

**VILNIAUS UNIVERSITETAS**  
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS  
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Magistro baigiamasis darbas

**Investavimo horizonto įtaka daugelio aktyvų  
klasių portfelio optimaliai struktūrai**

The Influence of the Investment Horizon on the Optimal  
Structure of a Multi-Asset Portfolio

**Ignas Gasparavičius**

Darbo vadovas      prof. dr. (HP) Jonas Šiaulys

Darbo konsultantas      Romualdas Zovė,  
Lietuvos bankas

Vilnius 2023

# Investavimo horizonto įtaka daugelio aktyvų klasių portfelio optimaliai struktūrai

Ignas Gasparavičius

## SANTRAUKA

Šio darbo tikslas - sukonstruoti universalų investicijų paskirstymo modelį su integruotais makroekonominiais rodikliais (BVP ir infliacijos lūkesčiai), skirtą analizuoti skirtingus investavimo horizontus. Naudojantis modeliu, konstruojami investiciniai portfeliai tiek Markowitz vidurkio-dispersijos metodu, tiek rizikos pariteto būdu bei analizuojami dėsningumai skirtingu investavimo horizontu (nuo 1 m. iki 10 m.). Analizėje yra naudojami JAV, Vokietijos, Japonijos, JK, Kanados VVP ir akcijų rinkų duomenys bei USD, JPY, GBP, CAD valiutų kursai prieš eurą. Tyrimo metu pastebėta, jog ilguoju investavimo laikotarpiu geriau turėti labiau diversifikuotą portfelį, kuris yra sudaromas taikant rizikos pariteto metodą, o trumpuoju laikotarpiu – portfelį, siekiantį gražos, o ne diversifikacijos.

**Raktiniai žodžiai:** rizikos paritetas, vidurkio-dispersijos analizė, ilgalaikių gražų prognozių modelis, Gibbso imčių metodas, minimalaus posūkio diversifikacijos rodiklis.

# The Influence of the Investment Horizon on the Optimal Structure of a Multi-Asset Portfolio

Ignas Gasparavičius

## ABSTRACT

The aim of this thesis is to construct a universal investment allocation model with integrated macroeconomic indicators (GDP and inflation expectations) for investment horizon analysis. Markowitz mean-variance and risk parity methods are applied in tandem with the investment allocation model to build an investment portfolio. With these portfolios regular patterns can be spotted over different investment horizons (1 to 10 years). Model analysis uses US, German, Japanese, UK, Canadian stock market data along with USD, JPY, GBP, and CAD exchange rates against EUR. This study concludes that in the long-term, regarding risk parity, it is better to have a more diversified portfolio as opposed to having a portfolio that seeks returns rather than diversification, as in short-term.

**Key words:** risk parity, mean-variance analysis, Gibbs sampler, long-term asset allocation model, minimum-torsion bets.

# Turinys

<b>1</b>	<b>Įvadas</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Teorinė dalis</b>	<b>7</b>
2.1	Meucci 10 žingsnių . . . . .	7
2.2	Tayloro taisyklė . . . . .	9
2.3	Trumpas įvadas į Bajesinę analizę bei Gibbso imčių metodą . . . . .	10
2.3.1	Tiesinės regresijos modelio vertinimas taikant Bajeso metodą . . . . .	11
2.3.2	Gibbso imčių metodo pavyzdys . . . . .	17
2.4	Būsenos erdvės modelis . . . . .	19
2.5	Infliacija . . . . .	20
2.6	BVP lūkesčiai . . . . .	24
2.7	Palūkanų normų kreivės parametrizacija . . . . .	25
2.7.1	DNS faktoriai . . . . .	26
2.7.2	RDNS faktoriai . . . . .	28
2.7.3	Šešėlinė norma (angl. <i>shadow rate</i> ) . . . . .	30
2.8	Paritetinė obligacija . . . . .	34
2.9	Akcijų modelis . . . . .	34
2.9.1	DDM modelis . . . . .	35
2.10	Valiutų kursų modelis . . . . .	36
2.10.1	HL modelis . . . . .	37
2.11	Daugiamačių laiko eilučių analizė . . . . .	40
2.11.1	Vektorinė autoregresija . . . . .	40
2.11.2	Granger priežastingumo testas . . . . .	42
2.11.3	Impulso atsako analizė . . . . .	44

2.12	Pseudo investicijų grąžos . . . . .	45
2.13	Investicinio portfelio optimizavimas . . . . .	47
2.13.1	Markowitz vidurkio-dispersijos analizė . . . . .	47
2.13.2	Rizikos pariteto (RP) analizė . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Praktinė dalis</b>	<b>55</b>
3.1	Nagrinėjami duomenys . . . . .	55
3.2	Portfelių analizė . . . . .	56
3.2.1	Rizikos pariteto prasme . . . . .	56
3.2.2	Vidurkio-dispersijos prasme . . . . .	61
3.3	Rizikos pariteto bei Markowitz metodų palyginimas . . . . .	62
3.3.1	Pseudo investicijų grąžų koreliacijos bei standartiniai nuokrypiai	63
<b>4</b>	<b>Išvados</b>	<b>65</b>
	Literatūra . . . . .	67
	<b>Priedai</b>	<b>72</b>
A	Grafikai . . . . .	72
B	Lentelės . . . . .	104

# 1 skyrius

## Įvadas

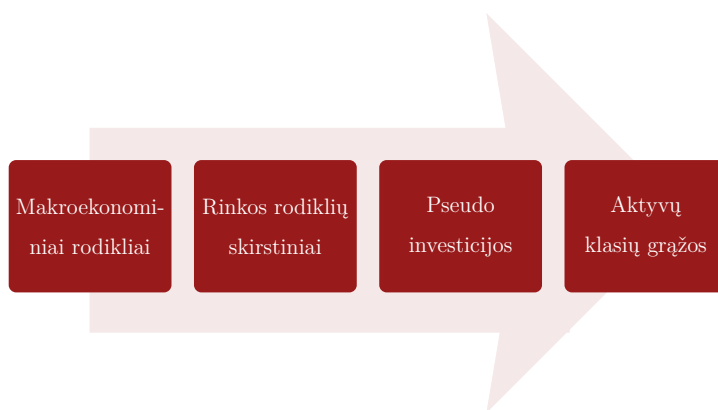
Šio darbo idėja atsirado dirbant Lietuvos banke (LB), kur yra naudojamas vienu metų horizonto rizikos pariteto modelis, kuris atsižvelgia į daugelį faktorių (šešėlines normas, palūkanų normų konvergavimą į išankstines palūkanų normas vienu metų horizontu ir t.t.). Įsigilinus į LB veiklą<sup>1</sup>, galima pastebėti, jog investavimo horizontas nėra 1 metai, o 3. Akivaizdu, jog Lietuvos centrinis bankas (valstybinė institucija) po 3 metų nenustos gyvuoti, tai gal būtų prasminga pasirinkti ilgesnį investavimo horizontą? Šiame darbe yra aprašoma analizė (tyrimas) 2, 3, 5 bei 10 metų horizontų atveju. Norint atlikti šią analizę reikia apibrėžti skirtingų aktyvių klasių gražų sąryšius tam tikru nagrinėjamu laikotarpiu, t.y. sukonstruoti ilgalaikių gražų prognozių modelį akcijų, obligacijų bei valiutų kursų atveju. Viena iš kertinių šio darbo dalių yra ta, jog nėra tikslios metodikos, kaip tokį modelį konstruoti. Kiekviena finansinė institucija, nagrinėjanti ilgo horizonto gražų prognozes, apibrėžia skirtingą metodiką. Didžiausia problema nagrinėjant ilgalaikius modelius, jog nėra pakankamai nepersidengiančių duomenų modeliavimui. Dėl šios priežasties reikia imti duomenis trumpam horizontui ir ieškoti priemonių, kaip iš jų sukonstruoti gražas ilgam horizontui. Žinoma, atliekant šią užduotį yra neišvengiama, jog bus daroma tam tikrų prielaidų. Pavyzdžiui, Tarptautinių atsiskaitymų bankas (BIS) inkorporuoja BVP atotrūkio (angl. *GDP output gap*) prognozes skirtingų vyriausybių vertybinių popierių palūkanų normų prognozėms konstruoti, o šiame darbe naudojamos *Consensus Economics* rinktos ekonomistų BVP prognozės po 12 mėn. ir t.t. Vizuali modelio idėja matoma 1.1 paveikslėlyje.

---

<sup>1</sup>Lietuvos bankas naudoja 3 metų horizontą, nes LB įstatyme yra numatyta, jog bankas perveda į Lietuvos Respublikos (LR) biudžetą 3 metų pelno vidurkį.

Kita šio darbo dalis - pritaikyti nagrinėjamą modelį optimizuojant įvairius investicinius portfelius, sudarytus iš draustų arba/bei nedraustų aktyvų rizikos pariteto prasme bei palyginti gautus rezultatus (riziką, gražą, aktyvų diversifikaciją ...) su klasikinio (Markowitz vidurkio-dispersijos) metodo rezultatais.

Taigi, šį darbą sudaro dvi pagrindinės dalys - ilgalaikio investicijų paskirstymo modelio konstravimas inkorporuojant makroekonominius rodiklius bei investicinių portfelių konstravimas remiantis gautu modeliu. Teorinėje dalyje yra pateikiama įvairi informacija, susijusi su šiuo tiriamuoju darbu: Meucci 10-ties žingsnių principai, kuriais naudojantis yra konstruojamas investicijų paskirstymo modeliavimo procesas, Tayloro taisyklės idėja, kuri netiesiogiai yra integruojama į VAR(2) modelį, tam tikras įvadas į Bajeso metodiką, jos trūkumus bei Gibbso imčių metodą, taikomą nagrinėjant infliacijos tęstinumą (būsenas), makroekonominių kintamųjų bei naudojamų duomenų aprašas, palūkanų normų parametrizacija, išreikšta Nelson-Siegel faktoriais, bei tam tikrų problemų sprendimas inkorporuojant šešėlines normas, trijų aktyvų (obligacijų, akcijų bei valiutų kursų) gražų skaičiavimo bei modelių konstravimo ypatumai, daugiamačių laiko eilučių teorijos pagrindas bei konstruojamo antros eilės vektorinės autoregresijos (VAR(2)) modelio detalės, pseudo investicijų idėja bei portfelio optimizavimo būdai, kurie yra taikomi norint iširti investavimo horizonto didinimo tendencijas. Praktinėje dalyje pristatomi galutiniai duomenys, taikyti konstruojant VAR(2) modelį, plačiau vystoma optimizavimo bei gautų rezultatų analizė, aprašomi matomi dėsningumai skirtingų optimizuotų modelių atveju. Gautų rezultatų lentelės bei grafikai pateikiami skyrelyje „Priedai“, o išvadų skyriuje pateikiamos pagrindinės šio darbo išvados bei rekomendacijos tolimesnei darbo eigai.



1.1 pav.: Konstruojamo modelio schema.

## 2 skyrius

### Teorinė dalis

#### 2.1 Meucci 10 žingsnių

Šių dienų globali finansų rinka yra sudaryta iš įvairių dalyvių, skirstomų į dvi kategorijas: pirkimo pusę (angl. *buy-side*) bei pardavimo pusę (angl. *sell-side*). Pirmajam tipui dažnai yra priskiriamos kompanijos/įstaigos, kurios yra laikomos galutiniais vartotojais arba fiziniais finansinių priemonių, kuriomis prekiaujama arba investuojama, turėtojais. Tuo tarpu kitai kategorijai yra priskiriamos institucijos, kurios palengvina šią prekybą ir investavimą. Dažnai pirkimo pusei yra priskiriami pensijų fondai, investicijų valdytojai (angl. *investment managers*) bei investiciniai fondai (angl. *mutual funds*), apribotos rizikos fondai (angl. *hedge funds*)... Tuo tarpu pardavimo pusei yra priskiriami mažmeniniai bei investiciniai bankai (angl. *retail, investment banks*), kotiruotojai (angl. *market makers*), įvairaus tipo brokeriai ir t.t. (M. Brose bei kiti (2014)). Žinoma, kiekvieną iš šių finansų rinkos dalyvių galima toliau skirstyti pagal užsibrėžtą kapitalą, investavimo horizontą, aktyvų klases, kurias rinkos žaidėjas gali pirkti ar parduoti... Pavyzdžiui, neseniai pensijų fondai dažnai investuodavo tik į akcijas bei obligacijas, taikydami taip vadinamą *liability-matching* strategiją, kurios idėja yra suderinti būsimą finansinio turto pardavimą ir gaunamų pajamų srautus su numatomomis išlaidomis ateityje. Tuo tarpu šiandien pensijų fondai investuoja į įvairias turto klases, kaip nekilnojamą turtą, vertybinius popierius ar auksą. Esant tiek skirtumų, didžiosios dalies anksčiau išvardytų rinkos žaidėjų tikslas vis tiek išlieka tas pats - tinkamai administruoti bei modeliuoti savo investicijas atsižvelgiant į turimus apribojimus bei numanomus rinkos lūkesčius



tam tikram investiciniam horizontui. Kitaip tariant, teisingai modeliuoti ir valdyti galimo portfelio pelno bei nuostolių (angl. *profit and loss*; žym. P&L) tikimybinį skirstinį. Vienas iš būdų norint tai įgyvendinti yra remtis A. Meucci (2011) apibrėžtu dešimties žingsnių planu:

1. Turimų duomenų apdorojimas:

- (a) **Rizikos šaltinių identifikavimas.** Nagrinėjamiems aktyvams apibrėžiami šie rizikos šaltiniai: akcijų indeksams (toliau - akcijos) - dividendų augimas bei akcijų pajamingumas, valiutų kursams - logaritmuotas kursas, obligacijoms - palūkanų normos.
- (b) **Invariantų paieška.** Apsibrėžus rizikos šaltinius, jiems yra taikomi pasirinkti modeliai, kuriais gaunami invariantai (paklaidos).
- (c) **Daugiamačio paklaidų skirstinio nustatymas.** Turint praeities stebėjimus norima ištirti, kokį skirstinį atitinka gautos paklaidos.
- (d) **Projektavimas į ateitį.** Naudojantis sukonstruotu modeliu bei žinant modelio paklaidų skirstinį, projektuojamos rizikos šaltinių reikšmės tam tikram horizontui.
- (e) **Aktyvų įkainojimas.** Sugeneravus rizikos šaltinių prognozes, jos yra perverčiamos į aktyvų kainų prognozes.

2. Rizikos valdymas:

- (a) **Portfelio agregacija.** Įvertinti galimų portfelių vertes.
- (b) **Vertinimo kriterijai.** Apibrėžiami portfelio vertinimo kriterijai bei tam tikri apribojimai.
- (c) **Atribucija / portfelio našumas (angl. *attribution*).** Šiame žingsnyje yra vykdoma projektuojamo portfelio tiesinė dekompozicija, kurios metu yra išskiriami tiek rizikos šaltiniai, tiek portfelio grąžos.

3. Portfelio valdymas:

- (a) **Portfelio parinkimas.** Parenkamas optimalus portfelis, atitinkantis išsikeltus lūkesčius bei apribojimus.
- (b) **Įgyvendinimas.** Šiame žingsnyje yra siekiama įgyvendinti modelio pateiktus investavimo pasiūlymus. Žinoma, kiekvienas investuotojas prieš

tai privalo atsižvelgti į įvairius aspektus, kurie gali nulemti modelio realizaciją rinkoje: prekybos kaštus, likvidumo klausimą, kredito bei rinkos rizikas ir t.t.

## 2.2 Tayloro taisyklė

Pinigų politika – tai centrinių bankų, pavyzdžiui, Federalinio rezervų sistemos (angl. *Federal Reserve System*; žym. FED) ar Europos centrinio banko (angl. *European Central Bank*; žym. ECB), priimami sprendimai, kuriais daroma įtaka apyvartoje cirkuliuojančių pinigų kainai ir kiekiui. Paprasčiausias būdas įsivaizduoti, kaip veikia pinigų politika, yra federalinė fondų palūkanų norma<sup>1</sup> (angl. *federal funds rate*). FED gali pakeisti šią normą keisdama pinigų pasiūlą rinkoje. Pavyzdžiui, kai Federalinės rezervų sistemos nariai yra susirūpinę, jog infliacija yra aukšto lygio, jie nustato aukštesnę federalinių fondų normą. Tuo tarpu, kai ekonomika yra silpna arba infliacija maža, ekonominei veiklai skatinti nustatomas mažesnis tarifas. Tada kyla klausimas: kaip centriniai bankai žino, kokios turėtų būti šios nominalios palūkanų normos?

Tam yra taikoma taisyklėmis pagrįsta pinigų politika (angl. *rules-based monetary policy*). Pagal ją FED į ekonomikos pokyčius reaguoja nuspėjamai. Tokios pinigų politikos pavyzdys būtų J. B. Taylor (1993) sukurta taisyklė<sup>2</sup>, kurią centriniai bankai naudoja koreguodami palūkanų normas, atsižvelgdami į besikeičiančias ekonomines sąlygas:

$$i_t = \pi_t + r_t^* + a_\pi(\pi_t - \pi_t^*) + a_y(y_t - y_t^*), \quad (2.1)$$

čia  $i_t$  - nominali palūkanų norma,  $r_t^*$  - natūrali (pusiausvyros) palūkanų norma,  $\pi_t$  - metinis infliacijos lygis, apskaičiuotas taikant BVP defliatorių,  $\pi_t^*$  - siektinas centrinio banko infliacijos lygis,  $y_t$  - faktinis metinis realaus BVP pokytis,  $y_t^*$  - po-

---

<sup>1</sup>*Federalinė fondų palūkanų norma* - tai palūkanų norma, kurią nustato Federalinis laisvosios rinkos komitetas (angl. *Federal Open Market Committee*; žym. FOMC). Ši norma yra skirta vienos paros paskoloms, kurias suteikia vienas Federalinio rezervo sistemai priklausantis bankas kitam.

<sup>2</sup>Svarbu atkreipti dėmesį, jog ši taisyklė buvo sukurta 1993 metais, kai nedarbo problema to laikotarpio Jungtinėse Amerikos Valstijose nebuvo pastebimai aktuali dėl ekonomikoje vyravusio didelio darbo produktyvumo. Kadangi šių dienų gyvenime nedarbo problema tapo aktualesnė, Tayloro taisyklė buvo modifikuojama. Vienas iš pavyzdžių yra Blanchard (2007) modifikuota lygtis, kurioje gamybos apimties atotrūkis yra keičiamas į nedarbo lygio bei natūralaus nedarbo lygio skirtumą.

tencialus metinis realus BVP pokytis bei koeficientai  $a_\pi > 0, a_y > 0$ . Šių parametru reikšmės gali skirtis priklausomai nuo nagrinėjamos valstybės, kadangi užsibrėžti pinigų politikos tikslai ar šalies vykdoma monetarinė politika gali skirtis. Pavyzdžiui, Federalinių rezervų banko sistemos pinigų politikos atveju J. B. Taylor nustatė optimalias  $a_\pi$  bei  $a_y$  reikšmes, t.y. abiejų parametru reikšmės yra lygios 0,5 (Osterholm (2005)). Tuo tarpu nagrinėjant ECB palūkanų normas buvo nustatyta, jog  $a_\pi = 1.5$ , o  $a_y = 0.5$ . Tai galima paaiškinti tuo, jog ECB norėdamas pasiekti tvarų ekonomikos augimą didelę dalį dėmesio skiria kainų stabilumui. Tuo tarpu FED turi dvigubą mandata, kuriuo siekiama kainų stabilumo bei maksimalaus žmonių įdarbinimo (kitaip nei ECB atveju, kur pilno užimtumo nėra numatyta).

Svarbu atkreipti dėmesį, jog ši taisyklė netiesiogiai yra integruojama į šiame darbe analizuojamus kintamuosius, t.y. ją galima pastebėti „Daugiamačių laiko eilučių analizė“ skyrelyje pateiktoje (2.64) lygtyje. Be to, skaitytojo patogumo dėlei šiame darbe pateikiamas istorinės palūkanų normos pavyzdys (2 pav.) JAV atveju.

## 2.3 Trumpas įvadas į Bajesinę analizę bei Gibbso imčių metodą

Šiame skyrelyje, remiantis Kroese ir Chan (2014), Kim ir Nelson (1999) bei Koop (2003) darbais, pateikiamos tiesinės regresijos modelio vertinimo detalės taikant tiek Bajeso metodą, tiek Gibbso imčių metodą (angl. *Gibbs sampling*). Nors tiesinės regresijos modelis yra ypač paprastas atvejis, Gibbso metodo taikymas šiuo atveju vadovaujasi tais pačiais principais, kaip ir pritaikant šį būdą sudėtingesniems modeliams, todėl tai yra naudingas atspirties taškas norint suprasti metodo esmę. Šiame darbe (kaip bus matoma kituose skyriuose) Gibbso imčių metodas yra taikomas ieškant infliacijos nuonešio<sup>3</sup> (angl. *trend*), t.y. nagrinėjant nestebimų komponentų stochastinio kintamumo modelį (angl. *unobserved component stochastic volatility model*; žym. UCSV).

---

<sup>3</sup>Laiko eilutės stebėjimų ilgalaikis kitimo pobūdis yra vadinamas laiko eilutės kitimo tendencija. Dažnai ši tendencija yra išreiškiama tam tikra matematine funkcija, kuri vadinama nuonešiu. Šiame darbe žodis *nuonešis*, pateikiamas Jono Kubiliaus „Matematikos terminų žodyne“, patogumo dėlei bus keičiamas žodžiais *trendas, tendencija, tęstinumas*.

### 2.3.1 Tiesinės regresijos modelio vertinimas taikant Bajeso metodą

Tegul tiesinės regresijos modelis yra apibrėžiamas šia išraiška:

$$y_t = x_t B + v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (2.2)$$

kur  $y_t$  yra  $T \times 1$  matrica, sudaryta iš priklausomųjų kintamųjų<sup>4</sup>,  $x_t$  yra  $T \times K$  matrica, kurios rangas (angl. *rank*) yra lygus  $K$  bei sudaryta iš fiksuoto regresorių skaičiaus (angl. *regressors*), t.y. sudaryta iš nepriklausomų kintamųjų ( $x_1, \dots, x_K$ ). Nagrinėjant šį modelį didelio dėmesio sulaukia koeficientų vektoriaus  $B$  bei liekamųjų paklaidų (angl. *error term*) dispersijos  $\sigma^2$  vertinimas.

Klasikinis būdas yra užrašyti šio modelio tikėtinumo funkciją (angl. *likelihood function*)

$$L(y_t | B, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{T}{2}} \exp\left(-\frac{(y_t - x_t B)'(y_t - x_t B)}{2\sigma^2}\right) \quad (2.3)$$

ir ją maksimizuoti taip gaunant  $\hat{B}$  bei  $\hat{\sigma}^2$  įverčius arba taikyti mažiausių kvadratų metodą (angl. *ordinary least squares*; žym. OLS), t.y.  $\hat{B}_{OLS} = (x_t' x_t)^{-1} (x_t' y_t)$  bei  $\hat{\sigma}_{OLS}^2 = \frac{v_t' v_t}{T-K}$ . Svarbu atkreipti dėmesį, jog klasikiniu būdu modelio parametru vertinimas yra grįstas turima informacija. Tuo tarpu Bajeso analizė leidžia tyrėjui inkorporuoti išankstinę nuomonę apie kintamuosius  $B$  ir  $\sigma^2$  į parametru vertinimo procesą. Tokiu atveju nagrinėjant (2.2) lygtį iš Bajesinės analizės pusės yra atliekami šie žingsniai:

- Pirmiausia yra suformuojama išankstinė nuomonė apie kintamuosius, kuriuos norima įvertinti. Tokia nuomonė apie  $B$  ir  $\sigma^2$  atspindi tyrėjo turimą informaciją, o ne gautą nagrinėjant  $y_t$  bei  $x_t$ . Dažnai tai būna informacija, kuri yra gaunama atliekant kitus tyrimus, kurių metu yra taikomi kitokie duomenys. Svarbiausia dalis yra ta, jog šie įsitikinimai yra išreikšti tikimybinio skirstinio (angl. *probability distribution*) pavidalu, kuris yra vadinamas aprioriniu skirstiniu (angl. *prior distribution*).
- Tyrėjas surenka informaciją apie  $y_t$  bei  $x_t$  ir užrašo modelio tikėtinumo funkciją - (2.3) lygtis.

---

<sup>4</sup>Remiantis J. Kubiliaus „Matematikos terminų žodynu“ *dependent variable* yra verčiamas kaip *priklausomasis kintamasis*.

- Tyrėjas atnaujina iš anksto apibrėžtus įsitikinimus apie modelio parametrus remdamasis duomenų informacija. Kitaip tariant, yra apjungiamas apriorinį skirstinį apibūdinanti tankio funkcija  $g(B, \sigma^2)$  bei tikėtinumo funkcija  $L(y_t | B, \sigma^2)$  ir gaunama aposteriorinį skirstinį (angl. *posterior distribution*) apibūdinanti tankio funkcija  $h(B, \sigma^2 | y_t)$ .

Ši tankio funkcija yra apibūdinama Bajeso teorema:

$$h(B, \sigma^2 | y_t) = \frac{L(y_t | B, \sigma^2) \times g(B, \sigma^2)}{L(y)}, \quad (2.4)$$

čia  $L(y)$  - marginalinis tikėtinumas (angl. *marginal likelihood*). Kadangi vardiklyje esantis narys neturi jokio operacinio reikšmingumo (angl. *operational significance*), aposteriorinio skirstinio tankio funkciją galima užrašyti ir taip:

$$H(B, \sigma^2 | y_t) \propto L(y_t | B, \sigma^2) \times g(B, \sigma^2). \quad (2.5)$$

Bajeso statistikoje apriorinio skirstinio parinkimas gali būti problematiškas. Iš principo, norint gauti aposteriorinio skirstinio tikėtinumo funkciją, galima tikėtinumo funkciją sujungti su bet kokia funkcine išraiška įgyjančiu aprioriniu skirstiniu. Žinoma, tai nereiškia, jog skirstinys yra parinktas tinkamai. Pavyzdžiui, normaliojo skirstinio tankio funkcija, kaip bus matoma toliau, nėra tinkama nagrinėjant  $\sigma^2$ , nes dispersija negali įgyti neigiamų reikšmių. Tarp daugelio skirtingų tankių, kurie gali pagrįstai atspindėti iš anksto numanomą informaciją, tam tikros tankio funkcijos gali būti lengviau sujungiamos su tikėtinumo funkcija nei kitos. Pavyzdžiui, natūralusis jungtinis aprioriškumas<sup>5</sup> (angl. *natural conjugate prior*). Kai toks aprioriškumas yra sujungiamas su tikėtinumo funkcija, aposteriorinis tankis įgyja tokią pačią formą kaip ir apriorinis tankis. Šiame poskyryje yra nagrinėjami trys scenarijai, kuriuose norima gauti aposteriorinį kintamųjų skirstinį bei yra naudojami natūralūs jungtiniai aprioriniai skirstiniai.

### Aposteriorinis $B$ skirstinys, kai $\sigma^2$ yra žinoma

Tegul  $B$  sąlyginis apriorinis skirstinys yra apibrėžtas daugiamačiu normaliuoju skirstiniu (angl. *multivariate normal distribution*):

$$B | \sigma^2 \sim \mathcal{N}(B_0, \Sigma_0),$$

---

<sup>5</sup>Šis termino *natural conjugate prior* vertimas yra pateikiamas A. Buračo „Statistikos terminai“ žodyne.

kur  $B_0$  bei  $\Sigma_0$  yra žinomi. Tada apriorinį tankį galima užrašyti šiuo pavidalu:

$$\begin{aligned} g(B | \sigma^2) &= (2\pi)^{-\frac{K}{2}} |\Sigma_0| \exp\left(-\frac{1}{2}(B - B_0)' \Sigma_0^{-1} (B - B_0)\right) \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{2}(B - B_0)' \Sigma_0^{-1} (B - B_0)\right), \end{aligned}$$

kur  $(2\pi)^{-\frac{K}{2}} |\Sigma_0|$  yra žinoma konstanta. Taip pat galima apibrėžti ir tikėtinumo funkciją:

$$\begin{aligned} L(y_t | \sigma^2, B) &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{T}{2}} \exp\left(-\frac{(y_t - x_t B)'(y_t - x_t B)}{2\sigma^2}\right) \\ &\propto \exp\left(-\frac{(y_t - x_t B)'(y_t - x_t B)}{2\sigma^2}\right), \end{aligned}$$

kur  $(2\pi\sigma^2)^{-\frac{T}{2}}$  yra žinoma konstanta. Apjungiant apriorinį tankį, kuris atspindi imtimi negrįstą informaciją, ir tikėtinumo funkciją, kuri apibendrina turimos imties informaciją, bei remiantis (2.5) lygtimi gaunamas aposteriorinis  $B$  tankis:

$$h(B | \sigma^2, y_t) \propto \exp\left(-\frac{(B - B_0)' \Sigma_0^{-1} (B - B_0)}{2} - \frac{(y_t - x_t B)'(y_t - x_t B)}{2\sigma^2}\right). \quad (2.6)$$

Svarbu atkreipti dėmesį, jog, parinkus normaliojo skirstinio tankio funkciją kintamajam  $B$ , aposteriorinis tankis taip pat yra normaliojo skirstinio formos. Taigi, normaliojo skirstinio tankio funkcija yra natūralusis jungtinis apioriškumas. Hamilton (1994) bei Koop (2003) įrodo, jog  $B$  aposteriorinis skirstinys yra normalusis skirstinys, užrašomas šia išraiška:

$$B | \sigma^2, y_t \sim \mathcal{N}(B_1, \Sigma_1),$$

kur

$$B_1 = \left(\Sigma_0^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} x_t' x_t\right)^{-1} \left(\Sigma_0^{-1} B_0 + \frac{1}{\sigma^2} x_t' y_t\right), \quad (2.7)$$

$$\Sigma_1 = \left(\Sigma_0^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} x_t' x_t\right)^{-1}. \quad (2.8)$$

### Aposteriorinis $\sigma^2$ skirstinys, kai $B$ yra žinomas

Šiuo atveju (kaip buvo minima anksčiau šiame skyrelyje)  $\sigma^2$  natūralusis jungtinis apioriškumas yra atvirkštinis gama (angl. *inverse-gamma*) skirstinys.

**Pastaba.** Tegul  $v_t \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \frac{1}{\theta})$ ,  $t = 1, \dots, T$ . Tuomet  $W = \sum_{t=1}^T v_t^2$  yra pasiskirstęs pagal gamą skirstinį:

$$W \sim \Gamma\left(\frac{T}{2}, \frac{\theta}{2}\right).$$

Tuo tarpu šio skirstinio tikimybė tankio funkcija apibrėžiama kaip:

$$g(W) \propto W^{\frac{T}{2}-1} \exp\left(-\frac{W\theta}{2}\right), \quad (2.9)$$

kur  $\mathbb{E}(W) = \frac{T}{\theta}$  bei  $\mathbb{D}(W) = 2\frac{T}{\theta^2}$ .

Taigi, tegul  $\frac{1}{\sigma^2}$  apriorinis skirstinys yra apibrėžiamas gama skirstiniu:

$$\frac{1}{\sigma^2} | B \sim \Gamma\left(\frac{T_0}{2}, \frac{\theta_0}{2}\right),$$

kur  $T_0$  bei  $\theta_0$  - žinomi parametrai. Tada apriorinis tankis užrašomas šia išraiška:

$$g\left(\frac{1}{\sigma^2} | B\right) \propto \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{T_0}{2}-1} \exp\left(-\frac{\theta_0}{2\sigma^2}\right). \quad (2.10)$$

Šiame žingsnyje, kaip ir prieš tai matytu atveju, gaunama tikėtinumo funkcija:

$$\begin{aligned} L\left(y_t | \frac{1}{\sigma^2}, B\right) &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{T}{2}} \exp\left(-\frac{(y_t - x_t B)'(y_t - x_t B)}{2\sigma^2}\right) \\ &\propto (\sigma^2)^{-\frac{T}{2}} \exp\left(-\frac{(y_t - x_t B)'(y_t - x_t B)}{2\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Tada sudauginus (2.10) bei (2.11) lygtis gaunama aposteriorinė  $\frac{1}{\sigma^2}$  tankio funkcija:

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{\sigma^2} | B, y_t\right) &\propto \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{T_0}{2}-1} \exp\left(-\frac{\theta_0}{2\sigma^2}\right) (\sigma^2)^{-\frac{T}{2}} \exp\left(-\frac{(y_t - x_t B)'(y_t - x_t B)}{2\sigma^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{T_0}{2}-1+\frac{T}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} [\theta_0 + (y_t - x_t B)'(y_t - x_t B)]\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{T_1}{2}-1} \exp\left(-\frac{\theta_1}{2\sigma^2}\right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

čia  $T_1 = T_0 + T$ ,  $\theta_1 = \theta_0 + (y_t - x_t B)'(y_t - x_t B)$ . Svarbu atkreipti dėmesį, jogt, parinkus gama skirstinio tankio funkciją kintamajam  $\frac{1}{\sigma^2}$ , aposteriorinis tankis taip pat yra gama skirstinio formos. Taigi, gama skirstinio tankio funkcija yra natūralusis jungtinis aprioriškumas. Remiantis (2.12) lygtimi aprašyta tankio funkcija galima pamatyti, jog  $\frac{1}{\sigma^2}$  aposteriorinis skirstinys užrašomas šia išraiška:

$$\frac{1}{\sigma^2} | B, y_t \sim \Gamma\left(\frac{T_1}{2}, \frac{\theta_1}{2}\right).$$

Analogiškai galima išreikšti ir  $\sigma^2$  aposteriorinius skirstinius:

$$\sigma^2 | B \sim \mathcal{IG}\left(\frac{T_0}{2}, \frac{\theta_0}{2}\right), \quad \sigma^2 | B, y_t \sim \mathcal{IG}\left(\frac{T_1}{2}, \frac{\theta_1}{2}\right),$$

čia  $\mathcal{IG}(\dots)$  žymi atvirkštinį gama skirstinį.

## Aposteriorinis $\sigma^2$ bei $B$ skirstinys, kai abu parametrai yra nežinomi

Kadangi abu parametrai yra nežinomi, pirmiausia yra apibrėžiamas vektoriaus  $(B, \frac{1}{\sigma^2})$  apriorinis tankis:

$$g\left(B, \frac{1}{\sigma^2}\right) = g\left(B \mid \frac{1}{\sigma^2}\right) g\left(\frac{1}{\sigma^2}\right),$$

kur

$$B \mid \frac{1}{\sigma^2} \sim \mathcal{N}(B_2, \Sigma_2), \quad \frac{1}{\sigma^2} \sim \Gamma\left(\frac{T_2}{2}, \frac{\theta_2}{2}\right)$$

bei  $B_2, \Sigma_2, T_2, \theta_2$  - žinomos konstantos. Tada sujungiant šį  $(B, \frac{1}{\sigma^2})$  apriorinį tankį bei tikėtinumo funkciją gaunamas to paties vektoriaus aposteriorinis tankis:

$$h\left(B, \frac{1}{\sigma^2} \mid y_t\right) \propto g\left(B, \frac{1}{\sigma^2}\right) L(y_t \mid B, \sigma^2), \quad (2.13)$$

kur

$$B \mid \frac{1}{\sigma^2}, y_t \sim \mathcal{N}(B_3, \Sigma_3), \quad \frac{1}{\sigma^2} \mid y_t \sim \Gamma\left(\frac{T_3}{2}, \frac{\theta_3}{2}\right).$$

(2.13) lygtimi apibrėžtos tankio funkcijos forma yra sudėtingesnė nei prieš tai matytais atvejais. Norint toliau ją įvertinti, vienas iš parametrų turi būti „izoliuojamas“. Pavyzdžiui, norėdamas gauti tam tikras išvadas apie parametą  $B$ , tyrėjas turi išvesti marginalinį aposteriorinį parametro  $B$  skirstinį (angl. *marginal posterior distribution*). Analogiškai ir kito parametro atveju. Taigi, marginalinė aposteriorinė parametro  $B$  tankio funkcija užrašoma kaip

$$g(B \mid y_t) = \int_0^\infty g\left(B, \frac{1}{\sigma^2} \mid y_t\right) d\frac{1}{\sigma^2},$$

o parametro  $\frac{1}{\sigma^2}$  atveju apibrėžiama kaip

$$g\left(\frac{1}{\sigma^2} \mid y_t\right) = \int_0^\infty g\left(B, \frac{1}{\sigma^2} \mid y_t\right) dB.$$

Šiame žingsnyje ir atsispindi Bajeso metodo trūkumas - integralo skaičiavimas. Dažnai atsitinka taip, jog integralo įvertinimas tampa komplikuota užduotimi, o kartais ir pačių vektorių aposteriorinio tankio (pavyzdžiui, (2.13) lygtis) išvedimas tampa problema, kai yra nagrinėjami sudėtingesni modeliai nei tiesinė regresija.

Modeliavimo metodų, pavyzdžiui, Markovo grandinės Monte-Karlo (angl. *Markov chain Monte Carlo*; žym. MCMC) metodai, vystymas supaprastino anksčiau minėto integravimo žingsnį bei išplėtė Bajesinę analizę į įvairius ekonometrinius modelius. Šiame darbe yra nagrinėjamas vienas iš keleto galimų MCMC modelių - Geman ir Geman (1984) aprašytas Gibbso imčių būdas. Šis modeliavimo algoritmas



- tai skaitinis metodas, kuris yra taikomas, kai bendras imties skirstinys nėra žinomas arba tokį skirstinį yra sunku nustatyti net žinant ir sąlyginį kiekvieno atskiro kintamojo skirstinį (Gilks ir kt., (1996)).

### Bendras Gibbso imties metodo aprašas

Tegul  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  - turima tankio funkcija, sudaryta iš  $k$  atsitiktinių dydžių, o siektinas tikslas - gauti marginalinio tankio

$$f(x_i) = \int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_k, \quad (2.14)$$

charakteristikas kaip vidurkį ar dispersiją. Problema ta, jog šio daugiamatnio atsitiktinio dydžio tankio funkcija gali būti nežinoma, arba integravimas, aprašytas (2.14) lygtimi, yra sudėtingas. Tariant, jog sąlyginių tankio funkcijų  $f(x_i | x_j)$ ,  $i \neq j$  formos yra žinomos, bei pasirinkus pradines  $x_1, \dots, x_k$  reikšmes, t.y. pradžios tašką  $(x_1^0, \dots, x_k^0)$ , Gibbso imčių metodą galima apibrėžti šiais punktais:

1.  $x_1^1$  reikšmė generuojama iš  $f(x_1^1 | x_2^0, \dots, x_k^0)$ .
2.  $x_2^1$  reikšmė generuojama iš  $f(x_2^1 | x_1^1, x_3^0, \dots, x_k^0)$ .
- ⋮
- $k$ .  $x_k^1$  reikšmė generuojama iš  $f(x_k^1 | x_1^1, x_2^1, \dots, x_{k-1}^1)$ .

