaičio vadovėliu „Tikimybių teorija ir statistika“ [1], Muavro-Laplaso teorema teigia, kad jeigu $0 < p < 1$ ir $n \to \infty$, tai su bet kuriuo realiuoju x

$$\mathbb{P}\left(\frac{k_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) \Rightarrow \Phi(x) \tag{3.15}$$

kur k_n - „sėkmių“ skaičius, atlikus n Bernulio eksperimentų, p - „sėkmės“ tikimybė kiekviename eksperimente, Φ - pasiskirstymo funkcija.

Dabar apsibrėžkime lygybę, kuri mums padės skaičiuoti įsipareigojimų neįvykdymo tikimybes. Tikimybė, kad „sėkmingų“ Bernulio eksperimentų skaičius k_n bus tarp bet kokių skaičių a ir b ($a < b$), bus lygi

$$\mathbb{P}(a \leq k_n < b) = \mathbb{P}\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{k_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right). \tag{3.16}$$

Pasinaudojus Muavro-Laplaso teoremos lygtimi (3.15), mūsų užrašytą lygybę (3.16) galime perrašyti taip

$$\mathbb{P}(a \le k_n < b) \simeq \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right). \tag{3.17}$$

3.2. Pavyzdžiai

3.2.1. Aproksimacijos Puasono skirstiniu pavyzdys

Kadangi Puasono aproksimacija yra tiksliausia, kai tiriamo portfelio skolininkų skaičius n yra labai didelis, tai nagrinėkime $n = 3200$ dydžio skolininkų portfelį. Skolininkai suskirstyti į keturias klases A_1, A_2, A_3 ir A_4 ir jose pasiskirstę taip, jog $n_{A_1} = 1500$, $n_{A_2} = 900$, $n_{A_3} = 500$ ir $n_{A_4} = 300$. Tarkime, jog skolininkų portfelyje buvo užfiksuota 15 įsipareigojimų neįvykdymų $(m = 15)$. Klasėje A_1 buvo užfiksuotas 1, klasėje A_2 užfiksuoti 3, A_3 klasėje 4 neįvykdymai ir klasėje A_4 tokių buvo 7 (t.y. $m_{A_1} = 1$, $m_{A_2} = 3$, $m_{A_3} = 4$ ir $m_{A_4} = 7$). Kad rastume visų klasių įsipareigojimų neįvykdymų tikimybes su skirtingais reikšmingumo lygmenimis γ, pasinaudosime bendru sprendimo principu, aprašytu skyrelyje 3.1, tuomet pritaikysime Puasono aproksimaciją, aprašytą skyrelyje 3.1.1 ir pasinaudosime lygybe (3.5). Pirmiausia užrašome nelygybę klasės A_1 įsipareigojimų nevykdymo tikimybei p_{A_1} rasti

$$1 - \gamma \le \sum_{k=0}^{15} \frac{(3200 p_{A_1})^k}{k!} e^{-3200 p_{A_1}}.$$

Klasių A_2, A_3, A_4 įsipareigojimų nevykdymo tikimybių p_{A_2}, p_{A_3}, p_{A_4} ieškosime taip

$$1 - \gamma \le \sum_{k=0}^{14} \frac{(1700 p_{A_2})^k}{k!} e^{-1700 p_{A_2}},$$
$$1 - \gamma \le \sum_{k=0}^{11} \frac{(800 p_{A_3})^k}{k!} e^{-800 p_{A_3}},$$
$$1 - \gamma \le \sum_{k=0}^{7} \frac{(300 p_{A_4})^k}{k!} e^{-300 p_{A_4}}.$$

Šioms nelygybėms išspręsti pasinaudosime programa R ir suskaičiuosime visų klasių įsipareigojimų nevykdymo tikimybes, kai reikšmingumo lygmenys γ yra 0.5, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95. Gauti rezultatai pateikti 4 lentelėje ir R kodas pateiktas prieduose (A).

