

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Finansų ir draudimo matematikos bakalauro baigiamamasis darbas

**Technologijų rinkos investicijų portfelio
optimizavimas pagal Modernaus Portfelio teoriją**

**Technology market investments portfolio optimization
based on Modern Portfolio theory**

Kasparas Salatka, Mantas Martikonis

VILNIUS 2022

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
EKONOMETRINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas doc. dr. Andrius Grigutis _____

Darbas apgintas _____

Registravimo NR. _____

Turinys

1	Santrauka	3
2	Abstract	4
3	Įvadas	5
4	Investicinio portfelio parametrai	6
4.1	Įmonių rinkos vertė	6
4.2	Investicinio aktyvo svoris portfelyje	7
4.3	Investicinio portfelio ir jo aktyvų A_i vidutinė grąža remiantis istoriniais duomenimis	8
4.4	Portfelio rizikos matavimo matai	8
4.4.1	Standartinis nuokrypis - dispersija	9
4.4.2	Kovariacija	9
4.4.3	Koreliacijos koeficientas	10
5	H. Markowitz Modernaus portfelio teorija	12
5.1	Kapitalo paskirstymo tiesė, SML ir efektyvusis frontas	12
5.2	CAPM modelis	13
5.3	Investicinio aktyvo A_i Pelno-rizikos koeficientas β_i	17
5.4	Šarpo rodiklis	18
5.5	Portfelio optimizavimas	19
5.5.1	Portfelis su minimalia dispersija	20
5.5.2	Pelno-rizikos koeficiento optimizavimas	21
6	Investicinio portfelio formavimas	
	NASDAQ akcijų biržos technologijų sektoriuje	24
6.1	Bendri įmonių statistiniai duomenys	24
6.2	Investicinių aktyvų vidutinės tikėtinos grąžos, standartiniai nuokrypiai, dispersijos	24
6.3	Investicinių aktyvų kovariacijų matrica	25
7	Suformuoto investicinio portfelio optimizavimas	
	remiantis „Modernaus portfelio teorija“	26
7.1	Portfelis su lygiais investicinių aktyvų A_{M1} svoriais $\mathbb{B}_{M1}$	26
7.2	Minimalios rizikos portfelis	27

7.3	Maksimalaus pelno-rizikos koeficiento portfelis	27
8	Išvados	29
8.1	Rezultatų palyginimas	29
8.2	Darbo išvados	29
	Priedai	32

1 Santrauka

Technologijų rinkos investicijų portfelio optimizavimas pagal Modernaus Portfelio teoriją

Santrauka

Šis baigiamasis bakalauro darbas nagrinėja investicinio akcijų portfelio technologijų rinkoje formavimą pagal įmonių rinkos vertę, bei investicinių akcijų portfelių optimizavimą, remiantis minimalios rizikos ir maksimalaus pelno-rizikos koeficiento teiginiais, aprašytais A. Grigučio konspektuose, taip pat H. Markowitz, Modernaus Portfelio bei CAPM teorijomis. Iš viešai skelbiamo NASDAQ akcijų biržos technologijų industrijos esančių įmonių sarašo parenkami penki didžiausios rinkos vertės investiciniai aktyvai, įvertinami jų pagrindiniai investicinio portfelio pelningumo bei rizikos vertinimo parametrai, tokie kaip: tikėtina investicinio aktyvo grąža, standartinis nuokrypis, dispersija. Iš šių penkių investicinių aktyvų suformuojami trys skirtingi investiciniai portfeliai: lygių investicinių aktyvų svorių investicinis akcijų portfelis, minimalios rizikos investicinis akcijų portfelis ir maksimalaus pelno-rizikos koeficiento investicinis akcijų portfelis. Kiekvienas rinkinys įvertinamas ir sulyginamas taikant minėtus pagrindinius investicinio portfelio pelningumo bei rizikos vertinimo parametrus, papildomai įvertinami kiekvieno portfelio Šarpo rodikliai siekiant suformuoti optimaliausias grąžos-rizikos santykį turintį investicinį akcijų portfelį pagal turimus istorinius įmonių duomenis.

Raktiniai žodžiai : Investicinis akcijų portfelis, Įmonių rinkos vertė, Markowitz modernaus portfelio teorija, CAPM teorija, NASDAQ akcijų birža, Tikėtina investicinio aktyvo grąža, Standartinis nuokrypis, Dispersija, Lygių svorių investicinis portfelis, Minimalios rizikos investicinis portfelis, Maksimalaus pelno-rizikos koeficiento investicinis portfelis, Tikėtina investicinio portfelio grąža, Šarpo rodiklis.

2 Abstract

Technology market investments portfolio optimization based on Modern Portfolio theory

Abstract

This bachelor's thesis examines the formation of an investment portfolio in the technology market based on the market capitalization, and the optimization of investment portfolios based on the statements of minimum risk and maximum return-risk ratio described in A. Grigutis's synopsis, as well as H. Markowitz, Modern Portfolio and CAPM theories. Five investment assets with the highest market capitalization value companies were selected from the publicly listed NASDAQ Stock Exchange technology industry company list, and each company was selected as an asset which was evaluated based on the main investment portfolio profitability and risk assessment parameters, such as: expected return on investment, standard deviation, variance. From these five investment assets, three different investment portfolios are formed: an investment portfolio with equal weights of investment assets, an investment portfolio with a minimum risk and an investment portfolio with a maximum profit-risk ratio. In order to form the investment portfolio with the optimal return-risk ratio based on available historical company data, each portfolio was evaluated by applying the above-mentioned key investment portfolio profitability and risk assessment parameters as well as compared by using the Sharpe Ratio.

Key words : Investment Portfolio, market capitalization, Modern Portfolio theory, CAPM theory, NASDAQ Stock Exchange, Expected Return on Investment Asset, Standard Deviation, Variance, Equal Weight Investment Portfolio, Minimum Risk Investment Portfolio, Maximum Yield-Risk Investment Portfolio , Expected return on investment portfolio, Sharpe ratio.

3 Įvadas

Ekonomikai besivystant dažnai didėja ir gaunamos pajamos, todėl daugelis gyventojų dalį jų skiria taupymui. Investuotojai supranta, kad ilginiu laikotarpiu sutaupyti pinigų vertė mažėja, todėl investavimas tampa būdu juos apsaugoti. Šiuolaikinėje rinkoje investicijos į vertybinius popierius yra populiarius investicijų būdas, visgi ne visos tokio tipo investicijos garantuoja patrauklią grąžą, bet neretai pasirodo ir su kažkokia rizika turta prarasti. Investicinio portfelio, kuris atsižvelgia į investuotojo galimybes, kūrimas geba tiek valdyti, tiek planuoti rezultatus iš investicinės veiklos. Priklausomai nuo polinkio rizikuoti portfelis gali būti sudaromas su minimalia rizika arba maksimizuojančiu pelną prisiimant didesnę riziką.

Pirmasis tokio portfelio idėja pristatė Jungtinių Amerikos Valstijų ekonomistas H. Markowitz. Straipsnyje *Portfolio Selection* leidinyje *Journal of finance* [8] jis pirmasis panaudojo sąvoką „efektyvus portfelis“ ir teigė, kad portfelio riziką galima sumažinti, o pelną padidinti pasitelkiant matematinius metodus, iki šio straipsnio investuotojai suprasdavo rizikos koncepciją, tačiau jos nematuodavo. Vėliau ši teorija buvo išplėtotą ekonomisto W. Sharpe. Pagrindinės ekonomistų paskelbtos idėjos išliko iki šių dienų ir yra plačiai naudojamos optimizuojant įvairius investicinius portfelius.

Temos aktualumas. Investavimas yra pajamų šaltinis, kuris už prisiimtą riziką gali grąžinti pelną. Norint maksimizuoti investicijų pelną siekama padaryti jas kuo efektyvesnias. Tai reiškia, kad investicinis portfelis turi teikti kuo didesnę pelną, tuo pačiu minimizuodamas riziką. To pasekoje svarbu suprasti kaip portfelio efektyvumą įtakoja aktyvų grąžos ir rizikos santykis.

Darbo tikslai ir uždaviniai Išsiaiškinti minimalios rizikos portfelio, maksimalaus pelno-rizikos koeficiento teiginių įrodymus ir juos pritaikyti sukuriant optimizuotą penkių didžiausių informacinių technologijų sektoriaus investicinį portfelį.

Tyrimo metodika. Darbui atlikti naudojami literatūros, tiesinės algebros, matematinės ir statistinės duomenų analizės metodai. Skaičiavimai atliekami Python programavimo kalba.

4 Investicinio portfelio parametrai

Šioje dalyje bus aprašyti portfelio vertinimui reikalingi parametrai. Jie parengti remiantis A. Grigučio *Rizikingų aktyvų portfelis* teorijos medžiaga [2] D. P. Bertseko ir J. T. Tsisiklio vadovėlio *Introduction to Probability* medžiaga psl. 178-182 [6] bei C. Cornuejols ir R. Tutingu knyga *Optimization Methods in Finance* psl. 141-145 medžiaga [7].

Portfelis, kai kalbama apie investicijas, yra turto rinkinys, priklausantis tam tikram investuotojui ar institucijai, kurio tikslas yra sugeneruoti, kuo didesnę naudą jo savininkui. Jeigu investuotojo turtas M yra išreiškiamas aibe $A_1, A_2, \dots, A_n$ su atsitiktinių dydžių grąžomis. Šiuo atveju dydį A_i vadinsime **aktyvu**.