Šie žingsniai (1-k) yra iteruojami  $J$  kartų, norint gauti daugiamatį atsitiktinį dydį  $(x_1^j, \dots, x_k^j)$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Geman ir Geman (1984) įrodė, jog generuotų  $(x_1^j, \dots, x_k^j)$  reikšmių daugiamatniai skirstiniai konverguoja eksponentiniu greičiu į  $(x_1, \dots, x_k)$  skirstinį, kai  $J \rightarrow \infty$ . Taigi,  $(x_1, \dots, x_k)$  daugiamatį skirstinį galima aproksimuoti empiriniais skirstiniais, sudarytais iš  $M$  simuliuotų reikšmių  $(x_1^j, \dots, x_k^j)$ ,  $j = L + 1, \dots, L + M$ , kur  $L$  yra pakankamai didelis skaičius, su kuriuo Gibbso imčių metodas konverguoja. Žinoma, konvergavimo tema šio metodo atveju taip pat kelia tam tikrų klausimų. Pavyzdžiui, kaip žinoti, kiek reikia iteracijų  $L$ , jog reikšmės būtų sukonvergavusios? Apie tai plačiau galima rasti Geweke (1991), McCulloch bei Rocci (1994), Gelman ir Rubin (1992) darbuose, tačiau praktikoje dažnai  $L$  reikšmei yra parenkamas 90000 iteracijų skaičius, o  $M$  - 10000. Apibrėžus tinkamą iteracijų skaičių, marginalinio skirstinio  $x_i$  vidurkis yra išreiškiamas kaip

$$\frac{\sum_{j=1}^M x_i^{L+j}}{M}.$$

### 2.3.2 Gibso imčių metodo pavyzdys

Tegul nagrinėjamas modelis yra antros eilės autoregresija, t.y. AR(2) užrašytas šia lygtimi:

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (2.15)$$

čia  $Y_t$  ketvirtiniai JAV vartotojų kainų indekso - VKI (angl. *consumer price index*; žym. CPI) duomenys, sezoniškai nekoreguoti bei išreikšti kaip procentinis pokytis lyginant su stebėjimu prieš metus (3 pav.). Be to, duomenys yra nuo 1949-01-01 iki 2022-09-01. Tegul  $x_t = (1, y_{t-1}, y_{t-2})$  bei  $B = (\alpha, \phi_1, \phi_2)'$ . Žinoma, analizuojant šį modelį taip pat yra reikalaujama, jog daugianario  $1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = 0$  sprendiniai nepriklausytų kompleksinio vienetinio apskritimo vidui. Tada patogumo dėlei galima užrašyti (2.15) lygtį matriciniu pavidalu:

$$y_t = x_t B + v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Norint pritaikyti Gibso imčių metodą šiam modeliui, reikia žinoti sąlyginius aposteriorinius  $B$  bei  $\sigma^2$  skirstinius, žinant tinkamus sąlyginius apriorinius skirstinius.

#### Sąlyginis $B$ skirstinys, turint $\sigma^2$

Tegul sąlyginis apriorinis  $B$  skirstinys yra apibrėžtas daugiamačiu normaliuoju skirstiniu:

$$B \mid \sigma^2 \sim \mathcal{N}(B_0, \Sigma_0) \mathbb{1}_{s(\phi)},$$

kur  $B_0$  ir  $\Sigma_0$  yra žinomos konstantos, o  $\mathbb{1}_{s(\phi)}$  - indikatoriaus funkcija, naudojama žymėti anksčiau minėto daugianario šaknis, kurios yra už vienetinio apskritimo ribų. Tuo tarpu aposteriorinę  $B$  skirstinį galima užrašyti kaip

$$B \mid \sigma^2, y_t \sim \mathcal{N}(B_1, \Sigma_1) \mathbb{1}_{s(\phi)}, \quad (2.16)$$

kur

$$B_1 = \left( \Sigma_0^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} x_t' x_t \right) \left( \Sigma_0^{-1} B_0 + \frac{1}{\sigma^2} x_t' y_t \right)$$

$$\Sigma_1 = \left( \Sigma_0^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} x_t' x_t \right)^{-1}.$$

#### Sąlyginis $\sigma^2$ skirstinys, turint $B$

Tegul sąlyginis apriorinis  $\sigma^2$  skirstinys yra apibrėžtas daugiamačiu normaliuoju skirstiniu:

$$\sigma^2 \mid B \sim \mathcal{IG} \left( \frac{T_0}{2}, \frac{\theta_0}{2} \right),$$

kur  $\theta_0$  bei  $T_0$  yra žinomos konstantos. Tuo tarpu aposteriorinį  $\sigma^2$  skirstinį galima užrašyti kaip

$$\sigma^2 \mid B, y_t \sim \mathcal{IG}\left(\frac{T_1}{2}, \frac{\theta_1}{2}\right), \quad (2.17)$$

čia

$$T_1 = T_0 + T, \quad \theta_1 = \theta_0 + (y_t - x_t B)'(y_t - x_t B).$$

Turint sąlyginius aposteriorinius skirstinius, užrašytus (2.16)-(2.17) lygtimis, galima pereiti prie Gibso imčių metodo realizacijos. Pirmiausia reikia apibrėžti tam tikrą atskaitos tašką, t.y. tegul  $\sigma^2 = \{\sigma^2\}^0$ . Tada kiti žingsniai yra iteruojami  $j$  kartų ( $j = 1, 2, \dots, L + M$ ):

1. Su sąlyga, jog  $\sigma^2 = \{\sigma^2\}^{j-1}$ , generuojama  $B^j$  reikšmė iš sąlyginio aposteriorinio skirstinio, aprašyto (2.16) lygtimi.
2. Su sąlyga, jog  $B = B^j$ , kur  $B^j$  gaunama iš 1-ojo žingsnio, generuojama  $\{\sigma^2\}^j$  reikšmė iš sąlyginio aposteriorinio skirstinio, išreikšto (2.17) lygtimi.
3. Nustatoma nauja  $j$  reikšmė, t.y.  $j = j + 1$  ir grįžtama į 1-ąjį žingsnį.

Generuojant  $B$  reikšmes iš (2.16) yra įtraukiama „atmetimo sritis“, kad būtų užtikrinama, jog lygties  $(1 - B_1 L - B_2 L^2) = 0$  sprendiniai nepriklauso kompleksiniam vienetiniam apskritimui, nes kitu atveju negaliojtu stacionarumo sąlyga. Todėl esant tokiai situacijai, reikšmės yra išmetamos ir simuliuojamos tiek kartų, kol stacionarumo sąlyga yra tenkinama.

	Aposteriorinis vidurkis	Standartinis nuokrypis	5% bei 95% procentiliai
$\alpha$	0,2447	0,0725	(0,1259; 0,3645)
$\phi_1$	1,3825	0,0515	(1,2974; 1,4674)
$\phi_2$	-0,4536	0,0517	(-0,5380; -0,3679)

2.1 lentelė: Rezultatai gauti Gibso imčių metodu, taikytu JAV VKI atvejui.

Vizualūs šio modelio parametrų simuliacijų skirstiniai pateikiami 1 pav., o 2.1 lentelėje pateikiamos parametrų  $\phi_1, \phi_2$  bei  $\sigma^2$  charakteristikos.

## 2.4 Būsenos erdvės modelis

Daugelyje ekonominių taikymų įverties (angl. *input*) bei išvesties (angl. *output*) kintamumo raida negali būti matuojama tiesiogiai. Norint iširti vidinių (angl. *internal*) kintamųjų raidą, įprastas būdas yra taikyti būsenos erdvės (angl. *state space*) modelius. Tai yra laiko eilučių modeliai, kurie dažnai yra sudaryti iš dviejų modeliavimo lygių - stebėjimo (angl. *observation*) bei perėjimo (angl. *transition*) lygčių. Pirmojoje apibrėžiamas sąryšis tarp turimų stebėjimų ( $Y_t$ ) bei modeliuojamų duomenų ( $X_t$ ), t.y. taip vadinamų būsenų (angl. *states*) ar kitaip nestebimų kintamųjų:

$$y_t = Bx_t + Az_t + \epsilon_t.$$

Tuo tarpu antrajame lygyje apibrėžiama būsenų modeliavimo lygtis:

$$x_t = \mu + Fx_{t-1} + \eta_t,$$

čia  $z_t$  - galimas egzogeninis kintamasis, o  $\epsilon_t$  bei  $\eta_t$  - paklaidos. Plačiau apie šio modelio idėją galima rasti Geweke (2005) arba Kroese bei Chan (2014) knygoje, kuriose pateikiama ne tik bendra modelio teorija, bet ir atskirų atvejų, kaip Kalmano filtro (angl. *Kalman filter*), samprata bei vertinimo būdas.

Vienas iš svarbių būsenos erdvės modelių yra nestebimų komponentių (angl. *unobserved components*; žym. UC) modelis. Pirmoje šio modelio lygtyje stebėjimai  $y_t$  laiko momentu  $t$  yra modeliuojami priklausomai nuo nestebimos komponentės  $\tau_t$  būsenos:

$$y_t = \tau_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad (2.18)$$

Tokia lygties specifikacija yra populiaru modeliuojant vienamates laiko eilutes, pavyzdžiui, infliacijos lygį. Tuo tarpu perėjimo lygtis dažnai yra įvardijama kaip atsitiktinio klaidžiojimo procesas:

$$\tau_t = \tau_{t-1} + u_t,$$

čia  $t = 2, \dots, T$ ,  $u_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$  bei laikoma, jog būsenų atskaitos taško reikšmė yra  $\tau_1 \sim \mathcal{N}(\tau_0, \omega_0^2)$ , kur  $\tau_0$  ir  $\omega_0^2$  - žinomos konstantos.

Galiausiai šiame skyrelyje yra aptariamas stochastinio kintamumo modelis. Ryškus daugelio laiko eilučių, ypač makroekonominių ar finansinių, duomenų bruožas - nepastovumo (angl. *volatility*) klasterizavimas. Tai fenomenas, atsirandantis po tam tikro pokyčio duomenyse, t.y. teigiama, jog didelius pokyčius duomenyse seka

dideli pokyčiai, o mažus pokyčius - maži (Mandelbrot (1967)). Pavyzdžiui, dideli turto gražos pokyčiai paprastai grupuojasi kartu, pavyzdžiui, krizių metu. Modeliuose, kuriuose yra įtraukiama pastovi dispersija, duomenų kintamumas laikui bėgant išlieka pastovus, t.y. nėra modeliuojamas galimas nepastovumo klasterizavimas. Norint išvengti šio nesklandumo, praktikoje yra nagrinėjami stochastinio kintamumo modeliai - kita būsenos erdvės modelių klasė, kuri prisitaiko prie laike kintančio nepastovumo. Šio modelio atveju stebėjimai laiko momentu  $t$  yra apibūdinami šia lygtimi:

$$y_t = \exp\left(\frac{h_t}{2}\right)\epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

čia  $y_t$  kintamumas užrašomas kaip  $Var(y_t) = \exp(h_t)$ . Tuo tarpu būsenos inicijuojamos laikant, jog  $h_1 \sim \mathcal{N}(h_0, \sigma_0^2)$ , kur  $h_0$  bei  $\sigma_0^2$  - žinomos konstantos. Be to, laikoma, jog būsenos yra aprašomos šia lygtimi:

$$h_t = h_{t-1} + v_t, \quad t = 2, \dots, T,$$

čia  $v_t \sim \mathcal{N}(0, \omega^2)$ . Kaip bus matoma kitame skyriuje, Stock ir Watson (2007, 2016) straipsniuose sujungia UC bei stochastinio kintamumo modelius, taip sukonstruodami naują modelį, skirtą modeliuoti infliacijos būsenas (trendą) bei prognozes.

## 2.5 Infliacija

*„Infliacija visada ir visur yra pinigų politikos reiškinytis ... ją sukelia per didelis pinigų kiekis, siekiantis per mažo prekių kiekio.“* (Milton Friedman)

Tai yra viena iš pagrindinių makroekonomikos komponentų, dėl kurios laikui bėgant sumažėja pinigų vertė. Įsivaizduokite tokį pavyzdį: tariant, jog kitą mėnesį Jono mėnesinės pajamos padidės dvigubai, Jonas galės įsigyti arba brangesnių prekių, arba tokių pačių prekių dvigubai daugiau (laikant, jog parduodamų produktų kaina nekis). Tada kyla klausimas: kas atsitiktų, jei visų gaunamos mėnesinės pajamos padvigubės? Tokiu atveju Jonas neįstengtų nusipirkti dvigubai daugiau parduodamų produktų, nes, padidėjus ir kitų asmenų mėnesinėms pajamoms, kiltų ne kažkokių pavienių prekių paslaugų kainos, o bendras kainų lygis. Tai reikštų, jog po mėnesio Jonas ir kiti asmenys už 1 eurą galėtų nusipirkti mažiau nei prieš mėnesį.

Žvelgiant iš akademinės pusės, per pastaruosius dešimtmečius buvo atlikta daugybė infliacijos elgseną analizuojančių tyrimų. Atrodytų, jog egzistuoja net ir susita-

rimas, jog infliacijos kintamumas bei išsilaikymas (angl. *persistence*<sup>6</sup>) pasikeitė nuo tam tikro laikotarpio (Koop ir Potter (2011), Faust ir Wright (2012)). Tai paskatino ir didelį politinį susidomėjimą infliacijos lūkesčiais bei jos tendencijos vertinimu, naudojant įvairius laiko eilučių modelius. Literatūroje, susijusioje su infliacija, vienmačiai modeliai, tokie kaip Stock and Watson (2007, 2016) nestebimų komponentių stochastinio kintamumo modelis, yra dažnai naudojami. Šio modelio autoriai savo darbuose įrodė, jog UCSV prognozių rezultatai, nagrinėjant JAV 50 metų imtį, buvo geresni arba sutapo su kitų straipsniuose nagrinėtų modelių rezultatais (palyginimas buvo vertinamas vidutinės kvadratinės prognozės klaidos - VKPK atžvilgiu (angl. *mean squared prediction error*; žym. MSPE)). Dėl šios priežasties UCSV modelis yra nagrinėjamas ir šiandien. Pavyzdžiui, Gafarov (2013) nagrinėjo šio modelio rezultatus Rusijos VKI atveju inkorporuodamas ir sezoniškumo komponentę, Cecchetti bei kiti (2007) pritaikė šį modelį G7 šalims, nagrinėjant pinigų politikos efektus, o Garnier, Mertens bei Nelson (2015) praplėtė šią analizę 14 išsivysčiusių šalių atveju bei sukonstravo daugiamačių modelio atvejį.

## Duomenys

Šiame etape yra nagrinėjami penkių vyriausybių sezoniškai koreguoti VKI. Šių vyriausybių duomenų imtys: JAV - nuo 1960 m. sausio mėn. iki 2022 m. rugsėjo mėn. (CPIAUCSL), Vokietijos - nuo 1960 m. sausio mėn. iki 2022 m. rugsėjo mėn., Japonijos - nuo 1970 m. sausio mėn. iki 2022 m. rugsėjo mėn., o Kanados - nuo 1992 m. sausio mėn. iki 2022 m. rugsėjo mėn. (CANCPALTT01IXOBSAM), Didžiosios Britanijos - nuo 1970 m. sausio mėn. iki 2022 m. rugsėjo mėn. (GBRCPIALLMINMEI<sup>7</sup>). Šaltiniai: Vokietijos VKI laiko eilutė gaunama iš *Macrobonds* duomenų bazės, Japonijos - iš Japonijos statistikos biuro, o kitų trijų vyriausybių - *Federal Reserve Economic Data of St. Louis* (trumpiau - *FRED*).

---

<sup>6</sup>*Persistence* - infliacijos tendencija lėtai konverguoti į centrinio banko užsibrėžtą lygį.

<sup>7</sup>Svarbu atkreipti dėmesį, jog Didžioji Britanija neskelbia sezoniškai koreguoto VKI. Viena iš galimų alternatyvų yra sezoniškai koreguotas mažmeninių kainų indeksas (angl. *retail price index*; žym. RPI), tačiau Didžiosios Britanijos nacionalinės statistikos biuras nutraukė šių duomenų skelbimą. Taigi, šiame darbe yra naudojama anksčiau minėta laiko eilutė, kuri yra sezoniškai koreguojama taikant X-13-ARIMA-SEATS paketą, sukurtą Jungtinių Valstijų gyventojų surašymo biuro (angl. *United States Census Bureau*; žym. USCB). Tai yra statistinis metodas, skirtas sezoniniam laiko eilučių koregavimui bei kitoms duomenų analizėms vykdyti. Plačiau apie šį paketą galima rasti Sax bei Eddelbuettel (2018) straipsnyje.

## Modelio aprašas

Tegul  $\pi_t$  - mėnesinis vyriausybės VKI stebėjimas laiko momentu  $t$ . Tada Stock ir Watson 2007 m. pristatė, o 2016 m. praplėtė šį modelį:

$$\pi_t = \tau_t + \eta_t, \quad \eta_t = \sigma_{\eta,t} \zeta_{\eta,t}, \quad (2.19)$$

$$\tau_t = \tau_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_{\epsilon,t} \zeta_{\epsilon,t}, \quad (2.20)$$

$$\ln \sigma_{\eta,t}^2 = \ln \sigma_{\eta,t-1}^2 + \nu_{\eta,t}, \quad (2.21)$$

$$\ln \sigma_{\epsilon,t}^2 = \ln \sigma_{\epsilon,t-1}^2 + \nu_{\epsilon,t}, \quad (2.22)$$

čia  $\zeta_t = (\zeta_{\eta,t}, \zeta_{\epsilon,t}) \sim \mathcal{N}(0, I_2)$ ,  $\nu_t = (\nu_{\eta,t}, \nu_{\epsilon,t}) \sim \mathcal{N}(0, \gamma I_2)$ ,  $\gamma$  - skaliarinis parametras, kuris kontroliuoja stochastinio kintamumo proceso glodumą. Šiame darbe sekant Stock ir Watson (2007) darbu yra fiksuojama tokia pati glodumo parametro reikšmė, t.y.  $\gamma = 0.04^8$ . (2.19)-(2.22) lygtimis apibrėžto modelio vertinimo žingsnius galima rasti Stock ir Watson (2016) straipsnyje, kuriame yra nagrinėjamas praplėstas UCSV modelis, t.y. inkorporuojant išskirtis (angl. *outliers*).

---

<sup>8</sup>Remiantis Chan (2016) straipsnyje pateiktu algoritmu, šiame darbe taip pat buvo tirtas atvejis, kai  $\gamma$  reikšmė nėra fiksuota, t.y. kiekvienai vyriausybei taikytas skirtingas  $\gamma$  įvertis, tačiau reikšmingo skirtumo nebuvo matyti. Iš kitos pusės, nagrinėjant Gafarov (2013) darbą, matyti, jog, taikant šį modelį Rusijos vyriausybės atveju,  $\gamma$  reikšmės pokytis turėjo įtakos galutiniam rezultatui.

$s_t$	$w_{it}$	$m_{s_t}$	$v_{s_t}^2$
1	0,086	-7,472	1,411
2	0,914	-0,698	1,411

2.2 lentelė: Stock ir Watson  $\ln \chi_1^2$  skirstinio aproksimacijų reikšmės.

---

**Pastaba.** Nagrinėjant Stock ir Watson konstruotą UCSV modelį buvo susidurta su tam tikru keblumu, t.y.  $\ln \chi^2$  skirstinio aproksimacija. Šioje pastaboje ir norima pristatyti Kim, Shephard bei Chib (žym. KSC) (1998) algoritmą, taikomą aproksimuojant modelius su stochastiniu kintamumu, bei kurį taikė UCSV modelio autoriai.

### KSC algoritmas

Tegul  $x_t = \sigma_t \eta_t$  bei  $\ln \sigma_t^2 = \ln \sigma_{t-1}^2 + \nu_t$ ,  $(\eta_t, \nu_t) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, I_2)$ . Tada

$$\ln x_t^2 = \ln \sigma_t^2 + \ln \eta_t^2,$$

$$\ln \sigma_t^2 = \ln \sigma_{t-1}^2 + \gamma \nu_t.$$

Tai yra tiesinis būsenos erdvės modelis su ne Gauso matavimo paklaidomis  $z_t = \ln \eta_t^2 \sim \ln \chi_1^2$ . Kim bei kiti (1998) pasiūlė aproksimuoti  $\ln \chi_1^2$  skirstinį normaliųjų tankių mišiniu:

$$z_t \sim \sum_{i=1}^n w_{it} f_N(z_t | m_i - 1.2704, v_i^2),$$

kur  $w_{it}$  tam tikra tikimybė. Kita vertus, svarbu pastebėti, jog šį normaliųjų tankių mišinį galima užrašyti ir šiuo pavidalu:

$$z_t | s_t = i \sim \mathcal{N}(m_i - 1.2704, v_i^2),$$

$$\mathbb{P}(s_t = i) = w_{it},$$

kur  $s_t \in (1, 2, \dots, 7)$ . Kim bei kiti autoriai (1998) pasiūlė  $n = 7$  ( $i \leq 7$ ) komponentų Gauso mišinį (ang. Gaussian mixture)  $\ln \chi_1^2$  skirstinio aproksimacijai bei pateikė  $(p_i, m_i, v_i^2)$  reikšmes savo straipsnyje. Tuo tarpu Omori, Chib, Shephard ir Nakajima (2007) pateikė tikslesnį 10-ties komponentų atvejį. Šiame darbe norima atkreipti dėmesį, jog Stock ir Watson (2007) pritaikė 2-jų komponentų atvejį (2.2 lentelė), kurį nustatė patys straipsnio autoriai.

---



## 2.6 BVP lūkesčiai

Kita makroekonomikos komponentė, kuri yra nagrinėjama šiame darbe, yra bendrasis vidaus produktas<sup>9</sup> - BVP (angl. *gross domestic product*; žym. GDP). Šis rodiklis dažnai naudojamas norint įvertinti tam tikrus šalies struktūrinius pokyčius bei apibūdinti ekonomikos raidą šalyje, t.y. apibrėžti ekonomikos augimą bei tam atsiradusius veiksnius, apibūdinti gyvenimo lygį bei ūkio struktūrai vertinti. Žinoma, šį rodiklį taip pat galima taikyti lyginant skirtingų šalių ekonomikos aktyvumą.

Skyriuje „Taylora taisyklė“ pateiktoje formulėje kaip tik galima matyti realų faktinio bei potencialaus BVP pritaikymą, t.y. BVP atotrūkio (angl. *output gap*; žym OG) realizaciją. Standartiniu atveju Taylora taisyklėje yra taikomas OG, bet yra galimybė naudoti ir BVP lūkesčius. Iš šios analizės matoma, jog modeliai, skirti vertinti skirtingų šalių BVP atotrūkį, nėra efektyvūs bendro modelio kontekste, t.y. gaunama informacija, pavyzdžiui, nagrinėjant impulso atsako funkcijas, yra iškraipyta - neatitinka ekonominių dėsnių. Dėl šios priežasties šiame darbe yra naudojamos BVP prognozės po metų, kurių šaltinis - *Consensus Economics*<sup>10</sup> duomenų bazė. Žinoma, tai nereiškia, jog OG negali būti naudojamas, tačiau šiame darbe to atlikti nepavyko (tai yra viena iš tolimesnių darbo eigų ateityje). Pavyzdžiui, vizualus duomenų pateikimas JAV atveju matomas 5 pav.

### Duomenys

Šiame etape (kaip buvo minima anksčiau) yra nagrinėjami penkių vyriausybių BVP lūkesčiai po metų. Šių vyriausybių duomenų imtys sutampa, t.y. nuo 1989 m. spalio mėn. iki 2022 m. rugsėjo mėn. Šaltinis - *Consensus Economics* duomenų bazė.

---

<sup>9</sup> „Bendrasis vidaus produktas - tai bendrosios pajamos, sukurtos šalies teritorijoje, taip pat užsienio gamybos veiksnių gautos pajamos konkrečioje šalyje, minus šios šalies piliečių gautos pajamos užsienyje“ - Snieška V., Baumilienė V. ir kt. (2011).

<sup>10</sup> *Consensus Economics* (CE) - tai įmonė, kuri užsiima ekonominių bei rinkos rodiklių prognozėmis ir analize įvairių šalių atžvilgiu. Kiekvieną mėnesį CE skelbia 10 - 15 ekonomikos indikatorių apžvalgą (tarp jų ir BVP lūkesčius kitiems metams), gautą iš skirtingų ekonomistų (bankų, reitingų agentūrų ir t.t.).

## 2.7 Palūkanų normų kreivės parametrizacija

Daugelyje šaltinių palūkanų normų (arba pajamingumo) kreivė yra įvardijama kaip tam tikra funkcija, atspindinti sąryšį tarp palūkanų normų bei išpirkimo (įsiskolinimo) laikotarpio. Žinoma, priklausomai nuo rinkos situacijos, kreivė gali įgyti įvairias formas (būti teigiama, invertuota, lėkšta ir t.t.) ir tai priklauso nuo įvairių faktorių<sup>11</sup>, o tai taip pat turi ir tam tikros įtakos pinigų rinkos (angl. *money market*) instrumentų<sup>12</sup> kainoms. Pavyzdžiui, izdo vekselio (angl. *treasury bill*; žym. T-bill) kaina antrinėje rinkoje (angl. *secondary market*) priklausys nuo palūkanų normų, t.y., jei jos norma mažės, tai kaina didės, ir atvirkščiai.

Iš kitos pusės palūkanų normos taip pat turi įtakos ir kapitalo rinkos (angl. *capital market*) instrumentų kainoms, pavyzdžiui, obligacijoms (skolos vertybiniai popieriai). Todėl šiame darbe nagrinėjama palūkanų normų kreivė bei jos parametrizacija, nes planuojamame investiciniame portfelyje yra įtraukiami ir tam tikro emitento (angl. *issuer*) obligacijų indeksai.

Šiame skyrelyje, remiantis C. Nelson ir A. Siegel (1987), C. Bernadell, J. Coche ir K. Nyholm (2005), F. X. Diebold ir C. Li (2005), K. Nyholm (2015) darbais, parodoma, jog pajamingumo kreivę (angl. *yield curve*) galima užrašyti kaip trijų dinamiškai kintančių parametrų sumą. Nelson-Siegel (toliau naudojamas trumpinys NS) sistema, kurią 2005 m. patobulino Diebold ir Li, nustato faktorių daugiklių (angl. *factor loadings*) struktūrą. Tai ne tik palengvina tikslių faktorių įvertinimą, bet taip pat leidžia juos įvardyti kaip lygį (angl. *level*; žym. L), statumą (angl. *slope*; žym. S) bei kreivumą (angl. *curvature*; žym. C). Tokiu būdu institucinis investuotojas (pensijų fondas, šalies centrinis bankas ir t.t.), turintis galimybę prekiauti įvairių vyriausybių obligacijomis, gali modeliuoti bei prognozuoti visą palūkanų normų kreivę, o ne pavienius jos taškus. Žinoma, kaip bus matoma toliau, dinaminė NS išraiška turi ir tam tikrų minusų, todėl šiame darbe taip pat yra taikomos ir Nyholm (2015) bei Meucci ir Loregian (2016) modifikacijos.

---

<sup>11</sup>Literatūroje šie faktoriai įvardijami kaip teoremos, kurios paaiškina tam tikrą kreivės formą. Pavyzdžiui, „Liquidity preference theory“ aiškina, kaip atsiranda teigiama palūkanų normų kreivės forma, tuo tarpu „Market segmentation theory“ - išlenktos (angl. *humped*) formos atsiradimą ir t.t.

<sup>12</sup>Dažnai yra įvardijami šie instrumentai: *time deposit*, *certificate of deposit (CD)*, *commercial paper (CP)*, *bill of exchange* arba *banker's acceptace (BA)*, *treasury bill* bei *repurchase agreement (repo)*.

## Duomenys

Šiame etape nagrinėjamos penkių vyriausybės palūkanų normų kreivės skirtingais išpirkimo laikotarpiais (angl. *maturities*) nuo 3 mėn. iki 360 mėn. (30 metų). Kitaip tariant, šiuos išpirkimo laikotarpius galima įvardyti kaip trejeto kartotinius, t.y.,  $3k$ , kur  $k = \{1, 2, 3, \dots, 120\}$ . Nagrinėjami duomenys yra mėnesiniai, imti paskutinę mėnesio darbo dieną. Visų penkių vyriausybės duomenų imties pabaiga yra ta pati (2022 m. rugsėjo mėn.), bet imties pradžia skiriasi: JAV - nuo 1985 m. sausio mėn., Vokietija - nuo 1986 m. balandžio mėn., Kanada - nuo 1986 m. birželio mėn., Didžioji Britanija - nuo 1986 m. sausio mėn. bei Japonija - nuo 1987 m. sausio mėn. Šaltinis - *Intercontinental Exchange* (trumpiau - ICE) duomenų bazės. Trimatė šių pajamingumo kreivių dinamika pateikiama priedų skiltyje esančiuose grafikuose (8 pav.).

### 2.7.1 DNS faktoriai

Tegul  $y_t(\tau)$  yra pajamingumo (angl. *yield*) stebėjimas fiksuotu laiko momentu  $t$  bei tam tikru išpirkimo momentu  $\tau$ . Remiantis Diebold ir Li (2005) darbu, pajamingumo kreivė gali būti užrašoma šia išraiška<sup>13</sup> :

$$y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) + \beta_{3t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{\lambda_t \tau} \right). \quad (2.24)$$

Patogumo dėlei šiame darbe pateikiama ir šios lygties dinaminė išraiška, kur pajamingumo kreivės parametrų dinamika yra interpretuojama būsenos ir erdvės

---

<sup>13</sup>Svarbu paminėti tai, jog šiame darbe yra taikoma modifikuota Nelson-Siegel kreivės išraiška ((2.24) lygtis), kuri patogumo dėlei įvardijama kaip NS lygtis, o jos dinaminė išraiška kaip DNS. Taip pat svarbu pabrėžti ir tai, kodėl buvo pasirinkta taikyti šiek tiek modifikuotą palūkanų normų kreivės lygtį. Originaliame darbe Nelson ir Sigel (1995) pateikia šią lygties išraišką:

$$y_t(\tau) = b_{1t} + b_{2t} \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} + b_{3t} e^{-\lambda_t \tau}. \quad (2.23)$$

Kaip matoma, funkcijos, esančios prie  $b_{2t}$  ir  $b_{3t}$ , turi panašią monotoniškai mažėjančią formą. Tokiu būdu, jei reiktų įvardyti  $b_{2t}$  ir  $b_{3t}$  kaip modelio faktorius, tada daugiklių elgesyje būtų pastebimos dvi problemos. Pirma, būtų sunku pateikti intuityvią faktorių interpretaciją. Antra, kalbant iš operacinės pusės, būtų sunku tiksliai įvertinti faktorius, nes esant aukštam faktorių koherentiškumui (angl. *coherence*) mažinamas daugiakolinearumas (angl. *multicollinearity*).

pavidalu (tai matoma K. Nyholmo (2015) darbe):

$$y_t(\tau) = H \cdot \beta_t + e_t, \quad (2.25)$$

$$\beta_t = \mu + F \cdot \beta_{t-1} + v_t. \quad (2.26)$$

Šio modelio stebėjimų lygtis yra pavaizduota (2.25) lygtimi, kuri atspindi ryšį tarp stebėtų pajamingumų (LHS) bei modelio generuotų (RHS). Dinaminė pajamingumo kreivės faktorių evoliucija yra išreiškiamą antrąja lygtimi, kuri yra užrašyta kaip pirmos eilės vektorinė autoregresija (VAR(1)). Svarbu paminėti, jog šią lygtį galima pakeisti ir VAR(p) modeliu, kur  $p > 1$ , tačiau šiame tyrime nagrinėjamas atvejis, kai  $p = 1$ . Čia  $\beta_t = [\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t}]$  - DNS modelio faktoriai,  $e_t$  ir  $v_t$  - liekamosios paklaidos,  $F$  - matrica, kurioje yra renkami autoregresiniai parametrai, o  $H$  - daugiklių, esančių prie  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , matrica:

$$H = \left[ 1, \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau}, \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{\lambda_t \tau} \right]. \quad (2.27)$$

Be to, čia  $\lambda_t$  yra parametras, reguliuojantis eksponentinio nykimo greitį: maža  $\lambda_t$  reikšmė generuoja lėtą nykimą ir gali geriau atspindėti pajamingumo kreivę ilguoju laikotarpiu, tuo tarpu didelė šio parametro reikšmė generuoja greitesnį nykimą ir geriau atspindi kreivę trumpuoju laikotarpiu. Be to, ji taip pat reguliuoja faktoriaus  $\beta_{3t}$  (kreivumo) daugiklio maksimumo tašką bei tai, kaip greitai faktoriaus  $\beta_{2t}$  daugiklis mažėja. Šiame darbe, kaip ir daugelyje kitų darbų, yra fiksuojama parametro reikšmė penkioms vyriausybėms, kuri nepriklauso nuo laiko momento  $t$  t.y.  $\lambda_t = 0.0609$ . Taip elgiamasi dėl to, jog būtų gaunamas tiesinis modelis.

Dieboldo ir Li (2005) straipsnyje DNS parametrai yra apibūdinami kaip latentiniai<sup>14</sup> (angl. *latent*) dinaminiai faktoriai:

- $\beta_{1t}$ . Iš (2.24) lygties matome, jog daugiklis, esantis prie  $\beta_{1t}$ , yra lygus 1, t.y. konstanta, kuri esant ribai, kai  $\tau \rightarrow 0$ , neartėja link nulio. Todėl šį faktorių galima traktuoti kaip ilgos trukmės (angl. *long-term*) palūkanų normų kreivės komponentę. Be to, galima pastebėti, jog  $\beta_{1t}$  taip pat atspindi ir palūkanų normų kreivės lygį, nes šio parametro padidėjimas vienodai padidina visus pajamingumus.

---

<sup>14</sup>Remiantis Antano Buračo (2008) statistikos terminų žodynu, *latentinį kintamąjį* galima įvardyti kaip *slaptąjį*. Šiame darbe taip pat bus vartojamas šis sinonimas.

- $\beta_{2t}$ . Šis faktorius gali būti interpretuojamas kaip trumpos trukmės (angl. *short-term*) palūkanų normų komponentė, kadangi daugiklis, stovintis prieš  $\beta_{2t}$ , yra  $(1 - e^{-\lambda_t \tau})/\lambda_t \tau$  funkcija, kurios pradžios taškas yra 1 (riba, kai  $\tau \rightarrow 0$  yra lygi 1), tačiau didėjant  $\tau$  reišmei monotoniškai artėja link 0. Taip pat šis parametras yra glaudžiai susijęs su kreivės statumu. Tai išplaukia iš mažėjančios funkcijos, esančios prie  $\beta_2$ , kadangi didesnis svoris yra priskiriamas trumpo termino palūkanoms, o ilgo - mažesnis.
- $\beta_{3t}$ . Šiuo atveju daugiklis, stovintis prieš  $\beta_{3t}$ , yra  $(1 - e^{-\lambda_t \tau})/(\lambda_t \tau) - e^{\lambda_t \tau}$ . Iš šios išraiškos matoma, jog šios funkcijos pradžios taškas yra ties 0 (matoma iš ribos, kai  $\tau \rightarrow 0$ ), tada kurį laiką matomas didėjimas (funkcija yra išky-la į viršų) bei funkcijos reikšmių mažėjimas, t.y. artėjimas link 0. Taigi, jį galima laikyti vidutinės trukmės (angl. *medium-term*) palūkanų normų faktoriumi. Akivaizdu, jog, esant tokiai funkcijos formai, šis parametras geriausiai apibūdina ir kreivės išlenktumą.

Vizualų funkcijų, esančių prie DNS modelio faktorių, pavaizdavimą galima rasti 6 pav., o gautų DNS faktorių istorinę dinamiką - 9 pav.

## 2.7.2 RDNS faktoriai

Nors NS klasifikacija palūkanų normų kreivei yra naudinga, ji vis tiek turi keletą trūkumų, kadangi ši sistema nepalengvina tiesioginės trumpalaikių palūkanų (angl. *short-rate*; žym. SR) parametrizacijos. DNS modelio kontekste šios palūkanos yra apibrėžiamos kaip pirmų dviejų pajamingumo kreivės faktorių suma, ir dėl šios priežasties yra netrivialu, kaip reikėtų:

- nustatyti, kokį laiko eilučių procesą ji atitinka,
- apskaičiuoti modelio numanomas trumpalaikes palūkanas, kai  $\tau_i \neq 0$ ,
- įterpti empirinę pinigų politikos taisyklę, kur trumpąjį pajamingumo kreivės galą tiesiogiai veikia makroekonominiai kintamieji, ar aplanai formuoti norimus ekonominius lūkesčius.

Be to, DNS modelis neleidžia tiesiogiai apskaičiuoti modelio numanomos termino priemokos.

Norėdamas įveikti šiuos trūkumus, Nyholm (2015) pasiūlė naują DNS modelio versiją (angl. *Rotated Dynamic Nelson-Siegel*; žym. RDNS), kurioje pajamingumo kreivės faktoriai yra „pasukami“ taip, jog SR atsirastų kaip vienas iš modeliuojamų parametrų. Tokiu būdu galima tiesiogiai modeliuoti trumpalaikių palūkanų elgseną bei apibrėžti jas taip, jog atitiktų bet koki išpirkimo laikotarpį  $\tau_i$ . Be to, šio modelio kontekste įmanoma integruoti ir egzogeninius (angl. *exogenous*) kintamuosius, kurie, kaip manoma, turi įtakos trumpalaikėms palūkanų normoms (pavyzdžiui, pinigų politikos taisyklės forma).

