

# LIETUVOS PILIAKALNIŲ AMŽIAUS MATEMATINIS NUSTATYMAS

Daiva Lukšienė, Vaidotas Kanišauskas

Šiaulių universitetas, Informatikos, matematikos, e. studijų institutas

## Įvadas

Lietuvoje yra daugybė piliakalnių – jokioje kitoje pasaulio šalyje tokios jų koncentracijos nėra. Norint juos ištirti, pirmiausia reikia teisingai datuoti jų amžių, t. y. nustatyti, kada jie įrengti. Tam tikslui atliekami žvalgomieji arba išsamieji piliakalnių tyrinėjimai. Žvalgomybinių tyrimų metu apžiūrima aplinka, padaroma keletas kontrolinių duobių. Per išsamiuosius tyrinėjimus atliekami ilgalaikiai ir kruopštūs piliakalnio kasinėjimai – žingsnis po žingsnio, sluoksnis po sluoksniu. Ir vieniems, ir kitiems tyrimams reikia nemažai lėšų, kurias ne taip lengva surasti. Šiame straipsnyje siūlomas matematinis požiūris į piliakalnio amžiaus datavimo problemą: randama diagnozavimui tinkama funkcija, priklausanti nuo mažo skaičiaus parametru; po to iš piliakalnių aprašymo duomenų bazės parenkamos tinkamos piliakalnių nuotraukos, kurias palyginę su tinkamais grafikai gauname naują parametru duomenų bazę. Tuos duomenis apdoroję statistiškai gauname kiekvieno istorinio laikotarpio piliakalnių charakterizuojančias parametru reikšmes. Po to tereikia nufotografuoti piliakalnį iš patogiausios pusės ir palyginti piliakalnio kontūrus su tinkamiausia grafiko kreive iš duomenų bazės. Kreivė turi charakteringas parametru reikšmes, kurios nurodo piliakalnio pastatymo laikotarpį. Pagal tas parametro reikšmes sužinome, kada piliakalnis buvo įrengtas. Ta procedūra užima kelias minutes ir nereikalauja jokių materialinių sąnaudų. Kadangi straipsnyje buvo remtasi tik grynaisiais piliakalniais (sąvoka bus paaiškinta vėliau) ir tik tam tikra jų dalimi, tai tyrimo negalima laikyti galutinai užbaigtu. Tačiau joks rimtas statistinis tyrimas negali būti iš karto visa apimantis ir užbaigtas, ypač kada duomenų aibė yra didelė. Kiekvienas naujas tyrimas papildo ir patikslina ankstesnįjį. Straipsnyje pateiktas tyrimas yra pirmasis tokio pobūdžio, todėl ne iki galo užbaigtas, bet užtat novatoriškas ir originalus – jame pateikiamas neįprastas matematikos taikymo metodas nematematiniams dalykams. Čia pagrindinis akcentas nukreiptas į taikymo idėjos matematinį pagrindimą, kuris vis dėlto nėra toks sudėtingas, kad jo nesuprastų ir ne fizinių mokslų atstovai. Būtų malonu, jei šiai idėjai pritartų archeologai ir bandytų metodą taikyti savo darbe.

**Darbo tikslas** – pagal piliakalnio nuotrauką (palyginus ją su kontrolinės funkcijos grafiku) nustatyti piliakalnio amžių (sukūrimo laikotarpį).

## Uždaviniai:

1. Turimos piliakalnių aprašų duomenų bazės piliakalnius ([www.piliakalniai.lt](http://www.piliakalniai.lt)) sugrupuoti pagal jų datuojamus laikotarpius, t. y. įrengimo laiką.
2. Atrasti tinkamą tyrimui kontrolinę funkciją su nedideliu parametru skaičiumi.
3. Sudaryti kontrolinės funkcijos grafiku duomenų bazę, kur juos atitinkantys parametrai vienas nuo kito skirtųsi nedideliu iš anksto nustatytu žingsneliu.
4. Lyginant tyrimo imties piliakalnių nuotraukas su kontrolinės funkcijos grafikai, nustatyti, kokios yra atitinkamų piliakalnių grafiku parametru reikšmės.
5. Sugrupuoti piliakalnių grafiku parametru reikšmes pagal piliakalnių įrengimo grynuosius laikotarpius. Nustatyti tuos laikotarpius atitinkančių parametru intervalus. Taikant matematinei statistikai būdingus centravimą ir normavimą, patikslinti tų intervalų ribas. Kiekvienam grynajam istoriniam laikotarpiui nustatyti „idealiausio“ piliakalnio grafiko parametru reikšmes.
6. Parodyti, kaip šis piliakalnio amžių identifikuojantis matematinis metodas veikia praktikoje.

**Tyrimo metodai** – grafinis, matematinis ir statistinis, lyginamasis ir dedukcinis.

Tyrimui visi duomenys, įskaitant imties piliakalnių nuotraukas, buvo paimti iš interneto svetainės [www.piliakalniai.lt](http://www.piliakalniai.lt). Norint atlikti nuodugnesnį tyrimą, reikėtų perfotografuoti piliakalnius pagal vienodą metodiką, bet tai – tolesnių tyrimų reikalas.

## I dalis. Piliakalnis

Lietuva yra piliakalnių kraštas. Apie juos yra daug parašyta, todėl apsiribosime esminiais dalykais, pasinaudodami [4] darbu. Norėdami geriau suprasti tyrimų objektą, pažiūrėkime į piliakalnį archeologų akimis. Išskirtinis lyderis tarp jų yra G. Zabiela [10, 11], daug rašantis apie piliakalnius, ypač gausiai – apie vėlyvuosius piliakalnius. Piliakalnių tipus geriausiai aprašė P. Tarasenko [9], kurį dalykiškai papildo P. Kulikauskas [5] ir A. Simniškytė [8]. Piliakalniai skirstomi į ankstyvuosius (riba tarp II ir I tūkst. pr. Kr.) ir vėlyvuosius (II tūkst. po Kr. pradžia). Ankstyvieji piliakalniai – tai silpnai įtvirtinta gyvenvietė ant kalvos. Pasak G. Zabelos [11], ankstyvieji piliakalniai būdavo ant kalvų ar krantų iškyšulių, su nedidelėmis 30 m skersmens aikštelėmis, kurias šlaituose juosė

