ASIMPTOTINIS DVIEJŲ PAPRASTŲJŲ HIPOTEZIŲ ATSKYRIMAS NAUDOJANT TOLYGIAI GALINGIAUSIĄ KRITERIJŲ

Vaidotas Kanišauskas, Lydija Dronova-Platbarzdė

Šiaulių universitetas, Informatikos, matematikos, e. studijų institutas

Įvadas

Straipsnyje nagrinėjama dviejų paprastųjų hipotezių asimptotinio atskyrimo problema, kada stebimas bendriausias binarinis statistinis eksperimentas. Optimalūs statistiniai kriterijai paprastai būna dviejų tipų: tolygiai galingiausi arba minimakso. Pirmuoju atveju minimizuojama antros rūšies klaidos tikimybė, kai pirmos rūšies klaidos tikimybė yra fiksuota, arba atvirkščiai. Antruoju atveju minimizuojama didžiausia iš pirmos ir antros rūšies klaidų tikimybių.

Asimptotinė dviejų paprastųjų hipotezių minimakso tipo klaidos tikimybės elgesio problema pradėta nagrinėti H. Chernoffo [2] ir, galima sakyti, tam tikru požiūriu (bendriausiu atveju) užbaigta V. Kanišausko [1, 7]. Maksimalaus tikėtinumo kriterijaus, ar, kitaip sakant, tolygiai galingiausio kriterijaus, atveju asimptotinis dviejų paprastųjų hipotezių atskyrimo uždavinys pradėtas nagrinėti Steino ir H. Chernoffo bei C. R. Rao [2, 3]. Jo esmė yra ta, kad, nagrinėjant nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių stebėjimų modelį, ieškoma sąlygų, kada antros rūšies klaidos tikimybė, kai aprėžta pirmos rūšies klaidos tikimybė, eksponentiškai mažėja – $n\, I(P_{\theta_2}, P_{\theta_3})$ greičiu, neribotai didėjant stebėjimų skaičiui n, čia $I(P_{\theta_2}, P_{\theta_1})$ yra Kullbacko ir Leiblerio informacija-atstumas tarp atitinkamų matų. Klasikiniu atveju laikoma, kad Kullbacko ir Leiblerio informacija yra baigtinė. A. Janssenas nagrinėjo šį uždavinį, laikydamasis sąlygos, kad Kullbacko ir Leiblerio informacija nėra baigtinė [6]. Toliau šių tyrinėjimų situacija tampa paini, nes kartu su asimptotiniu paprastųjų hipotezių atskyrimo uždaviniu buvo nagrinėjamos asimptotinės atitinkamų parametrų savybės ir net atitinkamų matų asimptotinis atskiriamumas. Be to, kadangi šiuose uždaviniuose atsiranda tikėtinumo santykis (atitinkamas lokalaus tankio procesas), buvo nagrinėjamos ir jo asimptotinės savybės. Kaip vienas iš efektyvių šių nagrinėjimų įrankių buvo pasirinktas Helingerio integralas tarp atitinkamų matų. Aktualus tampa Helingerio integralo pavidalo nagrinėjimas, jo asimptotinės savybės ir pan. Visus šiuos uždavinius, kaip atskirus ir kaip susijusius su asimptotiniu paprastųjų hipotezių atskyrimo uždaviniu, nagrinėjo Yu. N. Linkovas [4, 5, 10–12]. Galima išskirti Yu. N. Linkovo monografiją [5] kaip visų šių darbų suvestinę. Parametrų asimptotinių savybių nagrinėjimu, atitinkamu asimptotiniu paprastųjų hipotezių atskyrimu domėjosi Yu. A. Kutojancas [9]. Labai įdomias geometrines tikimybinių matų konstrukcijas aptarė N. N. Čencovas [13]. Jo darbe galima rasti pirmuosius paprastųjų hipotezių asimptotinio atskyrimo rezultatus (Neimano-Pirsono ir minimakso kriterijų atvejai). Aišku, reikia pažymėti, kad čia paminėta tik nedaugelis šių tipų rezultatų.

Įdomu tai, kad nagrinėjant šiuos įvairius asimptotinius uždavinius nebuvo suformuluotas natūralus pirmojo klasikinio rezultato apibendrinimas bendriausiai binarinių statistinių eksperimentų klasei, kai stebėjimai yra bendriausios prigimties ir tikrinamos dvi skirtingos paprastosios hipotezės. Šio straipsnio tikslas kaip tik ir yra pateikti natūralų pirmųjų rezultatų apibendrinimą bendriausiu atveju. Aišku, reikia pažymėti, kad šiuo atveju nebeturime klasikinių Kullbacko ir Leiblerio atstumų tarp atitinkamų matų, bet turime tam tikrus jų asimptotinius analogus.