Norint perversti NS faktorius iš  $[L, -S, C]$  į  $[SR, S, C]$ , DNS modelis yra papildomas „sukimosi“ matrica (žym.  $A$ ), kad atsirastų norimas faktoriaus interpretavimas ir tenkintų šią lygtį:  $I = A^{-1} \cdot A$ , čia  $I$  yra vienetinė matrica (angl. *identity matrix*). Tada RDNS modelį galima užrašyti šia būsenos erdvės forma:

$$y_t(\tau) = H \cdot A^{-1} \cdot A \cdot \beta_t + e_t, \quad (2.28)$$

$$A \cdot \beta_t = A \cdot \mu + F \cdot A \cdot \beta_{t-1} + A \cdot v_t. \quad (2.29)$$

Patogumo dėlei šias lygtis galima perrašyti (2.25) - (2.26) lygčių pavidalu. Tegul:

$$G = H \cdot A^{-1}, \quad (2.30)$$

$$\gamma_t = A \cdot \beta_t, \quad (2.31)$$

$$m = A \cdot \mu, \quad (2.32)$$

$$z_t = A \cdot v_t. \quad (2.33)$$

Tada (2.28)-(2.29) lygtys užrašomos šia išraiška:

$$y(\tau) = G \cdot \gamma_t + e_t, \quad (2.34)$$

$$\gamma_t = m + F \cdot \gamma_{t-1} + z_t. \quad (2.35)$$

Iš (2.31) lygties matoma, jog kiekviena matricos  $A$  eilutė gali būti vertinama kaip tiesinė kombinacija DNS faktorių, suteikianti norimą RDNS faktorių interpretaciją:

$$\begin{bmatrix} ShortRate \\ Slope \\ Curvature \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Level \\ -Slope \\ Curvature \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Jei laikysime, jog SR yra apibrėžiamas terminui  $\tau = 0$ , tada sukimosi matricos struktūra yra

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Kita vertus, gali kilti noras apibrėžti trumpalaikes palūkanas ir kitu išpirkimo laikotarpiu. Tokiu atveju galima apibrėžti ir bendrąją matricos  $A$  išraišką:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-\exp(-\lambda_t \tau_s)}{\lambda_t \tau_s} & \frac{1-\exp(-\lambda \tau_s)}{\lambda \tau_s} - \exp(-\lambda \tau_s) \\ 0 & -\frac{1-\exp(-\lambda \tau_s)}{\lambda \tau_s} & -\left(\frac{1-\exp(-\lambda \tau_s)}{\lambda \tau_s} - \exp(-\lambda \tau_s)\right) \\ 0 & 1 - \frac{1-\exp(-\lambda \tau_s)}{\lambda \tau_s} & 1 - \left(\frac{1-\exp(-\lambda \tau_s)}{\lambda \tau_s} - \exp(-\lambda \tau_s)\right) \end{bmatrix}.$$

Remiantis Nyholm (2015) pasiūlymu, šiame darbe laikoma, jog SR yra apibrėžiamas terminui  $\tau = 0$ . Žinoma, viena iš alternatyvų tolimesniam darbo tęstinumui yra nagrinėti ir  $\tau = 3$ , nes literatūroje yra teiginių, jog šis taškas geriausiai atspindi pinigų politikos būseną bei išvengia tam tikrų pinigų rinkos niuansų, ypač likvidumo paklausos efektų, kas gali turėti įtakos normoms esant trumpam išpirkimo laikotarpiui. Naujų RDNS funkcijų, esančių prie modelio faktorių, vizualizaciją galima matyti 7 pav., o pačių faktorių dinamiką - 10 pav.

### 2.7.3 Šešėlinė norma (angl. *shadow rate*)

Dirbant prie šio projekto buvo pastebėta, jog modeliuojant palūkanų normas tiesiogiai atsiranda problema esant neigiamoms palūkanoms, t.y. jos turi gana svarbią įtaką galutiniams modelių faktoriams. Norint tai išspręsti, šiame darbe naudojama Meucci ir Loregian (2016) straipsnyje pateikta atvirkštinė pasirinktinio pirkimo sandorio transformacija (angl. *inverse-call transformation*), kuri sujungia du modelius:

- Normalųjį (angl. *normal*), kurio atveju kintamumas nepriklauso nuo palūkanų normų lygio, bet taikant šį modelį nėra įtraukiamas apribojimas, jog palūkanų normos būtų teigiamos, o tai sukelia tam tikrų nesklandumų esant žemam palūkanų normų lygiui.
- Lognormalųjį (angl. *log-normal*), kurio atveju nepastovumas yra proporcingas palūkanų normų lygiui, t.y. kai palūkanų normos yra aukštame (žemame) lygyje, kintamumas yra aukštas (žemas). Be to, anksčiau minėti autoriai parodo, jog šis modelis, kitaip nei normalusis, yra pranašesnis, kai palūkanų norma yra žemo lygio.

Problema ta, jog abu modeliai neveikia puikiai tiriant visus palūkanų normų režimus. Norint išspręsti šią problemą, anksčiau minėti autoriai pateikia transformaciją, kuri remiasi Black (1995) idėja. Ekonomistas straipsnyje pateikia palūkanų normas kaip pirkimo pasirinkimo sandorius (angl. *call option*), kuriuos jis vadiną šešėlinėmis normomis. Šiame darbe norima modeliuoti tokius duomenis, kurių kintamumo profilis yra pastovus. Jei atsitiktiniu būdu būtų įtraukiamos tam tikros duomenų grindys, tai iškiltų problema dėl turimų duomenų kintamumo sumažinimo. Tokiu būdu šešėlinės normos leidžia sujungti du anksčiau minėtus modelius į vieną, kurio inovacijos yra apibrėžiamos su pastoviu normaliuoju skirstiniu (plačiau skaičiuoti nurodytame straipsnyje). Žvelgiant į realaus gyvenimo pavyzdžius, vyriausybių palūkanų normos negali būti žemesnės nei tam tikras nustatytas lygis. Esant neigiamoms palūkanų normoms atsiranda grynujų pinigų turėjimo skatinimas, bankų pajamų mažėjimas, didėja turto kainų burbulo tikimybė ir t.t. (plačiau - Hannoun (2015) straipsnis).

Kaip ir anksčiau, laikykime, jog  $y_t(\tau)$  yra palūkanų norma (pajamingumas) fiksuotu laiko momentu bei esant tam tikram išpirkimo momentui. Remiantis Meucci ir Loregian straipsniu šiame darbe pateikiamas transformacijos  $c_\eta(x)$  išvedimas. Čia  $c_\eta(x)$  yra amerikietiškas pirkimo pasirinkimo sandoris su aritmetiniu Brauno judėjimu bei neapibrėžtu išpirkimo terminu (angl. *perpetual American call option*).

Tegul šio sandorio vykdymo (angl. *strike*) kaina yra  $\kappa$ . Meucci ir Loregian (2016) modeliuoja amerikietišką pirkimo pasirinkimo sandorį remdamiesi Bachelier (1900) procesu:

$$dX_t = -\theta dt + \sigma dW_t, \quad (2.38)$$

čia  $W_t$  - Brauno judėjimas,  $\theta > 0$  - konstanta,  $X_t$  - aktyvo kaina laiko momentu  $t$ .

Tada *call option* išmoka momentu  $t$  yra lygi

$$c(X_t) = \max\{X_t - \kappa, 0\}. \quad (2.39)$$

Šio kontrakto vertė priklauso nuo pradinių reikšmių ir tenkina šias sąlygas:

$$c(x) = x - \kappa, \quad x \geq b, \quad (2.40)$$

$$c''(x) - \frac{2\theta}{\sigma^2} c'(x) = 0, \quad x < b, \quad (2.41)$$

čia  $b > \kappa$  yra ankstyvo vykdymo apribojimas (angl. *early exercise boundary*).



Be to,  $c(x)$  taip pat turi tenkinti ir šias sąlygas:

$$\lim_{x \uparrow a} c(x) = b - \kappa, \quad (2.42)$$

$$\lim_{x \uparrow b} c'(x) = 1, \quad (2.43)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} c(x) = 0. \quad (2.44)$$

Jei  $x < b$ , apibrėžiama ši funkcija:

$$f(x) \equiv c'(x). \quad (2.45)$$

Tada paprastąją diferencialinę lygtį (angl. *ordinary differential equation*) (2.41) galima užrašyti kaip

$$f'(x) - \frac{2\theta}{\sigma^2} f(x) = 0. \quad (2.46)$$

Iš šios išraiškos galima spėti, jog sprendinys turės šį pavidalą:

$$f(x) = \zeta \exp(\gamma x). \quad (2.47)$$

Be to, nesunku pastebėti, jog jis tenkina (2.44) lygtį. Įsistačius šį sprendinį į (2.41) lygtį gaunamas šis lygties pavidalas:

$$\zeta \gamma \exp(\gamma x) - \frac{2\theta}{\sigma^2} \zeta \exp(\gamma x) = 0 \longrightarrow \gamma = \frac{2\theta}{\sigma^2}. \quad (2.48)$$

Tada

$$c'(x) = \zeta \exp\left(\frac{2\theta}{\sigma^2} x\right). \quad (2.49)$$

Iš šios išraiškos galime gauti  $c(x)$  išraišką:

$$c(x) = \zeta \int_0^x \exp\left(\frac{2\theta}{\sigma^2} s\right) ds + \phi = \zeta \frac{\sigma^2}{2\theta} \exp\left(\frac{2\theta}{\sigma^2} x\right) - \zeta \frac{\sigma^2}{2\theta} + \phi, \quad (2.50)$$

čia  $\phi$  - konstanta.

Norint, jog būtų tenkinama (2.44) lygtis, laikoma, jog  $\phi = \zeta \frac{\sigma^2}{2\theta}$ . Tuo tarpu iš likusių dviejų (2.42)-(2.43) sąlygų gaunama

$$\zeta \frac{\sigma^2}{2\theta} \exp\left(\frac{2\theta}{\sigma^2} b\right) = b - \kappa, \quad (2.51)$$

$$\zeta \exp\left(\frac{2\theta}{\sigma^2} b\right) = 1. \quad (2.52)$$

Iš čia išplaukia, jog  $b = \kappa + \frac{\sigma^2}{2\theta}$ , o įsistačius šią išraišką į (2.52) lygtį matoma, jog  $\zeta = \exp(-\frac{2\theta}{\sigma^2}(\kappa + \frac{\sigma^2}{2\theta}))$ . Turint  $\phi$  bei  $\zeta$  išraiškas, galima jas įrašyti į (2.50) lygtį ir gauti

$$c(x) = \frac{\sigma^2}{2\theta} \exp\left(-\frac{2\theta}{\sigma^2} \left(\kappa + \frac{\sigma^2}{2\theta}\right)\right) \exp\left(\frac{2\theta}{\sigma^2} x\right). \quad (2.53)$$

Paprastumo dėlei apibrėžus parametą  $\eta \equiv \frac{\sigma^2}{2\theta}$  gauname šią *call option* kontrakto išraišką:

$$c_\eta(x) \equiv \begin{cases} x - \kappa, & x \geq \kappa + \eta, \\ \eta \exp\left(\frac{x-\kappa}{\eta} - 1\right), & x < \kappa + \eta. \end{cases} \quad (2.54)$$

Kitas žingsnis, turint galutinę  $c_\eta(x)$  išraišką, yra apibrėžti perėjimo transformaciją iš palūkanų normų į šėšelines normas bei grįžimo iš jų transformaciją.

Patogumo dėlei, apibrėžkime turimų stebėjimų vektorių:

$$\mathbf{y}_t \equiv \begin{pmatrix} y_{1,t} \\ \vdots \\ y_{n,t} \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

čia  $y_{n,t} = y_t(\tau_n)$ .

Tada perėjimo transformaciją galima užrašyti kaip

$$\mathbf{y}_t \rightarrow \mathbf{x}_t = c_\eta^{-1}(\mathbf{y}_t). \quad (2.56)$$

**Pastaba.** (2.56) lygtyje  $c_\eta^{-1}$  yra  $c_\eta$  atvirkštinė funkcija. Paprastumo dėlei pateikiama tik jos galutinė išraiška:

$$c_\eta^{-1}(x) \equiv \begin{cases} x - \kappa, & x \geq \kappa + \eta, \\ \eta(\ln \frac{x-\kappa}{\eta} + 1), & x < \kappa + \eta. \end{cases} \quad (2.57)$$

Turint transformuotas palūkanų normas, proceso seka išlieka tokia pati kaip anksčiau aprašytuose žingsniuose. Tuo tarpu suradus, pavyzdžiui, DNS faktorius bei juos įsistačius į (2.23) lygtį reikia neužmiršti grįžti iš šėšėlinių normų į palūkanų normas:

$$\mathbf{x}_t \rightarrow \mathbf{y}_t = c_\eta(\mathbf{x}_t). \quad (2.58)$$

Vizualus pokytis neįtraukus šėšėlinių normų bei įtraukus jas į DNS ir RDNS modelius matomas 11-12 pav.

Šiame darbe, išreiškiant padėką Lietuvos banko kolegoms už atliktą  $\eta > 0$  koeficiento analizę, yra fiksuojama šio parametro reikšmė, t.y.  $\eta = 1.3$ . Šį parametą galima interpretuoti kaip glodinimo faktorių pirkimo pasirinkimo sandoriui arba kaip tam tikrą slenkstį, atskiriantį aukšto ir žemo režimo palūkanų normas. Tuo tarpu  $\kappa$  reikšmės gaunamos imant istorinį palūkanų normų minimumą ir jį šiek tiek pamažinant. Šių parametų reikšmės galima rasti 4.2 lentelėje.

## 2.8 Paritetinė obligacija

Šiame darbe pirmoji nagrinėjama aktyvų klasė - vyriausybės vertybiniai popieriai (obligacijos<sup>15</sup>). Tariant, jog yra nagrinėjami tam tikri palūkanų normų kreivės taškai (šiuo atveju nagrinėjami 3 mėn., 1 metų, 2 metų, ..., 10 metų taškai), prekybos idėja yra gana paprasta: obligacijos perkamos mėnesio pradžioje, o parduodamos mėnesio pabaigoje. Šiame darbe laikoma, jog investuojama į paritetines obligacijas (kupono norma sutampa su rinkos palūkanų norma). Šių obligacijų rinkos kaina (ateities diskontuotų pinigų srautų suma) apibrėžiama kaip

$$P(T, y, C) = \sum_{t=1}^{T-1} \frac{C}{(1+y)^t} + \frac{100}{(1+y)^T}, \quad (2.59)$$

čia  $P$  - obligacijos kaina,  $C = 100y$  - paritetinės obligacijos kuponas,  $y$  - palūkanų (diskonto) norma, išreikšta procentais.

## 2.9 Akcijų modelis

Akcijų gražą galima išreikšti kaip dviejų komponentų sumą, kur pirmoji - graža, gaunama iš dividendų, o antroji - graža, gaunama iš kainos pokyčio rinkoje. Šiame skyrelyje, remiantis Tarptautinių atsiskaitymų banko (angl. *Bank for International Settlements*; žym. BIS) idėja, yra konstruojamas dividendų diskonto modelis (angl. *Dividend Discount Model*; žym. DDM), kuris leis įvertinti šio aktyvo gražą, mokamų dividendų augimą bei „reikalaujamą gražą“ (angl. *cost of equity*<sup>16</sup>). Žinoma, tai nėra vienintelis galimas būdas modeliuoti šį aktyvą. Pavyzdžiui, galima laikyti, jog akcijų graža yra generuojama tik iš kainos pokyčio ir seka atsitiktinio klaidžiojimo procesą, arba remtis Andrew Ang (2011) straipsniu, kuriame autorius pateikia VAR(1) modelį, kuris taip pat atsižvelgia į akcijų indekso gražą, gautą iš kainos pokyčio rinkoje, bei dividendų gražą.

---

<sup>15</sup>Obligacija (angl. *bond*) - tai skolos vertybinis popierius (VP), kurio leidėjais gali būti vyriausybės, įmonės ar kitos finansinės institucijos. Šiame VP atsispindi tiek pinigų suma, kurią investuotojas skolina emitentui, t.y. obligacijos leidėjui, tiek obligacijos išpirkimo data, skolos palūkanų dydis ir t.t. Plačiau - Thau (1992).

<sup>16</sup>Finansų srityje *cost of equity* - tai graža, kurios asmuo reikalauja investuodamas į tam tikrą kompaniją, t.y. pirkdamas jos akcijas.

## Duomenys

Šiame žingsnyje yra nagrinėjami penki *MSCI* akcijų indeksai atitinkamoms vyriausybėms: JAV - MXUS indeksas, Vokietija - MXDE indeksas, Kanada - MXCA indeksas, Didžioji Britanija - MXGB indeksas bei Japonija - MXJP indeksas. Visų aktyvų atveju indekso kainų bei jų mokamų dividendų mėnesinės laiko eilutės yra vienodo ilgio, t.y. nuo 1995 m. sausio mėn. iki 2022 m. rugsėjo mėn. Pavyzdžiui, vizuali šių duomenų dinamika JAV atveju pateikiama 13 pav. Šaltinis - *Bloomberg* duomenų bazė.

### 2.9.1 DDM modelis

Šio modelio idėja yra ta, jog akcijų indekso arba kompanijos vertė yra išreikšta kaip diskontuotų ateities dividendų mokėjimų suma:

$$P_t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_{t+i}}{(1+m)^i}, \quad (2.60)$$

kur  $m > 0$  - diskonto norma (angl. *discount rate*) arba kitaip reikalaujama grąža, kuri negali įgyti labai mažos reikšmės,  $P_t$  - akcijos ar akcijų indekso kaina laiko momentu  $t$  bei  $D_{t+i}$  - dividendų išmokėjimas laiko momentu  $t+i$ .

Jei laikoma, jog dividendų augimas išreiškiamas pastovia konstanta  $d^e$ , tai

$$P_t = \sum_{i=1}^{\infty} D_t \frac{(1+d^e)^i}{(1+m)^i}. \quad (2.61)$$

Tokiu atveju gaunamas Gordono modelis (angl. *Gordon Growth Model*):

$$P_t = \frac{D_{t+1}}{m - d^e},$$

o vieno periodo kainos pokyčio grąža išreiškiamą kaip

$$r_t^p = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{D_t}{D_{t-1}} \frac{m_{t-1} - d_{t-1}^e}{m_t - d_t^e} - 1.$$

Šiame darbe kiekvieno akcijų indekso atveju ilgo termino dividendų augimas bei *cost of equity* skaičiuojami kartu, laikant, jog

$$g_t = \ln \frac{D_t}{D_{t-1}}$$

bei darant prielaidą, jog  $g_t$  atitinka AR(1) modelį, t.y.  $g_t = \alpha + \beta g_{t-1} + \epsilon_t$ . Tokiu atveju laikant, jog pradinė imtis yra sudaryta iš 10 metų stebėjimų ir ją kiekvieną kartą didinant vienu stebėjimu gaunama, jog

$$d_{\hat{t}}^e = \frac{\alpha_{\hat{t}}}{1 - \beta_{\hat{t}}}, \quad m_{\hat{t}} = \frac{D_{\hat{t}}(1 + d_{\hat{t}}^e)}{12P_{\hat{t}}} + d_{\hat{t}}^e, \quad \hat{t} = t + 120, \quad t > 0.$$

Svarbu atkreipti dėmesį, jog  $\alpha$  bei  $\beta$  nėra laike kintantys parametrai, o  $\alpha_t$  bei  $\beta_t$  - reikšmės, gautos turint imtį, sudarytą iš  $\hat{t}$  stebėjimų. Vizuali  $m_t$  bei  $d_t^e$  dinamika matoma 15-16 pav. Be to, turint akcijos dividendus ( $D_t$ ) bei jos kainą ( $P_t$ ) galima paprastai gauti ir dividendų pajamingumą (angl. *divided yield*):

$$y_t^d = \frac{D_t}{12P_t}. \quad (2.62)$$

Patogumo dėlei šiame darbe yra įvedama sąvoka „reikalaujamos gražos perteklius“ (angl. *excess cost of equity*), kuris atspindi skirtumą tarp  $m_t$  bei  $d_t^e$ . Tai yra daroma dėl to, jog šis skirtumas yra modifikuojamas remiantis šešėlinės normos transformacija („Šešėlinė norma (angl. *shadow rate*)“), taip įtraukiant nagrinėjamų duomenų grindis. Akcijų indeksų atveju  $\eta$  yra gaunama iš nagrinėjamos šalies istorinių duomenų, t.y. minimalus buvęs reikalaujamos gražos pertekliaus lygis. Tuo tarpu laikoma, jog  $\kappa = \zeta\eta$ , kur  $\zeta$  - multiplikatorius, gautas nagrinėjant simuliacijų rezultatus. Teoriškai kiekvieno indekso atveju  $\kappa$  turėtų būti kitoks, bet šiame darbe yra laikoma, jog visais atvejais  $\zeta = 0,8$ , o  $\eta = 0,0009$ , t.y.  $\kappa = 0,00072$ .

Turint transformuotus duomenis, laikoma, jog *excess cost of equity* su inkorporuota šešėline norma bei ilgo termino dividendų augimas modeliuojami pagal VAR(1) modelį. Tokiu būdu gaunamos simuliacijų prognozės, kurios toliau yra naudojamos skaičiuojant gražą. Žinoma, turint ateities prognozes, vykdoma atvirkštinė šešėlinės normos transformacija. Tada galima išskaičiuoti numanomą gražą, sudarytą tiek iš dividendų pajamingumo (pirmasis sumos narys), tiek akcijos kainos pokyčio (antrasis sumos narys):

$$R_t = \frac{D_{t+1}}{P_t} + \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{m_{t-1} - d_{t-1}^e}{1 + d_{t-1}^e} + \frac{(1 + d_t^e)(m_{t-1} - d_{t-1}^e)}{m_t - d_t^e} - 1.$$

Turint gražas, galima pamatyti investicinio vieneto (angl. *investment unit*) dinamiką, pavyzdžiui, 120 žingsnių į priekį atžvilgiu. Tai matoma 17 - 18 paveikslėliuose.

## 2.10 Valiutų kursų modelis

Praktikoje dažnai laikoma, jog valiutų kursai yra modeliuojami pagal atsitiktinio klaidžiojimo (angl. *random walk*; žym. RW) procesą. Pavyzdžiui, Rashid (2006) straipsnyje nagrinėja šį teiginį tirdamas Pakistano rupijos (PKR) kursą su Jungtinių Valstijų doleriu, Japonijos jena (JPY), Didžiosios Britanijos svaru sterlingų (GBP) bei pateikia idėją pagrindžiančių įrodymų. Ilgą laiką buvo manyta, jog prognozuojant valiutų kursus joks modelis nėra efektyvesnis nei tiesiog taikant RW modelį.

Tačiau Ca'Zorzi bei Rubaszek (2020) pateikė įrodymą, jog egzistuoja toks modelis, t.y. autoriai straipsnyje pateikė analizę, lygindami penkių skirtingų modelių rezultatus su RW modelio prognozių rezultatais. Taigi, šiame darbe yra pasirinkta naudoti Ca'Zorzi ir Rubaszek (2020) darbe pateiktą kalibruotą pusamžio modelį (angl. *Caibrated half-life model*; žym. HL), kuris, nagrinėjant kursų prognozes, yra pranašesnis nei atsitiktinio klaidžiojimo procesas.

## Duomenys

Šiame skyrelyje yra nagrinėjami keturi valiutų kursai bei penkių vyriausybių infliacijų būsenų (trendų) duomenys, gauti taikant UCSV modelį, aprašytą skyrelyje „Infliacija“. Svarbu atkreipti dėmesį, jog tiek valiutų kursų, tiek infliacijos būsenų laiko eilučių imtys šiame skyriuje yra suvienodinamos. Keturių kursų atveju nagrinėjamos šios laiko eilutės: EUR/USD, JAV bei Vokietijos infliacijos būsenų imtys nuo 1975 m. sausio mėn., EUR/CAD, Kanados bei Vokietijos infliacijos būsenų imtys nuo 1992 m. sausio mėn., EUR/GBP, JK bei Vokietijos infliacijos būsenų imtys nuo 1975 sausio mėn., EUR/JPY, Japonijos bei Vokietijos infliacijos būsenų imtys nuo 1985 m. gruodžio mėn. (visais atvejais duomenų imčių pabaiga yra ta pati, t.y. 2022 m. rugėjo mėn.). Valiutų kursų šaltinis - *Bloomberg* duomenų bazė.

### 2.10.1 HL modelis

Svarbu atkreipti dėmesį, jog anksčiau minėti autoriai taip pat parodo, jog išsivysčiusių šalių valiutų kursai pasižymi šiais dėsningumais:

1. Šių šalių valiutų kursai grįžta į lygį, kuris išplaukia iš perkamosios galios pariteto teorijos (angl. *Purchasing Power Parity*<sup>17</sup>; žym. PPP).
2. Lankstaus kurso režimo valiutoms grįžimas vyksta per nominalaus valiutos kurso pokyčius.

Esant šioms dėsningumams autoriai įrodo, jog jų konstruotas modelis vidutiniu ar ilguoju laikotarpiu yra efektyvesnis nei RW modelis ir suteikia tam tikrą stabilumą.

<sup>17</sup>PPP - ekonomikos teorija, nagrinėjanti skirtingų šalių valiutų kursų bei prekių krepšelio kainų santykį. Teigiama, jog dvi valiutos yra pusiausvyroje (angl. *equilibrium* arba *being at par*), kai prekių krepšelių kainos sutampa nagrinėjamų šalių atveju, atsižvelgus į valiutų kursą. Taikant šią teoriją, galima nagrinėti šalių ekonominį produktyvumą bei lyginti šalių gyvenimo sąlygas (plačiau - A.M. Taylor bei M. P. Taylor (2004)).

Tuo tarpu trumpuoju laikotarpiu modelių prognozių rezultatai beveik nesiskiria. Taigi, šiame darbe yra taikomas analogiškas modelis:

$$\begin{cases} RER_t = \mu + \gamma(RER_{t-1} - \mu) + \epsilon_t, \\ RPI_t = I + RPI_{t-1} + \epsilon_t^*, \\ NER_t = RER_t + RPI_t, \end{cases} \quad (2.63)$$

čia

- $NER_t$  - logaritmuotas nominalus valiutos kursas (angl. *log spot nominal exchange rate*),
- $RPI_t = \ln p_t - \ln p_t^*$  - vietinės valiutos ir užsienio valiutos infliacijos būsenų skirtumas.
- $RER_t$  - logaritmuotas realios valiutos skirtumas (angl. *log real exchange rate*).

Svarbu atkreipti dėmesį, jog originaliame Ca'Zorzi bei Rubaszek (2020) darbe  $RPI_t$  yra apibrėžiamas kaip skirtumas tarp infliacijos indeksų. Kitaip nei šio straipsnio autoriai, šiame darbe  $RPI_t$  yra laikomas infliacijos būsenų skirtumu. Tai yra viena iš keleto naujovių, kuri yra taikoma šiame projekte. Be to, galima pastebėti, jog  $RER_t$  lygtis iš tikrųjų yra pirmos eilės autoregresijos modelis, t.y. AR(1), o tuo tarpu  $RPI_t$  atveju laikoma, jog kiekvienas infliacijos indeksas modeliuojamas naudojant ARIMA(2,1,1)<sup>18</sup> (tuo tarpu infliacijos būsenos buvo modeliuojamos taikant SARIMA(0, 1, 1) × (0, 0, 1)<sub>12</sub><sup>19</sup> modelį). Tokia prielaida yra daroma atlikus tyrimą ir analizuojant skirtingų modelių rezultatus, nagrinėjant autokoreliacijos bei dalinės autokoreliacijos funkcijas (ACF bei PACF), taikant Akaike bei Bajeso informacijos

<sup>18</sup>Atsitiktinė seka  $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$  vadinama (p,d,q) eilės autoregresijos slenkančio vidurkio integruotu procesu - ARIMA(p,d,q), jeigu skirtumai  $(1 - B)^d x_t$  tenkina ARMA(p,q) lygtį

$$\phi(B)(1 - B)^d x_t = \theta(B)z_t,$$

čia  $z_t \sim \mathcal{BT}(0, \sigma^2)$ ,  $B$  - postūmio operatorius, t.y.  $Bx_t = x_{t-1}$  (Leipus (2021)).

<sup>19</sup>Esant atvejui, kai ARIMA modeliu norima aprašyti ir sezoniško komponentę, yra naudojamas sezoninis ARIMA modelis, t.y. SARIMA(p,d,q) × (P,D,Q)<sub>s</sub>:

$$\underbrace{(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)}_{\text{Nesezoninė AR(p) dalis}} \underbrace{(1 - \Phi_1 B^s - \dots - \Phi_P B^{sP})}_{\text{Sezoninė AR(P) dalis}} \underbrace{(1 - B)^d}_{\text{Nesezoninis d kartų skirtumas}} \underbrace{(1 - B^s)^D}_{\text{Sezoninis D kartų skirtumas}} x_t = \underbrace{(1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q)}_{\text{Nesezoninė MA(q) dalis}} \underbrace{(1 + \Theta_1 B^s + \dots + \Theta_Q B^{sQ})}_{\text{Sezoninė MA(Q) dalis}} z_t$$

Plačiau - Leipus (2021).

kriterijus (AIC bei BIC). Be to, kaip ir Ca'Zorzi bei Rubaszek (2020) darbe, taip ir šiame projekte  $\gamma$  reikšmė yra parenkama tokia, jog atspindėtų trejų metų pusamžį, t.y.  $\gamma = 0,981$ .

Taip pat svarbu paminėti, jog autoriai, nagrinėdami 1975 m. sausio mėn. - 2017 m. gegužės mėn. duomenų imtį, skirtingų valiutų kursų atveju pastebėjo ir šiuos dėsningumus (tai taip pat matoma ir atnaujintus duomenis bei taikant modifikaciją - infliacijos būsenas):

- Kiekvieno valiutų kursų atveju  $RER$  vidutiniu laikotarpiu grįžta į istorinį vidurkį.
- $RER_t$  ir  $NER_t$  yra teigiamai koreliuoti, o ne  $RER_t$  bei  $RPI_t$ .

Pirmasis duomenų dėsningumas matomas iš neigiamos koreliacijos, kurią galima matyti jau ir 6 mėn. atveju, o didinant horizontą pastebimas šio dėsningumo stiprėjimas (19 - 20 pav. viršutiniai trys grafikai). Tuo tarpu antras dėsningumas matomas iš likusių grafikų, pateiktų tuose pačiuose paveikslėliuose. Norint tuo įsitikinti, nagrinėjamos šios regresijos lygtys:

$$\Delta RER_{t,h} = \alpha_{0h} + \alpha_{1h} RER_{t-h} + \epsilon_t,$$

$$\Delta NER_{t,h} = \beta_{0h} + \beta_{1h} \Delta RER_{t,h} + \epsilon_t,$$

$$\Delta RPI_{t,h} = \gamma_{0h} + \gamma_{1h} \Delta RER_{t,h} + \epsilon_t,$$

čia  $\Delta y_{t,h} = y_t - y_{t-h}$ . Jei  $RER_t$  pasižymi grįžimo į vidurkį savybe, tai  $\alpha_{1h}$  turėtų konverguoti į  $-1$ . Be to, jei antrasis teiginys yra teisingas, tai turi būti gaunama, jog  $\beta_{1h} = 1$  ir  $\gamma_{1h} = 0$ . Tai kaip tik ir yra matoma nagrinėjamų valiutų kursų atveju (4.1 lentelės).

Vienas iš būdų įvertinti, ar modelis yra korektiškas, yra analizuoti jo riziką. Šiame darbe valiutų kursų modelio atveju yra nagrinėjamos įvairaus horizonto prognozės bei laikoma, jog modelis tinkamas, jei istoriniai duomenys didžiają dalimi stebėjimų papuola į 5% bei 95% prognozių procentilių rėžius. Pavyzdžiui, 21-22 paveikslėliuose matomos prognozės 5 metų horizontui.



## 2.11 Daugiamačių laiko eilučių analizė

Šiame skyrelyje, išanalizavus anksčiau nagrinėjamą metodologiją bei modelių rezultatus, konstruojamas ilgalaikių prognozių daugiamatis laiko eilučių modelis, skirtas modeliuoti rinkos rodiklių (palūkanų normų, valiutų kursų, makroekonominių rodiklių ir t.t.) skirstinius. Turint šio modelio prognozių rezultatus skirtingiems investavimo horizontams, toliau bus nagrinėjamos pseudo investicijos bei aktyvų klasių gražos (1.1 pav.).

### 2.11.1 Vektorinė autoregresija

**1 apibrėžimas.** Procesas  $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$  vadinamas *p-tosios eilės vektorine autoregresija* ir yra žymimas VAR(p), jei jis yra stacionarus ir tenkina išraišką:

$$x_t = \nu + \sum_{i=1}^p \Phi_i x_{t-i} + z_t, \quad z_t \sim \mathcal{BT}(0, \Sigma),$$

čia  $x_t$ ,  $\nu$  bei  $z_t$  yra atitinkamai  $n$  dimensijos endogeninių kintamųjų, konstantų bei baltojo triukšmo paklaidų vektoriai, o  $\Sigma$  ir  $\Phi_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  yra kvadratinės  $n \times n$  dimensijų paklaidų vienalaikių kovariacijų ir parametrų matricos (Kvedaras (2005)).

Tegul  $B_t$  - BVP lūkesčių mediana,  $I_t$  - infliacijos trendas,  $SR_t$ ,  $S_t$ ,  $C_t$  - trumpalaikės palūkanos, statusas bei kreivumas,  $CE_t$  - reikalaujamos gražos perteklius (*excess cost of equity*) bei  $DG_t$  - ilgo termino dividendų augimas. Tada šiame darbe nagrinėjant kiekvieną vyriausybę yra taikomas šis VAR(2) modelis:

$$x_t = \mu + \Phi_1 x_{t-1} + \Phi_2 x_{t-2} + z_t, \quad z_t \sim \mathcal{BT}(0, \Sigma), \quad (2.64)$$

čia  $x_t$  bei  $\mu$  -  $7 \times 1$  dimensijos turimų stebėjimų bei konstantų matricos, o  $\Phi_1$  bei  $\Phi_2$  -  $7 \times 7$  dimensijos parametrų matricos. Be to, koeficientų matricių elementams yra įvedami apribojimai:

$$x_t = \begin{pmatrix} B_t \\ I_t \\ SR_t \\ S_t \\ CE_t \\ DG_t \\ C_t \end{pmatrix}, \Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \phi_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \phi_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{3,1} & \phi_{3,2} & \phi_{3,3} & \phi_{3,4} & 0 & 0 & \phi_{3,7} \\ \phi_{4,1} & 0 & \phi_{4,3} & \phi_{4,4} & 0 & 0 & \phi_{4,7} \\ 0 & \phi_{5,2} & \phi_{5,3} & \phi_{5,4} & \phi_{5,5} & \phi_{5,6} & 0 \\ \phi_{6,1} & \phi_{6,2} & 0 & 0 & \phi_{6,5} & \phi_{6,6} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{7,3} & \phi_{7,4} & 0 & 0 & \phi_{7,7} \end{pmatrix}, \Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tokie parametrų matricių pavidalai gaunami vadovaujantis ne tik ekonomikos dėsningumais (2.3 lentelė) ar nagrinėjant Granger priežastingumo testą (angl. *Granger causality test*; žym. GC), impulsų atsako funkcijas (angl. *impulse response function*; žym. IRF), bet ir remiantis Tayloro taisykle, NS modeliu bei makroekonominės teorija. Tuo tarpu  $\Phi_2$  matricos idėja išplaukia iš „HL modelis“ skyrelyje gautų rezultatų. Žinoma, tolimesnis darbo tikslas yra nagrinėti  $\Phi_1$  matricą įvedus tam tikrų parametrų ženklų apribojimus bei pakeisti paklaidų modeliavimo struktūrą, t.y. nagrinėti ne normalųjį skristinį, bet įtraukti į skristinį sunkias uodegas ir t.t.

$B_t \downarrow$ , kai $SR_t \uparrow$
$I_t \downarrow$ , kai $SR_t \uparrow$
$SR_t \uparrow$ , kai $B_t \uparrow$ arba $I_t \uparrow$
$S_t \downarrow$ , kai $I_t \uparrow$ arba $SR_t \uparrow$
$CE_t \uparrow$ , kai $I_t \uparrow$ arba $SR_t \uparrow$
$DG_t \uparrow$ , kai $B_t \uparrow$

2.3 lentelė: Ekonominių dėsningumų lūkesčiai.

Tuo tarpu valiutų kursų atveju yra laikoma, jog  $RER_t$  yra modeliuojamas naudojant VAR(1) modelį:

$$\tilde{x}_t = \tilde{\mu} + \tilde{\Phi}\tilde{x}_{t-1} + \tilde{z}_t, \quad \tilde{z}_t \sim \mathcal{BT}(0, \Sigma), \quad (2.65)$$

kur

$$\tilde{x}_t = \begin{pmatrix} EURUSD_t \\ EURCAD_t \\ EURGBP_t \\ EURJPY_t \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\phi}_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\phi}_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\phi}_{4,4} \end{pmatrix}.$$

Atlikus GC bei IRF analizę kiekvienos vyriausybės atveju konstruojamas naujas VAR(2) modelis, kuriame yra modeliuojami visi turimi duomenys:

$$\hat{x}_t = \hat{\mu} + \hat{\Phi}_1\hat{x}_{t-1} + \hat{\Phi}_2\hat{x}_{t-2} + \hat{z}_t, \quad \hat{z}_t \sim \mathcal{BT}(0, \Sigma), \quad (2.66)$$

čia  $\hat{x}_t$  -  $39 \times 1$  dimensijos duomenų matrica,  $\hat{\Phi}_1$  -  $39 \times 39$  dimensijos blokinė diagonalioji matrica, sudaryta iš 5 atskirų blokų, kurie tarpusavyje neturi jokio sąryšio ( $A_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  apibrėžiami kaip (2.64) lygtyje esanti koeficientų matrica  $\Phi_1$ , o  $A_5$  - kaip (2.65) lygtyje apibrėžta  $\hat{\Phi}$  matrica). Tuo tarpu  $\hat{\Phi}_2$  matricoje esantys  $B_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  blokai

yra apibrėžiami remiantis (2.64) lygties  $\Phi_2$  matrica. Be to,  $0_{i,k}$  žymi  $i \times k$  dydžio nulines matricas.

$$\hat{\Phi}_1 = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0_{7,7} & 0_{7,7} & 0_{7,7} & 0_{7,4} \\ 0_{7,7} & \boxed{A_2} & 0_{7,7} & 0_{7,7} & 0_{7,4} \\ 0_{7,7} & 0_{7,7} & \boxed{A_3} & 0_{7,7} & 0_{7,4} \\ 0_{7,7} & 0_{7,7} & 0_{7,7} & \boxed{A_4} & 0_{7,4} \\ 0_{4,7} & 0_{4,7} & 0_{4,7} & 0_{4,7} & \boxed{A_5} \end{pmatrix}, \quad \hat{\Phi}_2 = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & 0_{7,7} & 0_{7,7} & 0_{7,7} & 0_{7,4} \\ 0_{7,7} & \boxed{B_2} & 0_{7,7} & 0_{7,7} & 0_{7,4} \\ 0_{7,7} & 0_{7,7} & \boxed{B_3} & 0_{7,7} & 0_{7,4} \\ 0_{7,7} & 0_{7,7} & 0_{7,7} & \boxed{B_4} & 0_{7,4} \\ 0_{4,7} & 0_{4,7} & 0_{4,7} & 0_{4,7} & 0_{4,4} \end{pmatrix}.$$

### 2.11.2 Granger priežastingumo testas

Analizuojant skitingų kintamųjų ryšius dažnai gali iškilti klausimas, kuris iš jų yra kurio priežastis. Granger (1969) pasiūlė tikrinti būtiną priežastingumo sąlygą - priežastis turi būti ankstesnė nei pasekmė.