γ	50%	70%	80%	90%	95%
$\hat{p_{A_1}}$	0.490%	0.557%	0.601%	0.665%	0.722%
$\hat{p_{A_2}}$	0.863%	0.986%	1.066%	1.184%	1.287%
$\hat{p_{A_3}}$	1.459%	1.693%	1.847%	2.075%	2.276%
$\hat{p_{A_4}}$	2.556%	3.070%	3.411%	3.924%	4.383%

4 lentelė. $n = 3200$ dydžio portfelio skolininkų klasių A_1, A_2, A_3 ir A_4 įsipareigojimų nevykdymo tikimybių įverčiai su atitinkamais reikšmingumo lygmenimis γ, kai yra nemokumo atvejų.

3.2.2. Keitimo beta skirstiniu pavyzdys

Nagrinėkime $n = 930$ dydžio skolininkų portfelį. Skolininkai suskirstyti į keturias klases A_1, A_2, A_3 ir A_4 ir jose pasiskirstę taip, jog $n_{A_1} = 300$, $n_{A_2} = 450$, $n_{A_3} = 100$ ir $n_{A_4} = 80$. Tarkime, jog skolininkų portfelyje buvo užfiksuoti 6 įsipareigojimų neįvykdymai $(m = 6)$. Klasėje A_1 nebuvo įsipareigojimų neįvykdymų, klasėje A_2 užfiksuotas 1, A_3 klasėje 2 neįvykdymai ir klasėje A_4 tokių buvo 3 (t.y. $m_{A_1} = 0$, $m_{A_2} = 1$, $m_{A_3} = 2$ ir $m_{A_4} = 3$). Kad rastume visų klasių įsipareigojimų neįvykdymų tikimybes su skirtingais reikšmingumo lygmenimis γ, pasinaudosime bendru sprendimo principu, aprašytu skyrelyje 3.1, tuomet pritaikysime beta skirstinį, aprašytą skyrelyje 3.1.2 ir pasinaudosime lygybe (3.14). Pirmiausia užrašome nelygybę klasės A_1 įsipareigojimų nevykdymo tikimybei p_{A_1} rasti

$$1-\gamma \leq \frac{\int_{p_{A_1}}^{1} t^6(1-t)^{930-6-1}dt}{\int_0^1 t^6(1-t)^{930-6-1}dt} = \frac{\int_{p_{A_1}}^{1} t^6(1-t)^{923}dt}{\int_0^1 t^6(1-t)^{923}dt}.$$

Klasių A_2, A_3, A_4 įsipareigojimų nevykdymo tikimybių $p_{A_2}, p_{A_3}, p_{A_4}$ ieškosime iš šių nelygybių

$$1-\gamma \leq \frac{\int_{p_{A_2}}^{1} t^6(1-t)^{623}dt}{\int_0^1 t^6(1-t)^{623}dt},$$
$$1-\gamma \leq \frac{\int_{p_{A_3}}^{1} t^5(1-t)^{174}dt}{\int_0^1 t^5(1-t)^{174}dt},$$
$$1-\gamma \leq \frac{\int_{p_{A_4}}^{1} t^3(1-t)^{76}dt}{\int_0^1 t^3(1-t)^{76}dt}.$$

Matome, jog tokias nelygybes suintegruoti būtų ganėtinai sudėtinga, tai sprendimui pasinaudosime programa R ir suskaičiuosime visas tikimybes, kai reikšmingumo lygmenys γ yra 0.5, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95. Gauti rezultatai pateikti 5 lentelėje ir R kodas pateiktas prieduose (A).

γ	50%	70%	80%	90%	95%
$\hat{p_{A_1}}$	0.717%	0.871%	0.974%	1.130%	1.269%
$\hat{p_{A_2}}$	1.058%	1.285%	1.437%	1.666%	1.871%
$\hat{p_{A_3}}$	3.144%	3.870%	4.357%	5.092%	5.751%
$\hat{p_{A_4}}$	4.571%	5.887%	6.786%	8.160%	9.407%

5 lentelė. $n = 930$ dydžio portfelio skolininkų klasių A_1, A_2, A_3 ir A_4 įsipareigojimų nevykdymo tikimybių įverčiai su atitinkamais reikšmingumo lygmenimis γ, kai yra nemokumo atvejų.