4.1 Įmonių rinkos vertė

Tarkime rinkoje egzistuoja investicinis portfelis M , kuris yra sudarytas iš investicinių aktyvų $A_i = (A_1, A_2, \dots, A_n)$. Kiekvienas iš aktyvų A_i yra sudarytas iš visų pasaulyje egzistuojančių to aktyvo vertybinių popierių

$\sum_{i,j=1}^n c_{ij}$: $A_1 = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n})$, $A_2 = (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n})$, $\dots$, $A_n = (c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nn})$, čia $n, m, i, j \in \mathbb{N}$. Tada aktyvo A_1 visų egzistuojančių v. p. sumos ir tuometinės akcijų kainos sandauga yra lygi investicinio aktyvo piniginei rinkos vertei (angl. market cap):

$$\text{Įmonės rinkos vertė} = (\text{Visų rinkoje } \exists \text{ v. p. suma}) \cdot (\text{Akcijos kaina}) \quad (4.1.1)$$

Rinkos vertė atspindi agreguotą įmonės rinkos vertę piniginiiais vienetais, pvz. JAV doleriais. Pagal NASDAQ įmonių rinkos dydžio apibrėžimą [9], pagal šį parametą įmonių rinka yra skirstoma į tam tikro dydžio segmentus:

- Mega - įmonės rinkos vertė viršija 200 000 000 JAV dolerių.
- Didelės - įmonės rinkos vertė yra tarp 10 ir 200 milijardų JAV dolerių.
- Vidutinės - įmonės rinkos vertė yra tarp 2 ir 10 milijardų JAV dolerių.
- Mažos - įmonės rinkos vertė yra tarp 300 milijonų ir 2 milijardų JAV dolerių.
- Mikro - įmonės rinkos vertė yra tarp 50 ir 300 milijonų JAV dolerių.
- Nano - įmonės rinkos vertė yra iki 50 milijonų JAV dolerių.

4.2 Investicinio aktyvo svoris portfelyje

Portfeliui priklausantys aktyvai $A_1, A_2, \dots, A_n$ gali būti išreiškiami kaip svorio vektorius $\mathbb{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $n \geq 2$, kur kiekviena koordinatė atitinka konkretaus aktyvo A_i svorį b_i . Tuomet $i = 1, 2, \dots, n$ ir $\sum_i^n b_i = 1$.

Jei portfelį sudarytume iš 2 aktyvų A_1 ir A_2 ir jį aprašytume svoriais:

$$\mathbb{B} = \left(\frac{1}{10}, \frac{9}{10} \right)$$

tai reikštų, kad į aktyvą A_1 investuota dešimtadalis portfelio turto, o į aktyvą A_2 devyni dešimtadaliai. Atmetę skolinimosi galimybę, maksimalią investavimo dalį į vieną aktyvą prilyginę vienetui, ir investuojamą lešų dalį į aktyvą A_1 prilyginę b galėtume pasakyti, kad portfelis A yra tiesinė kombinacija:

$$A = bA_1 + (1 - b)A_2. \quad (4.2.1)$$

4.3 Investicinio portfelio ir jo aktyvų A_i vidutinė grąža remiantis istoriniais duomenimis

Norint apskaičiuoti portfelio investicinę grąžą, pirmiausia reikia apskaičiuoti kiekvieno portfelio aktyvo grąžą.

Tarkime aktyvo A_1 laikotarpis, kuomet tiriamos istorinės grąžos, investiciniame portfelyje yra T . Suskaidę T į n vienodų laikotarpių $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ pažymėkime $t_1 := T_1$ laikotarpį nuo pradinio momento iki T_1 , tada $t_2 := T_2 - T_1$ laikotarpio tarpas tarp 1 ir 2 momento, $T_3 := T_3 - T_2, t_n = T_n - T_{n-1}$.

Aktyvo A_1 istorinei grąžai gauti apskaičiuosime pasiekto pelno santykį su pradine verte. Pradinę vertę lygi B_0 , uždirbta vertė per laikotarpį t_1 lygi B_1 , uždirbtas pelnas tuomet lygus $B_1 - B_0$, o gauta grąža apskaičiuojama:

$$r_1 = \frac{B_1 - B_0}{B_0} = \frac{B_1}{B_0} - 1 \quad (4.3.1)$$

r_1 bus istorinė grąža uždirbta per laikotarpį t_1 , atitinkamai $r_2 = \frac{B_2 - B_1}{B_1}$,

$r_n = \frac{B_n - B_{n-1}}{B_{n-1}}$ randamos grąžos laikotarpiams $t_i, i = 1, 2, \dots, n$. Aktyvo A_1 vidutinė grąža μ_1 bus lygi visų r_i grąžų empiriniam vidurkiui

$$\mu_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \quad (4.3.2)$$

Norėdami įvertinti visų portfelyje esančių aktyvų $A_1, A_2, \dots, A_n$ grąžas pažymėsime $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \end{pmatrix}$ viso rinkinio grąžų matrica. Investicinio portfelio svoriai apibrėžti $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$. Galima apskaičiuoti tikėtiną portfelio grąžą padauginant aktyvo svorį b_i portfelyje iš to aktyvo grąžos μ_i

$$\mu_{\mathbb{B}} = \mathbb{B}\mu^T = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n \quad (4.3.3)$$

4.4 Portfelio rizikos matavimo matai

Rizika investicijose, tai neapibrėžtumas ateitiems įvykiams, kurie gali neigiamai paveikti investicijos portfelį. Kiekvieno investuotojo tikslas yra minimizuoti riziką ir maksimizuoti grąžą. Visgi praktikoje matome, kad rizikingesni aktyvai generuoja didesnę

tikėtiną grąžą už prisiimtą riziką. Skirtumai tarp nerizikingų ir rizikingų aktyvų generuojamos tikėtinės grąžos vadinami rizikos premija (risk premium). Kuriant investicinį portfelį teisingai įvertinus galimą riziką ir tikėtiną grąžą įmanoma diversifikuoti pasirinktus aktyvus siekiant sukurti efektyvų portfelį. Rizikai identifikuoti naudosime rizikos charakteristikas: dispersiją ir standartinį nuokrypį.

4.4.1 Standartinis nuokrypis - dispersija

Standartinis nuokrypis (dispersija) yra dydis nusakantis atsitiktinio dydžio įgyjamų reikšmių sklaidą aplink vidurkį. Didėjant nuokrypiui, didėja grąžos svyravimai taip padarydami portfelį rizikingesnį. Standartiniui nuokrypiui apskaičiuoti trauksime kvadratinę šaknį iš dispersijos. Dispersiją žymėsime σ^2 , jei $\sigma^2 = 0$ reiškia portfelis yra visiškai nerizikingas (rizika prarasti investicijas neegzistuoja). Dispersiją aktyvui A_1 per laikotarpį T skaičiuojame taip:

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu_1)^2, \text{ čia:} \quad (4.4.1)$$

μ_1 - laukiama aktyvo A_1 grąža,

r_i - aktyvo A_1 grąža per laikotarpį t_i

n - suskaidytų laikotarpių kiekis

Kadangi aktyvų grąžos yra atsitiktiniai dydžiai, todėl skaičiuojant portfelio dispersiją galima pasitelkti ir atsitiktinio dydžio kvadrato vidurkio ir vidurkio kvadrato skirtumą:

$$D\mu = E\mu^2 - (E\mu)^2 \quad (4.4.2)$$

Apsibrėžus ir suskaičiavus visų aktyvų tikėtiną grąžą μ_i ir standartinį nuokrypį σ_i galima skaičiuoti portfelio kovariaciją ir koreliacijos koeficientą tarp skirtingų aktyvų.

4.4.2 Kovariacija

Apibrėžimas 1. Kovariacija – dviejų susijusių atsitiktinių dydžių tarpusavio skaitinė charakteristika, įvertinanti jų tiesinę nepriklausomybę.

Kovariacijai suskaičiuoti naudojama formulė:

$$\begin{aligned} cov(A_i, A_j) &= E[(A_i - E[A_i])(A_j - E[A_j])] = E[A_i A_j - A_i E[A_j] - E[A_i] A_j + E A_i E A_j] = \\ &= E A_i A_j - E A_i E A_j \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

čia A_i ir A_j yra i -ojo, bei j -ojo aktyvų istorinių grąžų vektoriai per visus laikotarpius t_n . Kovariacijų matrica tuomet atrodytų:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & cov(A_1, A_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(A_1, A_n) & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad (4.4.4)$$

Vėliau skaičiavimams naudosime atvirkštinę kovariacijų matricą ir ją žymėsime Σ^{-1}

4.4.3 Koreliacijos koeficientas

Apibrėžimas 2. *Koreliacijos koeficientas – terminas, nusakantis dviejų kintamųjų ryšio laipsnį. Jeigu kintamieji yra linkę keistis kartu, tai jie laikomi susiję, o jų sąsajos laipsnis matuojamas koreliacijos koeficientu.*

Turint aktyvo A_i grąžą μ_i ir standartinį nuokrypį σ_i . Jeigu $i \neq j$, tada ρ_{ij} yra koreliacijos koeficientas tarp aktyvų A_i ir A_j , nurodantis priklausomybę tarp šių diskrečių atsitiktinių dydžių.