**2 apibrėžimas.** Jei kintamasis  $y_{1,t}$  yra naudingas prognozuojant kintamojo  $y_{2,t}$  ateitį, tai  $y_{1,t}$  yra vadinamas kintamojo  $y_{2,t}$  *Granger priežastimi* bei žymimas  $y_{1,t} \mapsto y_{2,t}$  (Kvedaras (2005)).

Matematinė Granger priežastingumo formulė užrašoma taikant vidutinės kvadratinės paklaidos kriterijų (angl. *Mean Square Error*; žym. MSE). Tegul  $\mathcal{F}_t$  - informacijos aibė (arba kitaip  $\sigma$ -algebra) iki momento  $t$ ,  $y_{1,t}(h | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(y_{1,t+h} | \mathcal{F}_t)$  - optimali  $h$  žingsnio prognozė bei  $\Sigma_{y_1}(h | \mathcal{F}_t) := \text{MSE}(y_{1,t}(h | \mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(y_{1,t+h} - y_{1,t}(h | \mathcal{F}_t))^2$ .

**3 apibrėžimas.** Laikoma, jog  $y_{1,t}$  yra kintamojo  $y_{2,t}$  Granger priežastis, jei  $\exists h \geq 1$  toks, kad

$$\Sigma_{y_1}(h | \mathcal{F}_t) < \Sigma_{y_1}(h | \mathcal{F}_t \{y_{2,s}, s \leq t\}).$$

Jei turima informacija  $\mathcal{F}_t = \{y_{2,s}, s \leq t\}$ , tada anksčiau pateiktas apibrėžimas yra ekvivalentus šiam:

$$\Sigma_{y_1}(h | y_{2,s}, y_{1,s}, s \leq t) < \Sigma_{y_1}(h | y_{1,s}, s \leq t), \quad h \geq 1.$$

Plačiau apie Granger priežastingumą galima rasti Lütkepohl (2005) knygoje.

Tokiu atveju, jei dvi laiko eilutės yra stacionarios, galima nagrinėti šį VAR(p) modelį:

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11,1} & a_{12,1} \\ a_{21,1} & a_{22,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_{11,p} & a_{12,p} \\ a_{21,p} & a_{22,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-p} \\ y_{2,t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{1,t} \\ \epsilon_{2,t} \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Jei  $y_{2,t} \nrightarrow y_{1,t}$ , tada  $y_{1,t}$  turi priklausyti tik nuo savo praeities ir  $a_{12,i} = 0, \forall i = \{1, \dots, p\}$ .  
 Jei  $y_{2,t} \rightarrow y_{1,t}$ , tai  $y_{2,t}$  praeitis yra naudinga prognozuojant  $y_{1,t}$ , o tai reiškia, jog bent vienas su  $y_{2,t-i}, i > 0$  poveikiu kintamajam  $y_{1,t}$  susijęs koeficientas turi būti statistiškai reikšmingas.

Nulinė Granger nepriežastingumo hipotezė, jog  $y_{2,t} \nrightarrow y_{1,t}$ , (2.67) lygtimi nusakytoje VAR(p) sistemoje formuojama taip:

$$\begin{cases} H_0 : a_{12,1} = \dots = a_{12,p} = 0, \\ H_1 : \exists i \in \{1, \dots, p\} : a_{12,i} \neq 0. \end{cases} \quad (2.68)$$

Norint patikrinti nulinę hipotezę yra taikomas standartinis  $F$  testas<sup>20</sup>. Prie nulinės hipotezės jo statistika

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_U)/p}{RSS_U/(T - 2p - 1)} \sim F(p, T - 2p - 1)$$

yra asimptotiškai pasiskirsčiusi pagal  $F$  skirstinį. Čia  $RSS_R$  bei  $RSS_U$  - apriboto ir neapriboto modelio liekanų kvadratų sumos. Jei  $F > F_\alpha(p, T - 2p - 1)$ , tai nulinė hipotezė atmetama alternatyvos  $y_{2,t} \rightarrow y_{1,t}$  naudai, čia  $\alpha$  - reikšmingumo lygmuo (Kvedaras (2005)).

Žinoma, šis priežastingumo testas nėra tobulas ir turi kelis trūkumus:

- Išvados apie Granger priežastingumą yra jautrios kitų kintamųjų įtraukimui į nagrinėjamą VAR(p) modelį. Šio projekto metu kaip tik buvo matomas šis efektas, todėl buvo nuspręsta „lipdyti“ VAR(2) modelį atsargiai pradedant nuo trijų laiko eilučių ( $B_t, I_t$  bei  $SR_t$ ) ir didinti nagrinėjamų rodiklių skaičių atsižvelgiant į tai, ar IRF bei ekonominis prasmingumas atitinka keliamus lūkesčius.
- Išvados apie Granger priežastingumą įtakos turi ir duomenų dažnumas, t.y. nagrinėjant, pavyzdžiui, mėnesinius duomenis gaunami vieni rezultatai, o savaitinius ar dieninius - kiti.
- Nekorektiškas VAR(p) modelio eilės parinkimas taip pat turi įtakos Granger priežastingumo išvados.

Patogumo dėlei 4.3-4.4 lentelėse pateikiami tik JAV atvejo testų rezultatai, kai koeficientų matricai  $\Phi_1$  yra įvedami apribojimai ir ne. Tuo tarpu iš gautų GC

<sup>20</sup>Alternatyva - chi-kvadrato testas.

rezultatų yra sudaryti grafai (23-32 pav.), kuriuose atspindi priklausomybė tarp kintamųjų remiantis  $F$  testu. Taigi, esant tokiai klaidos tikimybei, šiame darbe (kaip buvo minėta anksčiau) taip pat yra nagrinėjamos ir impulso atsako funkcijos, su kuriomis galima įvertinti, ar įvesti apribojimai  $\Phi_1$  koeficientų matricai yra prasmingi iš ekonominės pusės (remiantis 2.3 lentele).

### 2.11.3 Impulso atsako analizė

Kita alternatyva tiriant dviejų kintamųjų sąryšį yra reakcijos į impulsus analizė, t.y. analizuojamos VAR modelį sudarančių kintamųjų reikšmės, kai nagrinėjama sistema yra paveikiama tam tikru šoku (impulsu).

Tariant, jog yra nagrinėjamas šis VAR(1) modelis:

$$y_t = \mu + \Phi y_{t-1} + \epsilon_t.$$

Tegul  $S$  - laiko momentas, po kurio nagrinėjamoje sistemoje atsiranda impulsai, o  $y_{S+h}^*$  bei  $y_{S+h}$  - kintamųjų reikšmės su ir be nagrinėjamų impulsų. Taigi, kintamųjų reikšmės, kuriose nėra impulso, yra apibrėžiamos lygtimi:

$$y_{S+h} = \mu + \Phi y_{S+h-1} + \epsilon_{S+h}, \quad h > 0,$$

o kintamieji su impulsais apibrėžiami kaip

$$y_{S+h}^* = \mu + \Phi y_{S+h-1} + \epsilon_{S+h} + \epsilon_{S+h}^*, \quad h > 0,$$

kuri yra gaunama anksčiau apibrėžtą lygtį papildžius impulso funkcijos lygtimi

$$\epsilon_{S+h}^* = \begin{cases} \epsilon_{S+h}^*, & h = 1, \dots, k, \\ 0, & h > k. \end{cases}$$

Tada kintamųjų atsaką ( $r_{S+h}$ ) į nagrinėjamus impulsus galima apibrėžti kaip skirtumą tarp  $y_t$  reikšmių įtraukus impulsus ir ne:

$$r_{S+h} = y_{S+h}^* - y_{S+h}.$$

Taip apibrėžta vektorinė funkcija  $r_{S+h}$  yra reakcijos į impulsus funkcija (IRF), kuri atspindi kintamųjų reikšmių pokyčių dinamiką dėl sistemą veikiančių šokų ( $\epsilon_{S+h}^*$ ). Patogumo dėlei dažnai praktikoje IRF pateikiamos grafiniu pavidalu, kadangi taip yra paprasčiau įvertinti bei palyginti vienetinio dydžio (vienetinės standartinės paklaidos prasme) impulso efektą nagrinėjamo modelio kintamiesiems. Kaip galima matyti iš 33 - 37 pav., visų penkių vyriausybių atveju, įvedus anksčiau apibrėžtus  $\Phi_1$  matricos apribojimus, gaunami panašūs dėsningumai, įvardyti 2.3 lentelėje.

## 2.12 Pseudo investicijų gražos

Turint anksčiau minėtų rinkos rodiklių simuliacijas, šiame darbe yra konstruojamos pseudo investicijos, kurias pritaikius portfeliams gaunamos aktyvų gražos. Pavyzdžiui, palūkanų normų kreivių prognozių, išreikštų RDNS faktoriais, atveju galima projektuoti investicijas į vyriausybės vertybinių popierių (žym. VVP) indeksus (2.4 lentelė), kuriuos sudaro skirtingo, bet fiksuoto išpirkimo laikotarpio (trukmės) vertybiniai popieriai. Tai yra atliekama per du žingsnius: pirma, gauna-

	1-5 metų	5-10 metų	1-10 metų
JAV	GVQ0	G6O2	G5O2
Kanada	GVC0	G6C0	G5C0
JK	GVL0	G6L0	G5L0
Vokietija	GVD0	G6D0	G5D0
Japonija	GVY0	G6Y0	G5Y0

2.4 lentelė: Nagrinėjamų vyriausybės vertybinių popierių indeksai.

ma paritetinių obligacijų graža (plačiau - „Paritetinė obligacija“ skyrelyje), antra, kiekvienos vyriausybės atveju reikia nustatyti, kokiais svoriais investuoti į indekso segmentus (JAV atvejo rezultatai pateikiami 2.5 lentelėje). Tam yra skaičiuojama modifikuota finansinė trukmė (angl. *modified duration*):

$$D_{Mod} = \frac{D_{Mac}}{1 + \frac{YTM}{k}},$$

čia  $k$  - kuponų mokėjimų skaičius per metus,  $YTM$  - obligacijos pelningumas iki išpirkimo,  $D_{Mac}$  - Macaulay trukmė, kuri yra apibrėžiama kaip

$$D_{Mac} = \frac{\sum_{t=1}^T \frac{t \cdot C}{(1+y)^t} + \frac{T \cdot N}{(1+y)^T}}{P},$$

kur  $C$  - kuponinis mokėjimas,  $t$  - kupono mokėjimo momentas,  $y$  - pelningumas,  $T$  - obligacijos trukmė,  $N$  - nominali obligacijos vertė,  $P$  - obligacijos kaina  $D_{Mac}$  skaičiavimo metu (šaltinis - Lietuvos banko projektas (2012)).

	3 mėn.	1 m.	2 m.	3 m.	4 m.	5 m.	6 m.	7 m.	8 m.	9 m.	10 m.	EUR/USD
G5O2	0,001	0,141	0,218	0,156	0,146	0,124	0,091	0,034	0,073	0,017	0	-1
GVQ0	0,002	0,206	0,317	0,228	0,203	0,044	0	0	0	0	0	-1
G6O2	0	0	0	0	0,020	0,297	0,288	0,108	0,233	0,054	0	-1

2.5 lentelė: Investiciniai svoriai į atskirus indeksų segmentus (nedraudžiant rizikos).

Žinant skirtingų išpirkimo terminų modifikuotą finansinę trukmę yra atitinkamai susveriami obligacijų indeksuose esantys popieriai pagal *ICE* duomenų bazėje pateikiamą kiekvieno VVP modifikuotą finansinę trukmę. Svarbu atkreipti dėmesį į tai, jog 2.5 lentelėje yra pateiktas nedraustos rizikos atvejis bei daroma prielaida, jog investuotojas teikia prioritetą eurams, o ne JAV doleriams (tai matoma iš EUR/USD stulpelio, kur -1 reiškia, jog doleriai yra parduodami ir perkami eurai). Tuo tarpu akcijų atveju laikoma, jog investavimo svoris yra maksimalus, t.y. lygus 1 (2.6 lentelė). Žinoma, sudarinėjant pseudo investicijas gali kilti klausimas, ar turima pozicija yra apdrausta nuo galimų rizikų. Šiame darbe laikoma, jog norint apdrausti obligacijų investiciją yra visiškai parduodamas atitinkamos vyriausybės 3 mėn. taškas ir perkamas Vokietijos 3 mėn. taške esantys VVP (2.8 lentelė). Panašus vaizdas matomas ir akcijų atveju (2.9 lentelė).

	EUR/USD	EUR/CAD	EUR/GBP	EUR/JPY	MXUS	MXCA	MXUK	MXDE	MXJP
JAV akcijos	-1	0	0	0	1	0	0	0	0
Kanados akcijos	0	-1	0	0	0	1	0	0	0
JK akcijos	0	0	-1	0	0	0	1	0	0
Vokietijos akcijos	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Japonijos akcijos	0	0	0	-1	0	0	0	0	1

2.6 lentelė: Penkių akcijų indeksų pseudo investicijų svoriai (nedraudžiant rizikos).

	3 mėn.	1 m.	2m.	3m.	4m.	5m.	6m.	7m.	8m.	9m.	10m.	3 mėn.*
G5O2	-0,999	0,141	0,218	0,156	0,146	0,124	0,091	0,034	0,073	0,017	0	1
GVQ0	-0,998	0,206	0,317	0,228	0,203	0,044	0	0	0	0	0	1
G6O2	-1	0	0	0	0,020	0,297	0,288	0,108	0,233	0,054	0	1

\* Atitinkamo Vokietijos VVP indekso 3 mėn. segmentas.

2.7 lentelė: Investiciniai svoriai į atskirus indeksų segmentus (draudžiant riziką).

	US 3mėn.	CA 3 mėn.	GB 3 mėn.	DE 3 mėn.	JP 3 mėn.	MXUS	MXCA	MXUK	MXDE	MXJP
JAV akcijos	-1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
Kanados akcijos	0	-1	0	1	0	0	1	0	0	0
JK akcijos	0	0	-1	1	0	0	0	1	0	0
Vokietijos akcijos	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
Japonijos akcijos	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1

**Pastaba.** Patogumo dėlei šioje lentelėje naudojami ISO šalių trumpiniai.

2.8 lentelė: Penkių akcijų indeksų pseudo investicijų svoriai (draudžiant riziką).

## 2.13 Investicinio portfelio optimizavimas

### 2.13.1 Markowitz vidurkio-dispersijos analizė

Markowitz (1952) straipsnyje pristatoma klasikinė modernioji portfelio teorija, dažnai vadinama vidurkio-dispersijos analize (angl. *mean-variance analysis*; žym. MV), kurioje laikoma, jog vidurkis – tai vidutinės tikėtinos gražos sinonimas, o dispersija – rizikos. Šios teorijos pagrindu yra aiškinama, jog racionalūs investuotojai, norėdami optimizuoti portfelį, naudoja diversifikaciją<sup>21</sup>. Šio metodo atveju apibrėžiamos dvi sąvokos:

- Teigiama, jog portfelis (investicija) A vidurkio-dispersijos prasme dominuoja kitą portfelį B, jei portfelio A vidurkis yra didesnis arba lygus portfelio B vidurkiui ( $\mu_A \geq \mu_B$ ), kai A dispersija (ar kitas rizikos matas) yra mažesnė už B dispersiją ( $\sigma_A < \sigma_B$ ). Analogiška išvada gaunama, jei laikoma, jog  $\mu_A > \mu_B$ , kai  $\sigma_A \leq \sigma_B$  (egzistuoja atvejis, kai esant tai pačiai rizikai portfelio A graža yra didesnė už portfelio B gražą).
- *Efektivumo frontas* - tai taškų (portfelių), esančių vidurkio standartinio nuokrypio plokštumoje, aibė, kurioje atsispindi optimalūs, didžiausią gražą, esant tam tikrai rizikai, generuojantys portfeliai.

### Vieno periodo analizė

Tariant, jog yra nagrinėjama  $m$  rizikingų investicijų, portfelio optimizavimas vyksta vienam periodui, t.y. nėra vykdomas perbalansavimas. Markowitz teorijoje svarbu apibrėžti šias reikšmes: vieno periodo gražos vektorių kaip

$$\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_m)',$$

o vidurkių vektorių bei kovariacijų matricą kaip

$$\mathbb{E}(\mathbf{R}) = \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \quad Cov(\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} & \cdots & \Sigma_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{m,1} & \cdots & \Sigma_{m,m} \end{pmatrix}.$$

---

<sup>21</sup> *Diversifikacija* – tai portfelio rizikos mažinimo bei pelno didinimo strategija, kai yra didinama portfelį sudarančių investicinių priemonių įvairovė.



Taip pat laikoma, jog svoriai į nagrinėjamus aktyvus aprašomi vektoriumi

$$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m), \quad \sum_{i=1}^m w_i = 1,$$

o investicinio portfelio grąža

$$R_{\mathbf{w}} = \mathbf{w}'\mathbf{R} = \sum_{i=1}^m w_i R_i,$$

kur  $\alpha_{\mathbf{w}} = \mathbb{E}(R_{\mathbf{w}}) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\alpha}$  bei  $\sigma_{\mathbf{w}}^2 = \mathbb{D}(R_{\mathbf{w}}) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$ . Tada pagrindinis šios analizės tikslas - įvertinti skirtingus investicinio portfelio svorius ( $\mathbf{w}$ ) nagrinėjant vidurkio-dispersijos kintamųjų poras  $(\alpha_{\mathbf{w}}, \sigma_{\mathbf{w}}^2)$ , t.y. ieškant didžiausios tikėtinos grąžos ( $\alpha_{\mathbf{w}}$ ) bei mažiausios galimos rizikos ( $\sigma_{\mathbf{w}}^2$ ). Tai galima atlikti trimis būdais, kurie iš tikrųjų yra vienas kitam ekvivalentūs.

### Problema 1. Rizikos minimizavimas

Apibrėžus siektiną grąžą ( $\alpha_0$ ) ieškomas optimalus mažiausios galimos rizikos portfelis:

$$\begin{aligned} \text{Minimizuojama} \quad & \frac{1}{2}\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \\ \text{Apribojimai} \quad & \mathbf{w}'\boldsymbol{\alpha} = \alpha_0 \\ & \mathbf{w}'\mathbf{1}_m = 1 \end{aligned}$$

Esant šiems apribojimams, sprendinys turi išreikštinį pavidalą, kuris yra gaunamas taikant Lagranžo daugiklių metodą (angl. *Lagrange multiplier method*):

$$L(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} + \lambda_1(\alpha_0 - \mathbf{w}'\boldsymbol{\alpha}) + \lambda_2(1 - \mathbf{w}'\mathbf{1}_m),$$

čia  $\lambda_1, \lambda_2$  - Lagranžo daugikliai. Norint rasti  $\mathbf{w}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2$  reikšmes pirmiausia yra gaunamos dalinių išvestinių reikšmės, kurios yra prilyginamos nuliui:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} &= \mathbf{0}_m = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} - \lambda_1\boldsymbol{\alpha} - \lambda_2\mathbf{1}_m, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= 0 = \alpha_0 - \mathbf{w}'\boldsymbol{\alpha}, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= 0 = 1 - \mathbf{w}'\mathbf{1}_m. \end{aligned}$$

Turint šių išvestinių išraiškas, pirmiausia yra randama  $\mathbf{w}$  reikšmė  $\lambda_1$  bei  $\lambda_2$  terminais:

$$\mathbf{w}_0 = \lambda_1\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_m$$

. Tada radus  $\mathbf{w}$  išraišką ieškoma  $\lambda_1$  bei  $\lambda_2$  reikšmių:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \mathbf{w}'_0\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\alpha}) + \lambda_2(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_m), \\ 1 &= \mathbf{w}'_0\mathbf{1}_m = \lambda_1(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_m) + \lambda_2(\mathbf{1}'_m\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_m). \end{aligned}$$

## Problema 2. Gražos maksimizavimas

Apibrėžus siektiną riziką ( $\sigma_0^2$ ) ieškomas optimalus portfelis, kurio graža yra maksimizuojama:

$$\begin{aligned} \text{Maksimizuojama} \quad & \mathbb{E}(R_{\mathbf{w}}) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\alpha} \\ \text{Apribojimai} \quad & \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} = \sigma_0^2 \\ & \mathbf{w}'\mathbf{1}_m = 1 \end{aligned}$$

## Problema 3. Rizikos vengimo (angl. *risk aversion*) optimizavimas

Tegul  $\lambda \geq 0$  žymi jautrumo rizikai koeficientą. Tada galima maksimizuoti kvadratinę naudingumo funkciją:

$$\begin{aligned} \text{Maksimizuojama} \quad & \left( \mathbb{E}(R_{\mathbf{w}}) - \frac{1}{2}\lambda\mathbb{D}(R_{\mathbf{w}}) \right) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{2}\lambda\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \\ \text{Apribojimai} \quad & \mathbf{w}'\mathbf{1}_m = 1 \end{aligned}$$

Žinoma, ieškant optimalaus portfelio visais šiais atvejais yra galimybė įvesti ir kitokius apribojimus:

- Turėti tik ilgą poziciją, t.y. skolinimosi galimybė neegzistuoja ( $\mathbf{w}$ :  $w_j \geq 0, \forall j$ ).
- Apriboti investicinius svorius iš viršaus ir apačios. Tai gali atsitikti dėl politinių priežasčių. Pavyzdžiui, tam tikros šalies atžvilgiu norima turėti minimalią alokaciją arba nenorima turėti per didelės koncentracijos į vieną investiciją ( $L_i \leq w_i \leq U_i$ , čia  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_m)$  bei  $\mathbf{L} = (L_1, \dots, L_m)$  - apatiniai ir viršutiniai apribojimai  $m$  investicijoms).
- Galimi tam tikri prekybos apribojimai, atsižvelgiant į patiriamus kaštus ( $\Delta\mathbf{w} = (\Delta w_1, \dots, \Delta w_m)$ , kur  $|\Delta w_j| \leq U_i$  individualios investicijos atveju bei  $\sum_{i=1}^m |\Delta w_j| \leq U_*$  - portfelio limitui).
- Taip pat yra galimybė įvesti tam tikrus svorių apribojimus, kuriais siekiama atkartoti lyginamojo indekso (angl. *benchmark portfolio*) svorius ( $|\mathbf{w} - \mathbf{w}_B| = \sum_{i=1}^m |[\mathbf{w} - \mathbf{w}_B]_i| < U_B$ , čia  $\mathbf{w}_B$  ir  $R_b = \mathbf{w}_B\mathbf{R}$  - lyginamojo portfelio investiciniai svoriai bei tikėtina graža).
- Taip pat galima įvesti ir aktyvaus valdymo standartinio nuokrypio apribojimus, skirtus nagrinėti galimas pozicijas prieš lyginamąjį indeksą (angl. *tracking error constraints*), rizikos faktorių apribojimus, pavyzdžiui, teigiant, jog

visi rizikos faktoriai turi įnešti vienodus rizikos svorius (tokia idėja matoma konstruojant rizikos pariteto portfelį). Taip pat yra galimybė įtraukti ir minimalaus portfelio dydžio, investicijų kiekio ar transakcijos dydžio apribojimus ir t.t.

## Metodo trūkumai

Taikant šį būdą buvo susidurta ir su keliais šio metodo trūkumais. Pirma, rizikos, gražos bei koreliacijos reikšmės priklauso nuo vertinimo metodo. Antra, jei gražoms taikomos normališkumo prielaidos, metodas neatsižvelgia į sunkias uodegas bei asimetriškumą. Tokiu atveju standartinis nuokrypis nėra intuityvus, kadangi investuotojui yra aktualiau nagrinėti neigiamas gražas (angl. *loss aversion*), o tuo tarpu dispersija parodo tiek teigiamas, tiek neigiamas ekstremalias reikšmes. Tokiu atveju alternatyva yra naudoti VaR<sup>22</sup> (angl. *Value at Risk*), kur yra nagrinėjami nuos-toliai. Trečia, praktikoje vidurkis yra gaunamas naudojant istorinius duomenis. Tai kelia tam tikrų problemų aktyvų alokacijai, kadangi istorija gali nepasikartoti. Ketvirta, standartinis nuokrypis nėra suderintas rizikos matas. Alternatyva tam yra taikyti VaR arba CVaR<sup>23</sup> (angl. *Conditional Value at Risk*), tačiau optimizacija šiais atvejais tampa sunkesnė. Penkta, ne tik naudojama normaliojo skirstinio prielaida aktyvų gražoms nagrinėti, bet ir metodo struktūra leidžia nagrinėti tik vieno periodo atvejus.

Stoyanov ir kt. (2011) išreiškia kritiką moderniai portfelio teorijai, teigdami, jog investicijų išskaidymas lygiais svoriais gali būti kai kuriais atvejais pranašesnis nei tiesiog taikant portfelio optimizaciją. Tuo tarpu Michaud (1989) straipsnyje akcentuoja, jog vidurkio-dispersijos rezultatai labai priklauso nuo parametrų vertinimo paklaidų (o tai reiškia, jog priklauso nuo skaičiavimo momento).

---

<sup>22</sup>Dažnai literatūroje vertės pokyčio rizika (VaR) apibrėžiama kaip tam tikra reikšmė, kuri su iš anksto nurodyta tikimybe bei laiko horizontu apibrėžia didžiausią galimą nuostolį:

$$\mathbb{P}(L \geq VaR) \leq 1 - \alpha,$$

čia  $\alpha$  - pasiklovimo lygmuo, o  $L$  - potencialus nuostolis (Jorion (2006)).

<sup>23</sup>Sąlyginė vertės pokyčio rizika (CVaR) - tai rodiklis, kuris kitaip nei vertės pokyčio rizika parodo ne nuostolio ribą su tam tikru pasirinktu pasiklovimo lygmeniu ( $\alpha$ ), bet vidutinį tikėtiną nuostolį, viršijantį VaR:

$$CVaR_{1-\alpha} = \mathbb{E}(L|L \geq VaR_{1-\alpha}).$$

Plačiau - Rockafellar (2002).

## 2.13.2 Rizikos pariteto (RP) analizė

Kadangi MV metodas linkęs parinkti nestabilią aktyvų alokaciją skirtingu investavimo horizontu bei didelę rizikos koncentraciją, šiame darbe (kaip buvo minima įvade) yra nagrinėjamas ir rizikos pariteto metodas. Rizikos paritetas - tai investicijų valdymo metodas, kuris siekia maksimizuoti nekoreliuotų rizikos šaltinių skaičių. Literatūroje yra keletas rizikos pariteto apibrėžimų bei būdų jį įgyvendinti, tačiau šiame darbe yra nagrinėjamas metodas, kuris remiasi minimalaus posūkio diversifikacijos rodikliu (angl. *Minimum-Torsion Bets*; žym. MTB), aprašytu Meucci bei kitų autorių (2015) straipsnyje. Žinoma, bet kurio RP metodo trūkumas - tam tikro režimo pasikeitimas koreliacijose.

Meucci bei kiti (2015) straipsnyje pristato tam tikrų veiksmų, strategijų bei investicijų indėlį į rizikos vertinimą, remiantis MTB reikšmėmis, t.y. tam tikru optimizuotu nekoreliuotų faktorių rinkiniu (teoretiniu turtu), kuris yra artimas originalių/galimų investicijų rinkiniui. Tokiu būdu galima perversti bet koki turimų aktyvų portfelį į lygiavertį investicinį portfelį, kuriame „aktyvai“ yra nekoreliuoti. Tada galima kiekybiškai įvertinti portfelio rizikos diversifikaciją. Diversifikacijos rodiklis, kurį pristato Meucci ir kiti autoriai savo darbe, yra vadinamas efektyviu MTB skaičiumi (angl. *Effective Number of Minimum-Torsion Bets*; žym. ENMTB), kuris įgyja maksimalią reikšmę, kai visų nekoreliuotų faktorių įnašai (svoriai) yra vienodi.

Šiame darbe pateikiamas tik nagrinėjamų parametrų išvedimas. Plačiau apie metodo idėją galima rasti minėtų autorių darbe. Tuo tarpu RP integravimo į LB strateginę turto alokaciją (angl. *Strategic Asset Allocation*; žym. SAA), metodo privalumus bei trūkumus pastebėtus integruojant jį - Kanapeckas (2020).

### MTB

Turtu pagrįsto portfelio atveju laikoma, jog portfelis yra  $n$  koreliuotų aktyvų (akcijos, obligacijos, ateities kontraktai, ...) rinkinys bei portfelio grąža - svertinis kiekvieno turimo aktyvo grąžos vidurkis:

$$R = \sum_{i=1}^n w_i R_i,$$

kur  $w_i$  žymi nagrinėjamo aktyvo, esančio investiciniame portfelyje, svorį (analogiškai buvo matoma „Markowitz vidurkio-dispersijos analizė“ skyrelyje). Tuo tarpu faktoriais grįsto portfelio valdymo, veiksniais pagrįsto rizikos biudžeto sudarymo bei

rizikos pariteto atveju laikoma, jog portfelis yra  $k$  koreliuotų faktorių (kaip momentumas, vertė, ...) rinkinys, o portfelio graža apibrėžiama kaip

$$R = \sum_{j=1}^k b_j F_j,$$

čia  $b_k$  - svoris į  $k$ -tąjį faktorių. Remiantis straipsniu daroma prielaida, jog portfelio gražą galima išreikšti kaip  $k$  nekoreliuotų faktorių kombinaciją:

$$R = \sum_{j=1}^k \mathring{b}_j \mathring{F}_j, \quad (2.69)$$

kur  $\rho(\mathring{F}_j, \mathring{F}_i) = 0$ , jei  $j \neq i$  (šiam darbe koreliacija žymima simboliu  $\rho$ ). Tada galima apibrėžti diversifikacijos skirstinį (angl. *diversification distribution*):

$$p_j \equiv \frac{\mathbb{D}(\mathring{b}_j \mathring{F}_j)}{\mathbb{D}(R)}, \quad j = 1, \dots, k, \quad (2.70)$$

čia  $\mathbb{D}$  žymi dispersiją bei  $\sum_{j=1}^k p_j = 1$ ,  $p_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Laikoma, jog portfelis yra gerai diversifikuotas turint  $j$  faktorių bei atitinka rizikos paritetą, jei (2.70) lygtimi apibrėžtas skirstinys yra tolygusis. Tada autoriai apibrėžia efektyvų diversifikacijos rodiklių skaičių (angl. *effective number of bets*; žym. ENB)<sup>24</sup> kaip

$$N = \exp\left(-\sum_{j=1}^k p_j \ln p_j\right). \quad (2.71)$$

Norint įvertinti diversifikaciją naudojant ENMTB, pirmiausia reikia išreikšti konstruojamo portfelio gražas kaip nekoreliuotų narių rinkinį ((2.69) lygtis). Vienas iš būdų - taikyti Meucci (2009) pasiūlymą. Visų pirma įvertinama faktorių  $\mathbf{F}$  kovariacijos matrica  $Cov(\mathbf{F}) \equiv \mathbf{\Sigma}_F$ . Tada yra taikoma pagrindinių komponentių dekompozicija  $\mathbf{e}\mathbf{\lambda}^2\mathbf{e}' = \mathbf{\Sigma}_F$ , čia  $\mathbf{\lambda}$  - diagonali matrica, sudaryta iš  $\mathbf{\Sigma}_F$  ypatingųjų reikšmių<sup>25</sup>, o  $\mathbf{e}$  - matrica, kurios stulpeliai yra sudaryti iš  $\mathbf{\Sigma}_F$  tikrinių vektorių bei tenkina lygtį, jog  $\mathbf{e}\mathbf{e}' = \mathbf{e}'\mathbf{e} = \mathbf{I}$ . Tokiu atveju tikriniai vektoriai generuoja  $k$  nekoreliuotų faktorių, kuriuos autoriai darbe įvardija kaip pagrindinių komponentių diversifikacijos rodiklį (angl. *principal components bets*), kurį pažymi kaip  $\mathring{\mathbf{F}}_{PC}$ , bei  $k$  naujų portfelio faktorių svorių į pagrindines komponentes (angl. *pricipal components exposures*), kuriuos pažymi kaip  $\mathring{\mathbf{b}}_{PC}$ . Tokiu atveju gaunama, jog portfelio graža užrašoma kaip

$$\mathring{\mathbf{F}}_{PC} \equiv \mathbf{e}'\mathbf{F}, \quad \mathring{\mathbf{b}}_{PC} \equiv \mathbf{e}'\mathbf{b}, \quad R = \mathbf{b}'\mathbf{F} = \mathring{\mathbf{b}}'_{PC}\mathring{\mathbf{F}}_{PC}. \quad (2.72)$$

<sup>24</sup>(2.71) lygties išraiška nėra vienintelė, kuri atitinka autorių keliamus reikalavimus. Pavyzdžiui, Meucci (2012) apibrėžia kitą eksponentinės entropijos išraišką.

<sup>25</sup>Remiantis J. Kubiliaus „Matematikos terminų žodynu“ *singular value* verčiama kaip *ypatingoji reikšmė*.

Tuo tarpu pagrindinių komponentų diversifikacijos skirstinys (angl. *principal components diversification distribution*) bei efektyvus pagrindinių komponentų diversifikacijos rodiklių skaičius (angl. *effective number of principal components bets*) užrašomos kaip

$$\mathbf{p}_{PC} = \frac{(\mathbf{e}'\mathbf{b}) \circ (\mathbf{e}'\Sigma_{\mathbf{F}}\mathbf{b})}{\mathbf{b}'\Sigma_{\mathbf{F}}\mathbf{b}}, \quad N_{PC}(\mathbf{b}) = \exp(-\mathbf{p}_{PC}(\mathbf{b})' \ln \mathbf{p}_{PC}(\mathbf{b})).$$

Taikant pagrindinių komponentų analizę (angl. *principal component analysis*; žym. PCA) gaunamas nekoreliuotų faktorių rinkinys, naudojamas skaičiuojant ENB, tačiau naudojant PCA atsiranda keletas problemų, apie kurias galima plačiau rasti Meucci ir kt. (2015).

Norint išvengti šių problemų, autoriai pristato minimalaus posūkio transformaciją (angl. *minimum-torsion transformation*), kuri minimizuoja atitikties paklaidą (angl. *tracking error*) atsižvelgiant į pradinius faktorius:

$$\mathring{\mathbf{t}}_{MT} \equiv \underset{\rho(\mathbf{t}\mathbf{F})=\mathbf{I}_{k \times k}}{\operatorname{argmin}} NTE(\mathbf{t}\mathbf{F}|\mathbf{F}), \quad (2.73)$$

kur

$$NTE(\mathbf{Z}|\mathbf{F}) = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_j \mathbb{D} \left( \frac{Z_j - F_j}{\sigma_{F_j}} \right)}.$$

Tariant, jog (2.73) lygtį įmanoma išspręsti, autoriai savo darbe apibrėžia MTB, kuri žymi kaip  $\mathring{\mathbf{F}}_{MT}$  bei minimalaus posūkio svorius (angl. *minimum-torsion exposures*), kuriuos žymi kaip  $\mathring{\mathbf{b}}_{MT}$  bei naudoja išreiškiant tikėtiną portfelio grąžą kaip

$$\mathring{\mathbf{F}}_{MT} \equiv \mathring{\mathbf{t}}_{MT}\mathbf{F}, \quad \mathring{\mathbf{b}}_{MT} \equiv \mathring{\mathbf{t}}_{MT}'^{-1}\mathbf{b}, \quad \mathbf{R} = \mathring{\mathbf{b}}_{MT}'\mathring{\mathbf{F}}_{MT}. \quad (2.74)$$

Tada minimalaus posūkio diversifikacijos skirstinys (angl. *minimum-torsion diversification distribution*) bei efektyvus MTB skaičius (angl. *effective number of minimum-torsion bets*) užrašomi kaip

$$\mathbf{p}_{MT}(\mathbf{b}) = \frac{(\mathring{\mathbf{t}}_{MT}'^{-1}\mathbf{b}) \circ (\mathring{\mathbf{t}}_{MT}'\Sigma_{\mathbf{F}}\mathbf{b})}{\mathbf{b}'\Sigma_{\mathbf{F}}\mathbf{b}}, \quad N_{MT}(\mathbf{b}) = \exp(-\mathbf{p}_{MT}(\mathbf{b})' \ln \mathbf{p}_{MT}(\mathbf{b})).$$

Norint rasti (2.73) sprendinį pirmiausia yra įvedama keletas žymėjimų. Tegul  $\sigma_{\mathbf{F}}$  - vektorius, sudarytas iš faktorių standartinių nuokrypių, gaunamų kartu su koreliacijos matrica  $\mathbf{C}_{\mathbf{F}}$  iš kovariacijos matricos:

$$\Sigma_{\mathbf{F}} \equiv Cov(\mathbf{F}) \equiv dg(\sigma_{\mathbf{F}})\mathbf{C}_{\mathbf{F}}dg(\sigma_{\mathbf{F}}),$$

čia  $dg(\mathbf{v})$  - operatorius, kuris generuoja  $k \times k$  dydžio diagonalinę matricą, sudarytą iš vektoriaus  $\mathbf{v}$  reikšmių. Tada koreliacijų matrica yra išskaidoma taikant Riccati sprendinį ( $\mathbf{c}$  - simetrinė, teigiamai apibrėžta matrica) taip, kad

$$\mathbf{C}_F = \mathbf{c}\mathbf{c}' = \mathbf{c}^2.$$

Koreliacijų matricos  $\mathbf{C}_F$  Riccati sprendinys gaunamas paprasčiausiai taikant PCA dekompoziciją, t.y.  $\mathbf{C}_F = \mathbf{g}\boldsymbol{\gamma}^2\mathbf{g}'$ , kur  $\boldsymbol{\gamma}$  - diagonali matrica, sudaryta iš ypatingųjų koreliacijos matricos  $\mathbf{C}_F$  reikšmių, o  $\mathbf{g}$  - matrica, kurios stulpeliai yra atitinkami tikriniai vektoriai, kurie yra ortogonalūs bei tenkina lygybę, jog  $\mathbf{g}\mathbf{g}' = \mathbf{g}'\mathbf{g} = \mathbf{I}$ . Tada Riccati sprendinys užrašomas kaip  $\mathbf{c} = \mathbf{g}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{g}'$ , trikdžioji (angl. *perurbation*) matrica  $\boldsymbol{\pi}$  gaunama sekant autorių algoritmą, aprašytą 2.9 lentelėje.