3.2.3. Normaliosios aproksimacijos pavyzdys

Nagrinėkime $n = 7200$ dydžio skolininkų portfelį. Skolininkai suskirstyti į keturias klases A_1, A_2, A_3 ir A_4 ir jose pasiskirstę taip, jog $n_{A_1} = 3000$, $n_{A_2} = 1900$, $n_{A_3} = 1400$ ir $n_{A_4} = 900$. Tarkime, jog skolininkų portfelyje buvo užfiksuota 220 įsipareigojimų neįvykdymų $(m = 220)$. Klasėje A_1 buvo užfiksuoti 15, klasėje A_2 užfiksuoti 35, A_3 klasėje 70 neįvykdymų ir klasėje A_4 tokių buvo 100 (t.y. $m_{A_1} = 15$, $m_{A_2} = 35$, $m_{A_3} = 70$ ir $m_{A_4} = 100$). Kad rastume visų klasių įsipareigojimų neįvykdymų tikimybes su skirtingais reikšmingumo lygmenimis γ, vėlgi pasinaudosime bendru sprendimo principu, aprašytu skyrelyje 3.1, tuomet pritaikysime normaliąją aproksimaciją bei Muavro-Laplaso teoremą, aprašytą skyrelyje 3.1.3 ir pasinaudosime lygybe (3.17). Pirmiausia užrašome nelygybę klasės A_1 įsipareigojimų nevykdymo tikimybei p_{A_1} rasti

$$1-\gamma \leq \Phi\left(\frac{220-7200p_{A_1}}{\sqrt{7200p_{A_1}(1-p_{A_1})}}\right)-\Phi\left(\frac{0-7200p_{A_1}}{\sqrt{7200p_{A_1}(1-p_{A_1})}}\right)$$

Klasių A_2, A_3, A_4 įsipareigojimų nevykdymo tikimybių $p_{A_2}, p_{A_3}, p_{A_4}$ ieškosime taip

$$1-\gamma \leq \Phi\left(\frac{205-4200p_{A_2}}{\sqrt{4200p_{A_2}(1-p_{A_2})}}\right)-\Phi\left(\frac{-4200p_{A_2}}{\sqrt{4200p_{A_2}(1-p_{A_2})}}\right),$$
$$1-\gamma \leq \Phi\left(\frac{170-2300p_{A_3}}{\sqrt{2300p_{A_3}(1-p_{A_3})}}\right)-\Phi\left(\frac{-2300p_{A_3}}{\sqrt{2300p_{A_3}(1-p_{A_3})}}\right),$$
$$1-\gamma \leq \Phi\left(\frac{100-900p_{A_4}}{\sqrt{900p_{A_4}(1-p_{A_4})}}\right)-\Phi\left(\frac{-900p_{A_4}}{\sqrt{900p_{A_4}(1-p_{A_4})}}\right).$$

Sprendimui pasinaudosime programa R ir iš šių nelygybių suskaičiuosime visas tikimybes, kai reikšmingumo lygmenys γ yra 0.5, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95. Gauti rezultatai pateikti 6 lentelėje ir R kodas pateiktas prieduose (A).

γ	50%	70%	80%	90%	95%
$\hat{p_{A_1}}$	3.056%	3.164%	3.231%	3.326%	3.407%
$\hat{p_{A_2}}$	4.881%	5.058%	5.168%	5.325%	5.457%
$\hat{p_{A_3}}$	7.391%	7.683%	7.864%	8.121%	8.340%
$\hat{p_{A_4}}$	11.111%	11.672%	12.024%	12.525%	12.952%

6 lentelė. $n = 7200$ dydžio portfelio skolininkų klasių A_1, A_2, A_3 ir A_4 įsipareigojimų nevykdymo tikimybių įverčiai su atitinkamais reikšmingumo lygmenimis γ, kai yra nemokumo atvejų.