dviguba medinė tvora, ir 1–2 m aukštyje nuo aikštelės buvo statesnis šlaitas. Tokiose piliakalnių gyvenvietėse gyveno nedidelės bendruomenės – vos keletas šeimų. Ankstyvieji piliakalniai Lietuvoje egzistavo iki V a. po Kr., nors kai kur išsilaikė iki II tūkstantm. po Kr. pradžios, dažniausiai virsdami piliakalniais-slėptuvėmis arba buvo panaudoti kaip pagrindas, statant naujo tipo sustiprintus piliakalnius-medines pilis. Kuršių žemėse silpnai įtvirtintos piliakalnių gyvenvietės I tūkstantm. po Kr. virto stipriai įtvirtintomis gyvenvietėmis ir išsiskyrė iš kitų piliakalnių didele aikštele (kiemu su pastatais piliakalnio viršuje). Pasak P. Tarasenos [9] ir A. Simniškytės [8], naujo tipo piliakalniai atsirado Lietuvoje nuo VI–VII a., nors atsirasdavo jų ir pereinamuoju laikotarpiu (II–V a.). Šiuo laikotarpiu žmonių gyvenvietė nusileisdavo į papėdę, o piliakalniai buvo stiprinami gynybiškai. Būdavo paaukštinami ir sustiprinami senų piliakalnių pylimai, daugiau ir stačiau nukasami šlaitai, pagilinama seni ir iškasami nauji grioviai bei perkasai. Piliakalnių aikštelių pakraščiuose, o kartais ir jų pašlaitėse, įrengiamos medinės stačių ar gulsčių rąstų sienos, sekimo ir gynimosi bokštai, vartai, tiltai. Piliakalniai su visais savo gynybiniais įrengimais tampa pilimis. Aptariamuoju laikotarpiu atsiranda daug naujų, nedidelių, stipriai įrengtų piliakalnių. Šie piliakalniai įrengiami ant atskirų kalvų arti vandens. Piliakalnių šlaitai 8–10 m aukštyje nukasami labai stačiai. Viename aikštelės gale būdavo įrengiamas iki 5 m aukščio, 3 m ir didesnio pločio pylimas. Šio pylimo nusileidžiantys galai apjuosia visą aikštelę ir daro ją lyg įdubusią. Panašiu puslankio pavidalo pylimu kartais būdavo sustiprinamos aukštų krantų kraštų dalys ir tokiu būdu įrengiamas piliakalnis. Tokie piliakalniai yra nupjauto ovalinio kūgio formos. Kartais pylimai būdavo įrengiami abiejuose aikštelės galuose, o žemyn nusileidžiantys jų galai susieidami uždarydavo visą aikštelę, kuri įgaudavo **balno** formą. Šios aikštelės plotas retai kada siekdavo 400–500 kv. m. Aikštelėse atrandamas iki 40 cm storio kultūrinis sluoksnis, rodantis, jog piliakalnyje buvo gana ilgai gyvenama žmonių. Greta šių piliakalnių labai dažnai aptinkamos 0,5–1 ha ploto sodybvietės [9]. Tokiuose piliakalniuose pastatai būdavo statomi pylimų vidinėse papėdėse, aikštelės pakraščiuose. Vidurys paprastai nebūdavo užstatomas. Pylimai, ypač didieji, ir virš jų aikštelės pakraščiu ėjusios gynybinės sienos gerai saugojo pastatus nuo padegimų ir sugriovimų. Jų liekanų aptinkama visuose tyrinėtuose piliakalniuose, tačiau retai kur galima tiksliai rekonstruoti vieną ar kitą pastatą [5].

P. Tarasena, aprašydamas piliakalnius [9], nurodo, kad jie būdavo įrengiami įvairiose vietose. Kai kurie iš jų yra įrengti atskirai stovinčiose kalvose ar aukštumų kraštuose. Tai **kalvinio** tipo piliakalniai. Kituose buvo panaudotos upių ir ežerų krantų aukštumų dalys. Dažniausiai – siauri jų kyšuliai. Šie piliakalniai

sudaro **krantinio** tipo piliakalnių grupę. Piliakalnius, įrengtus lygiuose laukuose, vadiname **lyguminio** tipo piliakalniais. Gynybiniais tikslais kalvos ir kitos aukštumos būdavo sustiprinamos padarant atitinkamo plano piliakalnių aikšteles, jas nulyginant ir stačiai nukasant piliakalnių šlaitus bei sustiprinant juos grioviais, perkasais, pylimais arba pakopomis-terasomis. Pasitaiko piliakalnių ir su nelygiomis aikštelėmis. Tokių piliakalnių aikštelės būdavo nuožulnios kuria nors viena kryptimi, kiek kalvotos, jų vidurys įdubęs, aikštelės kraštai nuožulniai žemėjantys į pakraščius; tokie piliakalniai yra panašūs į šieno **kupetas**.

Piliakalnio įrengimo laikotarpis dažniausiai būdavo nustatomas pagal jo kultūrinio sluoksnio, žymincio nuolatinį žmonių gyvenimą piliakalnyje, radinius, ypač keramiką – įvairias puodų šukes. Piliakalnių gynybinių įtvirtinimų (pylimų, griovių, terasų, pastatintų šlaitų, aikštelės) dydis ir forma leisdavo nustatyti, ar piliakalnis yra ankstyvasis, ar vėlyvasis. Žodinė tradicija (legendomis apipinta kalva), rašytinių šaltinių duomenys taip pat leisdavo koreguoti piliakalnio amžių. Kai piliakalnyje tyrėjai nerasdavo kultūrinio sluoksnio, tada stengdavosi jam priskirti gretimų senų gyvenviečių ir kapinynų amžių, aišku, remdamiesi ten rastais žmonių namų apyvokos ir prabangos daiktais. Kita problema susijusi su piliakalnių tyrinėjimais. Iš beveik tūkstančio (968 – 1993 m.) piliakalnių rimtai tyrinėti ne daugiau kaip šimtas (iki 1995 m. iš 447 vėlyvųjų piliakalnių tyrinėti tik 84 ([10], 188)), o daugumoje jų yra padaryti tik žvalgomieji tyrimai. Identifikuoti piliakalnį pagal rašytinių šaltinių duomenis taip pat yra labai sunku, o ir juose paminėtų medinių pilių yra labai mažai, palyginus su bendru piliakalnių skaičiumi. Piliakalniai buvo įrengti labai seniai – dauguma jų apardyti gamtos stichijų ir žmogaus nekorektiško įsikišimo. Todėl, kaip sakė G. Zabiela [11], iki dabar išliko tik nedidelės kalvos (suprask – ankstyvieji piliakalniai) ir kalvos su išsiskiriančiais gynybiniais sustiprinimais (suprask – vėlyvieji piliakalniai).