$\boldsymbol{\pi}$	
Minimalaus posūkio rekursija	
1. <i>Inicijuoti</i>	$\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{I}$
2. <i>Riccati sprendinys</i>	$\mathbf{u} \leftarrow (\mathbf{d}\mathbf{c}^2\mathbf{d})^{\frac{1}{2}}$
3. <i>Apsisukimas</i>	$\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{u}^{-1}\mathbf{d}\mathbf{c}$
4. <i>Praplėtimas</i>	$\mathbf{d} \leftarrow dg(dg^{-1}(\mathbf{q}\mathbf{c}))$
5. <i>Trikdys</i>	$\boldsymbol{\pi} \leftarrow \mathbf{d}\mathbf{q}$
6. Jei sprendinys konvergavo, rezultatas yra $\boldsymbol{\pi}$ . Kitu atveju grįžtama į 1. žingsnį.	

2.9 lentelė: Meucci ir kt. (2015) algoritmas ieškant  $\boldsymbol{\pi}$ .

Turint  $\boldsymbol{\pi}$  reikšmę (2.73) lygties sprendinys užrašomas kaip

$$\mathring{\mathbf{t}}_{MT} = dg(\boldsymbol{\sigma}_F)\boldsymbol{\pi}\mathbf{c}^{-1}dg(\boldsymbol{\sigma}_F)^{-1},$$

kur laikoma, jog nagrinėjami faktoriai negali būti kolinearūs, nes kitu atveju atvirkštinis Riccati sprendinys ( $\mathbf{c}^{-1}$ ) yra neapibrėžtas.

## 3 skyrius

# Praktinė dalis

### 3.1 Nagrinėjami duomenys

Šiame darbe nagrinėjamos 39 laiko eilutės, kurių pradžios ir pabaigos sutampa, t.y. nuo 2005 m. sausio mėn. iki 2022 m. rugsėjo mėn. Kaip buvo minima skyrelyje „Daugiamacių laiko eilučių analizė“, tai yra BVP lūkesčių, infliacijos būsenų, SR, S, C, reikalaujamos gražos pertekliaus ir ilgo termino dividendų augimo laiko eilutės, kur kiekviena yra gauta atskirai vyriausybei, bei 4 valiutų kursų laiko eilutės. Turint šias laiko eilutes yra gaunami 120 stebėjimų į priekį (kitaip tariant 10 m.) rizikos šaltinių skirstiniai, iš kurių konstruojami aktyvų klasių gražų skirstiniai. Vizualūs prognozių grafikai penkių vyriausybės atveju matomi 38 - 42 paveikslėliuose.

Taip pat šiame darbe norima atkreipti dėmesį, jog konstruojant pseudo investicijas penkių akcijų indeksai (MXUS, MXUK, MXCA, MXDE, MXJP) yra susveriami tam tikromis proporcijomis (67 %, 7%, 3%, 10%, 7%), kur svoriai atspindi apytikslį šių šalių svorį į MSCI World indeksą. Be to, šiame darbe nagrinėjami du VVP indeksų atvejai, t.y. naudojamas 1-5 m. VVP indeksas (suderintas su dabartiniu LB investavimo horizontu) bei 1-10 m. indeksas.

---

**Pastaba.** Kiekvienam šio skyrelio poskyryje yra pateikiamos lentelės, kurios yra galutinių lentelių, esančių prieduose, iškarpos.

---



## 3.2 Portfelijų analizė

### 3.2.1 Rizikos pariteto prasme

Šio darbo metu siekiama rasti optimalų portfelį rizikos pariteto prasme. Tam yra nagrinėjami du variantai, t.y. 1-5 m. VVP indeksai su valiutine rizika ir be jos (vienu ir kitu atveju yra įtraukiamas draustas bei nedraustas akcijų indeksas) bei analogiškai elgiamasi 1-10 m. VVP indeksų atveju. Nagrinėjant investicinius portfelius, kurių valiutinė rizika nėra drausta, matoma, jog jie generuoja didesnę riziką nei tie, kuriuose ši rizika yra panaikinta. Kadangi Lietuvos bankas yra centrinis bankas, tam tikra turimo turto dalis privalo būti išreikšta užsienio valiuta. Tokio nutarimo laikomasi norint išlaikyti likvidumą ekonominės krizės atveju. Šio darbo atveju laikoma, jog siektinas rizikos limitas yra išreiškiamas sąlyginės vertės pokyčio rizikos matu, kurio reikšmė privalo būti arti 4%, t.y.  $CVaR_{0,95} = -0,04$ . Problema ta, jog konstruojant investicinį portfelį RP prasme, gaunamas atsitiktinis rizikos biudžeto išnaudojimas (investuotojas nežino, kokį rizikos biudžetą gaus). Kadangi neturintį valiutinės rizikos portfelį galima interpretuoti kaip saugų, galima susverti abu portfelius taip, jog būtų pasiektas užsibrėžtas rizikos limitas. Vienas iš būdų tai įgyvendinti - Tobin (1958) straipsnyje pateikta atskyrimo teorema, kur, turint efektyvumo frontą, jame yra atidedamas, pavyzdžiui, siektino Šarpo rodiklio taškas. Laikant, jog investuotojas turi nerizikingą investiciją (šio darbo atveju galima manyti, jog tai yra Vokietijos 3 mėn. taškas, esantis VVP indeksuose), yra brėžiama liestinė pasirinkto taško atžvilgiu. Keičiant nerizikingos investicijos kiekį, gaunami portfeliai, kurie nėra ant efektyvaus fronto, bet vis tiek įgyvendinami (žinoma, esant skolinimosi galimybei). Šiame žingsnyje buvo pasirinktas kiek paprastesnis būdas, t.y. parinkti tokius dviejų portfelijų svorius, jog būtų gaunama anksčiau apibrėžto rizikos mato reikšmė. Galutinė dviejų portfelijų struktūra bei rezultatai yra pateikiami 4.16 lentelėje. Be to, esant šiai rizikos mato reikšmei, bus galima palyginti rizikos pariteto bei Markotiz vidurkio-dispersijos metodų rezultatus.

#### **Investicinis portfelis naudojant 1-5 m. VVP indeksus**

Žvelgiant į 4.5 lentelę, kurioje pateikiami portfelio dinamikos rezultatai skirtingu investavimo horizontu (tiek apdraudus aktyvus nuo valiutinės rizikos, tiek ne), galima matyti, jog sudarant investicinį portfelį iš 1-5 m. VVP bei akcijų indeksų rizikos

pariteto metodu diversifikacija yra maksimali visų nagrinėjamų horizontų atveju (ir tai matoma ne tik nagrinėjant 4.5 lentelės rezultatus, bet ir kitų lentelių atvejais). Analizuojant šią lentelę norima pabrėžti šiuos dėsningumus:

- Lyginant akcijų indeksų įnašus skirtingais investavimo horizontais matomas įdomus reiškinys - esant valiutinei rizikai, svariai į akcijas dramatiškai nesikeičia penkių horizontų atvejais. Kita vertus, panaikinus anksčiau minėtą riziką galima pastebėti, jog modelis didindamas investavimo horizontą didina ir įnašą į akcijų indeksą, o tai leidžia susidaryti nuomonę, jog per 10 metų akcijos darosi vis mažiau rizikingesnės standartinio nuokrypio prasme.
- Žvelgiant į GVD0 indeksą galima matyti, jog didinat investavimo horizontą iki 3 metų svoris į šį aktyvą didėja (panašiai matoma ir GVD0\* atveju). Be to, galima pastebėti, jog svoris į Vokietijos VVP išlieka ganėtinai didelis (tai galima paaiškinti tuo, jog šio aktyvo atveju nėra valiutinės rizikos, kadangi yra investuojama lokalia valiuta - euru).
- Japonijos 1-5 m. VVP indekso svorių tendencija taip pat išsiskiria. Nagrinėjant apdraustus aktyvus matoma, jog trumpu horizontu šiam indeksui (GVY0\*) yra priskiriamas didelis svoris, o didinat horizontą jis yra mažinamas. Tai yra susiję su ilgą laiką Japonijoje buvusiu mažu palūkanų normų kintamu, dėl kurio modelyje trumpo horizonto portfeliuose Japonijos indeksams priskiriami dideli svoriai. Ilgu investavimo horizontu mažas kaupimas ir vis didėjanti palūkanų normų augimo tikimybė padaro šias investicijas objektyviai rizikingas.
- Svarbu atkreipti dėmesį ir į svorių tendenciją visų indeksų atveju. Kaip matoma, draustos valiutinės rizikos atveju ilgu horizontu (10 m.) portfelio svoriai išsidėsto palyginamai, bet trumpu horizontu matomas svorių neproporcingumas. Įdomu tai, jog tai pastebima tiek nedraudžiant nuo valiutinės rizikos, tiek nagrinėjant du atvejus, kai nėra įtraukiamas akcijų indeksas (4.6 lentelė).
- Rizikos matų reikšmės draudžiant aktyvus nuo valiutinės rizikos yra mažesnė nei nedraudžiant.
- Nedraustų portfelių grąžų medianos (1 m. horizonto atžvilgiu) yra neigiamos visais atvejais. Tai matoma tiek įtraukus akcijų indeksą, tiek be jo. Kitaip ta-

riant, standartinio nuokrypio prasme portfelis yra diversifikuojamas, bet graža išlieka neigiama (didžiaja dalimi taip atsitinka dėl valiutos kurso).

- Matoma, jog horizontas turi įtakos investicinio portfelio, sudaryto iš nerizikingu aktyvų klasių, svoriams (plačiau - Siegel (2008)).

Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.	Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.
GVQ0	0,070	0,057	0,054	0,055	0,074	GVQ0*	0,087	0,080	0,086	0,099	0,119
GVL0	0,087	0,087	0,082	0,086	0,120	GVL0*	0,111	0,101	0,114	0,135	0,146
GVC0	0,100	0,094	0,087	0,090	0,113	GVC0*	0,091	0,101	0,119	0,147	0,167
GVD0	0,568	0,604	0,632	0,601	0,443	GVD0*	0,146	0,255	0,339	0,361	0,251
GVY0	0,072	0,064	0,060	0,071	0,110	GVY0*	0,531	0,418	0,285	0,174	0,177
EQ	0,103	0,093	0,086	0,096	0,140	EQ*	0,034	0,045	0,058	0,084	0,139

\* Panaikinus valiutinę riziką.

3.1 lentelė: RP portfelių svoriai (įtraukiant akcijų indeksą; 1-5 m. VVP indekai).

Kita vertus, nagrinėjant 4.6 lentelėje esantį apdraustų aktyvų atveji, susidaro nuomonė, jog 10 metų horizonto atveju svoriai išsidėsto vadovaujantis taip vadina- mu *naive risk parity*, t.y. svorių išskaidymas beveik vienodas. Kaip ir anksčiau nagrinėtos lentelės atveju, taip ir šioje kyla klausimas, iš kur atsiranda tokie svorių nuokrypiai. Ar tai susiję su Japonijos indekso mažu kintamumu, ar dėl to, jog gražos lūkesčiai reikšmingai svyruoja? Matant tokius rezultatus pastebima, jog galbūt 10 metų horizontas rizikos pariteto prasme yra prasmingesnis ne 1 metų. Kita vertus, lyginant 4.5 bei 4.6 lentelių rezultatus didelių pokyčių nematyti nei svorių tenden- cijoje, nei nagrinėjant rizikos matus ar gražų procentilius vienu metų horizontu.

Vienas iš galimų tolimesnių darbų - 10 metų gražos bei rizikos charakteristikų analizė visų indeksų atveju. Gali būti, jog akcijos šio darbo kontekste yra mažiau rizikingos, o 1-5 metų obligacijos yra labiau rizikingos didinat investavimo horizon- tą, t.y. turint ilgesnį investavimo horizontą, aktyvų rizikingumas keičiasi (*mark- to-market* riziką keičia reinvestavimo rizika). Jei tai pasitvirtintų, būtų pagrindo paneigti tipišką suvokimą, jog mažesnės trukmės VVP yra mažiau rizikingi nei il- gesnės trukmės obligacijos, o akcijos - dar rizikingesnės (plačiau - Siegel (2008)).

Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.	Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.
GVQ0	0,083	0,071	0,068	0,073	0,100	GVQ0*	0,091	0,099	0,121	0,154	0,171
GVL0	0,124	0,112	0,103	0,110	0,158	GVL0*	0,101	0,104	0,125	0,163	0,196
GVC0	0,122	0,112	0,101	0,107	0,135	GVC0*	0,091	0,103	0,123	0,158	0,191
GVD0	0,594	0,632	0,657	0,622	0,468	GVD0*	0,129	0,240	0,323	0,334	0,231
GVY0	0,077	0,072	0,070	0,087	0,139	GVY0*	0,588	0,455	0,309	0,190	0,210

\* Panaikinus valiutinę riziką.

3.2 lentelė: RP portfelių svoriai (neįtraukiant akcijų indekso; 1-5 m. VVP indeksai).

### Investicinis portfelis naudojant 1-10 m. VVP indeksus

Nagrinėjant rezultatus, pateiktus 4.7 - 4.8, matoma, jog visais atvejais Vokietijos VVP indeksui priskiriami svoriai didėja iki 5 m. horizonto, o tada sumažėja. Tai galima paaiškinti tuo, jog ilgėjant horizontui šio indekso rizika mažėja tol, kol yra neviršijamos investicijų vidutinės trukmės (šio indekso kontekste vidutinė trukmė yra apie 5 m.). Tuo atveju, kai yra viršijama ši trukmė, svoris į aktyvą mažėja bei stabilizuojasi tam tikram horizontui. Tuo tarpu kitų aktyvų svoriai išlieka panašūs didinant horizontą. Išsiskiria nebent Japonijos atvejis, bet analogiškas vaizdas yra matomas 1-5 m. VVP indeksų atveju.

Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.	Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.
G5O2	0,109	0,099	0,096	0,094	0,108	G5O2*	0,137	0,121	0,122	0,140	0,175
G5L0	0,161	0,153	0,144	0,139	0,163	G5L0*	0,138	0,118	0,119	0,142	0,191
G5C0	0,153	0,146	0,137	0,134	0,145	G5C0*	0,119	0,110	0,114	0,138	0,176
G5D0	0,478	0,505	0,531	0,536	0,459	G5D0*	0,142	0,189	0,256	0,329	0,284
G5Y0	0,099	0,097	0,093	0,097	0,126	G5Y0*	0,464	0,461	0,390	0,250	0,175

\* Panaikinus valiutinę riziką.

3.3 lentelė: RP portfelių svoriai (neįtraukiant akcijų indekso; 1-10 m. VVP indeksai).

Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.	Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.
G5O2	0,092	0,079	0,078	0,075	0,082	G5O2*	0,129	0,099	0,088	0,092	0,122
G5L0	0,109	0,117	0,115	0,111	0,125	G5L0*	0,142	0,113	0,108	0,119	0,147
G5C0	0,123	0,121	0,116	0,114	0,121	G5C0*	0,109	0,104	0,108	0,126	0,153
G5D0	0,449	0,471	0,497	0,506	0,432	G5D0*	0,157	0,199	0,262	0,339	0,292
G5Y0	0,092	0,086	0,080	0,081	0,101	G5Y0*	0,398	0,417	0,363	0,237	0,153
EQ	0,135	0,126	0,114	0,112	0,139	EQ*	0,065	0,069	0,072	0,087	0,132

\* Panaikinus valiutinę riziką.

3.4 lentelė: RP portfelių svoriai (įtraukiant akcijų indeksą; 1-10 m. VVP indeksai).

Svarbu atkreipti dėmesį, jog didžioji dalis tendencijų išlieka analogiškos anksčiau aptartiems atvejams. Pavyzdžiui, 1-5 m. VVP indeksų atvejis, kai nėra panaikinama valiutinė rizika, yra ganėtinai panašus į 4.7 lentelėje pateikiamą 1-10 m. VVP indeksų atvejį. Įdomu tai, jog esant tokiems svorių panašumams, portfelio, sudaryto iš 1-10 m. trukmės VVP indeksų, bendra rizika yra didesnė. Kita vertus, palyginus 4.7 bei 4.8 lentelėse esančių portfelių, neturinčių valiutinės rizikos, atvejus, matoma, jog akcijų indekso įtraukimas į portfelį didelės įtakos rizikos matų reikšmėms nedaro. Tai galėtų reikšti, jog su tokiu akcijų kiekiu (pateiktu 4.7 lentelėje) diversifikacija yra gerinama. Pagrindinis skirtumas renkantis tarp 1-5 metų indeksų ir 1-10 metų indeksų susijęs su horizonto pasirinkimu. Vokietijos VVP, kurių rizikai įtakos turi palūkanų normų rizika, maksimalus svoris (tikėtina, jog tai atspindi mažiausią riziką) atitinka investicijų vidutinę trukmę.

### RP metodu konstruoti portfeliai su vienodais rizikos biudžetais

Nagrinėjant portfelius, kurių rizikos biudžetai yra palyginami, t.y.  $CVaR_{0,95} = 4\%$ , matoma, jog portfelių, kuriuose skaičiuojant yra naudojami 1-5 m. VVP indeksai, struktūra yra gana stabili keičiantis investavimo horizontui. Žinoma, matomi svorių pokyčiai investicijose, kuriose valiutinė rizika yra drausta. Tuo tarpu nagrinėjant portfelius, kuriuos sudaro 1-10 m. VVP indeksai, matomas svorių mažėjimas didinat horizontą tiek akcijų indekse, tiek indeksuose, kuriuose valiutinė rizika nėra drausta. Įdomu tai, jog abiejuose RP portfeliuose modelio laukiama graža yra

Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.	Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.
GVQ0*	0,035	0,037	0,045	0,064	0,088	G5O2*	0,088	0,080	0,084	0,110	0,139
GVL0*	0,039	0,039	0,046	0,068	0,101	G5L0*	0,088	0,078	0,082	0,111	0,152
GVC0*	0,035	0,039	0,045	0,066	0,098	G5C0*	0,076	0,073	0,079	0,108	0,140
GVD0	0,399	0,468	0,517	0,491	0,334	G5D0	0,253	0,285	0,330	0,368	0,315
GVY0*	0,226	0,171	0,114	0,079	0,108	G5Y0*	0,297	0,304	0,271	0,195	0,139
GVQ0	0,043	0,036	0,034	0,032	0,036	G5O2	0,033	0,027	0,024	0,017	0,017
GVL0	0,053	0,054	0,051	0,050	0,058	G5L0	0,039	0,040	0,035	0,025	0,026
GVC0	0,062	0,059	0,055	0,053	0,055	G5C0	0,044	0,041	0,035	0,025	0,025
GVY0	0,044	0,040	0,038	0,042	0,053	G5Y0	0,033	0,029	0,024	0,018	0,021
EQ	0,064	0,058	0,054	0,056	0,068	EQ	0,049	0,043	0,035	0,025	0,028

\* Panaikinus valiutinę riziką.

3.5 lentelė: RP portfelių svoriai, kai siektina  $CVaR_{0,95}$  reikšmė lygi 4%.

neigiama 1 m. horizontu, o 2 m. ir daugiau - teigiama. Tai atspindi didžiausią šio modelio trūkumą - siekiant diversifikacijos ilgu laikotarpiu neįvertinama šiuo metu

esanti rinkos situacija. Taip pat lyginant šiuos portfelius matoma, jog 1-5 m. atveju portfelio diversifikacija didėja didinat horizontą, o 1-10 m. - mažėja. Visgi didesnė diversifikacija matoma 1-10 m. portfeliui (tai atsispindi iš diversifikacijos rodiklio, kuris yra vertinamas naudojant 1 metų horizonto gražų skirstinį).

### 3.2.2 Vidurkio-dispersijos prasme

Norint palyginti RP metodu konstruoto portfelio diversifikacijos rodiklius, gražą, rizika bei kitus aspektus, šiame darbe konstruojamas ir Markowitz metodu grįstas investicinis portfelis. Kadangi, kaip buvo minima anksčiau, Lietuvos bankas turi tam tikrų įsipareigojimų (užsienio atsargų rezervai, galima rizika ir t.t.), šio metodo atveju yra naudojami analogiški aktyvai, kurie buvo taikomi konstruojant naują rizikos pariteto portfelį (tiek iš draustų, tiek iš nedraustų aktyvų). Kaip ir anksčiau, taip ir šio metodo atveju parenkami tokie portfeliai atitinkamu investavimo horizontu, jog sąlyginės vertės pokyčio rizikos reikšmė vienu metų horizontu būtų arti 4%.

---

**Pastaba.** Šiame darbe norima atkreipti dėmesį, jog analizuojant įvairius Markowitz metodo atvejus buvo pastebėta, jog modelis dažnai neįtraukia nedraustų aktyvų, t.y. priskiria jiems nulinį svorinį, kadangi daugumos iš jų trumpo horizonto graža yra neigiama. Kadangi, kaip buvo minėta anksčiau, Lietuvos bankas yra centrinis bankas, jis privalo turėti tam tikrą aktyvų dalį, neapdraustą nuo valiutinės rizikos, t.y. lokalia užsienio valiuta. Taigi, šio metodo atveju yra įvedamas 20% apribojimas, kuriuo siekiama, jog modelis priskirs vieną penktąją svorio į nedraustus VVP indeksus. Taip pat siekiant neleisti modeliui investuoti likusios dalies į vieną aktyvą (išlaikant diversifikaciją), likusių aktyvų atveju (išskyrus akcijas bei Vokietijos VVP indeksą) yra įvedamas 30% apribojimas, t.y. į bet kuri iš likusių aktyvų modelis negali investuoti daugiau nei 30%.

---

Nagrinėjant gautus rezultatus (4.16 lentelė) matoma, jog tik 10 m. horizonte modelis priskiria tam tikrą svorį į akcijų indeksą. Tuo tarpu į nedraustą Japonijos 1-5 m. indeksą svoriai trumpu laikotarpiu yra lygūs 0, o 1-10 m. atveju modelis atmeta galimybę investuoti į nedraustą G5Y0 indeksą. Tokią modelio elgseną galima paaiškinti tuo, jog trumpu laikotarpiu šių aktyvų gražų vidurkiai buvo neigiami.

Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.	Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.
GVQ0*	0,179	0,100	0,052	0,054	0,231	G5O2*	0,246	0,139	0,065	0,081	0,300
GVL0*	0,208	0,207	0,190	0,160	0,000	G5L0*	0,192	0,191	0,193	0,106	0,000
GVC0*	0,052	0,016	0,000	0,000	0,153	G5C0*	0,000	0,000	0,000	0,003	0,100
GVD0*	0,061	0,177	0,267	0,451	0,309	G5D0*	0,062	0,170	0,243	0,310	0,397
GVY0*	0,300	0,300	0,291	0,135	0,000	G5Y0*	0,300	0,300	0,300	0,300	0,000
GVQ0	0,017	0,020	0,026	0,013	0,000	G5O2	0,000	0,000	0,011	0,025	0,000
GVL0	0,092	0,093	0,091	0,095	0,054	G5L0	0,108	0,109	0,107	0,099	0,000
GVC0	0,091	0,087	0,074	0,057	0,146	G5C0	0,092	0,091	0,081	0,076	0,200
GVY0	0,000	0,000	0,009	0,035	0,000	G5Y0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
EQ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,106	EQ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,003

\* Panaikinus valiutinę riziką.

3.6 lentelė: MV portfelių svoriai, kai siektina  $CVaR_{0,95}$  reikšmė lygi 4%.

Vadinasi, modeliui nėra prasmės rinktis to, kas nešėtų neigiamą grąžą. Taip pat galima matyti, jog ne visais investavimo horizontais gaunami portfeliai, kurių rizika (CVaR) yra lygi 4% vienų metų horizontu. Vadinasi, modelis generuoja tam tikrus kraštinius atvejus. Taip pat svarbu atkreipti dėmesį į investicijų svorius skirtingu investavimo horizontu. Pavyzdžiui, nagrinėjant investicinį portfelį, sudarytą iš 1-5 m. VVP indeksų, matoma, jog 1 metų bei 10 metų horizontų atveju svoriai dramatiškai išsiskiria, t.y. keičiantis investavimo horizontui portfelių sudėtis smarkiai keičiasi. Vadinasi, didėja pirkimo/pardavimo reikmė, o tai didina prekybos kaštus. Be to, galima pastebėti, jog ilgėjant investavimo horizontui prastėja diversifikacijos rodikliai (ENMTB) ir jie yra ženkliai mažesni, nei gauti iš RP procedūros.

### 3.3 Rizikos pariteto bei Markowitz metodų palyginimas

Lyginant gautus rezultatus matomi tam tikri metodų išsiskyrimai. Pirma, darbe buvo pastebėta, jog neįtraukus tam tikrų apribojimų (kadangi yra apibrėžtas siektinas rizikos lygis bei privaloma prisiimti tam tikrą dalį valiutinės rizikos) Markowitz metodas atmets tuos aktyvus, kurie trumpu laikotarpiu generuoja neigiamą grąžą (tai yra susiję su valiutų modeliu, kuris rodo, jog visos valiutos, lyginant su euru, pinga; analogiškai su akcijomis - trumpu laikotarpiu matoma neigiama grąža dėl valiutinės komponentės). Tuo tarpu rizikos pariteto metodas prisiima daugiau valiutinės rizikos (neįtraukiant jokių apribojimų). Žinoma, tokiu atveju RP rizika yra pilnai išnaudojama, o MV atveju - ne. Vadinasi, vidurkio-dispersijos atveju yra

imami kraštiniai atvejai. Antra, nagrinėjant investicinius svorius MV atveju matomas didelis svorių išsiskyrimas skirtingu investavimo horizontu. Kaip buvo minėta anksčiau, tai gali sukelti prekybos problemų. Tuo tarpu nagrinėjant RP rezultatus matomas svorių panašumas nagrinėjant skirtingus investavimo horizontus. Trečia, matomos tam tikros problemos trumpu investavimo horizontu. RP prasme matoma neigiama graža, o MV - teigiama. Kita vertus, nors ir esant neigiamai rizikos pariteto portfelių gražai, metodas geriau elgiasi ilgesniu investavimo horizontu, tai galbūt būtų logiškiau pasirinkti RP portfelį. Ketvirta, skirtingu horizontu matoma, jog MV diversifikacija yra nestabili, nepaisant to, jog diversifikacijos rodiklis priskiria didelę reikšmę (žinoma, tai atsitinka tik įvedus apribojimus, bet ir esant jiems matomas ENMTB rodiklio reikšmių mažėjimas). Problema ta, jog šio metodo atveju negalima kontroliuoti diversifikacijos bei negalima būti garantuotais, jog modelis nepasirinks kampo sprendimo (kas matoma iš rezultatų). Penkta, pastebima, jog trumpu laikotarpiu MV modelio vertinamos gražos geresnės, nei gražos gautos, iš RP procedūros, tačiau ilgu horizontu skiriasi mažai.

### **3.3.1 Pseudo investicijų gražų koreliacijos bei standartiniai nuokrypiai**

Anksčiau apibrėžtų portfelių atvejais nagrinėjama ir turimų aktyvų gražų koreliacijų matricos bei standartiniai nuokrypiai atitinkamu investavimo horizontu. Šiame darbe pateikiami 3 laikotarpių atvejai (1, 5 bei 10 m.). Koreliacijų matricų rezultatus galima matyti 4.9, 4.11, 4.14 bei 4.15 lentelėse, o gražų standartinio nuokrypio rezultatus - 4.10 bei 4.12 lentelėse.

Nagrinėjant 4.11 lentelės duomenis galima matyti, jog GVQ0 bei akcijų indekso koreliacija didėja nagrinėjant ilgesnius investavimo horizontus. Priešinga situacija matoma Vokietijos atveju (GVD0), kai didinat horizontą, koreliacija su akcijomis darosi neigiama. Taip pat svarbu atkreipti dėmesį į Japonijos atvejį. Trumpu laikotarpiu GVV0 bei akcijų koreliacija yra maža, bet didinat horizontą koreliacija vis didėja. Visgi galima laikyti, jog didžiausi skirtumai atsiranda Vokietijos atveju, kadangi laikui bėgant Vokietijos koreliacija su kitais aktyvais visada mažėja. Tuo tarpu lyginant nedraustų 1-5 m. VVP indeksų rezultatus su draustais (4.9 lentelė) galima pamatyti, jog nedraustų aktyvų koreliacijos komponentės yra žymiai didesnės. Taigi, valiutinės rizikos komponentė tam tikrų aktyvų atveju didina koreliaciją.



Tuo tarpu žvelgiant į 4.9 lentelės duomenis, galima matyti, jog draustų aktyvų atveju akcijų koreliacija yra neigiama (trumpu laikotarpiu), o didinant horizontą - didėja. Svarbu atkreipti dėmesį, jog nesant valiutinei rizikai išlieka obligacijų rizika, t.y. saugių aktyvų rizika. Esant neigiamai akcijų indekso koreliacijai, galima nuspėti, jog yra laikomasi finansuose dažnai matomo fenomeno - *flight-to-safety*, kai investuotojai parduoda rizikingesnius aktyvus. Būtent trumpu laikotarpiu laikoma, jog akcijos yra rizikingesnės nei obligacijos (plačiau - Bajoux-Besnainou ir kt. (2003) straipsnyje arba Yang, Zhou bei Wang (2009) darbe). Tuo tarpu žiūrint į lentelės rezultatus, matoma, jog ilgu horizontu yra priešingai - didelė ir teigiama akcijų indekso koreliacija su kitais aktyvais.

Abiejų lentelių rezultatų atveju galima matyti, jog tarpusavio obligacijų indeksų koreliacijos yra ganėtinai didelės. Kita vertus, lyginant draustų 1-5 m. bei 1-10 m. indeksų gražų koreliacijas didelio kokybinio skirtumo nematyti, t.y. tendencijos yra ganėtinai panašios (analogiškai nepanaikinus valiutinės rizikos).

Nagrinėjant standartinio nuokrypio rezultatus matoma viena ir ta pati tendencija - didinant investavimo horizontą aktyvų standartiniai nuokrypiai mažėja.

## 4 skyrius

### Išvados

Šiame magistriniame darbe konstruojamas ilgalaikių gražų modelis bei nagrinėjama horizonto įtaka optimaliai portfelio struktūrai tiek rizikos pariteto metodu, tiek Markotiwz vidurkio-dispersijos atveju. Pritaikius modeliuojamo modelio prognozes konstruojamiems portfeliams buvo gautos įvairios išvados. Pirma, lyginant portfelių diversifikaciją, matoma, jog MV atveju gaunama aukšta diversifikacijos rodiklio reikšmė tik dėl įvestų apribojimų, o keičiant horizontą pastebimas ryškus investicijų svorių pokytis. RP atveju svoriai yra pastovesni. Antra, nagrinėjant MV portfelius matoma, jog dėl pasirinkto optimizavimo momento, kai trumpu horizontu yra prognozuojama neigiama akcijų graža, metodas neįtraukia jokio svorio į akcijų indeksą. Trečia, matomas įdomus dėsningumas su Japonijos indeksu. Rizikos pariteto atveju laikoma, jog nedrausti indeksai (GVY0, G5Y0) trumpu laikotarpiu laikomi nerizikingais (tai pastebima iš didelių svorių), tačiau didinat horizontą svoriai į juos yra mažinami. Kita vertus, Markowitz metodo atveju trumpu laikotarpiu jie nėra įtraukiami (G5Y0 visais atvejais priskiriamas 0 svoris). Ketvirta, naudojant rizikos paritetu gautą investicinį portfelį, kuris neturi gražos siekiamybės, būtų prasminga turėti portfelio valdymo sąrangą, susidedančią iš bent dviejų lygių, t.y. ilgu horizontu siekiama diversifikuoti riziką, o trumpu horizontu siekiama realizuoti atsirandančius rizikos premijos nuokrypius nuo pusiausvyros.

Pagrindinė tolimesnių darbų kryptis - išplėtoti modelio aprėptį padidinant aktyvų klasių spektrą bendrovėmis, hipotekos obligacijomis (angl. *mortgage-backed securities*; žym. MBS), nekilnojamo turto fondais (angl. *real estate investment trust*; žym. REIT), kitomis vyriausybėmis. Kitas žingsnis būtų plėsti modelio ap-

rėpti, leidžiant įdiegti ilgalaikės makroekonominės raidos scenarijų įtakos vertinimą gražai ir portfelio pasirinkimui.

# Literatūra

- [1] A. ANG, Predicting dividends in log-linear present value models, *Pacific-Basin Finance Journal*, Vol. 20(1), 2012, 151-171.
- [2] L. BACHELIER, Theorie de la speculation, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Vol. 3(17), 1900, 21-86.
- [3] I. BAJEUX-BESNAINOU, J.V. JORDAN, R. PORTAIT, Dynamic Asset Allocation for Stocks, Bonds, and Cash, *The Journal of Business*, Vol. 76(2) 2003, 670-680.
- [4] C. BERNADELL, J. COCHE, K. NYHOLM, Yield Curve Prediction for the Strategic Investor, *SSRN Electronic Journal*, 2005.
- [5] F. BLACK, Interest Rates as Options, *The Journal of Finance*, Vol. 50(5), 1995, 1371-1376.
- [6] O. BLANCHARD, *Macroeconomics*, 4th. ed., Prentice Hall, Hoboken, 2005.
- [7] M.S. BROSE, M.D. FLOOD, D. KRISHNA, B. NICHOLS, *Handbook of Financial Data and Risk Information*. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
- [8] M. CA'ZORZI, M. RUBASZEK, Exchange rate forecasting on a napkin, *Journal of International Money and Finance*, Vol. 104, 2020.
- [9] S.G. CECCHETTI, P. HOOPER, B.C. KASMAN, K.L. SCHOENHOLTZ, M.W. WATSON, Understanding the Evolving Inflation Process, *Journal of Business and Economic Statistics*, 2007.
- [10] J.C.C. CHAN, Specification Tests for Time-Varying Parameter Models with Stochastic Volatility, *Econometric Reviews*, Vol. 37(8), 2018, 807-823.

- [11] F.X. DIEBOLD, C. LI, Forecasting the term structure of government bond yields, *Journal of Econometrics*, Vol. 130(2), 2006, 337-364.
- [12] J. FAUST, J. WRIGHT, Forecasting inflation, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 35, 2012, 1126-1138.
- [13] B.N. GAFAROV, Do unobserved components models forecast inflation in Russia?, [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=2333459](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2333459).
- [14] C. GARNIER, E. MERTENS, E. NELSON, Trend Inflation in Advanced Economies, *International Journal of Central Banking*, Vol. 11(4), 2015, 65-136.
- [15] A. GELMAN, D.B. RUBIN, A Single Series from the Gibbs Sampler Provides a False Sense of Security\*, 1992.
- [16] S. GEMAN, D. GEMAN, Stochastic Relaxation, Gibbs Distribution and Bayesian Restoration of Images, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 6(6), 1984, 721-741.
- [17] J.F. GEWEKE, *Contemporary Bayesian Econometrics and Statistics*, 1st ed., Wiley-Interscience, New Jersey, 2005.
- [18] J.F. GEWEKE, Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments, Staff Report 148, Federal Reserve Bank of Minneapolis, 1991.
- [19] W.R. GILKS, S. RICHARDSON, D. J. SPIEGELHALTER, Markov Chain Monte Carlo in Practice, *Journal of Econometrics*, 1st. ed., Chapman and Hall/CRC, New York, 1995.
- [20] C. GRANGER, Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-spectral Methods, Vol. 37(3), 1969, 424-438.
- [21] J.D. HAMILTON, *Time series analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1994.
- [22] H. HANNOUN, Ultra-low or negative interest rates: what they mean for financial stability and growth, 2015.

- [23] J. YANG Y. ZHOU, Z. WANG, The stock–bond correlation and macroeconomic conditions: One and a half centuries of evidence, *Review of Economic Studies*, Vol. 33(4), 2009, 670-680.
- [24] P. JORION, *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 3rd. ed., McGraw Hill Professional, Boston, 2006.
- [25] J. KANAPECKAS, Central Bank of Lithuania: Asset Allocation in a Risk Parity Framework, 2020.
- [26] C.J. KIM, C.R. NELSON, *State-Space Models with Regime Switching : Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*, MIT Press, Cambridge Mass, 1999.
- [27] S. KIM, N. SHEPHERD, S. CHIB, Stochastic volatility: Likelihood inference and comparison with ARCH models , *Review of Economic Studies*, Vol. 65(3), 1998, 361-393.
- [28] G. KOOP, *Bayesian Econometrics*, Wiley, 2003.
- [29] G. KOOP, S. POTTER, Time varying VARs with inequality restrictions, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 35, 2011, 1126-1138.
- [30] D.P. KROESE, K.C.C. CHAN, *Statistical Modeling and Computation*, Springer, 2014.
- [31] V. KVEDARAS, Taikomoji laiko eilučių ekonometrija, [http://web.vu.lt/mif/v.kvedaras/files/2013/09/Konspektas\\_2005.pdf](http://web.vu.lt/mif/v.kvedaras/files/2013/09/Konspektas_2005.pdf).
- [32] R. LEIPUS, Laiko eilutės, [https://klevas.mif.vu.lt/~remis/fin\\_laik\\_eil\\_4.pdf?fbclid=IwAR08GsSMauJpmm7ULk1qShsVn0W\\_J3nga\\_eahiNGySXFcT1FUoDzFhNhAk0](https://klevas.mif.vu.lt/~remis/fin_laik_eil_4.pdf?fbclid=IwAR08GsSMauJpmm7ULk1qShsVn0W_J3nga_eahiNGySXFcT1FUoDzFhNhAk0).
- [33] LIETUVOS BANKAS, Projektas. Pensijų kaupimo bendrovės prašymo suteikti leidimą dėl didesnio limito investuoti į vieno emitento išleistas ar (ir) garantuotus vertybinius popierius nagrinėjimo metodikai, [https://www.lb.lt/uploads/documents/files/news/prasymo\\_didinti\\_investavimo\\_limita\\_nagrinejimas.pdf](https://www.lb.lt/uploads/documents/files/news/prasymo_didinti_investavimo_limita_nagrinejimas.pdf), 2012.