Koreliacijos koeficientas skaičiuojamas:

$$\begin{aligned} \rho_{ij} &:= \frac{cov(A_i, A_j)}{\sqrt{Var(A_i)Var(A_j)}} = \frac{cov(A_i, A_j)}{\rho_i \rho_j} = \frac{E[(A_i - EA_i)(A_j - EA_j)]}{\rho_i \rho_j} = \\ &= \frac{E[A_i A_j - A_i E[A_j] - E[A_i] A_j + EA_i EA_j]}{\rho_i \rho_j} = \frac{EA_i A_j - EA_i EA_j}{\rho_i \rho_j} \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Teiginys 1. *Neišsigimusių atsitiktinių dydžių X ir Y kovariacijų matrica bus neišsigimusi tada ir tik tada, kai $-1 < \rho_{xy} < 1$.*

Irodymas. Irodymas gaunamas pastebėjus, kad kovariacijų matricos determinantas yra:

$$\begin{vmatrix} DX & cov(X, Y) \\ cov(X, Y) & DY \end{vmatrix} = DXDY - cov^2(X, Y) = DXDY(1 - \rho^2(X, Y)) \quad (4.4.6)$$

□

Koreliacijos koeficientas $\rho(X, Y) = \pm 1$ reiškia, kad atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra susiję tiesine priklausomybe, t.y. $Y = aX + b$, $a, b \in R$

Apibrėžimas 3. *Atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \dots, X_n$ yra tiesiškai nepriklausomi, jei lygybė $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n = 0$ ji yra teisinga tik tuomet, jei visi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, jeigu $\exists a_i \neq 0$, tada $|cov(X, Y)| \leq \sigma_i \sigma_j$.*

Lema 1. Lygybė $|\text{cov}(X, Y)| = \sigma_i \sigma_j$ galioja tik tada, kai atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra tiesiškai nepriklausomi.

Įrodymas. Tarkime $a, b \in \mathbb{R}$ ir $b \neq 0$. Tada

$$\begin{aligned} E(aX + bY)^2 &\geq 0 \Rightarrow a^2 EX^2 + 2abEXY + b^2 EY^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow 4b^2(EXY)^2 - 4b^2 EX^2 EY^2 \leq 0 \\ &\Rightarrow |EXY| \leq \sqrt{EX^2 EY^2} \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Įrašius $X := X - EX$ ir $Y = Y - EY$ į paskutinę nelygybę gauname prielaidos įrodymą. $\square$

Pagal 1 Lemą gauname, kad $\rho_{ii} = 1$, o $\rho_{ij} \in [-1, 1]$

Jei $\mathbb{B} = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ bus mūsų portfelio svoriai ir $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T$ pažymėsime kaip viso investicinio portfelio aktyvų vidutinių grąžų matricą, o $Q = (\sigma_{ij})$ nxn dydžio portfelio aktyvų kovariacijų matricą, $\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$, kai $i \neq j$. Tada investicinio portfelio dispersija bus

$$\text{Var}[\mathbb{B}] = \sum_{i,j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \mu_i \mu_j = \mathbb{B} Q \mathbb{B}^T \quad (4.4.8)$$

5 H. Markowitz Modernaus portfelio teorija

Modernaus portfelio teorija yra praktinis metodas pasirinkti investicijas siekiant padidinti jų tikėtiną grąžą priimant didesnę riziką.

Ekonomistas Harry Markowitz pirmą kartą pristatė šią teoriją 1952 metais straipsnyje „Portfolio Selection“. Žurnale pateiktos išvalgos sukūrė pamatus šiuolaikinei investavimo teorijai. Autorius teigė, kad optimalus portfelis sudaromas atsižvelgiant tiek į pelningumą, tiek į riziką. Rizika siejama su grąžų išsibarstymas ir pelno nukrypimais. Pagrindinės modernaus portfelio teorijos idėjos:

- Modernaus portfelio teorija yra metodas naudojamas rizikos vengiančių investuotojų formuojant diversifikuotus portfelius maksimaliai padidinant grąžą neviršijant apibrėžtos rizikos.
- Modernaus portfelio teorija gali būti naudinga investuotojams bandantiems sukurti efektyvius ir diversifikuotus portfelius naudojantis biržos fondais.

Šiame skyriuje bus aprašyta modernaus investicinio portfelio įvertinimo ir formavimo teorija remiantis H. Markowitz Portfelio pasirinkimo [8], A. Grigucio Rizikingų aktyvų portfelio [2] bei CAPM teorijos [1] medžiagomis.

5.1 Kapitalo paskirstymo tiesė, SML ir efektyvusis frontas

Tarkime, turime portfelį su vienu rizikingu aktyvu A su jį apibūdinančiais parametrais (σ_A, μ_A) , ir vienu nerizikingu aktyvu F su jį apibūdinančiais parametrais (σ_F, μ_F) . Nerizikingos investicijos standartinis nuokrypis σ_F visada lygus nuliui, o rizikingos investicijos $\sigma_A > 0$, nes yra skaitomas rizikingu.

Standartinio nuokrypio σ ir portfelių tikėtiną grąžą r plokštumoje pažymime aktyvus A ir F. Tiesė, siejanti šiuos aktyvus A ir F, vadinama kapitalo paskirstymo linija remiantis A. Grigučio konspektuose [2] aprašyta teorija. Šios linijos esmė yra apibūdinti rizikingo aktyvo ir nerizikingo aktyvo santykį, apibūdinant visus įmanomus portfelių rinkinius iš šių dviejų aktyvų A ir F.

Apibrėžimas 4. Tiesė, einanti per du taškus $(0, r_f)$ ir $(1, \mathbb{E}r_M)$ plokštumoje $\beta - \mu$, vadinama SML (angl. Security Market Line). Investiciniai aktyvai, priklausantys SML, vadinami **teisingai įvertintais**, aukščiau SML esantys aktyvai vadinami **nepakankamai įvertintais**, o investiciniai aktyvai, esantys žemiau SML vadinami **pervertintais**.

Tarkime turime du aktyvus - A_1 ir A_2 . Aktyvo A_1 pagrindiniai parametrai yra (σ_{A1}, r_{A1}) , o aktyvo A_2 - (σ_{A2}, r_{A2}) . Sudarome du skirtingus portfelius B_1 ir B_2 iš aktyvų A_1 ir A_2 ,

$A_1, A_2 \in B$. Apibrėžkime, kad portfelis B_1 yra pranašesnis už portfelį B_2 , jei galioja šios nelygybės:

- $\sigma_{A_1} < \sigma_{A_2}$ - turime, kad A_1 yra mažiau rizikingas nei A_2 .
- $\mu_{A_1} > \mu_{A_2}$ - turime, kad A_1 turi didesnę investicinę grąžą nei A_2 .

Apibrėžimas 5. Portfelis $B \in (A, B)$ bus efektyvus, jei aibėje (A, B) nebus kito už jį pranašesnio portfelio. Rinkinys tokių portfelių vadinsis efektyvumo frontu, o jam priklausantys rinkiniai vadinsis efektyviai diversifikuotais.

Apibrėžimas 6. Aktyvas A_1 bus pranašesnis už aktyvą A_2 , jei $\sigma_{A_1} \leq \sigma_{A_2}$ ir $\mu_{A_1} > \mu_{A_2}$, tai yra efektyvesnis portfelis bus tas, kurio grąžos ir rizikos koeficientas yra mažesnis.

5.2 CAPM modelis

Šis portfelių vertinimo modelis vertina kokią naudą patirs investuotojai, jei į turimą investicinį portfelį B papildomai įtrauks rizikingą investicinį aktyvą A_i . Šis investicijų vertinimo būdas analizuoja aktyvo A_i papildomą tikėtiną grąžą r_i , lyginant su rinkoje egzistuojančia nerizikinga investicija, kurios tikėtina grąža lygi r_f .

Nerizikingomis investicijomis laikomos mažiausią riziką turintys investiciniai aktyvai, dažniausiai valstybinės obligacijos ar investicijos į industrijų indeksus. Nerizikingo investicinio aktyvo F tikėtiną vidutinę palūkanų normą žymėsime r_f .

Pagrindinis turto vertės nustatymo modelio (CAPM) formulės tikslas yra apskaičiuoti, ar investicija yra teisingai įvertinta, kai yra lyginama jos rizika ir pinigų laiko vertė su investicijos tikėtina grąža. CAPM remiasi kapitalo rinkos teorijos teiginiais, aprašytais A. Grigučio konspektuose [1]:

- Visiems investuotojams informacijos apie investicinius aktyvus ištekliai ir pačio investavimo galimybės yra vienodos.
- Investicijos gali būti neriboto dydžio ir/ar gali būti padalintos į neribojamą dalių skaičių;
- Nevertinama infliacija, pelno ar komisiniai mokesčiai;
- Nerizikingų palūkanų r_f kapitalas skolinti ir skolintis yra neribotas;
- Visų investuotojų pagrindinis tikslas – formuoti investicinius portfelius, kurie maksimizuotų pelno-rizikos koeficientą, t.y. užtikrintų didžiausią pelną su mažiausia įmanoma rizika;

Formuodami įvairius investicinius portfelius nepakanka įsivertinti vidutinės portfelio grąžas pagal istorinius duomenis bei galimus rizikos matavimus, taip pat svarbu apskaičiuoti tikėtiną investicijos grąžą, žymimą r_i .

Remiantis A. Grigučio konspektuose aprašytais CAPM prielaidomis[1]:

- Visi investuotojai renkasi tarp rizikingo portfelio M ir nerizikingo portfelio F
- Portfelis M su investiciniais aktyvais A_i ir jų svoriais portfelyje $\mathbb{B}$ yra sudarytas iš visų rinkoje egzistuojančių vertybinių popierių.
- Investicijų rinkinys M yra rizikingas ir optimalus.