Iš kitos pusės, archeologinių objektų data nustatoma pagal archeologinę periodizaciją. O ką daryti, jei patys archeologai nesutaria dėl tos periodizacijos? Pavyzdžiui, piliakalnių chronologija yra glaudžiai susijusi su geležies amžiaus periodizacija. J. Puzinas gausius piliakalnius (t. y. vėlyvuosius) priskyrė naujam geležies amžiui, kurį datavo 800–1250 m., P. Tarasena šiuos piliakalnius priskiria prie ankstyvojo feodalizmo laikotarpio (IX–XII a.). G. Zabiela vėlyvuosius piliakalnius sieja su vėlyvuuoju geležies amžiumi (1000–1225 m.) ir ankstyvuuoju feodalizmu (1225–1400 m.) (smulkiau apie tai žr. [10], 5–7).

Taigi piliakalnių datavimo problema yra aki-vaizdi. Šiame straipsnyje pateiktos istorinių laikotarpių ribos dalinai sutampa ir tik nedidele dalimi nesutampa su įprasta istorine periodizacija ne dėl kažkokių ypatingų autorių norų, o dėl to, kad patys archeologai,

datuodami piliakalnių, nurodo tokias piliakalnių datas. Jos paimtos iš duomenų bazės *www.piliakalniai.lt*, kurios medžiaga sutampa su knygos „Lietuvos piliakalniai. Atlasas. I, II, III tomai“ medžiaga. Iš kitos pusės, galima trumpai pakomentuoti straipsnyje naudojamą periodizacijos sistemą. Anksčiausia data – V a. pr. Kr., nes ankstesnių nei V a. pr. Kr. piliakalnių amžiaus datų duomenų bazėje praktiškai nėra. Kita riba – mūsų eros pradžia (0 m. po Kr.) – ženklino mažąjį aukso amžių, kada mūsų žemėse pradėta intensyviai gaminti (iš vietinės pelkių geležies rūdos) geležinius įrankius ir ginklus. Po to eina V a. po Kr. – ankstyvųjų piliakalnių statybos pabaiga. V–X a. po Kr. ženklinama gana sudėtingą ir menkai ištirtą pereinamąjį laikotarpį tarp ankstyvųjų ir vėlyvųjų piliakalnių pasirodymo. II tūkstantm. po Kr. pradžia ženklinama vėlyvųjų piliakalnių eros pradžia, o XV a. – jų pabaiga.

Neįprastas istorikams ir archeologams gali pasirodyti piliakalnių nuotraukų taikymas datuojant piliakalnių. Piliakalnis yra erdvinė trimatė figūra, o mes imame vieno jos šono vaizdą, nors iš tikrųjų tarsi reikėtų imti keturis – iš visų pusių. Iš tikro tai ne geometrinė, bet statistinė problema, kurią matematinė statistika sėkmingai sprendžia, pasitelkdama *pakankamos statistikos* sąvoką. Trumpai sakant, pakankama yra tokia statistika (funkcija pagal duomenis), kuri, būdama siauresnė už visą duomenų imtį-aibę, yra nemažiau informatyvi. Kaip pavyzdį galime imti žmogaus dokumentinę nuotrauką, kurioje matosi tik jo veidas iš priekio ir truputis kūno. Akivaizdu, kad to užtenka identifikuojant žmogų. Arba žmonių pirštų antspaudai. Galima sakyti, kad piliakalnio nuotrauka iš tipiškiausios jo pusės (paprastai tai yra ta pusė, iš kurios piliakalnis matomas visu savo ilgiu) yra mažiau mistiškas informacijos apie piliakalnį teikėjas negu pirštų antspaudai – apie žmogų. Norėdami geriau įsivaizduoti konkretų piliakalnį, turime matyti jo vaizdą. Gražiausi Lietuvos piliakalnių vaizdai yra pateikti B. Buračo knygoje [1]. Ją žiūrint galima įsi-

tikinti, kad kiekvienam piliakalniui dažniausia skiriama viena arba dvi nuotraukos – ne tik gražiausios, bet ir charakteringiausios. Aišku, tai neįrodo vienos nuotraukos pakankamumo norint tiksliai charakterizuoti objektą, bet dabartiniai išlikę piliakalniai nėra tokie sudėtingi erdviniai objektai, kad jiems apibūdinti nepakaktų turėti po vieną nuotrauką.

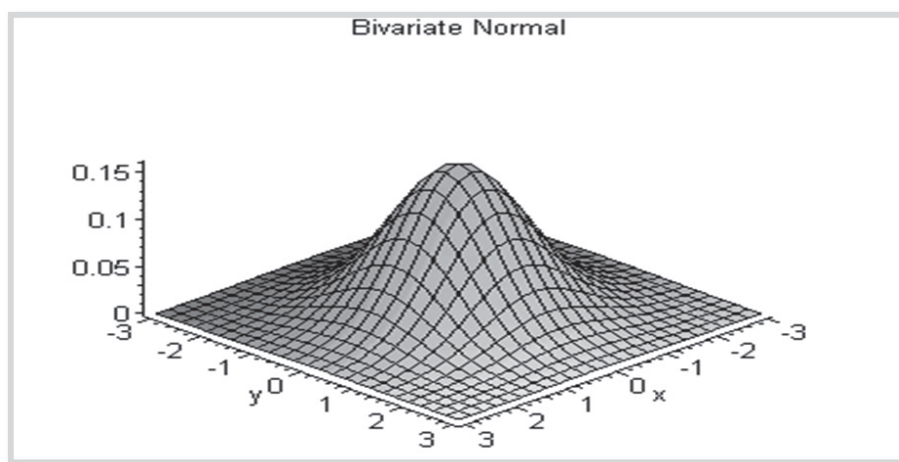
## II dalis. Statistiniai duomenys

Lietuvoje rasta apie 1000 piliakalnių, iš kurių *www.piliakalniai.lt* interneto duomenų bazėje pateikti 853 piliakalnių aprašymai. Iš jų nustatome, kad tarp jų piliakalnių:

- 1) 11 yra išlikę iš I periodo – istorinio laikotarpio 500–0 m. iki Kr.;
- 2) 236 yra išlikę iš II periodo – laikotarpio nuo 0 m. iki 1000 m. po Kr.;
- 3) 77 išlikę iš III periodo – laikotarpio nuo 1000 m. iki 1500 m. po Kr.;
- 4) 142 išlikę iš IV periodo – laikotarpio nuo 500 m. iki Kr. ir iki 1000 m. po Kr.;
- 5) 362 išlikę iš V periodo – laikotarpio nuo 0 m. iki 1500 m. po Kr.;
- 6) 25 išlikę iš VI periodo – istorinio laikotarpio, apimančio visus periodus, t. y. nuo 500 m. prieš Kr. iki 1500 m. po Kr.

Trys pirmieji periodai yra gryniesi, t. y. jiems priklausantys piliakalniai yra vienareikšmiškai priskiriami tik vienam iš periodų – jie yra charakteringieji, t. y. pagal juos galime atsekti kiekvieno istorinio periodo būdingiausius piliakalnių požymius. Tokių piliakalnių duomenų bazėje yra 324. Kiti piliakalniai yra mišrieji – jie priklauso sutampantiems laikotarpiams, todėl tyrimui nelabai tinka. Norint atlikti labai tikslų tyrimą, jie būtini, tačiau tai ne šio straipsnio tikslas.

Piliakalniai savo forma yra panašūs į taisyklinę (simetrišką centro atžvilgiu) kalvas, kurių pavaldas panašus į dvimačio normaliojo skirstinio tankio grafiką:



1 pav. Dvimačio normaliojo skirstinio tankio grafikas [2]

Tačiau šis skirstinys yra per daug sudėtingas tyrimui. Jei padarysime piliakalnio pjūvį per centrą nuo

piliakalnio viršaus į apačią, tai gausime kreivę, panašią į vienmačio normaliojo (Gauso) skirstinio tankio

grafiką. Tai labiau tyrimui tinkantis skirstinys, tačiau nemaža dalis piliakalnių yra balninio tipo, kurių pjūvis panašus į nupjautą arba nulygintą viršuje kalvą. Tokios formos piliakalnis turi  $\alpha$ -normaliojo skirstinio, kurį įvedė Vaidotas Kanišauskas [3], tankio grafiką. To skirstinio tankio grafiku ir naudosimės tyrime. Piliakalnių pjūvių daryti nereikia – pakanka piliakalnį nufotografuoti iš vienos (tipiškiausios) pusės. Tokių piliakalnio nuotraukų yra interneto duomenų bazėje [www.piliakalniai.lt](http://www.piliakalniai.lt), kur pateiktas piliakalnių aprašymas. Tos nuotraukos ir bus naudojamos tyrime.

Pirmiausia pateiksime  $\alpha$ -normaliojo skirstinio apibrėžimą.

**Apibrėžimas [3].** Atsitiktinis dydis  $X$  turi  $\alpha$ -

normalųjį skirstinį su parametrais  $(a, \sigma, \alpha)$ , jei jo pasiskirstymo funkcija turi pavidalą

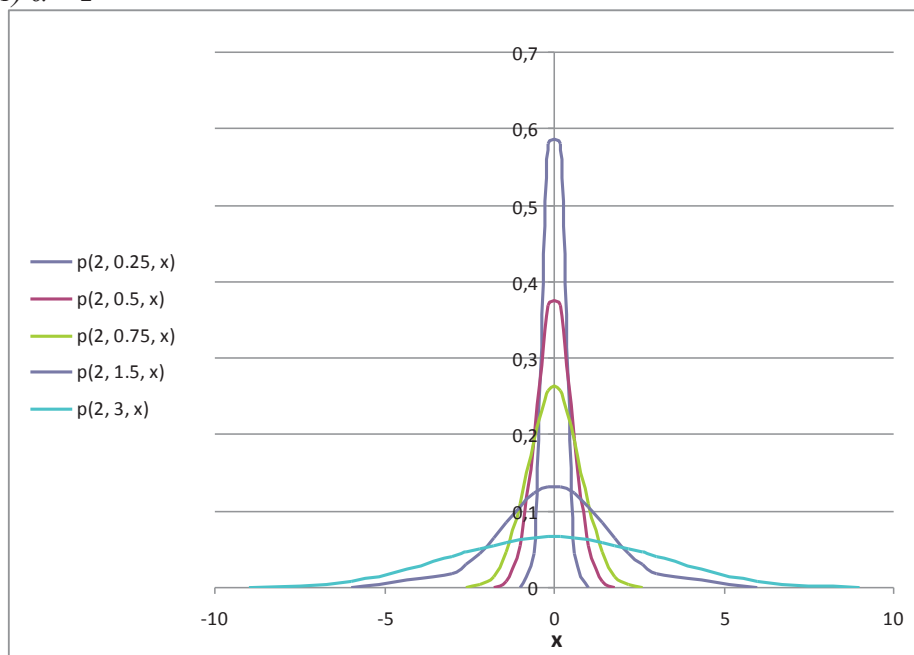
$$F(a, \sigma, \alpha; t) = \frac{1}{2\sigma\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} \int_{-\infty}^t e^{\frac{(x-a)^\alpha}{\alpha\sigma^\alpha}} dx, \quad (1)$$

čia  $t \in \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ ,  $a \in (-\infty, +\infty)$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\alpha \in \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ ,  $\Gamma(x)$  – gama funkcija.