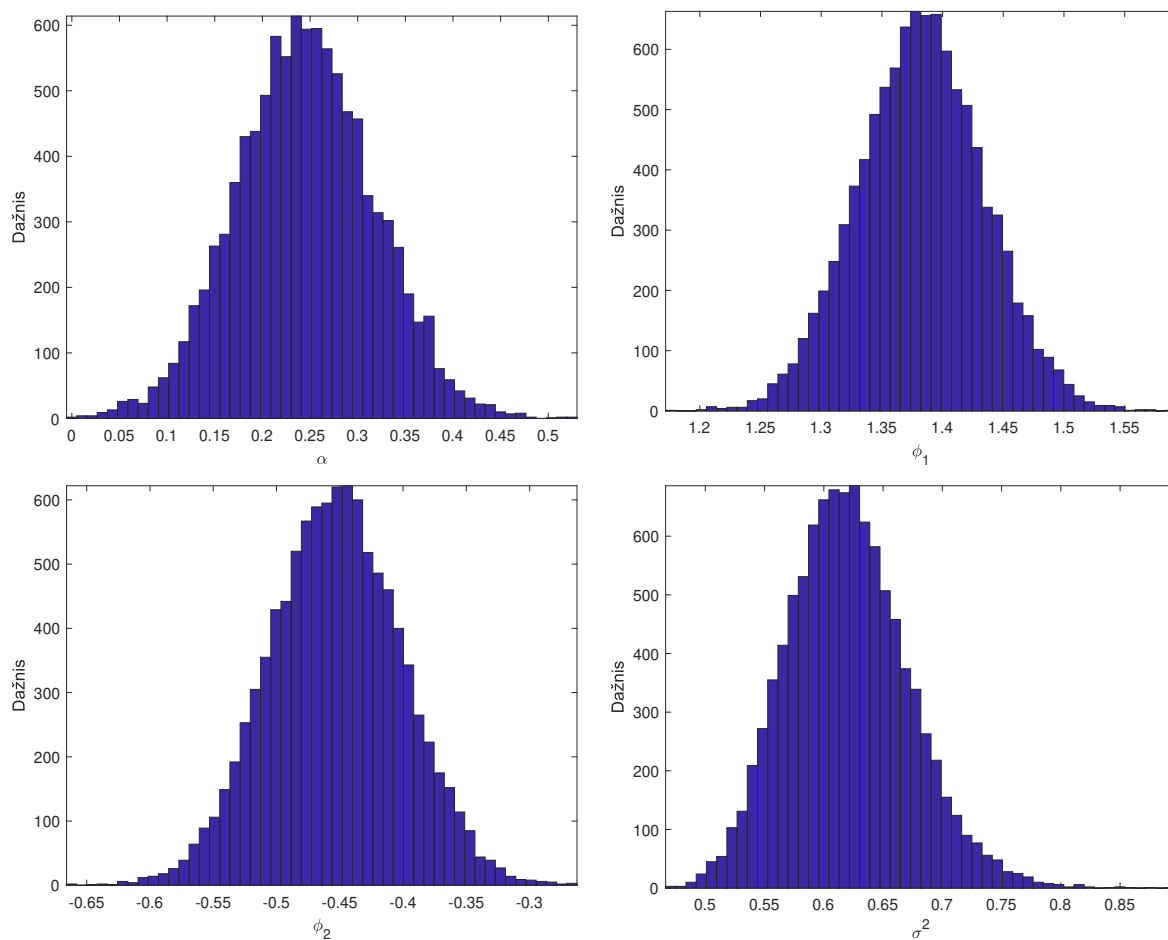
- [34] B. MANDELBROT, The Variation of Some Other Speculative Prices, *The Journal of Business*, Vol. 40(4), 1967, 393-413.
- [35] H. MARKOWITZ, Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, Vol. 7(1), 1952, 77-91.
- [36] R. MCCULLOCH, P. ROSSI, An exact likelihood analysis of the multinomial probit model, *Journal of Econometrics*, Vol. 64(1-2), 1994, 207-240.
- [37] A. MEUCCI, A. LOREGIAN, Neither 'Normal' nor 'Lognormal': Modeling Interest Rates Across All Regimes, *Financial Analysts Journal*, Vol. 72(3), 2016.
- [38] A. MEUCCI, 'The Prayer' Ten-Step Checklist for Advanced Risk and Portfolio Management, *Advanced Risk & Portfolio Management*, 2011.
- [39] A. MEUCCI, A. SANTANGELO, R. DEGUEST, Risk Budgeting and Diversification Based on Optimized Uncorrelated Factors, *ERN: Optimization Techniques; Programming Models; Dynamic Analysis (Topic)*, 2015.
- [40] A. MEUCCI, Effective number of scenarios with Fully Flexible Probabilities, *GARP Risk Professional*, 2012, 45-46.
- [41] A. MEUCCI, Simulations with exact means and covariances, *Risk*, 2009, 89-91.
- [42] R. MICHAUD, The Markowitz Optimization Enigma: Is optimization Optimal?, *Financial Analysts Journal*, Vol. 45(1), 1989, 31-42.
- [43] C. NELSON, F. SIEGEL, Parsimonious Modeling of Yield Curves, *The Journal of Business*, Vol. 60(4), 1987, 473-489.
- [44] K. NYHOLM, A rotated Dynamic Nelson-Siegel model with macro-financial applications, *Working Paper Series 1851*, European Central Bank, 2015.
- [45] Y. OMORI, S. CHIB, J. NAKAJIMA, N. SHEPHARD, Stochastic volatility with leverage: fast and efficient likelihood inference, *Journal of Econometrics*, Vol. 140(2), 2007, 425-449.
- [46] P. OSTERHOLM, The Taylor rule: a spurious regression ?, *Bulletin of Economic Research*, Vol. 57(3), 2005, 217-247.

- [47] A. RASHID, DO EXCHANGE RATES FOLLOW RANDOM WALKS? An Application of Variance-Ratio Test, *Pakistan Economic and Social Review*, Vol. 44(1), 2006, 57-79.
- [48] R.T. ROCKAFELLAR, S. URYASEV, Conditional value-at-risk for general loss distributions, *The Journal of Banking Finance*, vol. 26, 2002, 1443-1471.
- [49] C. SAX, D. EDELBUETTEL, Seasonal Adjustment by X-13ARIMA-SEATS in R, *Journal of Statistical Software*, vol. 87(11), 2018, 1-17.
- [50] J.J. SIEGEL, *Stocks for the long run : the definitive guide to financial market returns and long-term investment strategies*, 4th. ed., McGraw-Hill, New York, 2008.
- [51] V. SNIEŠKA, V. BAUMILIENĖ, D. BERNATONYTĖ, J. ČIBURIENĖ, D. DUMČIUVIENĖ, A. JUOZAPAVIČIŪTĖ, J. URBONAS, *Makroekonomika: vadovėlis ekonominių specialybių studentams*, Technologija, Kaunas, 2011.
- [52] J.H. STOCK, M.W. WATSON, Core Inflation and Trend Inflation, *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 98(4), 2016, 770-784.
- [53] J.H. STOCK, M.W. WATSON, Why Has U.S. Inflation Become Harder to Forecast?, *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 39(1), 2007.
- [54] S.V. STOYANOV, S.T. RACHEV, B. RACHEVA-IOTOVA, F.J. FABOZZI, Fat-tailed models for risk estimation, *he Journal of Portfolio Management*, Vol. 37, 2011, 107-117.
- [55] A.M. TAYLOR, M.P. TAYLOR, The Purchasing Power Parity Debate, *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 18(4), 2004, 135-158.
- [56] J.B. TAYLOR, Discretion versus policy rules in practice, *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, Vol. 39, 1993, 195-214.
- [57] J. TOBIN, Liquidity Preference as Behavior Towards Risk, *Review of Economic Studies*, Vol. 25(2), 1958, 65-86.

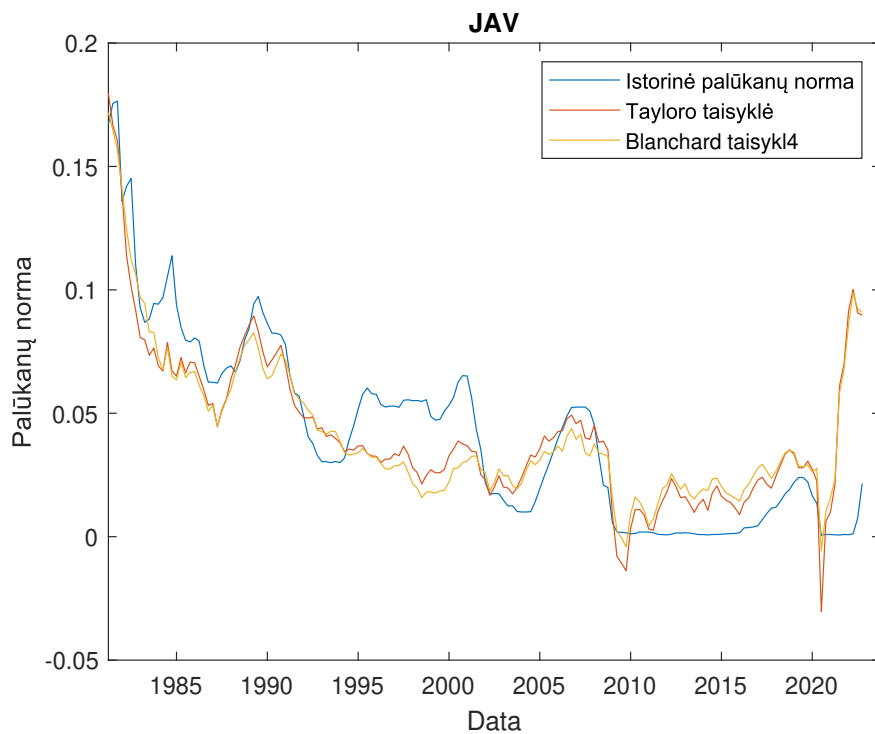


# Priedai

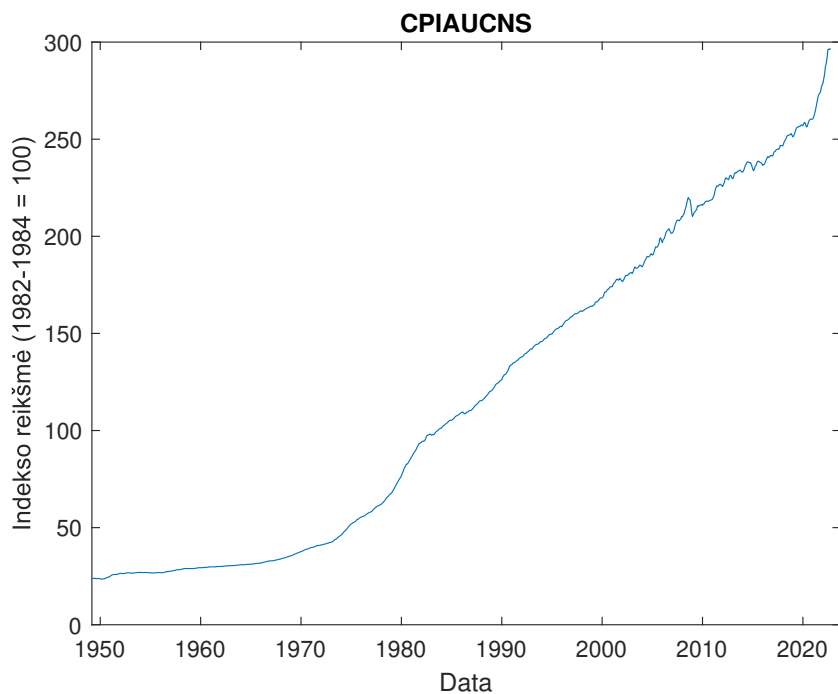
## A Grafikai



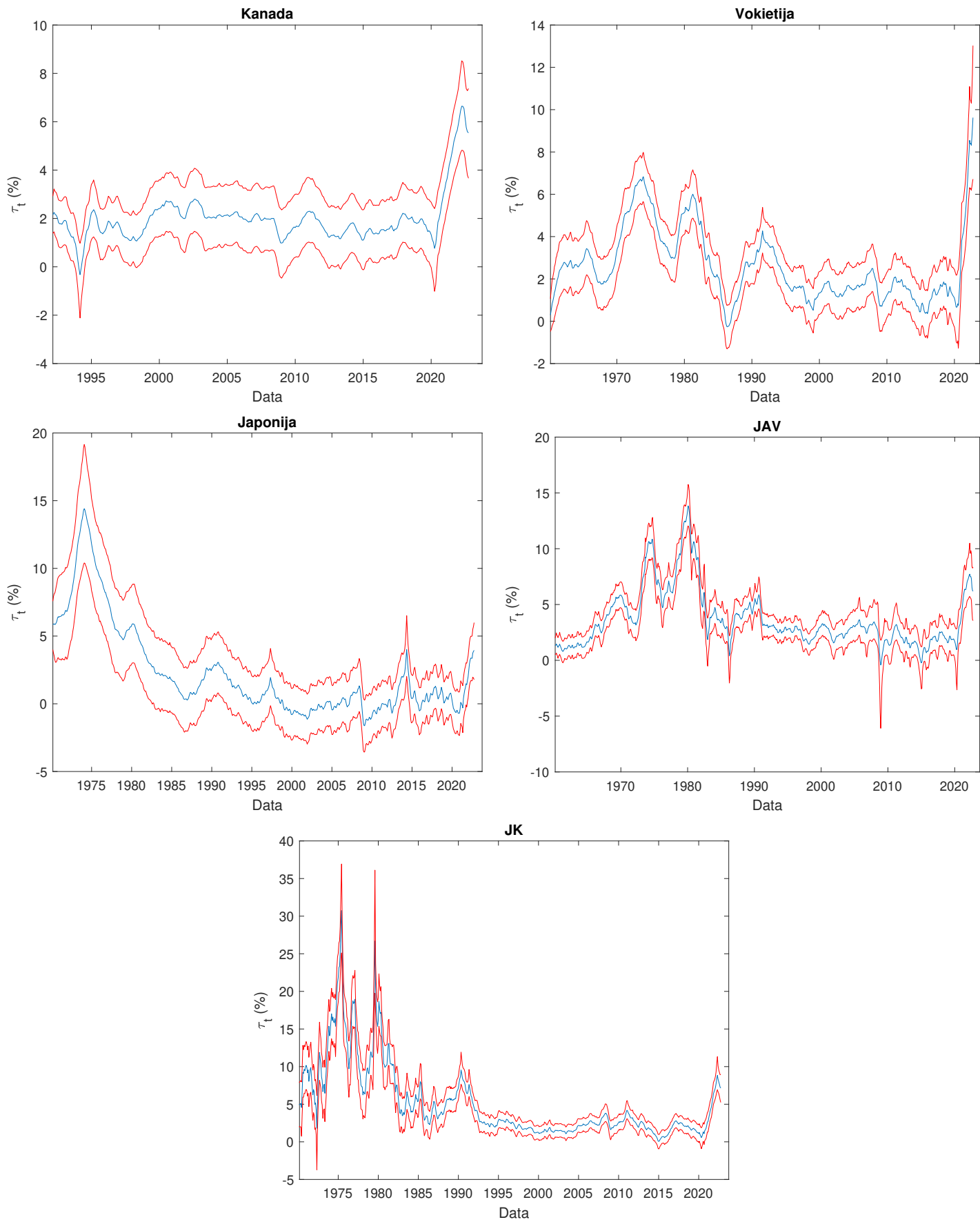
1 pav.: AR(2) parametų reikšmių simuliacijos, taikant Gibso metodą.



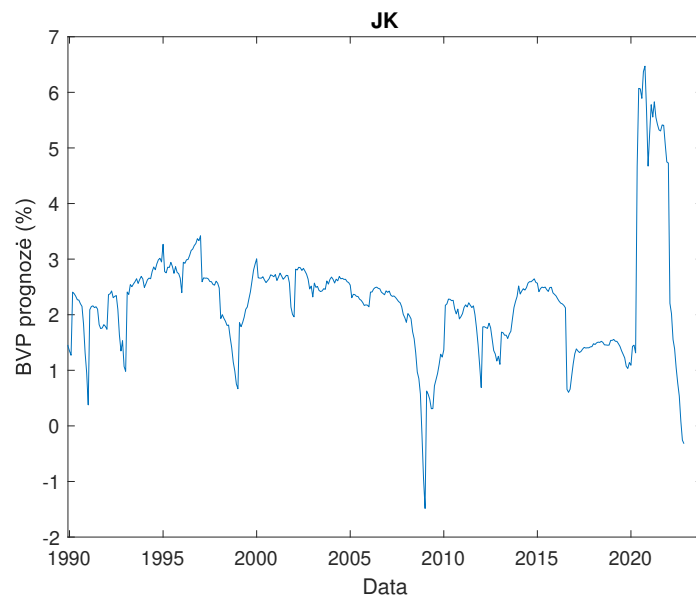
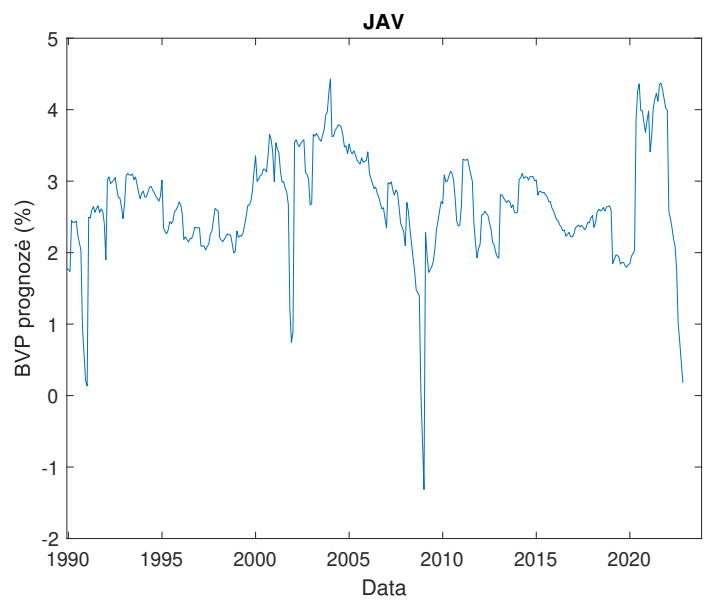
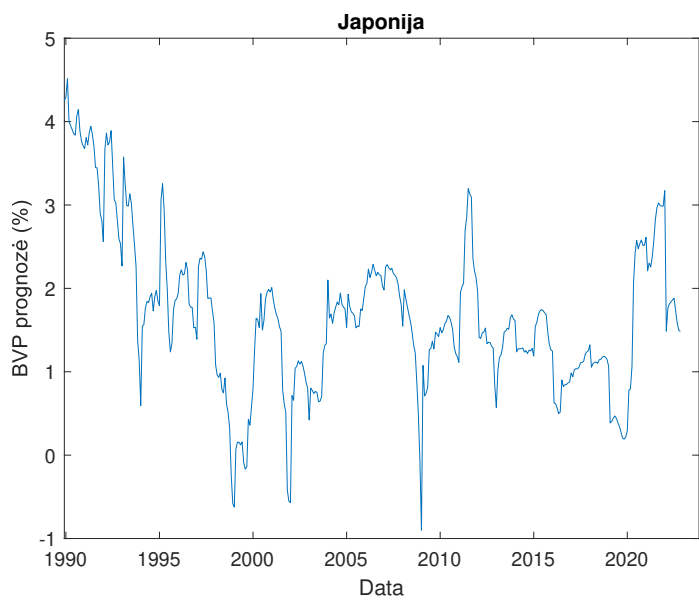
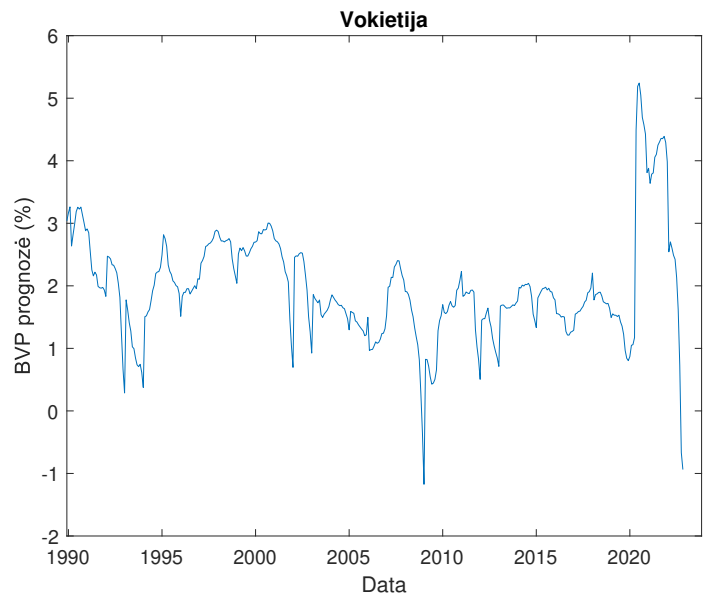
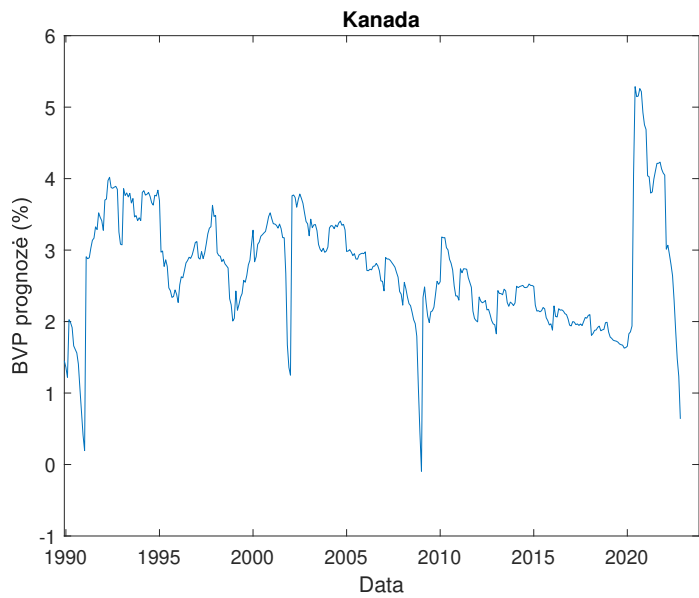
2 pav.: JAV istorinės palūkanų normos. Naudojamų ketvirtinių duomenų šaltinis - *FRED*, taikytų laiko eilučių trumpiniai: FF, UNRATE, CPIAUCSL, PCEPILFE, PCEPI, GDPC1, GDPOT.



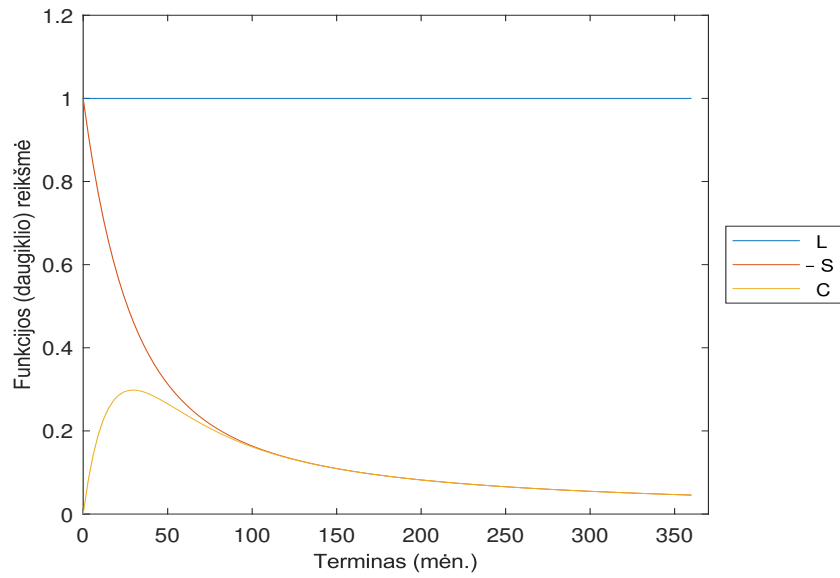
3 pav.: Sezoniškai nekoreguotas vartotojų kainų indeksas JAV atveju.



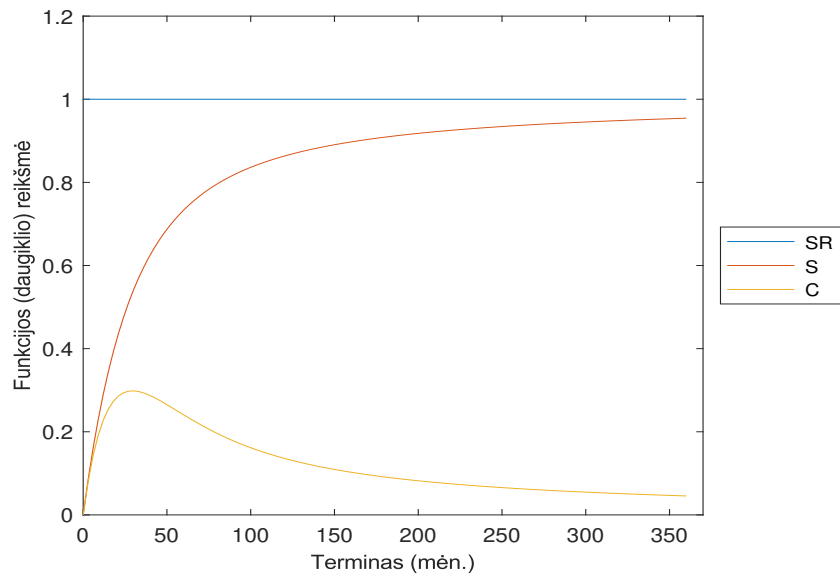
4 pav.: Penkių vyriausybių infliacijos trendai. Mėlyna linija - mediana, raudonos linijos - 5% ir 95% procentiliai.



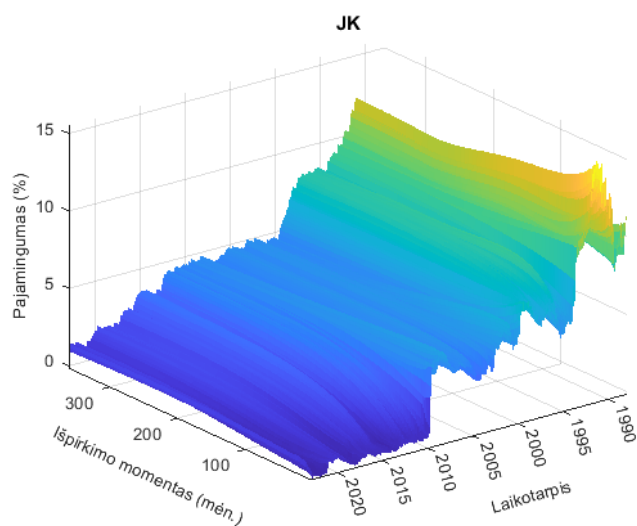
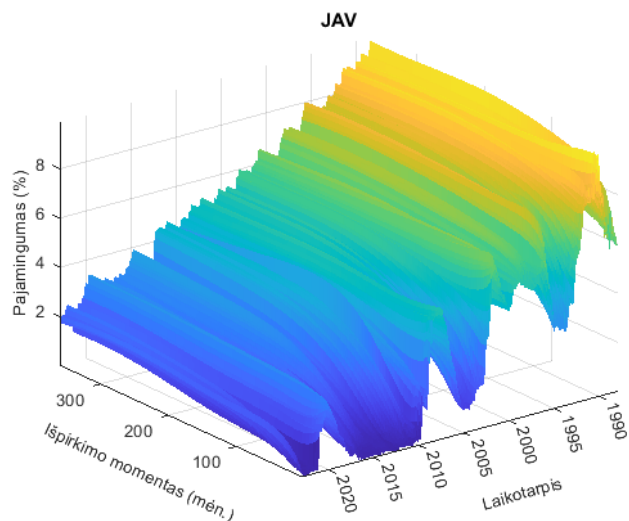
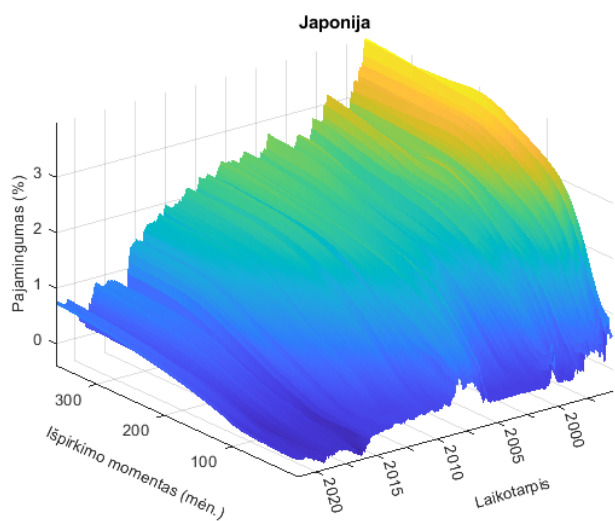
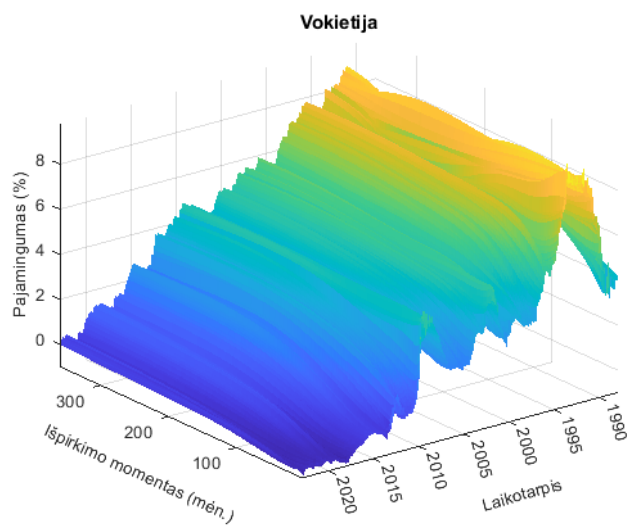
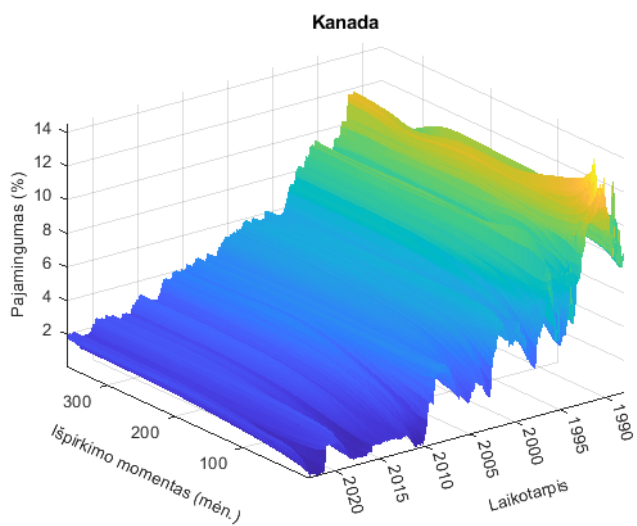
5 pav.: Penkių vyriausybių BVP procentinė prognozė 12 mėn. po apklausos.



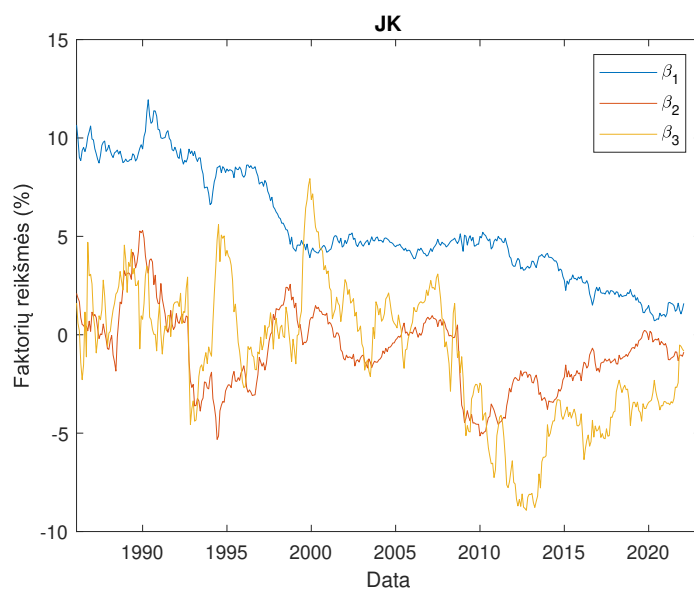
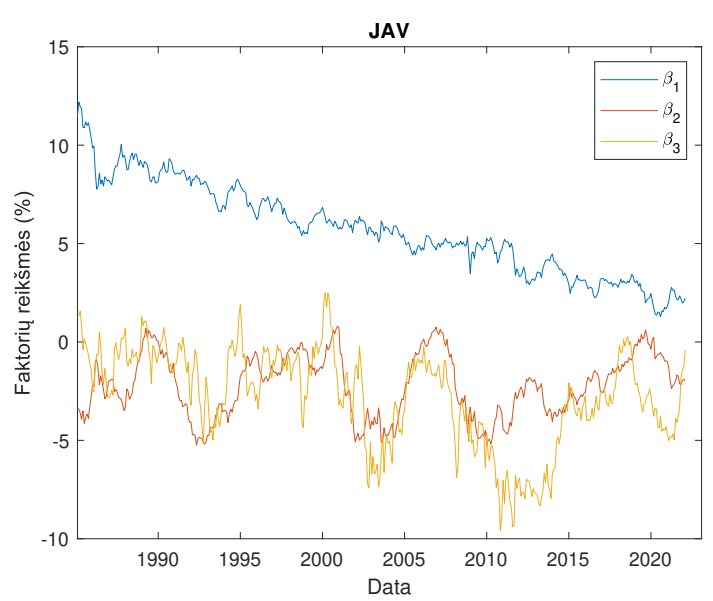
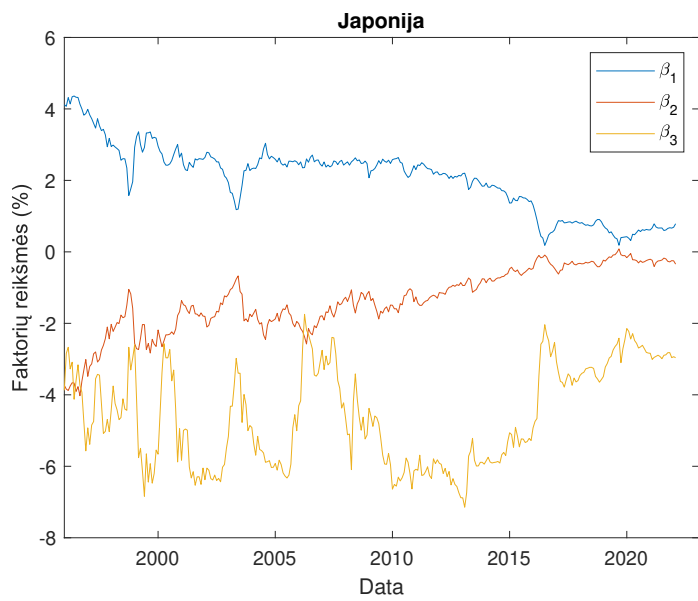
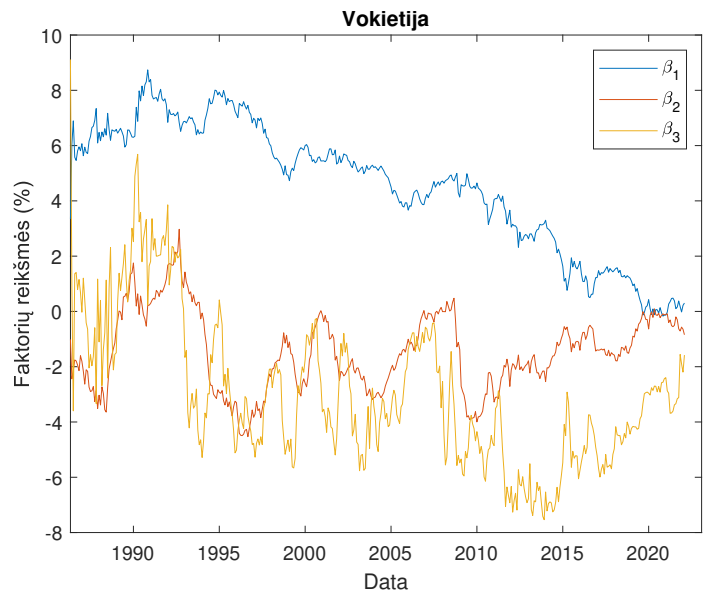
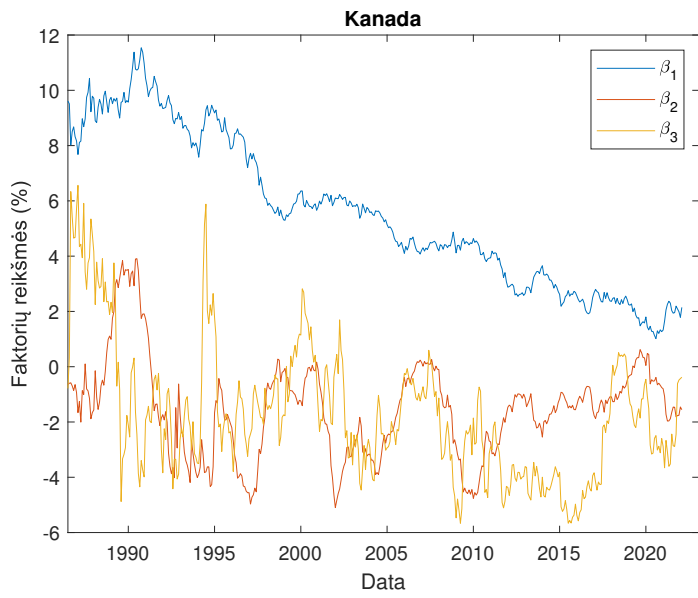
6 pav.: DNS modelio daugikliai, esantys prie faktorių.