Teiginys 2. Aktyvo A_i tikėtina investavimo grąža $\mathbb{E}r_i$ yra lygi:

$$\mathbb{E}r_i = r_f + \beta_i(\mathbb{E}r_{A_i} - r_f).$$

Čia:

- $\mathbb{E}r_i$ – tikėtina investicinio aktyvo A_i grąža;
- r_f – nerizikingo investicinio aktyvo grąža;
- $(\mathbb{E}r_{A_i} - r_f)$ – rinkos rizikos premija, kuri atvaizduoja tikėtiną investicijos grąžą r_i
- β_i - Investicijos rizikos koeficientas, skirtas įvertinti investicinio aktyvo koreliaciją su portfelio rizikos augimu.

Šiam įrodymui tinkamai pagrįsti reikalinga prisiminti, jog kreivės išvestinė $f'(x_0)$ yra kreivės $f(x)$ liestinė taške x_0 , remiantis liestinių (išvestinių) savybėmis [11] apibrėžimu. Funkcijos išvestinė $f'(x)$ yra funkcijos ir jos argumento pokyčių santykių riba, kai $x \rightarrow 0$. Funkcijos išvestinės formulė yra:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (5.2.1)$$

Kur:

- $\Delta x = x - x_0$ yra funkcijos argumento pokytis.
- $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ funkcijos pokytis taške x_0 .

Irodymas. Pirmas būdas. Tarkime turime investicinį portfelių B, sudarytą iš nerizikingo aktyvo F su tikėtina grąža r_F ir rizikingo aktyvo A su tikėtina grąža r_A , tada $B = b \cdot F + (1 - b)A$, $b \in [0, 1]$.

Tiesės, kertančios du taškus $F(0, r_f)$ ir $A(\sigma_A, \mathbb{E}r_A)$ lygtis yra:

$$\mu_B = \frac{\mathbb{E}r_A - r_f}{\sigma_A} \cdot \sigma_B + r_f.$$

Remiantis išvestinių liestinių savybėmis, čia esantis narys $\frac{\mathbb{E}r_A - r_f}{\sigma_A}$ yra portfelio B kapitalo paskirstymo lygties krypties koeficientas. Portfelio $B = b \cdot F + (1 - b)A$, $b \in [0, 1]$, bendro investicinio rinkinio standartinis nuokrypis σ_B ir grąža r_B yra:

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \sqrt{b^2\sigma_F^2 + (1-b)^2\sigma_A^2 + 2b(1-b)\text{cov}(r_F, r_M) \cdot \text{cov}(r_F, r_A)} \\ \mu_B &= b \cdot \mathbb{E}r_F + (1-b)\mathbb{E}r_A.\end{aligned}$$

Tada parametrinės kreivės liestinės krypties koeficientas (gražos ir rizikos santykis, vadinamas pelno-rizikos koeficientu), kai $b \rightarrow 0$, t. y. kai investuotojas bando sudaryti portfelį B vien tik iš aktyvo A, yra:

$$\begin{aligned}\lim_{b \rightarrow 0} \frac{d\mu_B}{d\sigma_B} &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{d\mu_B/db}{d\sigma_B/db} = \\ &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{(\mathbb{E}r_F - \mathbb{E}r_A) \sqrt{b^2\sigma_F^2 + (1-b)^2\sigma_A^2 + 2b(1-b)\text{cov}(r_F, r_M)}}{b\sigma_F^2 - (1-b)\sigma_A^2 - (2b-1)\text{cov}(r_F, r_A)} = \\ &= \frac{(\mathbb{E}r_F - \mathbb{E}r_A)\sigma_A}{\text{cov}(r_F, r_A) - \sigma_A^2}\end{aligned}$$

Jeigu sulygintume gautus tiesių krypties koeficientus 5.2 ir 5.2, gautume:

$$\frac{(\mathbb{E}r_F - \mathbb{E}r_f)\sigma_A}{\text{cov}(r_F, r_A) - \sigma_A^2} = \frac{\mathbb{E}r_A - r_f}{\sigma_A}.$$

Pertvarę lygybę ir išreiškę tikėtiną grąžą $\mathbb{E}r_F$ gauname:

$$\mathbb{E}r_F = r_f + \frac{\text{cov}(r_F, r_A)}{\sigma_A^2}(\mathbb{E}r_A - r_f).$$

Irodyta.

Antras būdas. Pažymėkime δ_B dalį nuo sumos, investuotos į A, kurią galime pasiskolinti už r_f :

$$\delta_B = \frac{\text{Suma pasiskolinta už } r_f}{\text{Suma investuota į } A}.$$

Irodysime remdamiesi dviem skaičiavimais:

- Tikėtina grąža, jei visus pasiskolintus pinigus už r_f investuosime į aktyvą A.
- Tikėtina grąža, jei visus pasiskolintus pinigus už r_f investuosime į aktyvą F.

Visus pasiskolintus pinigus investavus į rizikingą aktyvą A , portfelio B tikėtinios gražos pokytis $\Delta\mu_B$ ir gražos pokytį atitinkantis dispersijos pokytis $\Delta\sigma_B^2$ būtų lygūs:

$$\Delta\mu_B = \mathbb{E}r_A + \delta_B(\mathbb{E}r_A - r_f) - \mathbb{E}r_A = \delta_B(\mathbb{E}r_A - r_f),$$

$$\Delta\sigma_B^2 = (1 + \delta_B)^2\sigma_A^2 - \sigma_A^2 = (\delta_B^2 + 2\delta_B)\sigma_A^2.$$

Tada įvertindami gražos bei rizikos santykį, kai δ_B eina į nulį, gauname:

$$\lim_{\delta_B \rightarrow 0} \frac{\Delta\mu_B}{\Delta\sigma_B^2} = \frac{\delta_B(\mathbb{E}r_A - r_f)}{(\delta_B^2 + 2\delta_B)\sigma_A^2} = \frac{\mathbb{E}r_A - r_f}{2\sigma_A^2}. \quad (5.2.2)$$

Visus pasiskolintus pinigus už r_f investavus į nerizikingą F aktyvą (r_F - aktyvo F tikėtiną gražą), portfelio B tikėtinios gražos pokytis $\Delta\mu_B$ ir gražos pokytį atitinkantis dispersijos pokytis $\Delta\sigma_B^2$ būtų lygūs:

$$\Delta\mu_B = \mathbb{E}r_A + \delta_B(\mathbb{E}r_F - r_f) - \mathbb{E}r_A = \delta_B(\mathbb{E}r_F - r_f),$$

$$\Delta\sigma_B^2 = \sigma_{A_2} + \delta_B^2\sigma_F^2 + 2\delta_B\text{cov}(r_F, r_A) - \sigma_A^2 = \delta_B\sigma_F + 2\delta_B\text{cov}(r_F, r_A).$$

Tada vėl įvertindami gražos bei rizikos santykį, kai $\delta_B \rightarrow 1$, gauname:

$$\lim_{\delta_B \rightarrow 1} \frac{\Delta\mu_B}{\Delta\sigma_B^2} = \frac{\delta_B(\mathbb{E}r_F - r_f)}{\delta_B\sigma_F + 2\delta_B\text{cov}(r_F, r_A)} = \frac{\mathbb{E}r_F - r_f}{2\text{cov}(r_F, r_A)}. \quad (5.2.3)$$

Sulyginus dvi gautas ribas iš 5.2.2 ir 5.2.3, gauname lygybę:

$$\frac{\mathbb{E}r_A - r_f}{2\sigma_A^2} = \frac{\mathbb{E}r_F - r_f}{2\text{cov}(r_F, r_A)}.$$

Pertvarkę lygybę siekdami išreikšti $\mathbb{E}r_{A_1}$ gauname:

$$\mathbb{E}r_F = r_f + \frac{\text{cov}(r_F, r_A)}{\sigma_A^2}(\mathbb{E}r_A - r_f).$$

Įrodyta. □

Optimalūs investiciniai portfeliai yra rinkiniai, esantys ant efektyvumo fronto kreivės, bet kuris optimalus investicinis rinkinys yra geriausias tam tikram investuotojui priklauso nuo investuotojo požiūrio į riziką. Dažniausiai didžiausia investicinė grąža artimai siejama su aukštesniu rizikos lygi, todėl svarbu įsivertinti investicinių aktyvų rizikas apskaičiuojant papildomą investicinio portfelio naudingumą keičiant nerizikingą investicinį aktyvą A_f į didesnės tikėtinos grąžos, bet aukštesnės rizikos aktyvą A_i .

5.3 Investicinio aktyvo A_i Pelno-rizikos koeficientas β_i

Investicinių aktyvų tikėtinų grąžų dispersija σ^2 vaizduoja aktyvo grąžų riziką ir išsistymą vidurkio atžvilgiu, bet ne bendro investicinių aktyvų rinkinio atžvilgiu, todėl β koeficientas yra interpretuojamas kaip nediversifikuojamos (sisteminės) rizikos matas, skirtas įvertinti investicinio aktyvo A_i koreliaciją su portfelio rizikos augimu, jis lygus:

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2} = \rho(r_i, r_M) \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_M}. \quad (5.3.1)$$

Svarbu paminėti, jog:

- Jeigu investicinis aktyvas yra rizikingesnis už rinkos nustatytą vidutinę vertę, tada jo $\beta < 1$.
- Priešingu atveju, jei aktyvo β koeficientas didesnis už 1, vertinama investicija sumažins portfelio riziką.