Darbo tikslas – ištirti dviejų paprastųjų hipotezių asimptotinį atskyrimo uždavinį esant tam tikroms bendroms sąlygoms.

Uždaviniai:

1. Nustatyti antros rūšies klaidos tikimybės asimptotinio mažėjimo formulę, kai yra fiksuota pirmos rūšies klaidos tikimybė bendriausio modelio atveju.
2. Parodyti darbo rezultatus klasikiniu, nehomogeninio Puasono proceso ir atstatymo proceso statistinių eksperimentų atvejais.

Pirmajame straipsnio skyrelyje pateiktas ir įrodytas pagrindinis rezultatas. Antrajame parodyta, kaip pagrindinis rezultatas tampa klasikiniu rezultatu. Trečiajame ir ketvirtajame skyrelyje parodyta, kaip reikia taikyti pagrindinį rezultatą konkrečių procesų statistinių eksperimentų atvejais. Kaip pavyzdžiai pasirinkti nehomogeninis Puasono ir atstatymo procesai.

1. Pagrindinis rezultatas

Tarkime, kad duota statistinių eksperimentų šeima $(\mathcal{X}^t, \mathcal{F}^t, \mathrm{P}_\theta^t, \theta \in \Theta), t \in R_+ = [0, +\infty)$, kur Θ yra abstrakti parametrų aibė su bendros prigimties stebėjimais $X^t \in \mathcal{X}^t$. Tikriname dvi paprastąsias hipotezes $H_1 : \theta = \theta_1$, $H_2 : \theta = \theta_2$, kurios sako, kad stebėjimai X^t turi tikimybinius matus $P_{\theta_i}^t, i = 1, 2,$ atitinkamai čia $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ yra fiksuoti. Hipotezių H_1, H_2 atskyrimo, remiantis stebėjimais X^t, statistiniu kriterijumi, žymimu $\delta^t = (\delta_1^t, \delta_2^t)$, vadiname matų atvaizdį $X^t \to R^{(2)}$, kur $R^{(2)}$ yra aibė tokių vektorių $\delta^t = (\delta_1^t, \delta_2^t)$, kad

$$\delta_i^t \geq 0,\ \delta_1^t + \delta_2^t = 1. \quad (1)$$

Visumą tokių kriterijų žymėsime Δ^t. Kriterijų $\delta^t = (\delta_1^t, \delta_2^t)$ charakterizuoja skaičiai $\alpha_{ij}(\delta^t) = \mathbb{E}_i^t \delta_j^t(X^t)$, nurodantys tikimybę priimti hipotezę H_j, kai H_i yra teisinga, čia $\mathbb{E}_i^t$ žymi matematinį vidurkį pagal matą $P_{\theta_i}^t$.

$$\alpha_1(\delta^t) = \mathbb{E}_1^t \delta_2^t(X^t)$$

$$\alpha_2(\delta^t) = \mathbb{E}_2^t \delta_1^t(X^t)$$

$$B_t(b) = \{\delta: \alpha_2(\delta^s) < b, 0 < b < 1, 0 \leq s \leq t\}.$$

Suformuluosime pagrindines sąlygas:

A1. Su visais $t \in R_+$, $P_{\theta_1}^t \sim P_{\theta_2}^t$, kai $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, $\theta_1 \neq \theta_2$.

A2. Egzistuoja tokia funkcija Ψ_t, kad $\Psi_t \to \infty$, kai $t \to \infty$, ir

$$P_{\theta_2}^t - \lim_{t\to\infty} \Psi_t^{-1} \ln \frac{dP_{\theta_1}^t}{dP_{\theta_2}^t}(X^t) = -I\left(P_{\theta_2}, P_{\theta_1}\right), \quad (2)$$

čia $P_{\theta_2}^t - \lim\limits_{t\to\infty}$ žymi konvergavimą pagal tikimybę.

Teorema. Tarkime, kad patenkintos A1 ir A2 sąlygos. Tada

$$\lim_{t\to\infty} \inf_{\delta\in B_t(b)} \Psi_t^{-1} \ln \alpha_1(\delta^t) = -I(P_{\theta_2}, P_{\theta_1}).$$

Įrodymas. Pažymėkime

$$U_t(\varepsilon) = \left\{X^t \in \mathcal{X}^t : \Psi_t^{-1} \ln \frac{dP_{\theta_1}^t}{dP_{\theta_2}^t}(X^t) + I\left(P_{\theta_2}, P_{\theta_1}\right) \geq -\varepsilon\right\}.$$

Laisvai pasirinktiems $\varepsilon > 0$ ir $\gamma > 0$ iš (2) lygybės išplaukia, kad

$$P_{\theta_2}^t(\mathcal{X}^t \backslash U_t(\varepsilon)) < \gamma,$$

$P_{\theta_2}^t\left(U_t(\varepsilon)\right) \geq 1 - \gamma$, su visais $t > t_0(\gamma, \varepsilon)$.