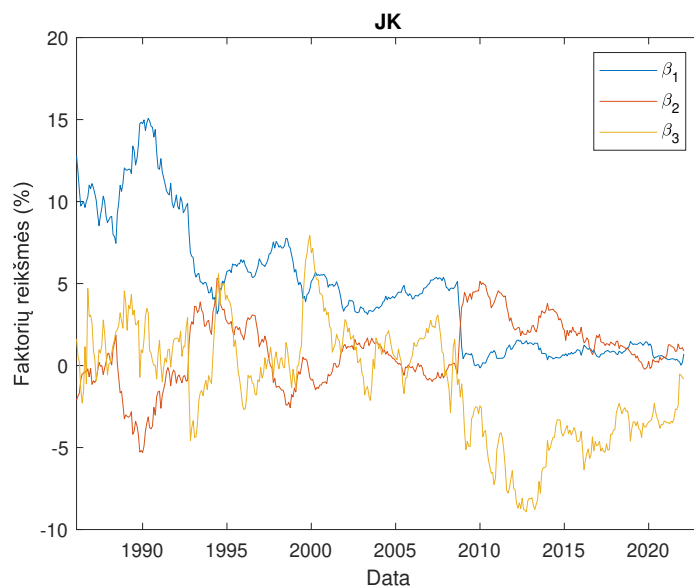
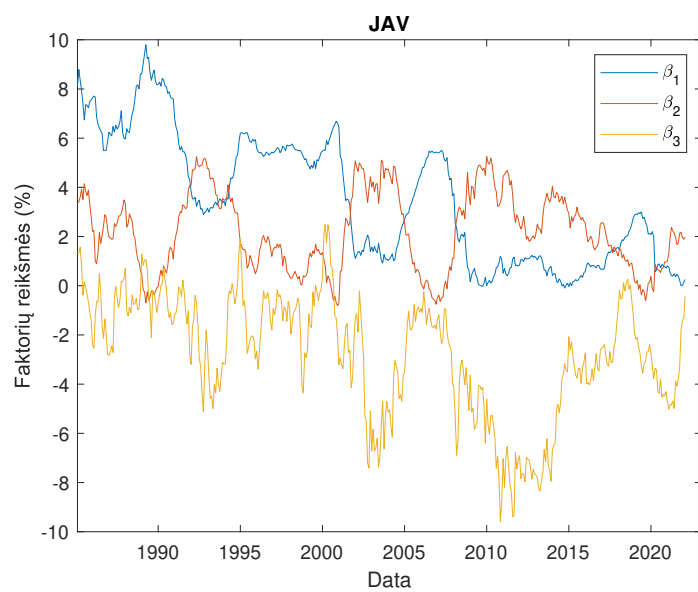
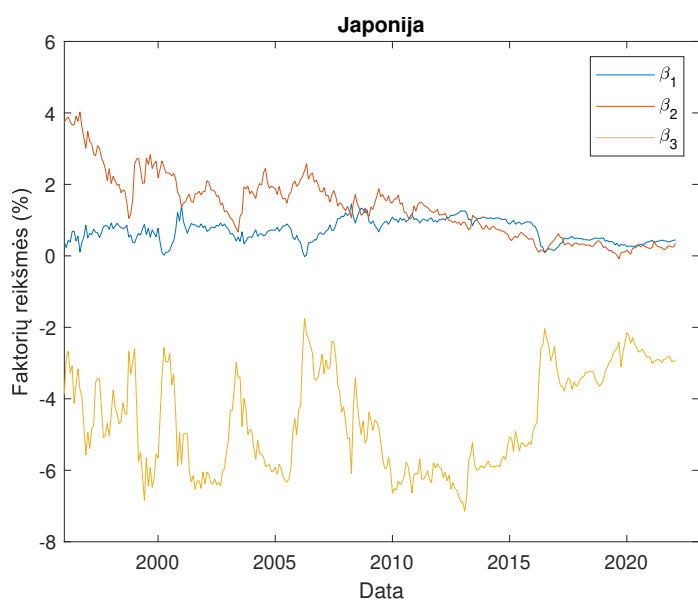
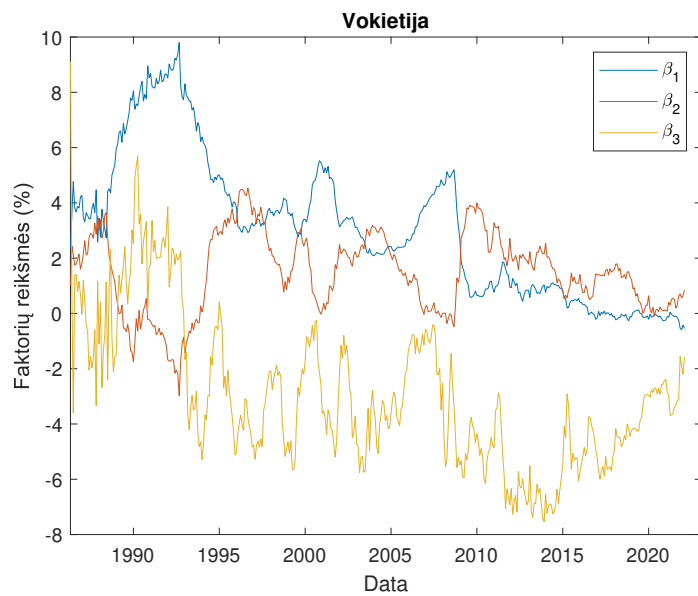
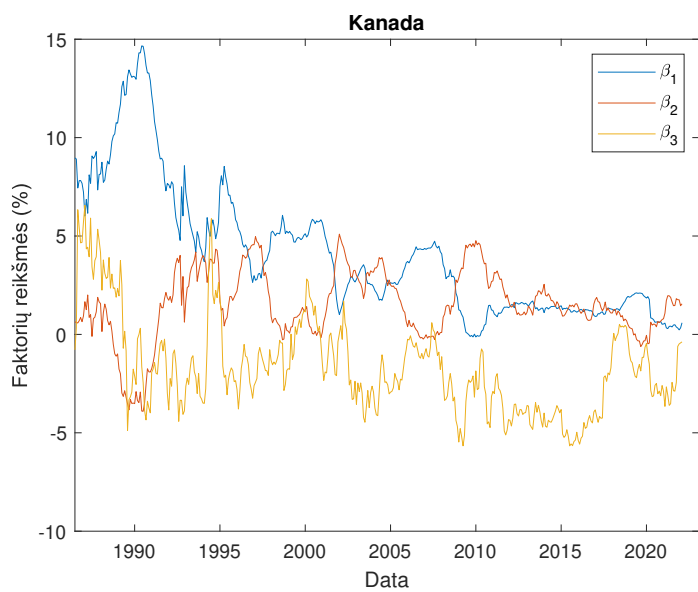
7 pav.: RDNS modelio daugikliai, esantys prie faktorių.



8 pav.: Penkių vyriausybių palūkanų normų kreivių dinamika trimatėje erdvėje.

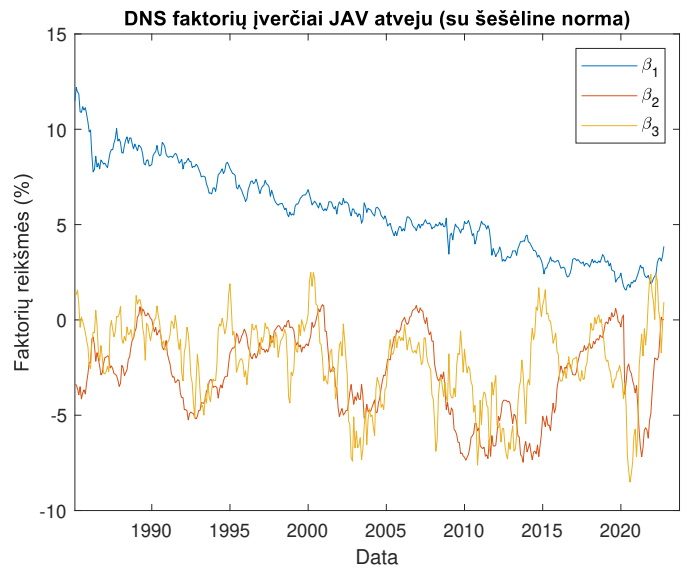
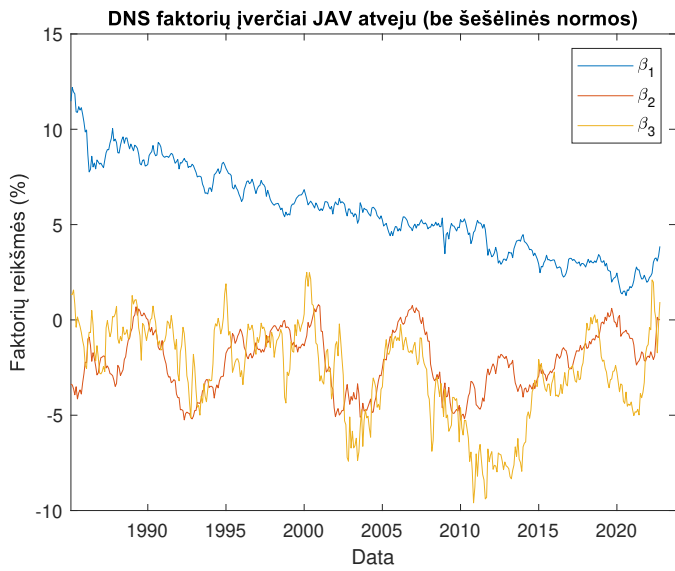


9 pav.: Penkių vyriausybės DNS įverčių dinamika atitinkamu laiko periodu.

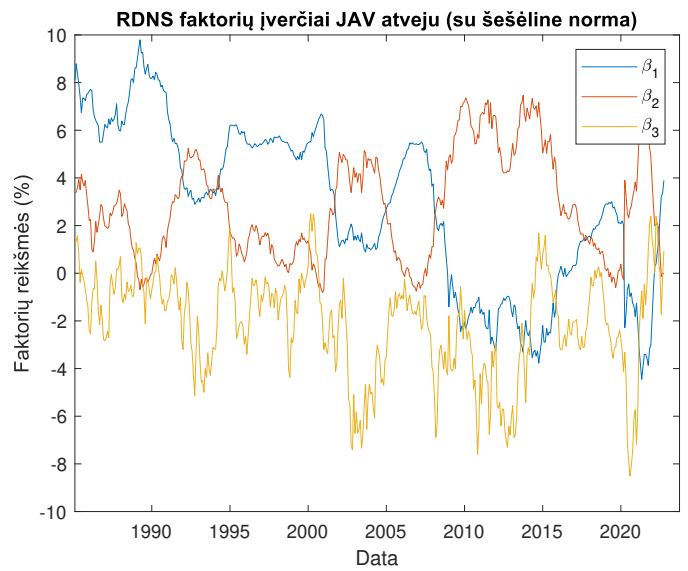
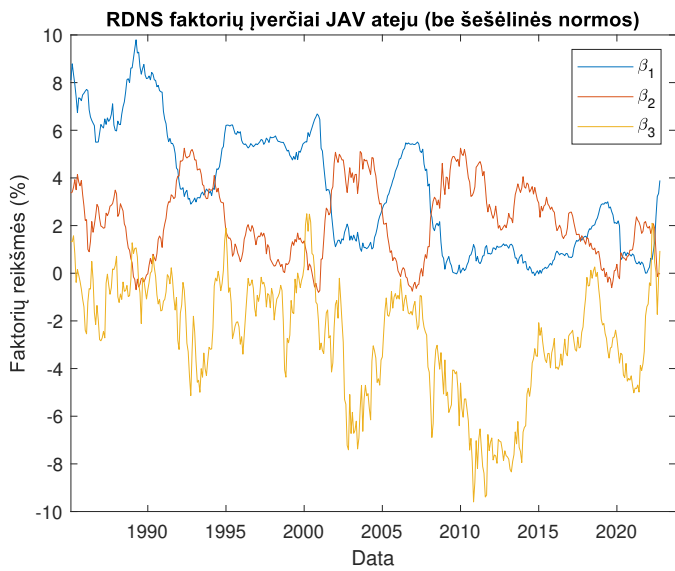


10 pav.: Penkių vyriausybių RDNS įverčių dinamika atitinkamu laiko periodu.

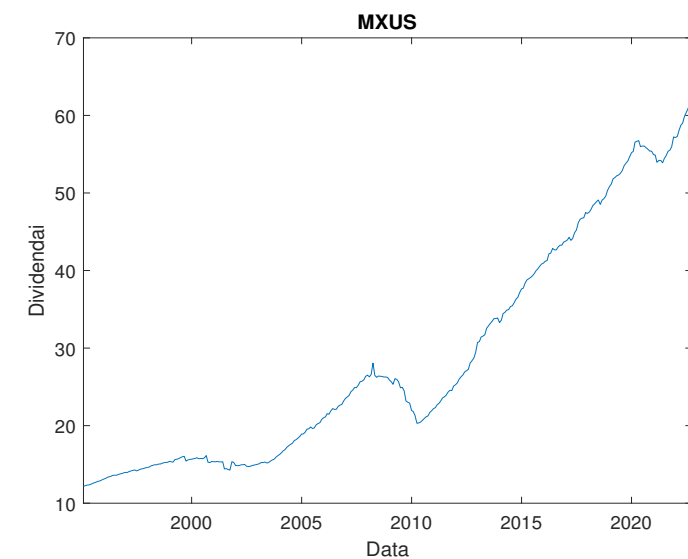
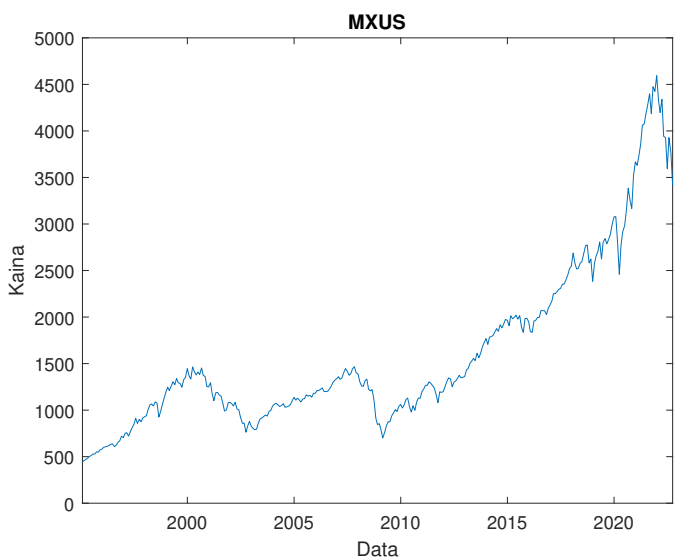




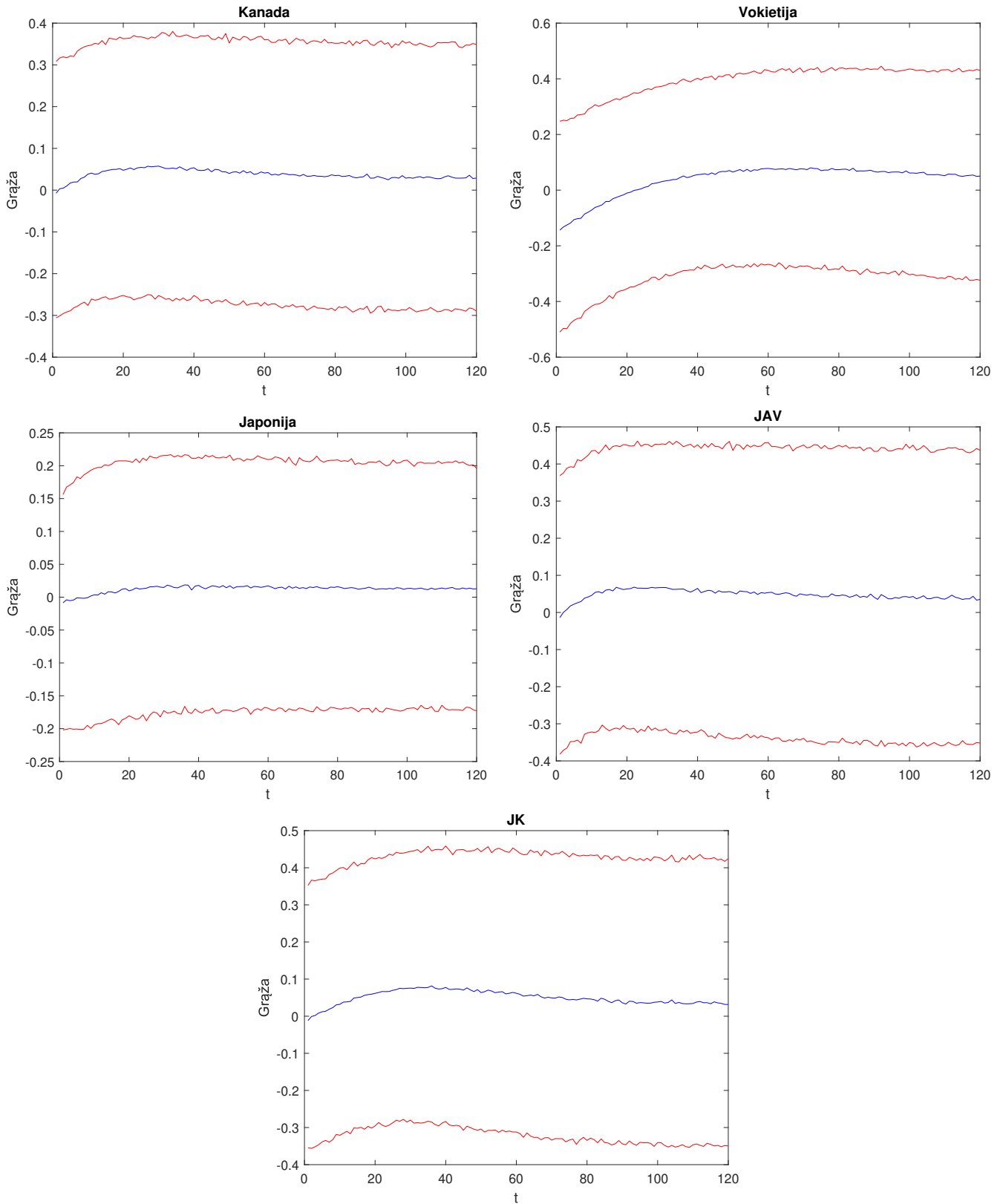
11 pav.: Vizualus DNS faktorių palyginimas (JAV atveju) tiek įtraukus, tiek neįtraukus šešėlinių normų.



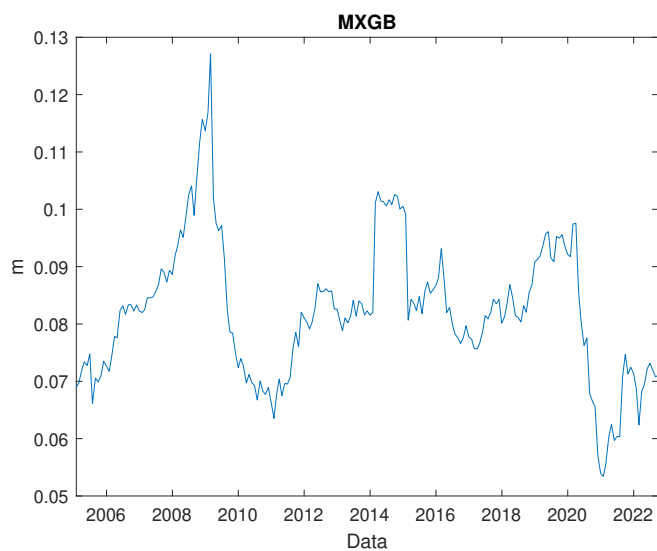
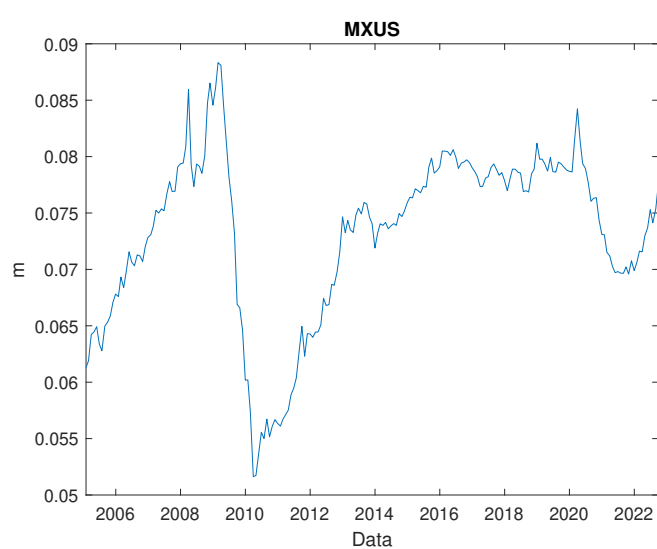
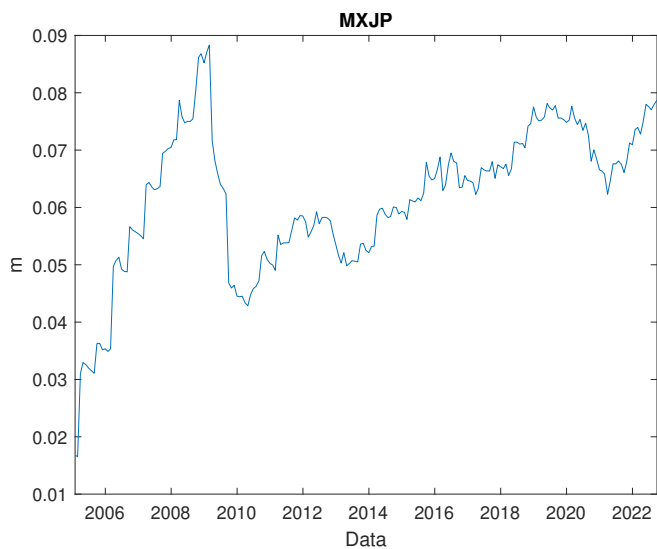
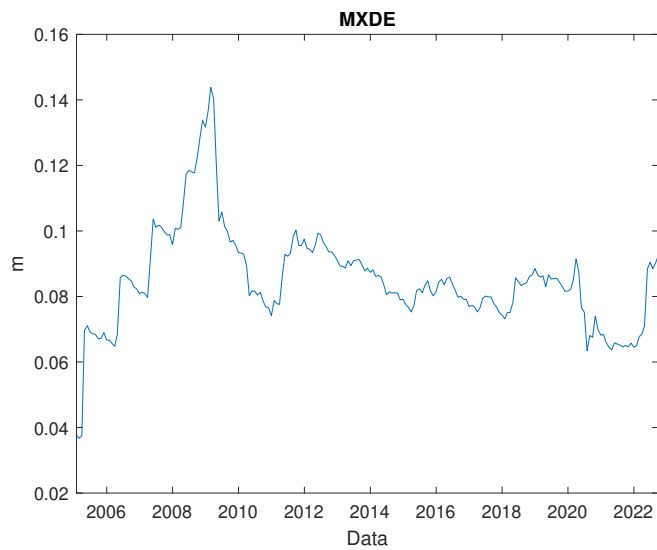
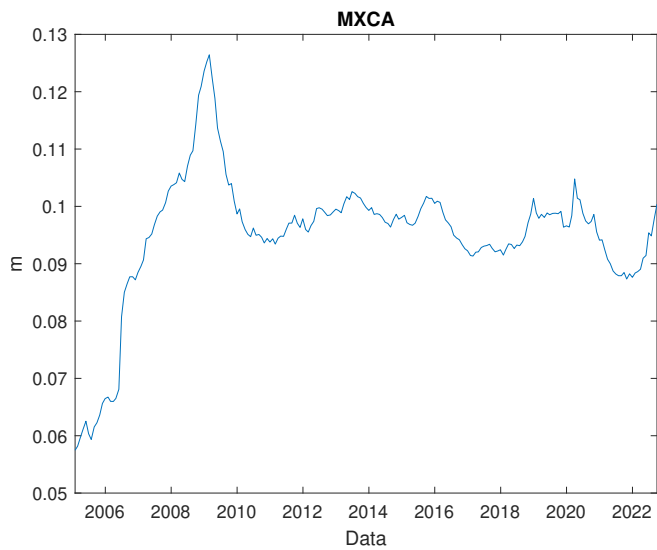
12 pav.: Vizualus RDNS faktorių palyginimas (JAV atveju) tiek įtraukus, tiek neįtraukus šešėlinių normų.



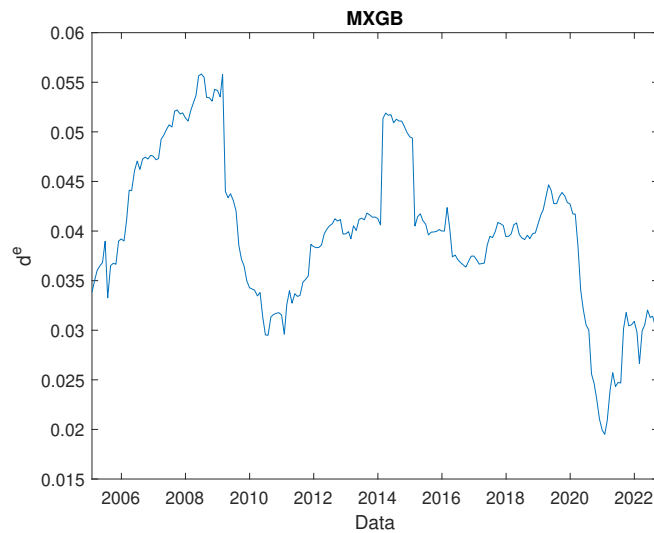
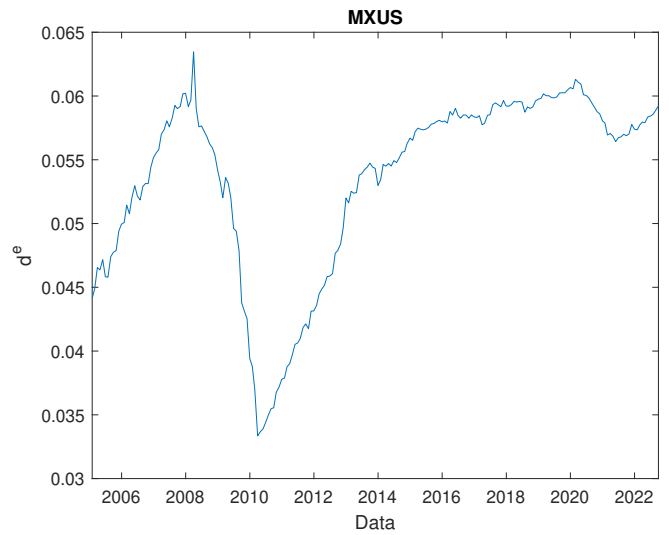
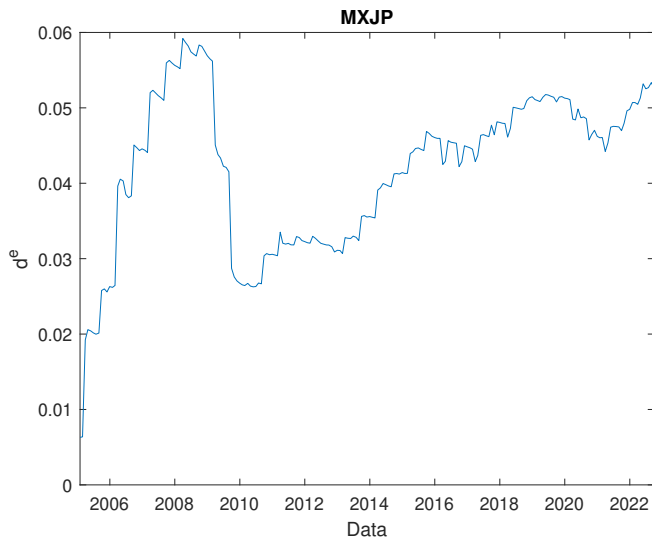
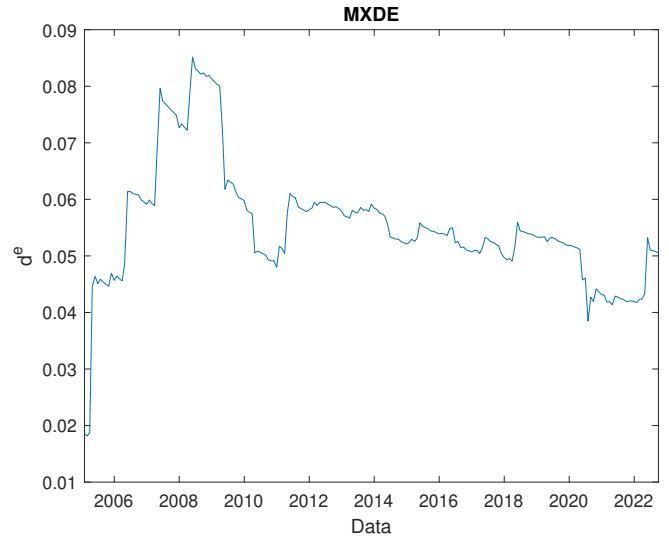
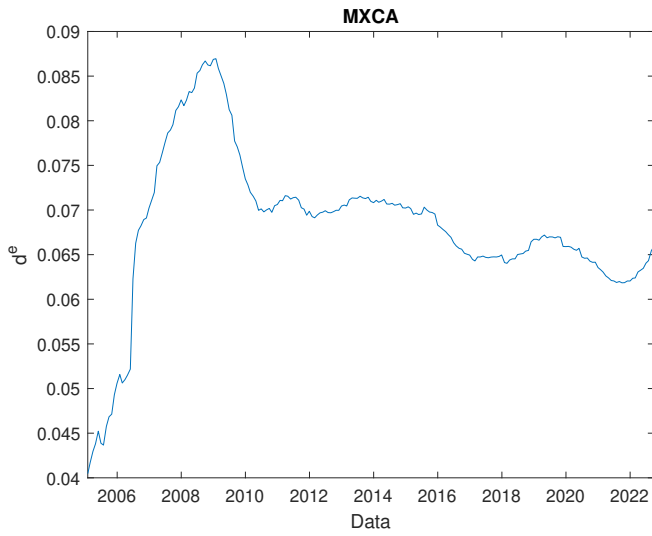
13 pav.: Vizuali MXUS indekso kainos (kairė) bei mokamų dividendų (dešinė) dinamika.



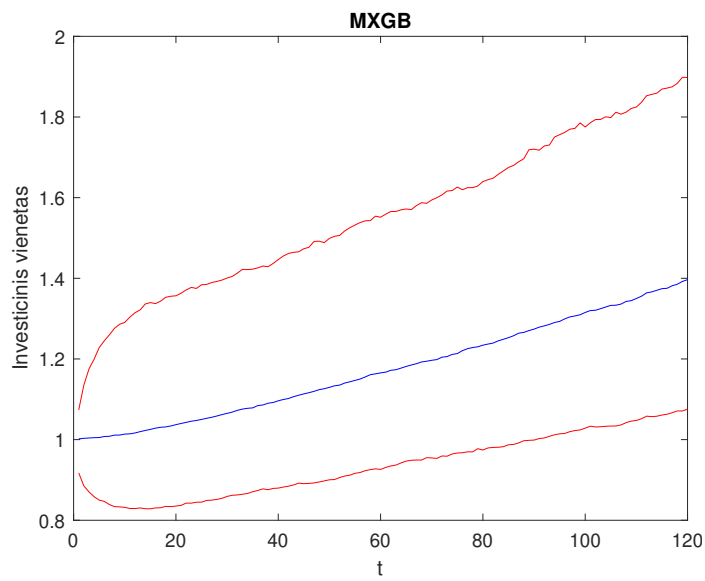
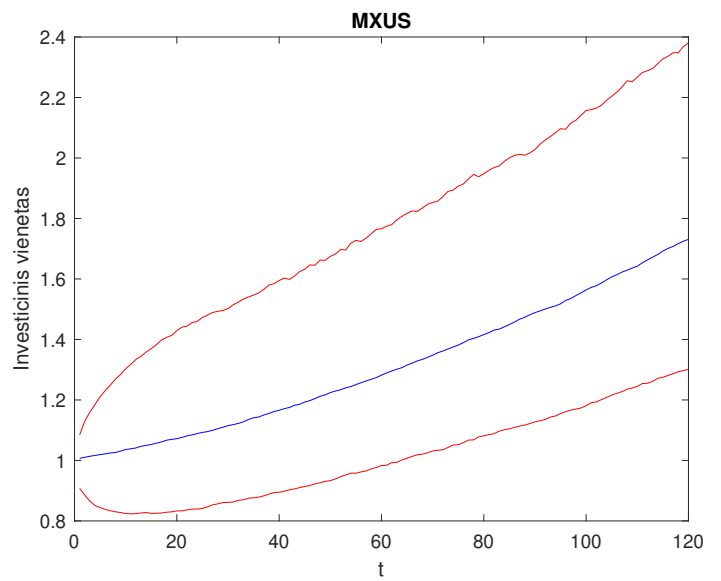
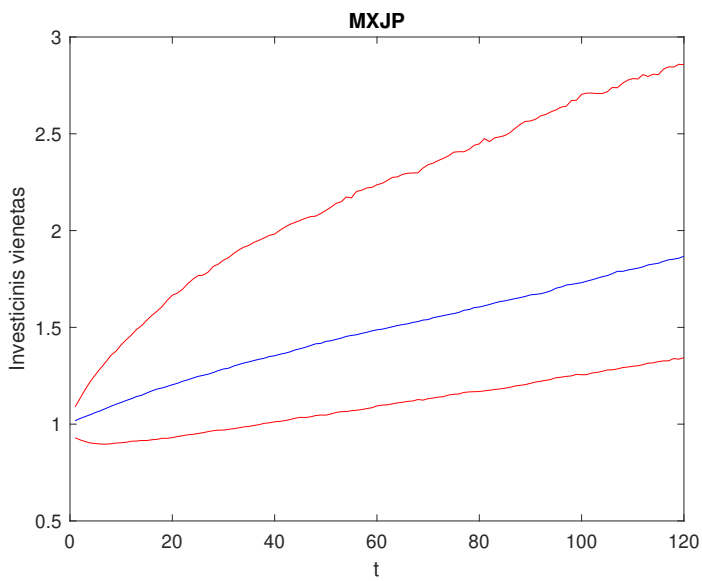
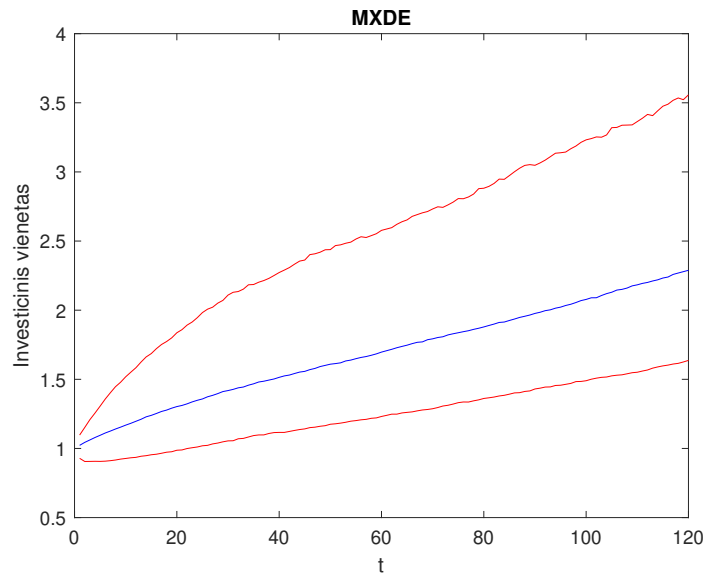
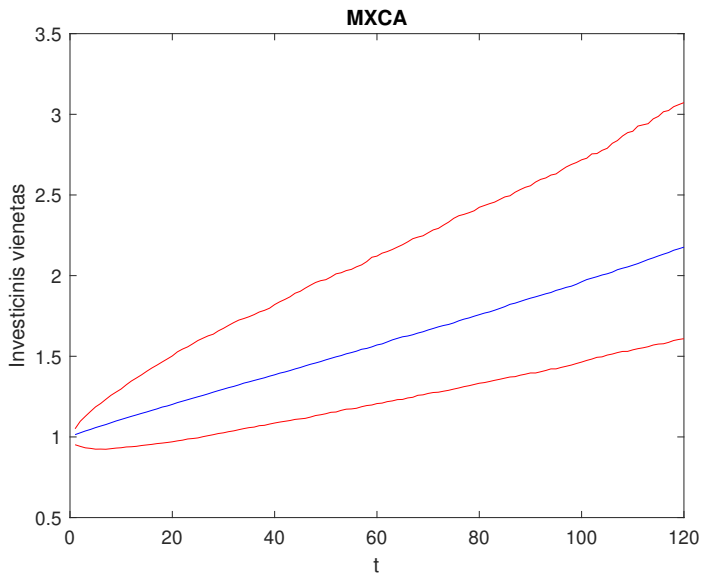
14 pav.: Paritetinių obligacijų gražos prognozuojant 120 žingsnių į ateitį.