Sisteminės rizikos investuotojai kontroliuoti negali, bet galima kontroliuoti nesisteminę riziką, todėl teisingas teiginys:

Apibrėžimas 7. Tarkime, yra toks investicinis portfelį B su aktyvų A_i svoriais $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = 1$. Papildomai:

$$\min_{1 \leq i \leq n} b_i \geq \frac{c_1}{n}, \max_{1 \leq i \leq n} b_i \leq \frac{c_2}{n}$$

Čia c_1 ir c_2 - konstantos. Jei portfelio B dispersija yra baigtinė, tai:

$$\max(0; c_1^2 \min_{1 \leq i \leq n} \sigma_i^2 (\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \min_{i < j} \rho_{ij})) \leq \sigma_B^2 \leq c_2^2 \max_{1 \leq i \leq n} \sigma_i^2 \quad (5.3.2)$$

Jeigu $\rho_{ij} = 0$ su $\forall 1 \leq i < j \leq n$, tada reiškias $\sigma_B^2 \rightarrow 0$, kai $n \rightarrow \infty$ ir aktyvai A_i yra poromis nekoreliuoti.

Irodymas. Sudaryto portfelio B dispersija yra:

$$\sigma_B^2 = \sum_{i=0}^n b_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} b_i b_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}.$$

Vertindami iš viršaus gautume:

$$\begin{aligned} \sigma_B^2 &\leq n \cdot \frac{c_2^2}{n^2} \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \sigma_i^2 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{c_2^2}{n^2} \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \sigma_i^2 = \\ &= \frac{c_2^2}{n} \cdot \min_{1 \leq i \leq n} \sigma_i^2 \cdot (1 + n - 1) = c_2^2 \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \sigma_i^2. \end{aligned}$$

O vertinant iš apačios:

$$\begin{aligned} \sigma_B^2 &\geq n \cdot \frac{c_1^2}{n^2} \cdot \min_{1 \leq i \leq n} \sigma_i^2 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{c_1^2}{n^2} \cdot \min_{1 \leq i \leq n} \sigma_i^2 \min_{i < j} \rho_{ij} = \\ &= c_1^2 \cdot \min_{1 \leq i \leq n} \sigma_i^2 \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \min_{i < j} \rho_{ij} \right) \end{aligned}$$

Pastebime, jog bet kokią dispersiją iš apačios galima įvertinti skaičiumi 0, jei $\rho_{ij} = 0$ su $\forall 1 \leq i < j \leq n$, t.y. $\forall A_1, A_2, \dots, A_n$ yra poromis nekoreliuoti aktyvai, tai:

$$0 \leq \sigma_B^2 = \sum_{i=1}^n n b_i^2 \sigma_i^2 \leq \frac{c_2^2}{n} \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \sigma_i^2, \text{ o } \sigma_B^2 \rightarrow 0, \text{ kai } n \rightarrow \infty$$

Įrodyta. □

5.4 Šarpo rodiklis

Šarpo rodiklis (angl. „Sharpe Ratio“) yra investicinio portfelio įvertinimui skirtas įrankis, kuris sulygina investicinę grąžą ir riziką, dar kitaip vadinamas investicijos efektyvumo įverčiu. Šio rodiklio atradėjas, apdovanotas Nobelio premija, W. Sharpe sukūrė metodą, leidžiantį įvertinti papildomą investicinio portfelio vidutinę grąžą, lyginant ją su nerizikingų investicijų grąža r_f , vienam rizikos vienetui. Šioje dalyje aprašant Šarpo rodiklį remiamasi 1994 metų W. Sharpe straipsniu leidinyje *The Journal Of Portfolio Management* [15]. Šarpo rodiklio formulė yra:

$$S_B = \frac{r_B - r_f}{\sigma_B} \quad (5.4.1)$$

Kur:

- S_B - Šarpo rodiklis
- r_B - Portfelio B tikėtina investcinė grąža.
- r_f - nerizikingo investicinio aktyvo tikėtina grąža.
- σ_B - Portfelio B standartinis nuokrypis

Šis įvertis skaičiuojamas absoliučiais dydžiais ir yra vienas iš plačiausiai naudojamų investicinių grąžų vertinimo metodų, atsižvelgiant į investicinę riziką. Taip pat kaip β 5.3, Šarpo rodiklis yra vertinamas:

- $S_B < 1$ parodo, jog investicijos neefektyvi, t.y. tikėtina portfelio grąža yra per maža, palyginus su vertinama rizika.
- $S_B > 1$, parodo, jog investicija yra efektyvi prie esamos rizikos. Kuo didesnė absoliuti rodiklio vertė, tuo geresnė investicinio grąža.

Remiantis Modernaus portfelio teorija [8] galima teigti, jog į diversifikuotą investicijų rinkinį įtraukus vieną papildomą aktyvą, kurio koreliacija su kitais aktyvais yra mažesnė nei vienetas, tai šis investicinis aktyvas sumažina portfelio riziką, o grąža lieka vienoda, todėl portfelio Šarpo rodiklis padidėja.

Šarpo rodiklis aiškiai atsako į dažną investuotojų klausimą - kokią investiciją pasirinkti. Remiantis šiuo įrankiu visada galima rinktis tokius investicinius aktyvus A_i į savo portfelį, kurie turės arba:

- Tą pačią tikėtiną grąžą prie mažesnės rizikos.
- Tą pačią riziką prie didesnės grąžos.

5.5 Portfelio optimizavimas

Nagrinėsime portfelį $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, kuris sudarytas iš n aktyvų $(A_1, A_2, \dots, A_n)$, $A_i = (\rho_i, \mu_i)$. $B = b_1 A_1 + b_2 A_2 + \dots + b_n A_n$, šio portfelio dispersija bus lygi $\sigma_b^2 = \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j b_i b_j = B \Sigma B^T$, $\Sigma = \sigma_{ij}$ yra $n \times n$ dydžio kovariacijos matrica.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix},$$

$$B^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$\mathbb{1}$ bus vienetinė ($1 \times n$) dydžio matrica:

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{1 \times n}$$

Portfelio grąžą skaičiuosime pagal (4.3.3):

$$E[B] = \mu_B = b_1\mu_1 + b_2\mu_2 + \dots + b_n\mu_n = \mu^T \mathbb{B} = \sum_{i=1}^n b_i\mu_i$$

Optimizavimo teiginiams įrodyti naudosime Lagrange daugiklių metodą. Langrange funkciją sudarome pagal tokią formulę:

$$L(\mathbb{B}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = f(\mathbb{B}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(\mathbb{B})$$

$g_i(\mathbb{B})$ yra apribojimų funkcija lygi 0. Dviejų kintamųjų funkcija tuomet atrodytų:

$$L(\mathbb{B}, \lambda) = f(\mathbb{B})$$

5.5.1 Portfelis su minimalia dispersija

Portfelio minimalios dispersijos ieškojimo teiginiai ir įrodymai parengti remiantis A. Grigučio teorine medžiaga [2]

Teiginys 3. Portfelio $B = b_1A_1 + \dots + b_nA_n$ dispersija $\sigma_B^2 = \mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T$ yra minimali, kai

$$\mathbb{B}^T = \frac{\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T}$$

čia Σ^{-1} yra kovariacijų matricos atvirkštinė,

Įrodymas. Turime rasti $\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T$ minimumą, kai $\mathbb{1}\mathbb{B}^T = 1$. Sudarykime Lagranžo funkciją $L(b_1, b_2, \dots, b_n, \lambda) = L(\mathbb{B}, \lambda) = \mathbb{1}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T - \lambda(\mathbb{1}\mathbb{B}^T - 1)$

Funkcijos $L(\mathbb{B}, \lambda)$ dalines išvestines prilyginkime nuliui:

$$\begin{cases} 2\Sigma\mathbb{B} - \lambda\mathbb{1}^T = 0, \\ \mathbb{1}\mathbb{B}^T = 1. \end{cases}$$

Iš pirmosios lygties turime, kad:

$$\mathbb{B}^T = \frac{\lambda}{2}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T \tag{5.5.1}$$

Tai įrašę į antrąją lygtį turime:

$$\mathbb{1}\frac{\lambda}{2}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T} \tag{5.5.2}$$

Vadinasi:

$$\mathbb{B}^T = \frac{\Sigma^{-1} \mathbb{1}^T}{\mathbb{1} \Sigma^{-1} \mathbb{1}^T} \quad (5.5.3)$$

Tikriname ar gautoji reikšmė yra minimumas. Tam reikia įsitikinti, kad $\sigma_B^2 = \mathbb{B} \Sigma \mathbb{B}^T$ yra iškila žemyn. Patikriname pagal sąlygą $\sigma_B^{2''} \geq 0$.

Apskaičiuojame:

$$L(\mathbb{B}, \lambda)''_{\lambda} = \mathbb{1} = 1 \quad (5.5.4)$$

yra nereikalinga, todėl skaičiuojame su pirmąją lygtimi:

$$L(\mathbb{B}, \lambda)''_{\mathbb{B}} = 2\Sigma \quad (5.5.5)$$

Kadangi Σ yra kovariacijos matrica, ji yra teigiamai apibrėžta. □

5.5.2 Pelno-rizikos koeficiento optimizavimas

Pelno-rizikos koeficiento optimizavimo apibrėžimai, teiginiai ir įrodymai parengti remiantis A. Grigučio teorine medžiaga [2].