Iš $B_t(b)$ apibrėžimo ir (1) formulės gauname, kad dėl $\delta^t \in B_t(b)$

$$\mathbb{E}_2^t \delta_2^t(X^t) \geq 1 - b.$$

Akivaizdu, kad su visais $t > t_0(\gamma, \varepsilon)$

$$\alpha_1(\delta^t) = \mathbb{E}_1^t \delta_2^t(X^t) = \mathbb{E}_2^t \delta_2^t(X^t) \exp\left\{\Psi_t \Psi_t^{-1} ln \frac{dP_{\theta_1}^t}{dP_{\theta_2}^t}(X^t)\right\} \geq$$
$$\geq \mathbb{E}_2^t \mathbb{1}\left(X^t \in U_t(\varepsilon)\right) \delta_2^t(X^t) \exp\left\{-\Psi_t I\left(P_{\theta_2}, P_{\theta_1}\right) - \Psi_t \varepsilon\right\} \geq$$
$$\geq (1 - b - \gamma) \exp\left\{-\Psi_t I\left(P_{\theta_2}, P_{\theta_1}\right) - \Psi_t \varepsilon\right\}. \quad (3)$$

Dėl $\delta > 0$ laisvo pasirinkimo iš (3) turime, kad

$$\lim_{t\to\infty} \inf_{\delta\in B_t(b)} \Psi_t^{-1} \ln \alpha_1(\delta^t) = -I\left(P_{\theta_2}, P_{\theta_1}\right).$$

Teorema įrodyta.

2. Klasikinis atvejis

Tarkime, kad stebėjimai yra pavidalo $X^n = (X_1, \ldots, X_n)$, čia $X_1, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai mačioje erdvėje $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, turintys nežinomą tikimybinį matą P_θ, $\theta \in \Theta$. Tarkime, kad P_θ turi Lebego mato atžvilgiu tankį p_θ. Tada $P_{\theta_1}^n \sim P_{\theta_2}^n$, kai $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, $\theta_1 \neq \theta_2$. Kartu

$$\ln \frac{dP_{\theta_1}^n}{dP_{\theta_2}^n}(X^n) = \sum_{i=1}^n \ln \frac{p_{\theta_1}(X_i)}{p_{\theta_2}(X_i)}.$$

Tarkime, kad Kullbacko ir Leiblerio informacija yra baigtinė:

$$I\left(P_{\theta_2}, P_{\theta_1}\right) = \mathbb{E}_{\theta_2} \ln \frac{P_{\theta_2}(X_1)}{P_{\theta_1}(X_1)} < \infty.$$

Tada pagal didžiųjų skaičių dėsnį

$$P_{\theta_2} - \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n \ln \frac{P_{\theta_1}(X_i)}{P_{\theta_2}(X_i)} = -I\left(P_{\theta_2}, P_{\theta_1}\right).$$

Tai reiškia, kad patenkintos A1 ir A2 sąlygos. Vadinasi, galioja ir teoremos rezultatas.

3. Nehomogeninis Puasono procesas

Tarkime, kad turime stochastinę bazę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P_\theta, \theta \in \Theta)$, kurioje apibrėžtas nehomogeninis Puasono procesas N_t, $t \geq 0$, su intensyvumu $k_t(\theta)$, $t \geq 0$, $\theta \in \Theta$. Atsižvelgdami į nehomogeninio Puasono proceso stebėjimus $\{N_s, 0 \leq s \leq t\}$, $t \in R_+$, tikrinsime paprastąsias hipotezes $H_1 : \theta = \theta_1$, $H_2 : \theta = \theta_2$, kur θ yra tikroji intensyvumo funkcijos $k_t(\theta)$ parametro reikšmė, kai θ_1, θ_2 yra skirtingi aibės Θ taškai.