4. Išvados

Šiame bakalauro baigiamajame darbe išnagrinėjome, kaip rasti įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės įvertį, remiantis konservatyvumo metodu, pasinaudojus binominiu skirstiniu, Bernulio schema ir pasikliautinaisiais intervalais. Nemokumo tikimybės ieškojome dviem atvejais: kai skolininkų portfelyje per paskutinį stebėjimo laikotarpį nebuvo užfiksuota įsipareigojimų neįvykdymų, ir kai jų buvo. Abiem atvejais konservatyvumo metodas mums padėjo rasti visų reitingų klasių įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių viršutinius rėžius, kuriuos ir laikėme atsargiausiais ir tiksliausiais mūsų ieškomų tikimybių įverčiais. Išanalizavome, kaip sprendimams pritaikyti Puasono bei normaliąją aproksimacijas, Muavro - Laplaso teoremą ir kaip binominį skirstinį pakeisti į beta skirstinį. Visiems sprendimo metodams pateikėme konkrečius pavyzdžius ir atlikome skaičiavimus. Išanalizavę mūsų gautus rezultatus galime teigti, jog didinant pasirinktą reikšmingumo lygmenį, įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė taip pat didėja. Taip pat pamatėme, jog nemokumo tikimybė priklauso ir nuo skolininkų kiekio. Kuo didesnis mūsų skolininkų portfelis ir kuo mažesnį reikšmingumo lygmenį pasirenkame, tuo įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė yra mažesnė.

Akivaizdu, jog nemokumo tikimybė bus mažesnė tuo atveju, kai portfelyje per paskutinį periodą nebuvo nei vieno įsipareigojimų neįvykdymo, ir mūsų gauti rezultatai tai tik patvirtina. Taigi, įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė bus mažiausia, kai reikšmingumo lygmuo bus kiek įmanoma mažesnis, skolininkų skaičius didesnis, ir kai portfelyje neturėsime nemokumo atvejų.

Literatūros šaltiniai

[1] Algimantas Aksomaitis. Tikimybių teorija ir statistika, 2001.

[2] Mindaugas Bloznelis. Tikimybių teorijos paskaitos, 2005.

[3] The CTHAEH. Binomial distribution mean and variance formulas (proof), 2020. https://www.probabilisticworld.com/binomial-distribution-mean-variance-formulas-proof/.

[4] Andrius Grigutis. Binominės tikimybės asimptotika. Paskaitų konspektas, 2021.

[5] Vilmantas Gėgžna. Biostatistinės analizės pagrindai. Mokomoji medžiaga paskaitoms, 2022. https://mokymai.github.io/biostatistika/ats-d-skirstiniai.html#diskretieji-skirstiniai.

[6] Remigijus Leipus. Kredito rizika kaip pasirinkimo sandoris, 2006.

[7] Martynas Manstavičius. Rizikos valdymas. Paskaitų konspektas, 2021.

[8] Katja Pluto and Dirk Tasche. Estimating probabilities of default for low default portfolios, 2011. https://www.researchgate.net/publication/1876250_Estimating_Probabilities_of_Default_for_Low_Default_Portfolios.

[9] Alfredas Račkauskas. Atsitiktiniai procesai. Vilniaus universitetas. Matematikos ir informatikos fakultetas. Ekonominės analizės katedra, 2014. http://web.vu.lt/mif/a.medziunas/wp-content/uploads/2021/02/Rackauskas-1.pdf.

[10] Vydas Čekanavičius ir Gediminas Murauskas. Statistika ir jos taikymai. 1, 2001.