Teiginys 4. Portfelio $B = b_1 A_1 + \dots + b_n A_n$ pelno-rizikos koeficientas k_b

$$k_b = \frac{\mathbb{B} \mu^T - r_f}{\sqrt{\mathbb{B} \Sigma \mathbb{B}^T}}$$

yra maksimalus, kai:

$$\mathbb{B} = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r_f \mathbb{1})^T}{\mathbb{1} \Sigma^{-1}(\mu - r_f \mathbb{1})^T}.$$

Įrodymas. Rasime funkcijos $\frac{\Sigma^{-1}(\mu - r_f \mathbb{1})^T}{\mathbb{1} \Sigma^{-1}(\mu - r_f \mathbb{1})^T}$ maksimumą, kai $\mathbb{1} \mathbb{B}^T = 1$. Tam, kad rasti funkcijos maksimumą pasinaudosime Lagrange dauginamųjų metodu ir rasime sąlyginį ekstremumą - prie kintamojo λ pridėsime sąlyginę funkciją, kad visų portfelio svorių suma yra lygi vienam:

$$L(\mathbb{B}, \lambda) = \frac{\mu^T \mathbb{B} - r_f}{\sqrt{\mathbb{B} \Sigma \mathbb{B}^T}} + \lambda(\mathbb{1} \mathbb{B}^T - 1) \quad (5.5.6)$$

Apskaičiuojame funkcijos $L(\mathbb{B}, \lambda)$ dalines išvestines pagal $\mathbb{B}$, λ ir prilyginame jas nuliui:

$$L(\mathbb{B}, \lambda)'_B = \frac{\mu^T \sqrt{\mathbb{B} \Sigma \mathbb{B}^T} - (\mathbb{B} \mu^T - r_f) \frac{\Sigma \mathbb{B}^T}{\sqrt{\mathbb{B} \Sigma \mathbb{B}^T}}}{\mathbb{B} \Sigma \mathbb{B}^T} + \lambda \mathbb{1}^T = 0, \quad (5.5.7)$$

$$L(\mathbb{B}, \lambda)'_{\lambda} = \mathbb{1} \mathbb{B}^T - 1 = 0 \quad (5.5.8)$$

Dauginame (5.5.7) lygtį iš $\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T$:

$$\mu^T \sqrt{\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T} - (\mathbb{B}\mu^T - r_f) \frac{\Sigma\mathbb{B}^T}{\sqrt{\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T}} + \lambda \mathbb{1}^T (\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T) = 0 \quad (5.5.9)$$

Papildomai padauginame iš $\sqrt{\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T}$:

$$\mu^T (\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T) - (\mathbb{B}\mu^T - r_f) \Sigma\mathbb{B}^T + \lambda \mathbb{1}^T (\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T)^{\frac{3}{2}} = 0 \quad (5.5.10)$$

Dauginame reiškinių iš $\mathbb{B}$, kad visi reiškinių nariai turėtų $\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T$:

$$\begin{aligned} \mathbb{B}\mu^T (\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T) - (\mathbb{B}\mu^T - r_f) \mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T + \mathbb{B}\lambda \mathbb{1}^T (\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T)^{\frac{3}{2}} &= 0 \\ \Rightarrow (\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T) (\mathbb{B}\mu^T - (\mathbb{B}\mu^T - r_f) + \mathbb{B}\lambda \mathbb{1}^T (\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T)^{\frac{1}{2}}) &= 0 \\ \Rightarrow \mathbb{B}\mu^T - (\mathbb{B}\mu^T - r_f) + \mathbb{B}\lambda \mathbb{1}^T (\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T)^{\frac{1}{2}} &= 0 \\ \Rightarrow r_f + \mathbb{B}\lambda \mathbb{1}^T (\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T)^{\frac{1}{2}} &= 0 \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

Iš sąlygos turime, kad $\mathbb{B}\mathbb{1}^T = 1$, todėl:

$$r_f + \lambda (\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (5.5.12)$$

išreiškiame kintamąjį λ :

$$\lambda = -r_f (\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.5.13)$$

Grįžus prie lygties (5.5.10) ir įsistačius gautą λ reikšmę turime:

$$\begin{aligned} \mu^T (\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T) - (\mathbb{B}\mu^T - r_f) \Sigma\mathbb{B}^T - r_f (\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{1}^T (\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T)^{\frac{3}{2}} &= 0 \\ \Rightarrow \mu^T (\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T) - (\mathbb{B}\mu^T - r_f) \Sigma\mathbb{B}^T - r_f \mathbb{1}^T (\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T) &= 0 \\ \Rightarrow (\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T) (\mu^T - r_f \mathbb{1}^T) &= (\mathbb{B}\mu^T - r_f) \Sigma\mathbb{B}^T \end{aligned} \quad (5.5.14)$$

Išreiškiame $\mathbb{B}^T$:

$$\mathbb{B}^T = \frac{\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T (\mu^T - r_f \mathbb{1}^T) \Sigma^{-1}}{(\mathbb{B}\mu^T - r_f)} \quad (5.5.15)$$

Įsistatome gautą $\mathbb{B}^T$ reikšmę į (5.5.8) lygtį:

$$1 = \mathbb{1} \frac{\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T (\mu^T - r_f \mathbb{1}^T) \Sigma^{-1}}{(\mathbb{B}\mu^T - r_f)} \Rightarrow \mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T = \frac{\mathbb{B}\mu^T - r_f}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}(\mu - r_f \mathbb{1})^T}$$

Vadinasi

$$\mathbb{B}^T = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r_f \mathbb{1})^T}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}(\mu - r_f \mathbb{1})^T}$$

Gauta reikšmė yra funkcijos ekstremumas. Dabar turime patikrinti ar ji tuo pačiu yra ir funkcijos maksimumas: Tai padarysime parodydami, kad funkcija

$$(k_B)'' = \frac{\mu^T \mathbb{B} - r_f}{\sigma_B} = \frac{\mu^T \mathbb{B} - r_f}{\sqrt{\mathbb{B} \Sigma \mathbb{B}^T}}$$

yra iškila aukštyn ir jos reikšmė mažesnė už nulį.

Diferencijuodami pagal $\mathbb{B}$ gautą išvestinę (5.5.14)

$$\begin{aligned} (k_B)'' &= (\mu^T (\mathbb{B} \Sigma \mathbb{B}^T) - (\mathbb{B} \mu^T - r_f) \Sigma \mathbb{B}^T - r_f \mathbb{1}^T (\mathbb{B} \Sigma \mathbb{B}^T))'_B = \\ &= 2\mu^T (\mathbb{B} \Sigma) - 2\mu^T \mathbb{B} \Sigma + r_f \Sigma - 2r_f \mathbb{1} \mathbb{B} \Sigma = r_f \Sigma (1 - 2\mathbb{1}^T \mathbb{B}) = -r_f \Sigma \end{aligned}$$

Gauname išvestinės reikšmę mažesnę už nulį, nes $r_f \Sigma$ yra teigiamai apibrėžiama, taigi ši funkcija yra iškila aukštyn ir iš to galima teigti, kad gauta reikšmė yra maksimumas. $\square$

6 Investicinio portfelio formavimas

NASDAQ akcijų biržos technologijų sektoriuje

6.1 Bendri įmonių statistiniai duomenys

Norint suformuoti naują investicinį akcijų portfelį reikia matematiškai ištirti bei įvertinti investicinius aktyvus, iš kurių sudarinėjamas investicinis portfelis.

Naudojantis Jungtinių Amerikos Valstijų NASDAQ akcijų biržos sąrašu bei remiantis įmonių rinkos vertės skaičiavimais pateiktais (2), išrinkome penkias didžiausias technologijų industrijos įmones (Mega kategorijos - Rinkos vertė viršija 200 milijardų JAV dolerių), įmonių duomenys paimti iš [9] ir iš jų sudarėme savo investicinio portfelį (investicinių aktyvų rinkinį) $M = (A_{APPL}, A_{MSFT}, A_{GOOGL}, A_{NVDA}, A_{ASML})$:

Įm. pav.	Žym. NASDAQ	Akc. kaina (JAV dol.)	Rinkos vertė (JAV dol.)
Apple Inc.	AAPL	140.52	2,436,243,016,800
Microsoft Corporation	MSFT	262.52	1,963,395,778,600
Alphabet Inc. Class A	GOOGL	2116.10	1,393,451,589,720
NVIDIA Corporation, Inc.	NVDA	169.75	425,056,436,082
ASML Holding	ASML	548.08	220,657,892,053

Prieš optimizuodami investicinį portfelį

$A_M = (A_{APPL}, A_{MSFT}, A_{GOOGL}, A_{NVDA}, A_{ASML})$, turime įsivertinti:

- Portfeliui M priklausančių aktyvų A_i vidutinės investicines grąžas r_i , remiantis 4.3.2 aprašyta formule.
- Portfeliui M priklausančių aktyvų A_i standartinius nuokrypius σ_i , remiantis 4.4.1 formule.
- Apskaičiuoti kovariaciją $cov(r_i, r_f)$ naudojantis 4.4.3 formule bei sudaryti investicinio portfelio M aktyvų tarpusavio kovariacijų matricą $cov(r_f, r_M)$ pagal 4.4.4 formulę.

6.2 Investicinių aktyvų vidutinės tikėtinos grąžos, standartiniai nuokrypiai, dispersijos

Portfelio bei investicinių aktyvų įvertinimui naudosime 2012-2022 metų įmonių akcijų kainos savaitės pabaigoje duomenis, paimtus iš [9]. Naudojami duomenys - Google [3], Apple [4], ASML Holding [5], Microsoft [12] ir NVidia [13] remiantis 4 skyriuje pateikta investicinių portfelių teorija.