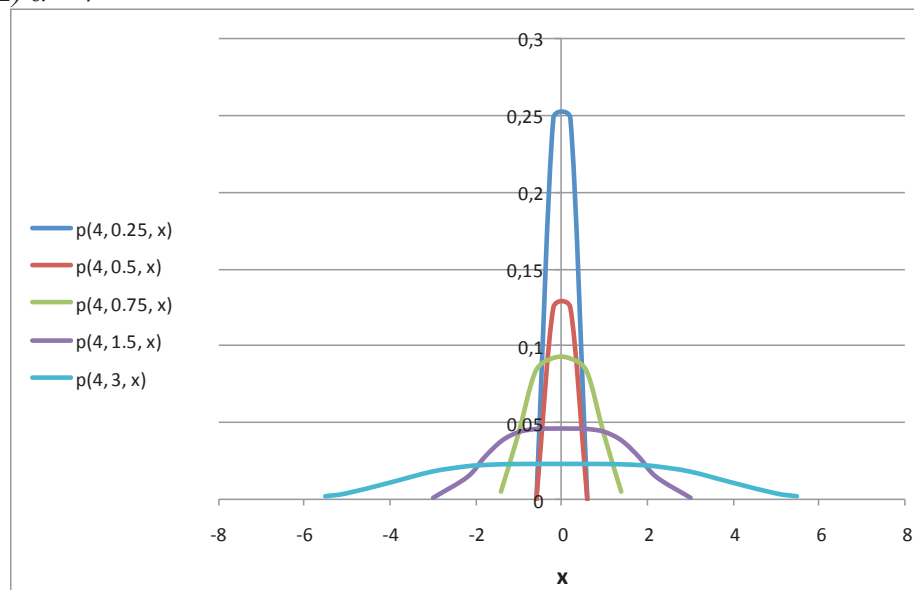
Žymėsime  $X \sim N(a, \sigma, \alpha)$ .

Mūsų praktiniams tikslams pakanka pasinaudoti šio skirstinio tankio grafiku, kurio pavidalas, kai  $\sigma = 0,25; 0,5; 0,75; 1,5; 3$ , pateiktas žemiau.

1)  $\alpha = 2$



2)  $\alpha = 4$



2 pav.  $\alpha$ -normaliojo skirstinio tankio grafikai

Autorė Daiva Lukšienė

Tas skirstinys turi tris parametrus ( $a$ ,  $\sigma$ ,  $\alpha$ ), čia  $a$  yra vidurkio parametras – tankio grafiko simetrijos ašis. Reikiamai parinkę koordinacių pradžių – piliakalnio vidurio simetrijos ašis, eliminuojame  $a$  parametras – jis tampa lygus 0,  $\sigma > 0$ ,  $\alpha \in \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ , kur  $\sigma$  nėra šaknis iš dispersijos, kai parametras  $\alpha$  lygus 4, 6 ir t. t.

Tyrimo metu reikėjo sudaryti  $\alpha$ -normaliojo skirstinio tankio grafiko duomenų bazę – krūvą grafikų, besiskiriančių vienas nuo kito nedideliu parametru reikšmių žingsniu. Tuos grafikus, pasinaudoję

kompiuterinėmis galimybėmis, uždėję ant nuotraukoje esančio piliakalnio profilio gauname  $\alpha$  ir  $\sigma$  parametrus. Kad būtų galima piliakalnio pjūvį aproksimuoti  $\alpha$ -normaliojo skirstinio tankiu, reikia ne tik tinkamai parinkti jo parametrus, bet ir tankio grafiką „padidinti“, nustatant atitinkamą mastelį. Parinkus mastelį 1:20, gaunamos tokios charakteristikos  $h$  ir  $d$ , pagal kurias ieškomi jas atitinkantys piliakalniai; čia  $h$  – aukštis,  $d$  – aikštelės skersmuo (žr. 1 lentelę). Iš grafikų sudarome tokių charakteristikų lentelę:

1 lentelė. *Piliakalnio aukščio ir aikštelės pločio charakteristikos*

$\sigma$	$\alpha = 2$		$\alpha = 4$	
	$h$	$d$	$h$	$d$
0,09	3,75	24	0,03	24
0,1	5,4	24	0,25	24
0,11	6,95	24	0,81	24
0,12	8,29	24	1,7	24
0,13	9,4	24	2,6	24
0,14	10,27	24	3,5	24
0,15	10,93	24	4,2	24
0,16	11,41	24	5,15	24
0,17	11,75	24	5,2	24
0,18	11,95	24	5,23	24
0,19	12,06	24	5,34	24
0,2	12,1	24	5,4	24
0,21	12,07	24	5,34	24
0,22	11,99	24	5,28	24
0,23	11,88	40	5,19	24
0,24	11,75	40	5,08	24
0,25	11,59	40	4,9	24
0,26	11,41	40	4,8	24
0,27	11,23	40	4,7	24
0,28	11,04	40	4,6	24
0,29	10,85	40	4,5	24
0,3	10,65	40	4,4	24
0,35	9,7	56	4	40
0,4	8,8	56	3,2	40
0,45	8	56	3	40
0,5	7,3	72	2,6	56

Autorė Daiva Lukšienė

Pasinaudoję sudaryta parametru duomenų baze ir piliakalnių aprašais, galime palyginti tankio grafi-

kus su piliakalnio vaizdu.



**I periodas (500–0 m. iki Kr.)**

Sadūniškės ( $\sigma = 0,1; \alpha = 2$ )



Kurtuvėnai ( $\sigma = 0,16; \alpha = 4$ )



**3 pav.** I periodo piliakalnio vaizdo palyginimas su tankio grafiku

Autorė Daiva Lukšienė

Pagrindinės I periodo parametrų  $\alpha$  ir  $\sigma$  charakteristikos pateiktos 2 lentelėje.

2 lentelė. *I periodo piliakalnių parametrai  $\alpha$  ir  $\sigma$*

$\alpha$	2	2	2	2	2	2	2	2	4	2	2
$\sigma$	0,1	0,12	0,11	0,11	0,12	0,11	0,11	0,11	0,16	0,09	0,1

Iš čia

a) kai  $\alpha = 2$ , tai  $\sigma \in [0,09; 0,12]$ ; piliakalnių skaičius  $n = 10$ ;

b) kai  $\alpha = 4$ , tai  $\sigma = 0,16; n = 1$ .