Priedai

A. R kodas

```
#TIKIMYBIŲ IEŠKOJIMAS, KAI NĖRA ĮSIPAREIGOJIMŲ NEĮVYKDYMŲ

#apibrėžiame funkciją, su kuria ieškosime įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių
p<—function(n,gamma) {
  p<—1—(1—gamma)^(1/n)
  p
}
#apibrėžiame reikšmingumo lygmenis, kuriuos naudosime
gamma<-c(0.5,0.7,0.8,0.9,0.95)
#apibrėžiame visų skolininkų grupių dydžius pirmu atveju
n_A1<-300
n_A2<-450
n_A3<-100
n_A4<-80
#ieškome klasės A1 įsipareigojimų nevykdymo tikimybės procentais
p_A1<-p(n_A1+n_A2+n_A3+n_A4,gamma)*100
#ieškome klasės A2 įsipareigojimų nevykdymo tikimybės procentais
p_A2<-p(n_A2+n_A3+n_A4,gamma)*100
#ieškome klasės A3 įsipareigojimų nevykdymo tikimybės procentais
p_A3<-p(n_A3+n_A4,gamma)*100
#ieškome klasės A4 įsipareigojimų nevykdymo tikimybės procentais
p_A4<-p(n_A4,gamma)*100

#apibrėžiame naujus skolininkų grupių dydžius kitai lentelei
n_A1<-500
n_A2<-600
n_A3<-400
n_A4<-200
#kartojame tą pačią procedūrą, kaip ir pirmu atveju

#TIKIMYBIŲ IEŠKOJIMAS, KAI YRA ĮSIPAREIGOJIMŲ NEĮVYKDYMŲ

#ieškome pritaikius puasono aproksimaciją
#apibrėžiame funkciją puasono aproksimacijai
puasono<-function(gamma,n,m){
   p <- uniroot(function(p) ppois(m,n*p)-(1-gamma), c(0, 1), tol = 1e-
10)$root
  print(round(p*100,3))
}
#apibrėžiame gamma reikšmingumo lygmenis ir skolininkų klasių dydžius
gamma<-c(0.5,0.7,0.8,0.9,0.95)
n_A1<-1500
n_A2<-900
n_A3<-500
```

```
n_A4<-300
#ieškome visų klasių įsipareigojimų nevykdymo tikimybių
p_A1<-c()
for (i in 1:length(gamma)){
  p_A1[[i]]<-puasono(gamma[i],n_A1+n_A2+n_A3+n_A4,15)
}
p_A2<-c()
for (i in 1:length(gamma)){
  p_A2[[i]]<-puasono(gamma[i],n_A2+n_A3+n_A4,14)
}
p_A3<-c()
for (i in 1:length(gamma)){
  p_A3[[i]]<-puasono(gamma[i],n_A3+n_A4,11)
}
p_A4<-c()
for (i in 1:length(gamma)){
  p_A4[[i]]<-puasono(gamma[i],n_A4,7)
}

#ieškome pritaikius beta skirstinį
#apibrėžiame beta skirstinio funkciją
beta_funkcija<—function(gamma,n,m){
  alfa<—m+1
  beta<—n—m
  p<—qbeta(gamma,alfa,beta)
  round(p*100,3)
}
#apibrėžiame gamma reikšmingumo lygmenis ir skolininkų klasių dydžius
gamma<-c(0.5,0.7,0.8,0.9,0.95)
n_A1<-300
n_A2<-450
n_A3<-100
n_A4<-80
#ieškome visų klasių įsipareigojimų nevykdymo tikimybių
p_A1<-beta_funkcija(gamma,n_A1+n_A2+n_A3+n_A4,6)
p_A2<-beta_funkcija(gamma,n_A2+n_A3+n_A4,6)
p_A3<-beta_funkcija(gamma,n_A3+n_A4,5)
p_A4<-beta_funkcija(gamma,n_A4,3)

#ieškome pritaikius normaliąją aproksimaciją
#apibrėžiame funkciją normaliajai aproksimacijai
normal<-function(gamma,n,m){
  p <- uniroot(function(p) pnorm((m-n*p)/sqrt(n*p*(1-p)))-
               pnorm((-n*p)/sqrt(n*p*(1-p)))-(1-gamma), c(1e-10, 1),
              tol = 1e-10)$root
  print(round(p*100,3))
}
#apibrėžiame gamma reikšmingumo lygmenis ir skolininkų klasių dydžius
gamma<-c(0.5,0.7,0.8,0.9,0.95)
```

```
n_A1<-3000
n_A2<-1900
n_A3<-1400
n_A4<-900
#ieškome visų klasių įsipareigojimų nevykdymo tikimybių
p_A1<-c()
for (i in 1:length(gamma)){
  p_A1[[i]]<-normal(gamma[i],n_A1+n_A2+n_A3+n_A4,220)
}
p_A2<-c()
for (i in 1:length(gamma)){
  p_A2[[i]]<-normal(gamma[i],n_A2+n_A3+n_A4,205)
}
p_A3<-c()
for (i in 1:length(gamma)){
  p_A3[[i]]<-normal(gamma[i],n_A3+n_A4,170)
}
p_A4<-c()
for (i in 1:length(gamma)){
  p_A4[[i]]<-normal(gamma[i],n_A4,100)
}
```