Skaičiavimuose:

$$\mu_M = (\mu_{APPL}, \mu_{MSFT}, \mu_{GOOGL}, \mu_{NVDA}, \mu_{ASML})$$

$$\sigma_M = (\sigma_{APPL}, \sigma_{MSFT}, \sigma_{GOOGL}, \sigma_{NVDA}, \sigma_{ASML})$$

Apskaičiavus kiekvieno investicinio aktyvo A_M vidutinę grąžą, standartinį nuokrypį ir dispersiją, gaunami rezultatai:

Įm. žym. NASDAQ	Vid. grąža μ_i	Standartinis nuokrypis σ_i	Dispersija σ_i^2
AAPL	0.005462369745006037	0.03790208565010415	0.001436568096627831
MSFT	0.005252572392754201	0.030881896512889914	0.0009536915322328422
GOOGL	0.0047750923654179935	0.033954285642456394	0.0011528935134895203
NVDA	0.009862399166426537	0.053443710279419375	0.0028562301684305165
ASML	0.006537025890964005	0.040757118265033386	0.0016611426892699183

Toliau skaičiavimams naudosime grąžų matricą lygią:

$$\mu_M = \begin{pmatrix} 0.005462369745006037 \\ 0.005252572392754201 \\ 0.0047750923654179935 \\ 0.009862399166426537 \\ 0.006537025890964005 \end{pmatrix}$$

6.3 Investicinių aktyvų kovariacijų matrica

Įvertiname bendro investicijų portfelio M aktyvų A_i tarpusavio tiesinę nepriklausomybę (koreliaciją) ir sudarome kovariacijų matrica remiantis 4.4.3 ir 4.4.4 apibrėžimais, gauname:

	AAPL	MSFT	GOOGL	NVDA	ASML
AAPL	0.00143657	0.00053388	0.00056759	0.00086265	0.00064555
MSFT	0.00053388	0.00095369	0.00059789	0.0008319	0.00060786
GOOGL	0.00056759	0.00059789	0.00115289	0.00077435	0.00057718
NVDA	0.00086265	0.0008319	0.00077435	0.00285623	0.00109048
ASML	0.00064555	0.00060786	0.00057718	0.00109048	0.00166114

7 Suformuoto investicinio portfelio optimizavimas remiantis „Modernaus portfelio teorija“

Norėdami optimizuoti suformuotą investicinį portfelį $M = (A_{APPL}, A_{MSFT}, A_{GOOGL}, A_{NVDA}, A_{ASML})$ ir užtikrinti didžiausią tikėtiną grąžą μ_M su mažiausia rizika, turime:

- Rasti investicinio portfelio M1, kurio visų investicinių aktyvų A_{M1} svoriai $\mathbb{B}_{M1}$, $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ yra vienodi, tikėtiną grąžą μ_{M1} , standartinę nuokrypį σ_{M1} , dispersiją σ_{M1}^2 , remiantis 4 skyriuje pateikta investicijų teorija, bei įvertinti portfelio M1 Šarpo rodiklį S_{M1} remiantis 5.4.1 apibrėžimu.
- Rasti investicinių aktyvų A_{M2} svorius $\mathbb{B}_{M2} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $\sum_{i=1}^n b_i = 1$, kurie minimizuotų portfelio M2 riziką σ_M , remiantis minimalios dispersijos portfelio teorija 3. Įvertinti minimalios rizikos portfelio M2 tikėtiną grąžą r_{M2} , standartinę nuokrypį σ_{M2} , dispersiją σ_{M2}^2 , remiantis 4 skyriuje pateikta investicijų teorija, bei Šarpo rodiklį S_{M2} remiantis 5.4.1 apibrėžimu.
- Rasti investicinių aktyvų A_i svorius $\mathbb{B}_{M3} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $\sum_{i=1}^n b_i = 1$, kurie maksimizuotų portfelio M3 pelno-rizikos koeficientą remiantis 4 aprašytu metodu. Įvertinti maksimalaus pelno-rizikos koeficiento portfelio M3 tikėtiną grąžą r_{M3} , standartinę nuokrypį σ_{M3} , dispersiją σ_{M3}^2 , remiantis 4 skyriuje pateikta investicijų teorija, bei Šarpo rodiklį S_{M3} remiantis 5.4.1 apibrėžimu.

7.1 Portfelis su lygiais investicinių aktyvų A_{M1} svoriais $\mathbb{B}_{M1}$

Tarkime turime portfelį M1 su jau pasirinktais rinkinio aktyvais:

$$A_{M1} = (A_{APPL}, A_{MSFT}, A_{GOOGL}, A_{NVDA}, A_{ASML})$$

kurio visų investicinių aktyvų A_{M1} svoriai $\mathbb{B}_{M1}$ ($\sum_{i=1}^n b_i = 1$) yra lygūs:

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Remiantis 6.2 skyriuje turimais duomenimis, apskaičiuojame investicinio portfelio M1, tikėtiną grąžą μ_{M1} , standartinę nuokrypį σ_{M1} , dispersiją σ_{M1}^2 bei įvertinti portfelio M1 Šarpo rodiklį S_{M1} remiantis 5.4.1 apibrėžimu (metinę nerizikingo investicinio aktyvo F palūkanų normą r_f laikysime lygia 2,14% [10]).

Atlikus praktinius skaičiavimus Python programavimo kalba, gautus duomenis atvaizduojame lentelėje:

	Lygių svorių investicinis portfelis M1
Aktyvų A_i svoriai $\mathbb{B}$	$(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$
Tikėtina savaitinė grąža μ_M	$\mu_{M1} = 0.006377891912113755$
Standartinis nuokrypis σ_M	$\sigma_{M1} = 0.029825599530979262$
Dispersija σ_M^2	$\sigma_{M1}^2 = 0.0008895663873823503$
Šarpo rodiklis S_M	$S_{M1} = 0.20018414579245045$

7.2 Minimalios rizikos portfelis

Norėdami rasti minimalios rizikos portfelį M2 su jau pasirinktais rinkinio aktyvais:

$A_{M2} = (A_{APPL}, A_{MSFT}, A_{GOOGL}, A_{NVDA}, A_{ASML})$, o metinę nerizikingo investicinio aktyvo F palūkanų normą r_f laikysime lygią 2,14% [10]

Turime:

- Rasti minimalios dispersijos σ_M^2 investicinio rinkinio M2 aktyvų A_{M2} svorius $\mathbb{B}_{M2}$ remiantis (3) teiginiu.
- Apskaičiuoti investicinio portfelio M2 tikėtiną grąžą μ_{M2} , standartinį nuokrypį σ_{M2} , dispersiją σ_{M2}^2 .
- Įvertinti portfelio M1 Šarpo rodiklį S_{M2} remiantis 5.4.1 apibrėžimu.

Atlikus praktinius skaičiavimus Python programavimo kalba, gautus duomenis atvaizduojame lentelėje:

	Minimalios rizikos investicinis portfelis M2
Aktyvų A_i svoriai $\mathbb{B}$	$(0.21024289, 0.44062881, 0.27086163, -0.06553107, 0.14379775)$
Tikėtina savaitinė grąža μ_M	$\mu_{M2} = 0.005049964395359605$
Standartinis nuokrypis σ_M	$\sigma_{M2} = 0.026968597210421986$
Dispersija σ_M^2	$\sigma_{M2}^2 = 0.0007273052354979805$
Šarpo rodiklis S_M	$S_{M2} = 0.17215150687587427$

7.3 Maksimalaus pelno-rizikos koeficiento portfelis

Norėdami rasti maksimalaus pelno-rizikos koeficiento investicinį portfelį M3 su pasirinktais rinkinio aktyvais:

$A_{M3} = (A_{APPL}, A_{MSFT}, A_{GOOGL}, A_{NVDA}, A_{ASML})$, o metinę nerizikingo investicinio aktyvo F palūkanų normą r_f laikysime lygią 2,14% [10].

Turime:

- Rasti maksimalaus pelno-rizikos koeficiento k_M portfelio M3 investicinių aktyvų svorius $\mathbb{B}_{M3}$ remiantis (4) teiginiu.
- Apskaičiuoti investicinio portfelio M3 tikėtiną grąžą μ_{M3} , standartinį nuokrypį σ_{M3} , dispersiją σ_{M3}^2 .
- Įvertinti portfelio M3 Šarpo rodiklį S_{M3} remiantis 5.4.1 apibrėžimu.

Atlikus praktinius skaičiavimus Python programavimo kalba, gautus duomenis atvaizduojame lentelėje:

	Maksimalaus pelno-rizikos koeficiento investicinis portfelis M2
Aktyvų A_i svoriai $\mathbb{B}$	$(0.14892588, 0.27441811, 0.07019368, 0.30861682, 0.19784551)$
Tikėtina savaitinė grąža μ_M	$\mu_{M3} = 0.0069270939923599$
Standartinis nuokrypis σ_M	$\sigma_{M3} = 0.03212405503546824$
Dispersija σ_M^2	$\sigma_{M3}^2 = 0.0010319549119217923$
Šarpo rodiklis S_M	$S_{M3} = 0.20298340812331453$

8 Išvados

8.1 Rezultatų palyginimas

Atlikę praktinius skaičiavimus galime įvertinti tris investicinius portfelius M1, M2 ir M3, kurių investiciniai aktyvai vienodi:

$$A_M = (A_{APPL}, A_{MSFT}, A_{GOOGL}, A_{NVDA}, A_{ASML})$$

Pagal praktinių skaičiavimų gautus rezultatus 7.1, 7.2 ir 7.3 galima teigti, jog:

- $\mu_{M2} < \mu_{M1} < \mu_{M3}$ reiškia, jog lygių svorių investicinio portfelio M1 tikėtina investicinė grąža μ_{M1} yra didesnė už nerizikingo portfelio M2 tikėtiną grąžą μ_{M2} , bet mažesnė už maksimalaus pelno-rizikos koeficiento portfelio M3 tikėtiną grąžą μ_{M3} , todėl galime teigti, jog iš turimų trijų investicinių portfelių M1, M2 ir M3, pelningiausias yra maksimalaus pelno-rizikos koeficiento portfelis M3, o mažiausias pelningas yra minimalios rizikos portfelis M2.
- $\sigma_{M2} < \sigma_{M1} < \sigma_{M3}$ ir $\sigma_{M2}^2 < \sigma_{M1}^2 < \sigma_{M3}^2$ reiškia, kad lygių svorių investicinio portfelio M1 standartinis nuokrypis σ_{M1} ir dispersija σ_{M1}^2 yra didesni už minimalios rizikos portfelio M2 standartinį nuokrypį σ_{M2} ir dispersiją σ_{M2}^2 , bet mažesni už maksimalaus pelno-rizikos koeficiento portfelio M3 standartinį nuokrypį σ_{M3} ir dispersiją σ_{M3}^2 . Remiantis tuo, galime teigti, jog minimalios rizikos investicinis portfelis M2 yra mažiausiai rizikingas, o maksimalaus pelno-rizikos koeficiento portfelis M3 yra rizikingiausias.
- $S_{M2} < S_{M1} < S_{M3}$ reiškia, jog lygių svorių investicinio portfelio M1 Šarpo rodiklis S_{M1} yra didesnis už minimalios rizikos portfelio M2 Šarpo rodiklį S_{M2} , bet mažesnis už maksimalaus pelno-rizikos koeficiento portfelio M3 Šarpo rodiklį S_{M3} , todėl galima teigti, jog investicinis portfelis M3 yra efektyviausias ir geriausiai optimizuotas investicijų portfelis iš visų trijų lyginamų investicinių akcijų portfelių M1, M2 ir M3.

8.2 Darbo išvados

Šiame baigiamajame bakalauriniame darbe nagrinėjamas investicinių akcijų portfelių formavimas iš NASDAQ technologijų industrijos didžiausios rinkos vertės imonių sąrašų bei šių portfelių optimizavimas taikant minimalios rizikos bei maksimalaus pelno-rizikos koeficiento portfelis teiginius, taip pat ir H. Markowitz W. Sharpe, A. Grigučio Modernaus portfelio bei CAPM teorija, teigiančią, jog visų investuotojų pagrindinis tikslas - formuoti

investicinius portfelius, kurie maksimizuoja pelno-rizikos koeficientą, t.y. užtikrina didžiausią pelną su mažiausia įmanoma rizika.

Atliktas praktinių skaičiavimų rezultatų palyginimas parodo, jog:

- Investiciniai portfeliai suformuoti ant efektyvumo fronto kreivės yra optimalūs, bet geriausias investicinis portfelis priklauso nuo investuotojo toleruojamos rizikos lygio.
- Turimiems duomenims egzistuoja minimalios rizikos investicinis portfelis M2, šio investicinių aktyvų rinkinio dispersija yra minimali.
- Turimiems duomenims egzistuoja didžiausios tikėtinos grąžos investicinis portfelis M2, šio investicinių aktyvų rinkinio pelno-rizikos koeficientas yra maksimalus. Dažniausiai didžiausia investicinė grąža yra pasiekama esant aukštesniam rizikos lygiui.
- Investicijų portfelių optimizavimas gali būti paremtas šiame darbe naudojamų investicinių portfelių vertinimo metodais, skirtais įvertinti investicinių aktyvų ar jų rinkinių vidutines grąžas, rizikingumą apskaičiuojant standartinę nuokrypį, dispersiją, kovariaciją, bei įvertinant investicijos pelno-rizikos santykį, kuris padeda optimizuoti investicinių portfelių tikėtiną investicinę grąžą bei investicinę riziką.

Literatūra

- [1] A. Grigutis *Aktyvo kainos nustatymas remiantis CAPM modeliu, 2018* https://klevas.mif.vu.lt/~andriusg/Destymas/Investiciju_teorija/Teorijos%20konspektai/CAPM.pdf
- [2] A. Grigutis *Rizikingų aktyvų portfelis* https://klevas.mif.vu.lt/~andriusg/Destymas/Investiciju_teorija/Teorijos%20konspektai/Rizikingu_aktyvu_portfelis.pdf
- [3] Alphabet Inc. Class A istoriniai duomenys <https://finance.yahoo.com/quote/GOOGL/history/>
- [4] Apple istoriniai duomenys <https://finance.yahoo.com/quote/AAPL/history/>
- [5] ASML Holding istoriniai duomenys <https://finance.yahoo.com/quote/ASML/history/>
- [6] D.P. Bertsekas, J.N. Tsitsiklis *Introduction to Probability* https://www.vfu.bg/en/e-Learning/Math--Bertsekas_Tsitsiklis_Introduction_to_probability.pdf
- [7] G. Cornuejols, R. Tutungu *Optimization Methods in Finance* http://web.math.ku.dk/~rolf/CT_FinOpt.pdf
- [8] H. Markowitz *Portfolio Selection* Vol. 7, No. 1. (Mar.,1952), pp. 77-91.
- [9] Įmonių sąrašas pagal dydį <https://www.nasdaq.com/market-activity/stocks/screener>
- [10] Jungtinių Amerikos Valstijų 10 metų trukmės išdo obligacijų palūkanų normos vidurkis 2022-05-30 01:55 https://ycharts.com/indicators/10_year_treasury_rate
- [11] Visuotinė lietuvių enciklopedija <https://www.vle.lt/straipsnis/liestine/>
- [12] Microsoft Inc. istoriniai duomenys <https://finance.yahoo.com/quote/MSFT/history/>
- [13] NVidia istoriniai duomenys <https://finance.yahoo.com/quote/NVDA/history/>
- [14] S. Seth *Market Capitalization* <https://www.investopedia.com/investing/market-capitalization-defined/>
- [15] William F. Sharpe *The Sharpe Ratio* https://web.stanford.edu/~wfs Sharpe/art/sr/sr.htm?fbclid=IwAR0QeqIBqnC9xPBS1h4uaYNnANjawCHRYwVjx_jvIm_GIy6J3lRHIWGldvk

Priedai

Skaičiavimai buvo atlikti naudojant Python kalbos biblioteką numpy ir pandas Google Colaboratory aplinkoje. Duomenų ištraukimui iš excel:

```
def getData(fileName):  
    columns = ['open', 'high', 'low', 'close', 'Adj close', 'Volume']  
    df = pd.read_csv(fileName, skiprows = 1, names = columns, parse_dates = True)  
    return df
```

Savaitinių kainų pasikeitimų skaičiavimui:

```
def calculateGrowth(files):  
    growths = []  
    for file in files:  
        df = getData(file)  
        growth = df['close'].pct_change()  
        growth = growth.iloc[1:]  
        growths.append(growth)  
    return growths
```

Vidutinių aktyvų grąžų suskaičiavimui:

```
def calculateAverageReturns(files):  
    averageReturns = []  
    for file in files:  
        df = getData(file)  
        returns = df['close'].pct_change().mean()  
        averageReturns.append(returns)  
    return averageReturns
```

Standartinio nuokrypio suskaičiavimui:

```
def calculateSTD(files):  
    STD = []  
    for file in files:  
        df = getData(file)  
        values = df['close'].pct_change().std()  
        STD.append(values)  
    return STD
```

Dispersijai suskaičiuoti:

```
def calculateVariance(files):  
    VAR = []  
    for file in files:  
        df = getData(file)  
        values = df['close'].pct_change().var()  
        VAR.append(values)  
    return VAR
```

Kovariacijų matricai sukurti:

```
def calculateCovarianceMatrix(df):  
    return np.cov(df)
```

Minimalios rizikos svoriams suskaičiuoti:

```
def calculateMinRiskPortfolio(graza):  
    kovariacijuMatrica = calculateCovarianceMatrix(graza)  
    atvirkstineKovariacijuMatrica = np.linalg.inv(kovariacijuMatrica)  
    ones = np.ones(len(graza))  
    minRiskPortfolio = np.dot(atvirkstineKovariacijuMatrica,np.transpose(ones))  
    /(np.dot(np.dot(ones, atvirkstineKovariacijuMatrica), np.transpose(ones)))  
    return minRiskPortfolio
```

Maksimalaus pelno-rizikos koeficiento portfelio svoriams suskaičiuoti:

```
def calculateOptimizedPortfolio(graza, aktyvoGrazos, nerizikingaGraza):  
    kovariacijuMatrica = calculateCovarianceMatrix(graza)  
    atvirkstineKovariacijuMatrica = np.linalg.inv(kovariacijuMatrica)  
    ones = np.ones(len(graza))  
    nerizikingaGrazaSavaitine = ((1+nerizikingaGraza)**(1/52)-1)  
    rizikingosGrazos = []  
    for grazos in graza:  
        rizikosPremija = []  
        for laikotarpioGraza in grazos:  
            rizikosPremija.append(laikotarpioGraza - nerizikingaGrazaSavaitine)  
        rizikingosGrazos.append(np.mean(rizikosPremija))
```

Portfelio standartiniui nuokrypiui suskaičiuoti:

```
def calculatePortfolioStandardDeviation(weights, covarianceMatrix):  
    return np.sqrt(np.dot(np.dot(weights, covarianceMatrix), np.transpose(weights)))
```

Šarpo reitingui suskaičiuoti:

```
def calculateSharpeRatio(portfolioReturn, freeRiskReturn, standardDeviation):  
    return (portfolioReturn-freeRiskReturn)/standardDeviation
```