**II periodas (0–1000 m. po Kr.)**

Virkininkai ( $\sigma = 0,11; \alpha = 2$ )



Kaukai ( $\sigma = 0,11; \alpha = 2$ )



**4 pav.** II periodo piliakalnio vaizdo palyginimas su tankio grafiku

Autorė Daiva Lukšienė

Pagrindinės II periodo parametru  $\alpha$  ir  $\sigma$  charakteristikos pateiktos 3 lentelėje.

3 lentelė. **II periodo piliakalnių parametrai  $\alpha$  ir  $\sigma$**

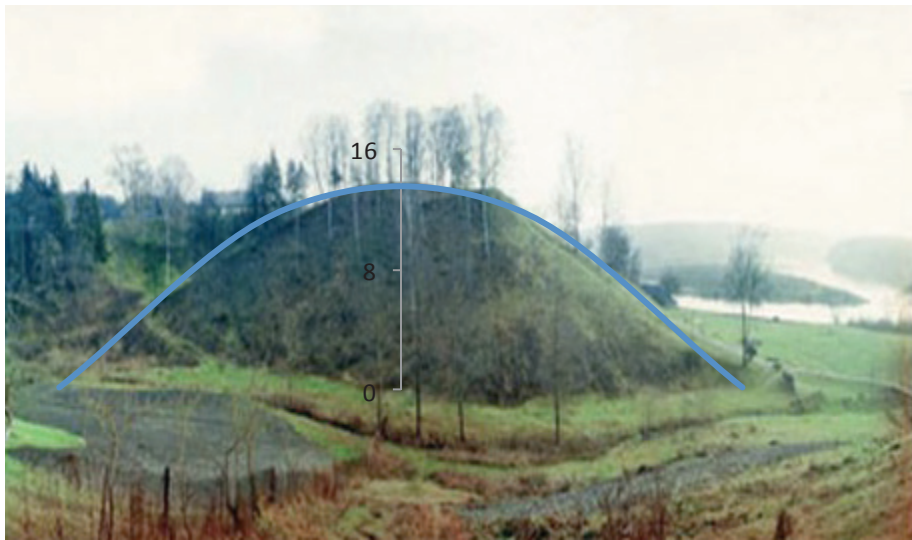
$\alpha$	2	2	2	2	...	2	2	2	2	2
$\sigma$	0,12	0,13	0,12	0,11	...	0,14	0,14	0,1	0,18	0,13

Ištyrę II periodo (0–1000 m. po Kr.) piliakalnius matome, kad duomenys yra pasiskirstę taip:  $\alpha = 2$ ;

$\sigma \in [0,1; 0,18]; n = 21$ .

**III periodas (1000–1500 m. po Kr.)**

Merkinė ( $\sigma = 0,2; \alpha = 2$ )



Kartupėnai ( $\sigma = 0,18; \alpha = 2$ )



**5 pav.** III periodo piliakalnio vaizdo palyginimas su tankio grafiku

Autorė Daiva Lukšienė

4 lentelėje pateikti būdingiausi III periodo piliakalnių parametrai  $\alpha$  ir  $\sigma$ .

4 lentelė. **III periodo piliakalnių parametrai  $\alpha$  ir  $\sigma$**

$\alpha$	2	2	2	2	...	2	2	2	2	2
$\sigma$	0,14	0,13	0,15	0,14	...	0,12	0,11	0,2	0,18	0,13

Ištyrę III periodo (1000–1500 m. po Kr.) piliakalnius matome, kad duomenys pasiskirstę taip:  $\alpha = 2$ ;  $\sigma \in [0,11; 0,2]$ ;  $n = 21$ .

**III dalis. Piliakalnio sukūrimo laikotarpį charakterizuojantys parametrai**

Nors istorinių piliakalnių sukūrimo laikotarpių būdingiausias atitinkamo grafiko parametrų reikšmės



jau radome, tačiau jos gali būti dar labiau sutvarkytos jas sucentruojant empirinio vidurkio atžvilgiu ir su-normuojant šaknies iš dispersijos atžvilgiu, kas įpras-ta matematinėje statistikoje. Tai ir padarysime rem-damiesi visų periodų duomenimis. Teisingumo dėlei reikia paminėti, kad Daiva Lukšienė bakalauro darbe „Statistinis Lietuvos piliakalnių amžiaus įvertinimas“ kiekvieno periodo parametrų reikšmes tyrė norma-lumo požiūriu ir po to rado tų parametrų apytikslius pasikliautinusius parametrus. Pasirodo, tie išsamūs tyrimai nedavė daug naudos, nes duomenys nebuvo labai normalūs, vadinasi, ir atitinkamų pasikliautinų-jų intervalų formulės nedavė laukiamų rezultatų [7]. Visi norintys gali susipažinti su minėtu darbu Šiaulių universiteto bibliotekos baigiamųjų darbų duomenų bazėje. Šiame straipsnyje taikome labai supaprastintą schemą, pagal kurią dauguma tiriamų duomenų pa-tenka į tokį intervalą:

$$(\bar{X} - S; \bar{X} + S).$$

Duomenys, nepatenkantys į šį intervalą, gali būti laikomi atsitiktinėmis paklaidomis. Tačiau net ir tokios formulės visiškai pakanka, kad būtų patikslinti ir pakoreguoti II dalyje gauti rezultatai.

#### I periodas (500–0 m. iki Kr.)

Panaudosime 2 lentelės duomenis. Kadangi  $\alpha$  parametras praktiškai visais laikotarpiais lygus 2, iš-skyrus vieną atvejį, tai jį laikysime pastovų ir lygų 2. Svarbesnis tampa  $\sigma$  parametras. Empiriniai parametras  $\sigma$  vidurkiai ir dispersijos apskaičiuojamos pagal žino-mas formules:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

5 lentelė. *Būdingiausias konkrečių periodų  $\sigma$  parametras reikšmės*

Periodai	Empirinis parametras $\sigma$ vidurkis	$\sigma$ intervalas	Duomenų intervalas
I periodas (500–0 m. iki Kr.)	0,113	$0,095 < \sigma < 0,131$	[0,09; 0,16]
II periodas (0–1000 m. po Kr.)	0,127	$0,106 < \sigma < 0,148$	[0,1; 0,18]
III periodas (1000–1500 m. po Kr.)	0,154	$0,14 < \sigma < 0,168$	[0,11; 0,2]

#### IV dalis. Modelio taikymas

Duomenų bazėje [www.piliakalniai.lt](http://www.piliakalniai.lt) pasiren-kame piliakalnį, kurio tikslus datavimas nėra žino-mas. Tokių piliakalnių duomenų bazėje tik 12, tačiau juos tyrinėti nėra lengva, nes didžioji jų dalis mūsų dienas pasiekė labai apardyti, vietoj jų dabar iškasti karjerai ir t. t.