Tarkime, kad $P^t_{\theta_i} = P_{\theta_i}|\mathcal{F}^{N_t}_t, i = 1, 2, t \in R_+$, $\mathcal{F}^N_t = \sigma(N_s, s \leq t)$ ir $P^t_{\theta_1} \sim P^t_{\theta_2}$, $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ ir $\theta_1 \neq \theta_2$. Tada [7]

$$\ln \frac{dP^t_{\theta_1}}{dP^t_2} = \int_0^t \frac{k_s(\theta_1)}{k_s(\theta_2)} dN_s - \int_0^t \big(k_s(\theta_1) - k_s(\theta_2)\big) ds =$$

$$= \int_0^t \frac{k_s(\theta_1)}{k_s(\theta_2)} d\big(N_s - A_s(\theta_2)\big) - - \int_0^t \left(k_s(\theta_1) - k_s(\theta_2) - k_s(\theta_2) \ln \frac{k_s(\theta_1)}{k_s(\theta_2)}\right) ds.$$

Įvesime sąlygą:

B. Egzistuoja funkcija φ_t tokia, kad $\int_0^t \varphi_s ds \to \infty$, kai $t \to \infty$, ir $\lim_{t\to\infty} \varphi_t^{-1} k_t(i) = k(\theta_i)$, kai $k(\theta_1) \neq k(\theta_2)$ ir $i = 1,2$.

Jei patenkinta B sąlyga, tai galioja A1 ir A2 sąlygos. Tada teisinga (2) formulė su $\Psi_t = \int_0^t \varphi_s ds$ ir

$$I\big(P_{\theta_2}, P_{\theta_1}\big) = k(\theta_1) - k(\theta_2) - k(\theta_2) \ln \frac{k(\theta_1)}{k(\theta_2)}.$$

Pavyzdžiai.

1. Tarkime, kad $k_t(\theta) = \theta\varphi_t$, $\theta > 0$, $t \geq 0$, ir $\Psi_t \to \infty$, kai $t \to \infty$, čia $\Psi_t = \int_0^t \varphi_s ds$. Šiuo atveju B sąlyga yra patenkinta su

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_t^{-1} k_t(\theta_i) = \theta_i, \qquad i = 1, 2.$$

Dabar (2) formulė galioja su Ψ_t ir

$$I\big(P_{\theta_2}, P_{\theta_1}\big) = \theta_1 - \theta_2 - \theta_2 \ln \frac{\theta_1}{\theta_2}. \tag{4}$$

2. Tarkime, kad $k_t(\theta) = \theta$, kai $t \leq 1$, ir $k_t(\theta) = \frac{\theta}{t}$, kai $t > 1$, čia $\theta > 0$. Šiuo atveju

$$\int_0^t k_s(\theta)\, ds = \theta(1 + \ln t),$$

ir B sąlyga galioja su $\Psi_t = \ln t$ ir $k(\theta) = \theta$. Dabar teisinga (2) formulė su $I(P_{\theta_2}, P_{\theta_1})$, apibrėžtu (4) formule.

4. Atstatymo procesas

Nagrinėsime skaičiuojantį procesą $N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), t \geq 0,$ kuriame atsitiktiniai dydžiai $X_n = T_n - T_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ ($T_0 = 0$) yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę, su pasiskirstymo funkcija $P(X_1 \leq t) = F(\theta, t)$, $\theta \in \Theta$. Tarkime, kad

$$F(\theta, t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t k_s(\theta, s)\, ds\right\}, \theta \in \Theta.$$

Tada [7]

$$\ln \frac{dP^t_{\theta_1}}{dP^t_2} = \int_0^t \frac{k(\theta_1, L_s)}{k(\theta_2, L_s)} dN_s -$$

$$- \int_0^t \big(k(\theta_1, L_s) - k(\theta_2, L_s)\big) ds,$$

čia $L_s = s - T_{N_{s-}}$.

[8] darbe buvo parodyta, kad P_θ–b.v., kai $t \to \infty$,

$$\int_0^t f(L_s) dN_s = \sum_{i=1}^{N_t} f(X_i) \sim \mathbb{E}_\theta f(X_1) \mathbb{E}_\theta X_1 \cdot t,$$

$$\int_0^t f(L_s) ds = \sum_{i=1}^{N_{t-}} \int_0^{X_i} f(s) ds + \int_0^{t - T_{N_{t-}}} f(s) ds \sim \mathbb{E}_\theta \int_0^{X_1} f(s) ds\, \mathbb{E}_\theta X_1 t.$$