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Atlikę skaičiavimus gauname:

$$\bar{X} = 0,113, n = 11, S_1 = 0,01794.$$

Vadinasi, pagal formulę

$$\sigma \in (\bar{X} - S_1; \bar{X} + S_1)$$

gauname, kad

$$0,095 < \sigma < 0,131.$$

#### II periodas (0–1000 m. po Kr.)

Remdamiesi 3 lentelės duomenimis gauname:

$$\bar{X} = 0,127, n = 21, S_1 = 0,020771.$$

Iš čia

$$0,106 < \sigma < 0,148.$$

#### III periodas (1000–1500 m. po Kr.)

Remdamiesi 4 lentelės duomenimis analogiš-kai gauname:

$$\bar{X} = 0,154, n = 21, S_1 = 0,01368.$$

Iš čia

$$0,14 < \sigma < 0,168.$$

**Išvada.** Ištyrus 53 piliakalnius buvo nustatyta, kad grafiko parametras  $\alpha$  lygus 2, o  $\sigma$  parametras reikš-mės nusakomos 5 lentelėje.

#### 1. Vainagiai, Kelmės rajonas

- Piliakalnis (Piliukas) įrengtas atskiroje kalvoje, iš visų pusių juosiamoje pelkių.
- Aikštelė ovali, pailga rytų ir vakarų kryptimi, 45x22 m dydžio.
- Šlaitai statūs, 14 m aukščio.
- Piliakalnis datuojamas II tūkstantm. pradžia (?), t. y. istoriniu periodu 1000–1500 m. po Kr.

Kadangi piliakalnio pjūvis aproksimuojamas  $\alpha$ -normaliojo skirstinio tankiu, tinkamai parinkus jo

parametrus  $\alpha$ ,  $\sigma$ , gaunamas toks grafikas (žr. 6 pav.), kai  $\sigma = 0,12$ ;  $\alpha = 2$ ;  $h = 13,9$ ;  $d = 44,5$ .



**6 pav.** Vainagių piliakalnio vaizdo palyginimas su tankio grafiku  
Autorė Daiva Lukšienė

Parametrai su  $\bar{\sigma}$ :

- kai  $\bar{\sigma} = 0,112$ , tai  $h = 12,5$  ir  $d = 44,5$ ;
- kai  $\bar{\sigma} = 0,127$ , tai  $h = 14$  ir  $d = 44,5$ ;
- kai  $\bar{\sigma} = 0,154$ , tai  $h = 18,2$  ir  $d = 44,5$ .

Tiksliausias piliakalnio vaizdo ir tankio funkcijos grafiko derinys gaunamas tada, kai parinktas parametras  $\bar{\sigma} = 0,127$ . Vadinas, pritaikius matematinį modelį, galima daryti išvadą, kad piliakalnis priklauso II periodui (0–1000 m. po Kr.), nors istorikai mano kitaip.

## 2. Gūvainiai, Šilalės rajonas

- Piliakalnis įrengtas Jūros upės kairiajame krante,

jos ir į ją įtekančio bevardžio upeliuko santakoje esančiame kranto kyšulyje.

- 60x40 m dydžio aikštelė pailga pietryčių ir šiaurės vakarų kryptimi, trikampio formos, kampais į šiaurę, vakarus ir pietryčius.
- Šlaitai į Jūrą ir bevardį upelį yra vidutinio statumo, 6–10 m aukščio.
- Piliakalnio chronologija neaiški (I tūkstantm.?), t. y. istorinis periodas 0–1000 m. po Kr.

Kadangi piliakalnio pjūvis aproksimuojamas  $\alpha$ -normaliojo skirstinio tankiu, tinkamai parinkus jo parametrus  $\alpha$ ,  $\sigma$ , gaunamas toks grafikas (žr. 7 pav.), kai  $\sigma = 0,11$ ;  $\alpha = 2$ ;  $h = 10,5$ ;  $d = 40$ .



**7 pav.** Gūvainių piliakalnio vaizdo palyginimas su tankio grafiku  
Autorė Daiva Lukšienė

Parametrai su  $\bar{\sigma}$ :

- kai  $\bar{\sigma} = 0,112$ , tai  $h = 10,5$  ir  $d = 40$ ;
- kai  $\bar{\sigma} = 0,127$ , tai  $h = 15$  ir  $d = 40$ ;
- kai  $\bar{\sigma} = 0,154$ , tai  $h = 18$  ir  $d = 40$ .
- 

Tiksliausias piliakalnio vaizdo ir tankio funkcijos grafiko derinys gaunamas tada, kai parinktas parametras  $\bar{\sigma} = 0,112$ . Vadinasi, pritaikius matematinį modelį, galima daryti išvadą, kad piliakalnis priklausio I periodui (500–0 m. iki Kr.), nors istorikai mano, kad piliakalnis datuojamas vėlesniu periodu.

**Galutinės išvados.** Yra įvairių išlikusių piliakalnių. Dauguma jų rimtai netyrinėti. Archeologai pagal tam tikrus bendrus išvaizdos požymius nusprendžia, kokių istoriniu laikotarpiu tas piliakalnis pastatytas. Tai labai abstraktus ir dažnai neteisingas spėjimo būdas. Šiame straipsnyje siūloma į piliakalnių datavimo problemą pažūrėti matematiškai ir statistiškai. Suderinus piliakalnių duomenis pagal jų pastatymo datą, buvo pasiūlytas grafinis piliakalnio laikotarpio identifikavimo būdas, atsižvelgiant į charakteringas parametrų reikšmes. Tyrimas pasisekė, praktinės lentelės pateiktos, jų taikymas pademonstruotas.

Ateityje pratęsiant pradėtą tyrimą reikėtų sudėlioti piliakalnius pagal formą (balninis, kupstinis ir t. t.) ir nustatyti jų proporcijas piliakalnių duomenų bazėje. Po to į reprezentacinę piliakalnių imties aibę atrinkti piliakalnius, atsižvelgiant į nustatytas proporcijas ir imant piliakalnius iš visų, ne tik grynųjų istorinių laikotarpių. Tai turėtų apsaugoti nuo šiame tyrime gautos paradoksalios situacijos, kada imtyje tik vienas piliakalnis turėjo  $\alpha$  parametras, lygų 4, nors tai turėtų būti būdingiausia balninio tipo piliakalnių (ant kurių nuo II tūkstantm. pradžios stovėjo stiprios medinės pilys) parametro  $\alpha$  reikšmė. Mūsų tyrime gauta parametro  $\alpha$  reikšmė 2, būdinga normaliojo skirstinio tankio grafikui, yra gana dėsninga visos piliakalnių aibės atžvilgiu. Tačiau išsakytos abejonės dėl parametro  $\alpha = 4$  galimos reikšmės labai nulygintiems ir

balniniams viršuje piliakalniams neduoda pagrindo visiškai nusiraminti. Iš kitos pusės, 5 lentelėje pateikti parametro  $\sigma$  reikšmių intervalai, būdingi grynesiems istoriniams laikotarpiams, galuose sutampa su kito gretimo istorinio laikotarpio atitinkamu parametro intervalu, o tai apsunkina piliakalnio sukūrimo amžiaus identifikavimą. Iki galo problemos išspręsti nepavyks, nes visada yra keli šimtmečiai pereinamojo laikotarpio iš vieno istorinio laikmečio į kitą. Tačiau mąstyti, kaip tuos intervalus susiaurinti ir panaikinti parametro reikšmių sutapimą, reikėtų.

## Literatūra

1. Buračas B., 2011, *Lietuvos piliakalniai*. Vilnius: Lietuvos nacionalinis muziejus.
2. *Dvimatės skirstinys*. Prieiga per internetą: <<http://personal.kenyon.edu/hartlaub/MellonProject/Bivariate2.html>>. Žiūrėta 2015-04-10.
3. Kanišauskas V., 1999,  $\alpha$ -normalusis skirstinys, *Lietuvos matematikų draugijos mokslo darbai: Specialus „Lietuvos matematikos rinkinio“ priedas*. T. 3, Vilnius. P. 132–135.
4. Kanišauskas V., 2013, Pilių gynybinės sistemos problema XI–XV a. Šiaurės Lietuvoje. *Bakalauro darbas*. Šiaulių universitetas.
5. Kulikauskas P., 1982, *Užnemunės piliakalniai I–XII a.* Vilnius: Mokslo.
6. Lietuvos piliakalniai. Atlasas. T. I–III. Vilnius, 2005. Prieiga per internetą: <<http://www.piliakalniai.lt/index.php>>. Žiūrėta 2013-02-23.
7. Lukšienė D., 2015, Statistinis Lietuvos piliakalnių amžiaus įvertinimas. *Bakalauro darbas*. Šiaulių universitetas.
8. Simniškytė A., 2005, Sėlos kraštas VI/VII–XIII/XIV amžiais: teritorinė struktūra ir hierarchija. *Lietuvos archeologija*. T. 27. P. 29–48.
9. Tarasenko P., 1956, *Lietuvos piliakalniai*. Vilnius: Politinės ir mokslinės literatūros leidykla.
10. Zabiela G., 1995, *Lietuvos medinės pilys*. Vilnius: Die medis.
11. Zabiela G., 2005, Piliakalnio vieta ir struktūra. Prieiga per internetą: <[http://www.piliakalniai.lt/apie\\_piliakalnius.php](http://www.piliakalniai.lt/apie_piliakalnius.php)>. Žiūrėta 2015-04-11.

## Summary

## MATHEMATICAL ESTIMATION OF THE AGE OF MOUNDS IN LITHUANIA

*D. Lukšienė, V. Kanišauskas*

The aim of this paper is to develop a mathematical model for estimation of the age of mounds in Lithuania. On the grounds of archaeological literature it was found that mounds are of six periods. This study considers only these mounds that date back to a certain historical period. Using mathematical statistics and the  $\alpha$ -normal distribution density function the database for the obtained parameters  $\alpha$  and  $\sigma$  was formed. Having obtained empirical characteristics of these parameters the height and width of mounds of each period were found. Using the database of these parameters, the age of mounds can be easily determined, i.e. they can be attributed to some chronological period.

**Keywords:**  $\alpha$ -normal distribution, density function, mound.

Santrauka

LIETUVOS PILIAKALNIŲ AMŽIAUS MATEMATINIS NUSTATYMAS

*D. Lukšienė, V. Kanišauskas*

Darbo *tikslas* yra sudaryti Lietuvos piliakalnių amžių įvertinanti matematinį modelį.

Pritaikius archeologines žinias apie piliakalnius, jie buvo suskirstyti į šešis periodus. Straipsnyje nagrinėjami tik tie periodai, kuriems priskiriami piliakalniai yra datuojami tik vienu tam tikru istoriniu laikotarpiu. Pritaikius  $\alpha$ -normaliojo skirstinio tankio funkciją, buvo rasti parametrai  $\alpha$  ir  $\sigma$  bei sudaryta tų parametru duomenų bazė. Radus empirines šių parametru charakteristikas, buvo sudaryti kiekvienam periodui būdingo idealaus piliakalnio aukščio ir aikštelės pločio parametrai. Pasinaudojus sudarytomis parametru duomenų bazėmis paaiškėjo, kad galima nesudėtingai nustatyti Lietuvos piliakalnių amžių, t. y. priklausymą konkrečiam chronologiniam periodui.

**Prasminiai žodžiai:**  $\alpha$ -normalusis skirstinys, tankio funkcija, piliakalnis.

Įteikta 2015-08-25

Priimta 2015-11-30