Vadinasi, (2) teisinga su $\Psi_t = t$ ir

$$I\left(P_{\theta_2}, P_{\theta_1}\right) = \mathbb{E}_{\theta_2} X_1 \left(\mathbb{E}_{\theta_2} \int_0^{X_1} k(\theta_1, s) ds - \mathbb{E}_{\theta_2} \int_0^{X_1} k(\theta_2, s) ds - \mathbb{E}_{\theta_2} \ln \frac{k(\theta_1, X_1)}{k(\theta_2, X_1)} \right) > 0,$$

kai

$$\mathbb{E}_{\theta_2} X_1 < \infty, \ \mathbb{E}_{\theta_2} \int_0^{X_1} k(\theta_i, s) ds < \infty, \qquad i = 1, 2, \qquad \mathbb{E}_{\theta_2} \ln \frac{k(\theta_1, X_1)}{k(\theta_2, X_1)}) < \infty.$$

Literatūra

1. Kanišauskas V., 2000, Asymptotically minimax testing of simple hypotheses. *Lietuvos matematikos rinkinys*. Vol. 40. Nr. 3. P. 313–320.
2. Chernoff H., 1952, A measure of asymptotic efficiency for tests of hypothesis based on the sum of observations. *Ann. Math. Stat*. 23. P. 493–507.
3. Rao C. R., 1962, Eficient estimates and optimum inference procedures in large samples. *J. Roy. Statistist. Soc. Ser. B*. P. 46–72.
4. Lin'kov Yu. N., 1991, Asymptotical questions of simple hypotheses testing. *Probability and mathematical statistics.* Vol. 12. Fasc 2. P. 217–243.
5. Lin'kov Yu. N., 1993, *Asymptotic Statistical Methods for Stochastic Processes.* Kiev: Naukova Dumka.
6. Janssen A., 1986, Asymptotic properties of Neyman-Pearson tests for infinite Kullback-Leibler information, *The Annals of Statistics*. Vol. 14, No 3. P. 1068–1079.
7. Канишаускас В., 1998, Асимптотически минимаксное различение двух простых гипотез. *Lietuvos matematikos rinkinys*. Vol. 38. № 2. С. 169–184.
8. Канишаускас В., 2002, Асимптотические свойства мартингальных оценок процессов востановления. *Lietuvos matematikos rinkinys*. Vol. 42. Spec. nr. С. 121–126.
9. Кутоянц Ю. А., 1984, Оценивание параметров случайных процессов. Изд-во А. Н. Арм. ССР, сер. Математика. Vol. 19. № 3. С. 233–241.
10. Линьков Ю. Н., 1980, Асимптотическая нормальность логарифма отношения правдоподобия и проверка гипотез для неоднородных процессов Пуассона. Теория случайных процессов. Vol. 8. С. 91–101.
11. Линьков Ю. Н., 1981, Об асимптотической мощности статистических критериев для считающих процессов. Пробег передачи информации. Vol. XVII. № 3. С. 69–80.
12. Линьков Ю. Н., 1990, Об асимптотическом различии двух простых статистических гипотез. Теория случайных процессов и её приложения. Киев: Наукова думка. С. 89–98.
13. Ченцов Н. Н., 1972, Статистические решающие правила и оптимальные выводы. Москва: Наука.

Summary

ASYMPTOTICAL SEPARATION OF TWO SIMPLE HYPOTESESS USING THE MOST POWERFUL CRITERIA

V. Kanišauskas, L. Dronova-Platbarzdė

The behaviour of the second kind error-probability of a uniformly most powerful criterion, when there is a fixed and a small chance of the first type error is analysed in the paper. The asymptotic formula for probability has been obtained using a common model of the likelihood function under formed natural conditions, i.e. local density. At the same time it is shown as a key result and what overall conditions seem to be in specific models (independent observations, non-homogeneous Poisson process, process of renewal).

Keywords: test, non-homogeneous Poisson process, process of renewal.

Santrauka

ASIMPTOTINIS DVIEJŲ PAPRASTŲJŲ HIPOTEZIŲ ATSKYRIMAS NAUDOJANT TOLYGIAI GALINGIAUSIĄ KRITERIJŲ

V. Kanišauskas, L. Dronova-Platbarzdė

Šiame darbe nagrinėjame tolygiai galingiausio kriterijaus antros rūšies klaidos tikimybės elgesį, kai yra fiksuota ir nedidelė pirmos rūšies klaidos tikimybė. Gauta asimptotinė tos tikimybės bendriausio modelio formulė esant natūralioms sąlygoms, suformuluotoms tikėtinumo funkcijai – lokaliajam tankiui. Kartu straipsnyje parodoma, kaip pagrindinis rezultatas ir bendros sąlygos pasireiškia konkrečiuose modeliuose (nepriklausomų stebėjimų, nehomogeninis Puasono procesas, atstatymo procesas).

Prasminiai žodžiai: statistinis kriterijus, nehomogeninis Puasono procesas, atstatymo procesas.

Įteikta 2015-10-30
Priimta 2015-11-10