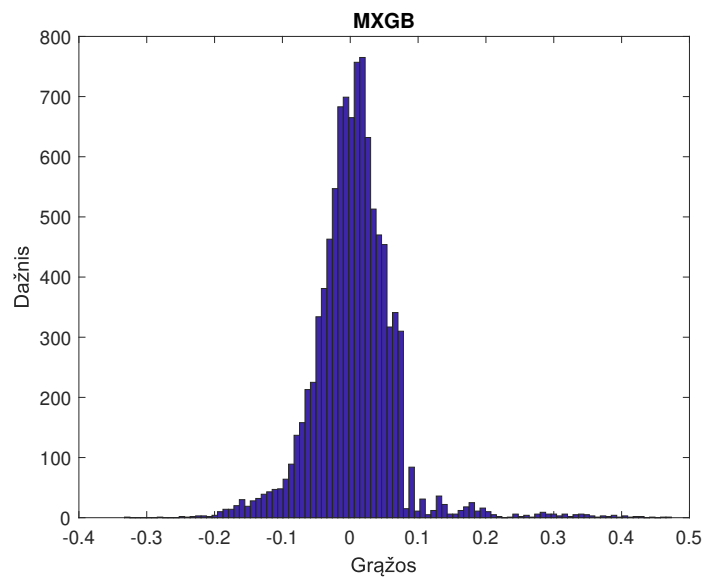
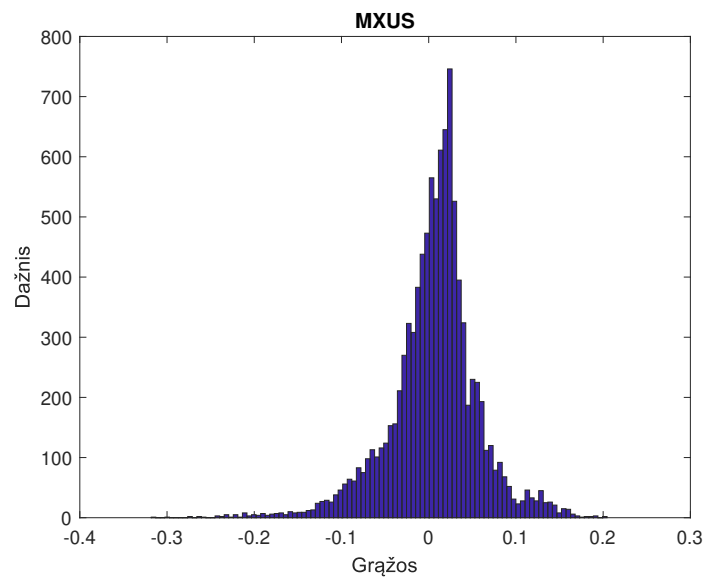
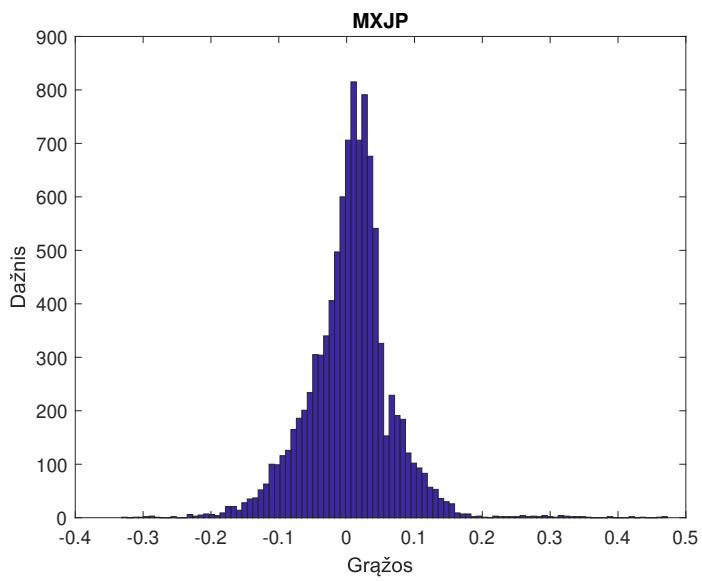
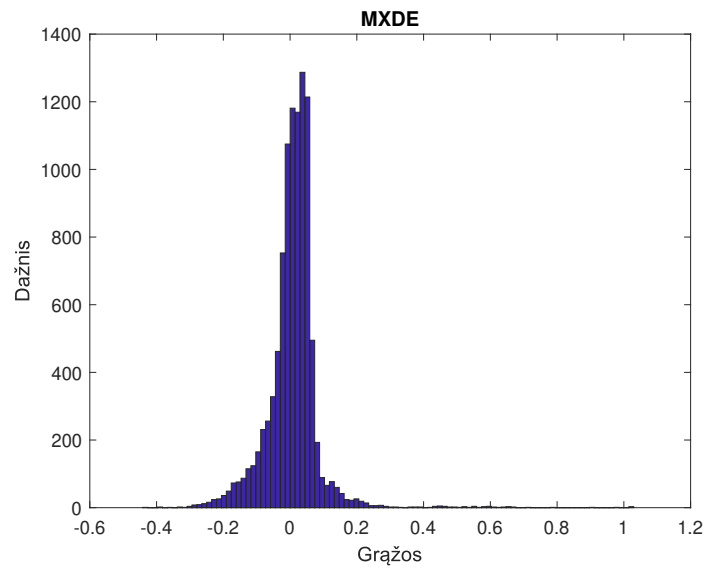
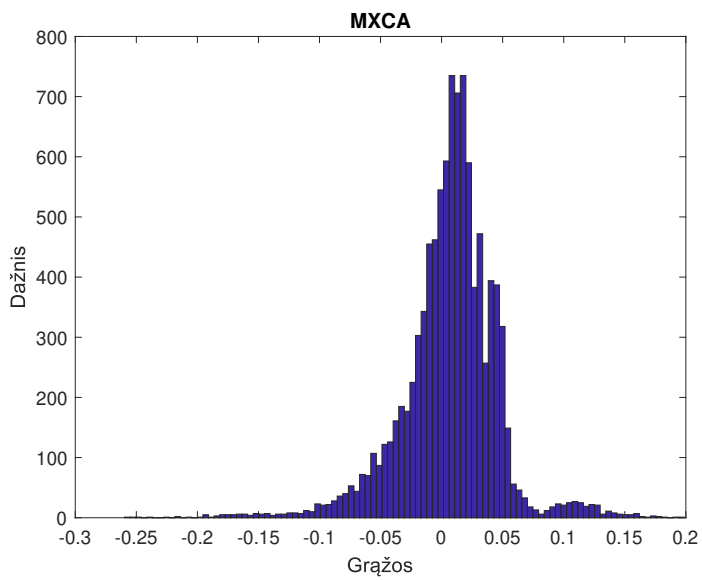
15 pav.: Reikalaujamos gražos grafikai penkių akcijų indeksų atveju.



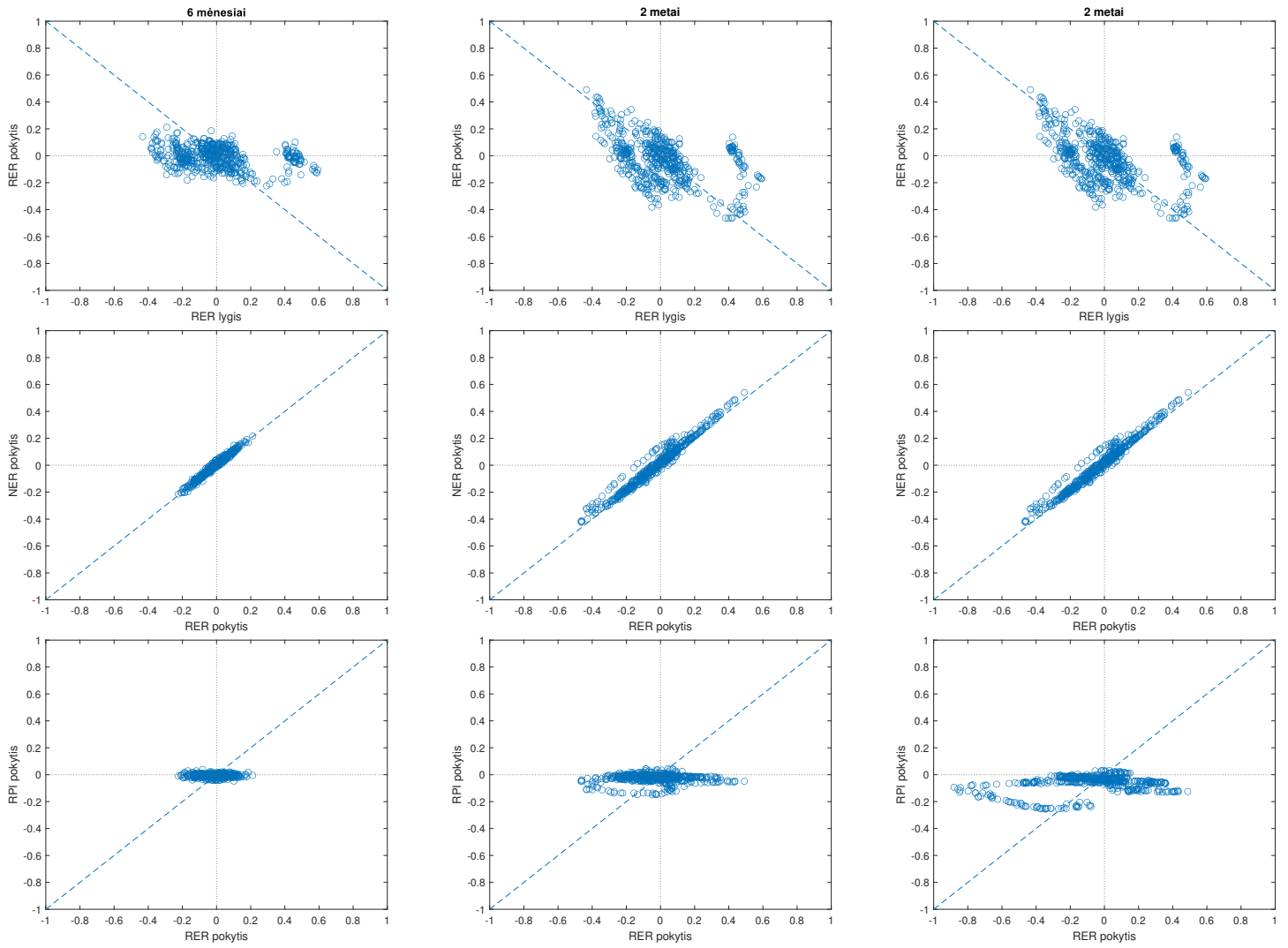
16 pav.: Dividendų augimo grafikai penkių akcijų indeksų atveju.



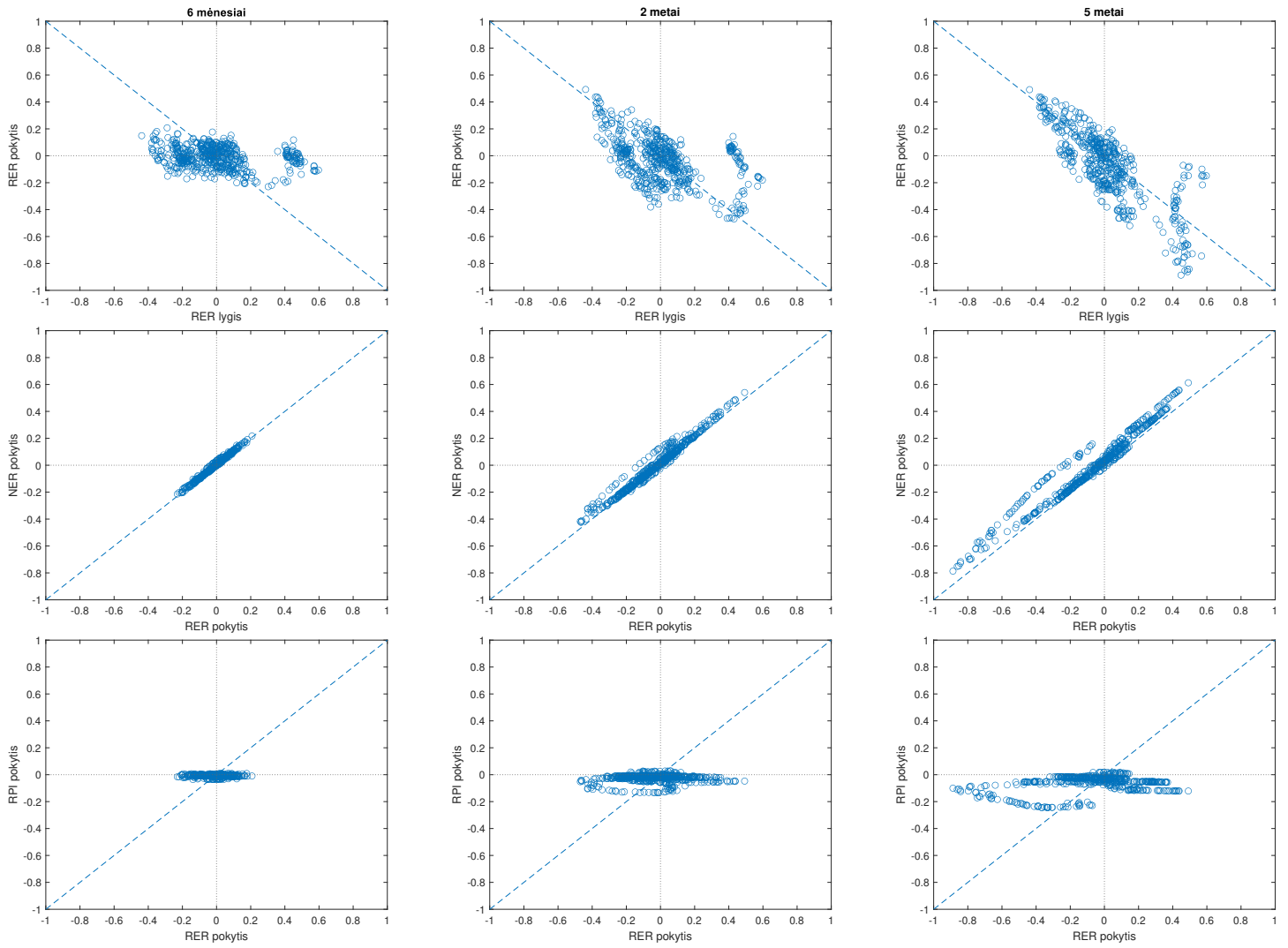
17 pav.: Investicinio vieneto dinamika prognozuojant 120 žingsnių į ateitį. Raudonos linijos - 5 bei 95 % procentiliai, o mėlyna - prognozių mediana.



18 pav.: Gražų simuliacijų skirstinys, išreikštas histograma.

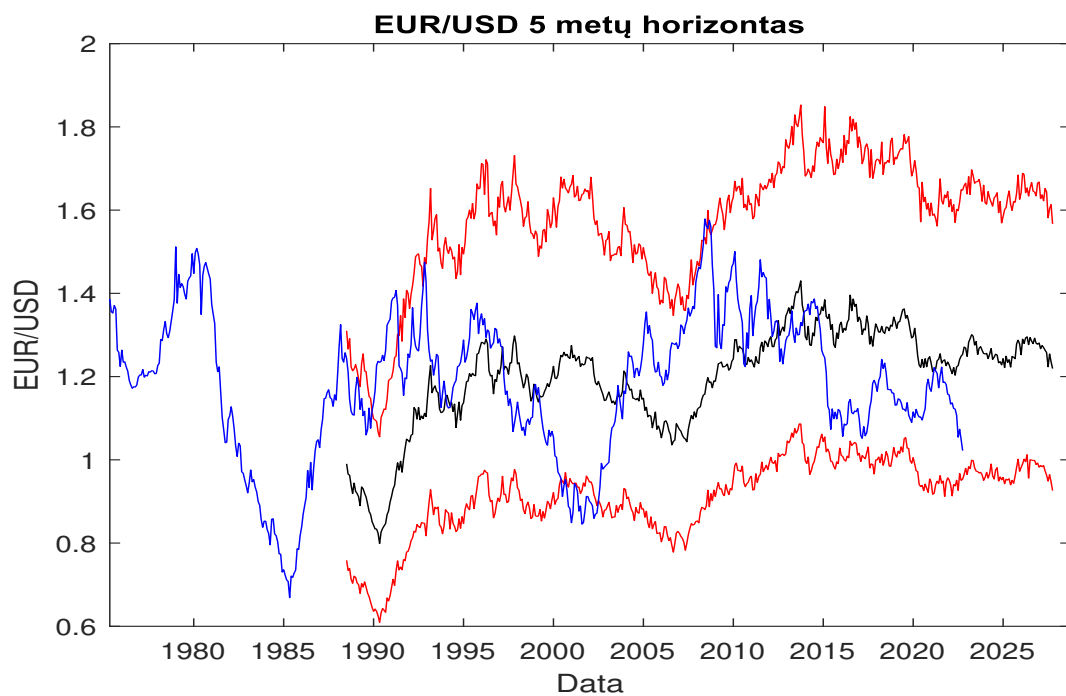


19 pav.: Valiutos kursų dėsningumai, naudojant infliacijos indeksus.

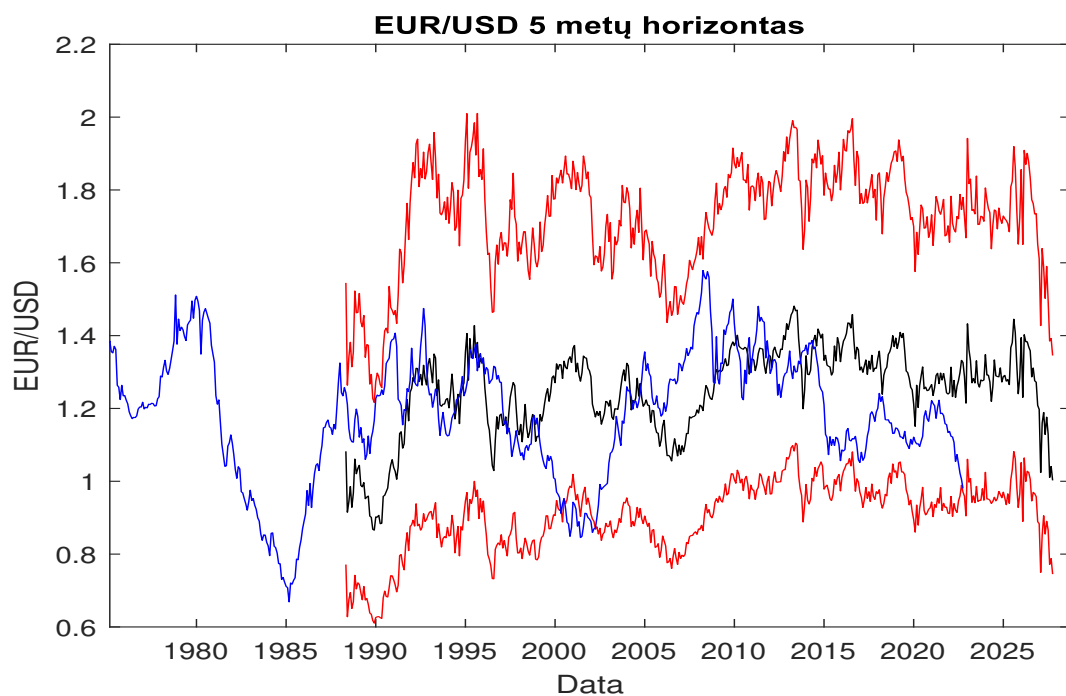


20 pav.: Valiutos kursų dėsningumai, naudojant infliacijos būsenas.

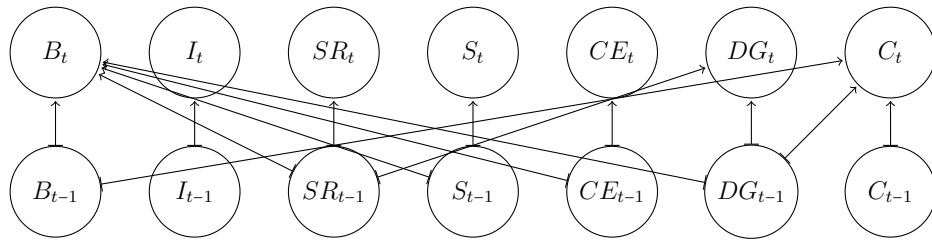




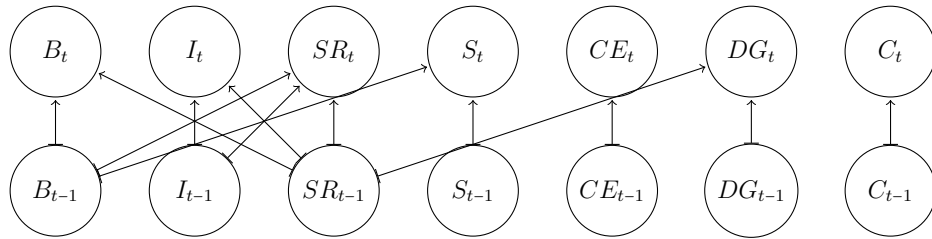
21 pav.: EUR/USD prognozės 5 metų horizontui taikant infliacijos indeksų duomenis. Mėlyna linija - istoriniai duomenys, juoda - prognozių mediana, raudonos - 5% bei 95% procentiliai.



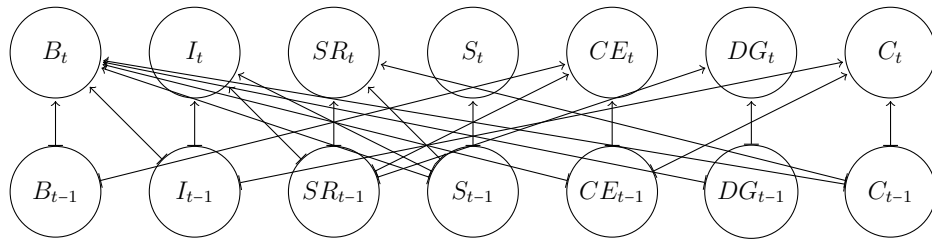
22 pav.: EUR/USD prognozės 5 metų horizontui taikant infliacijos būsenų duomenis. Mėlyna linija - istoriniai duomenys, juoda - prognozių mediana, raudonos - 5% bei 95% procentiliai.



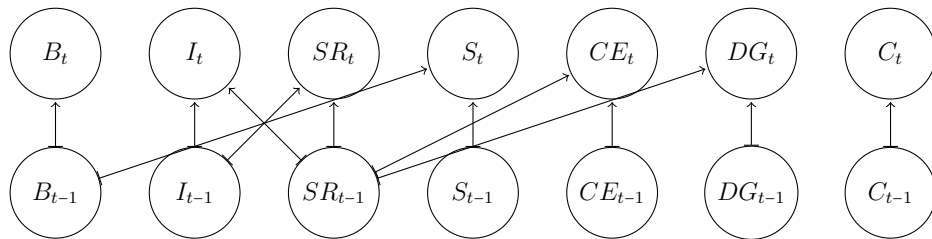
23 pav.: Kanados GC rezultatai neįtraukus apribojimų.



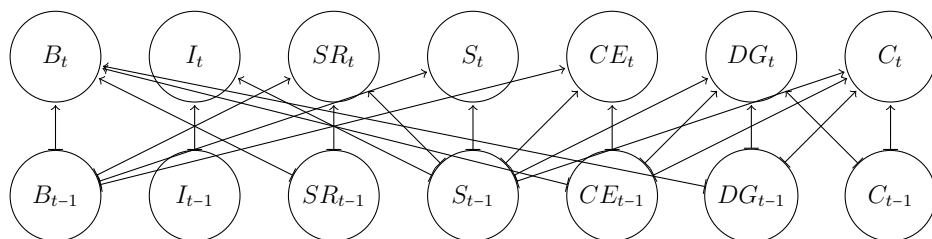
24 pav.: Kanados GC rezultatai įtraukus apribojimus.



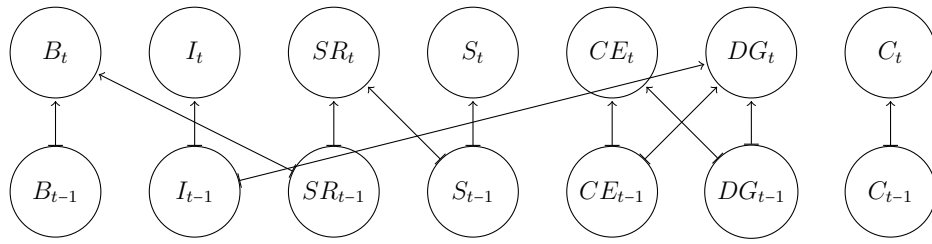
25 pav.: Vokietijos GC rezultatai neįtraukus apribojimų.



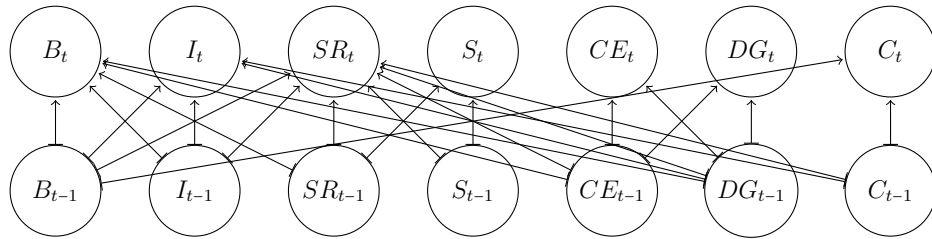
26 pav.: Vokietijos GC rezultatai įtraukus apribojimus.



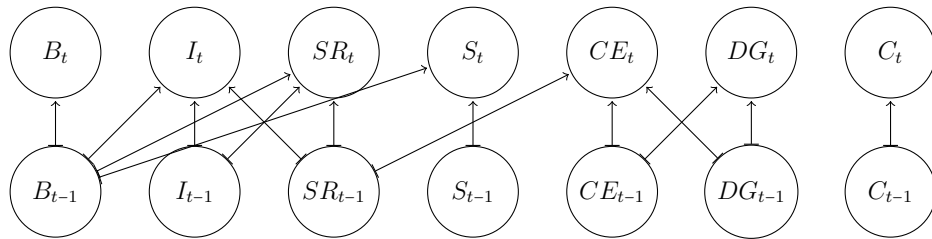
27 pav.: Japonijos GC rezultatai neįtraukus apribojimų.



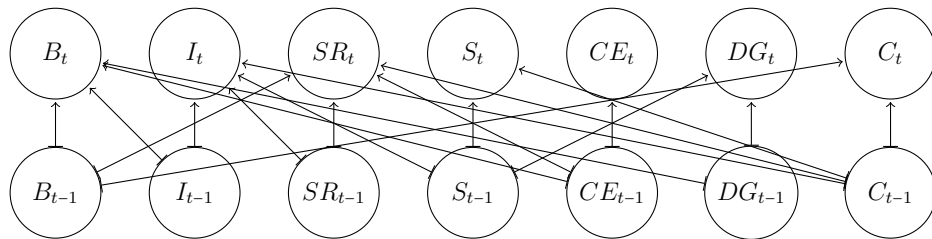
28 pav.: Japonijos GC rezultatai įtraukus apribojimus.



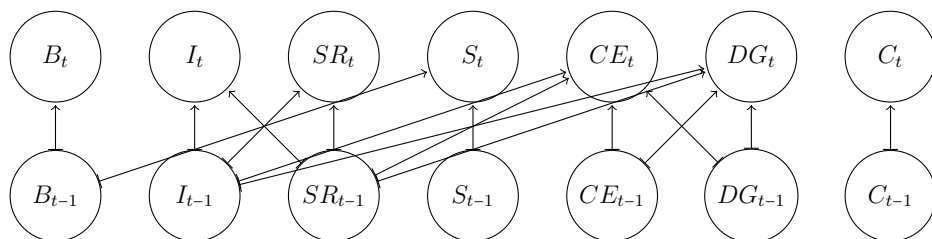
29 pav.: JK GC rezultatai neįtraukus apribojimų.



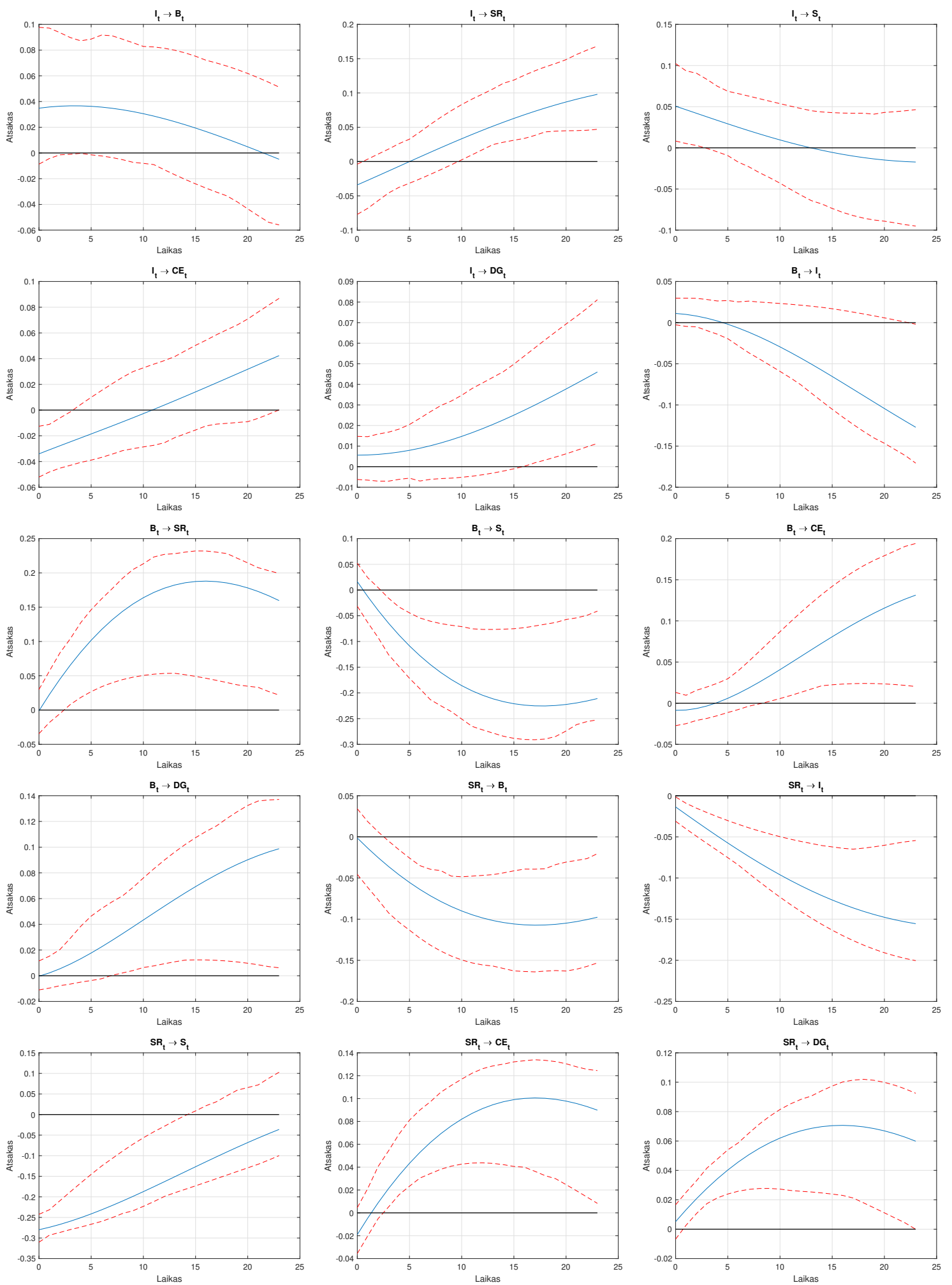
30 pav.: JK GC rezultatai įtraukus apribojimus.



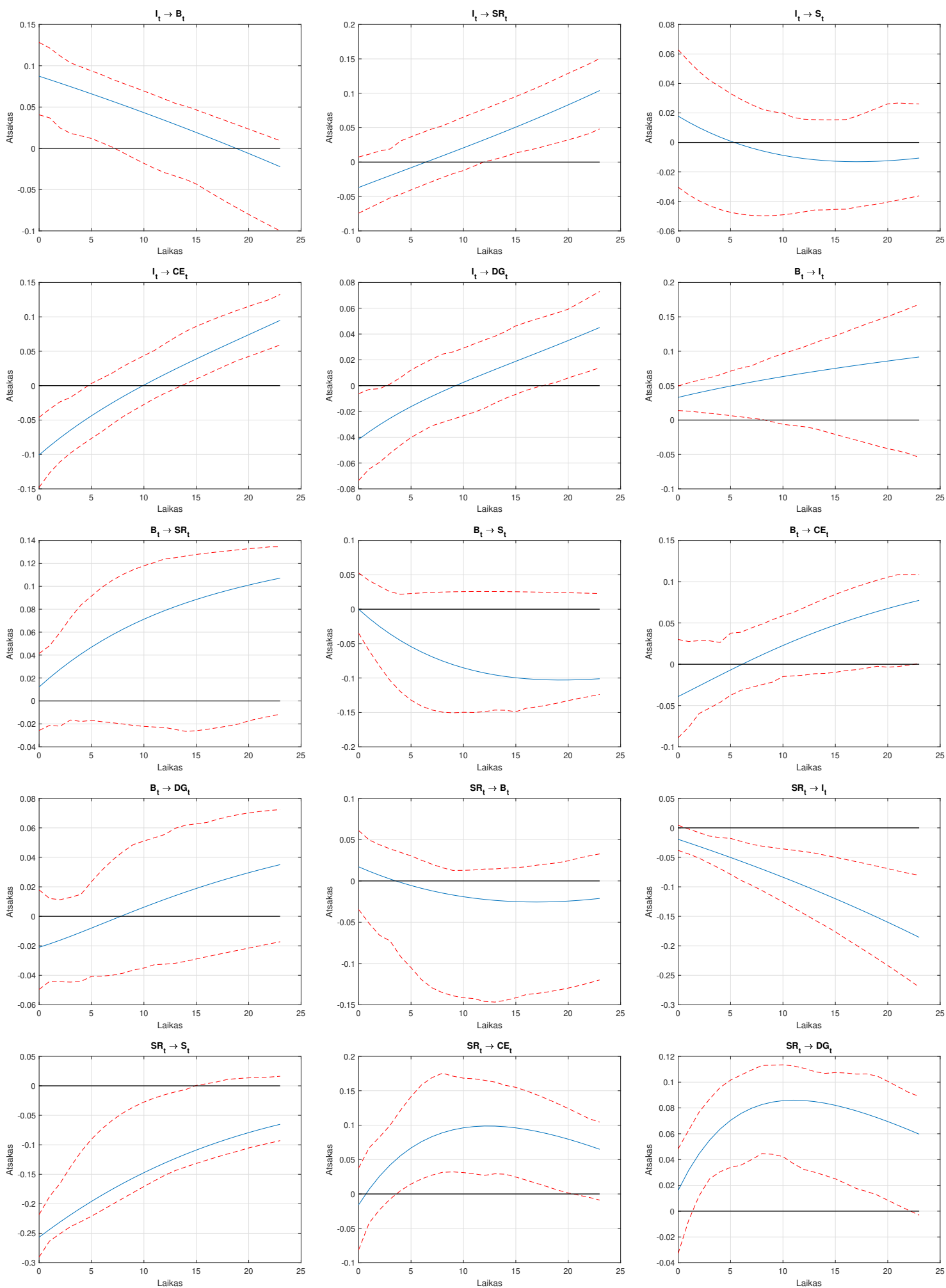
31 pav.: JAV GC rezultatai neįtraukus apribojimų.



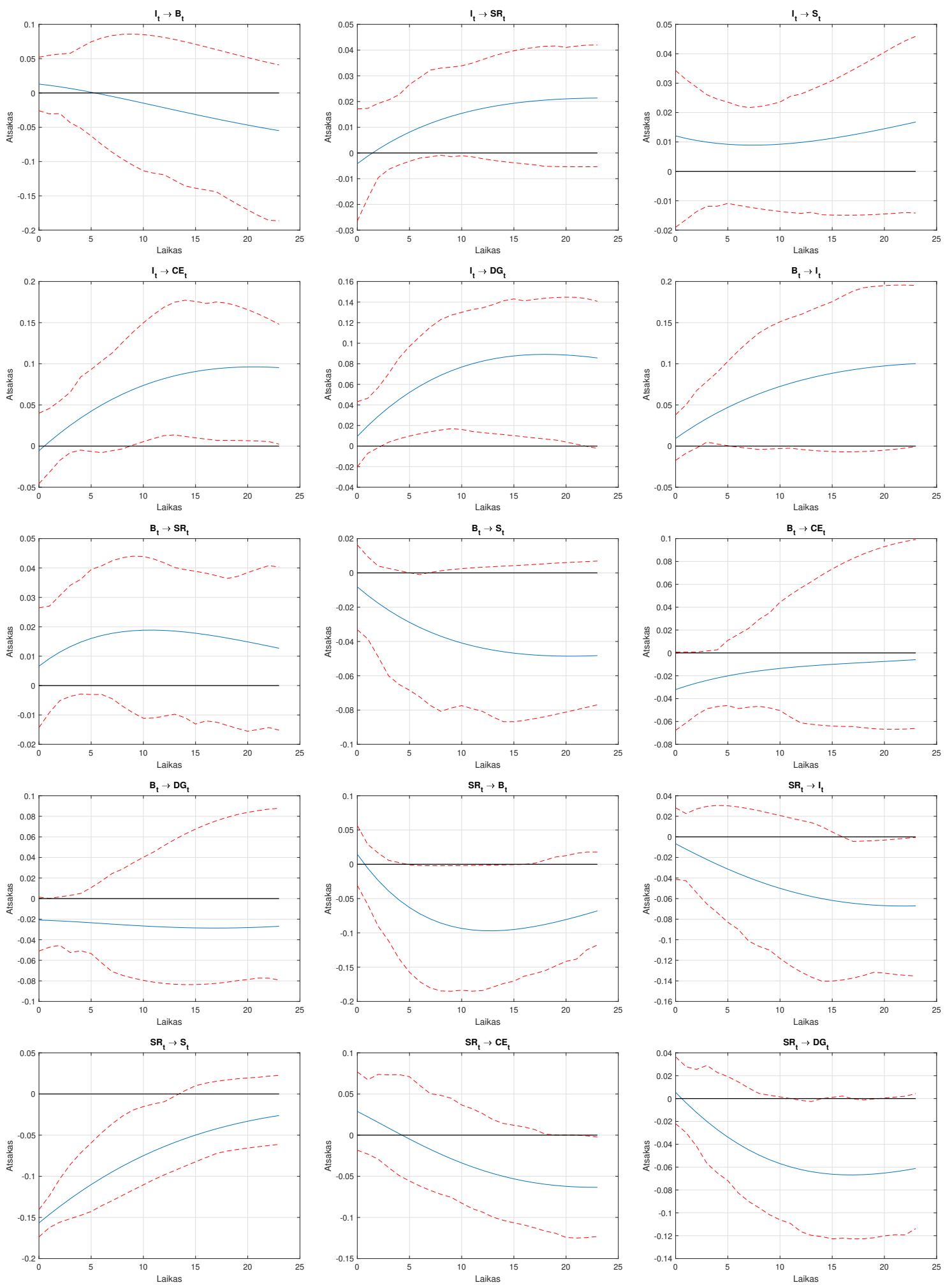
32 pav.: JAV GC rezultatai įtraukus apribojimus.



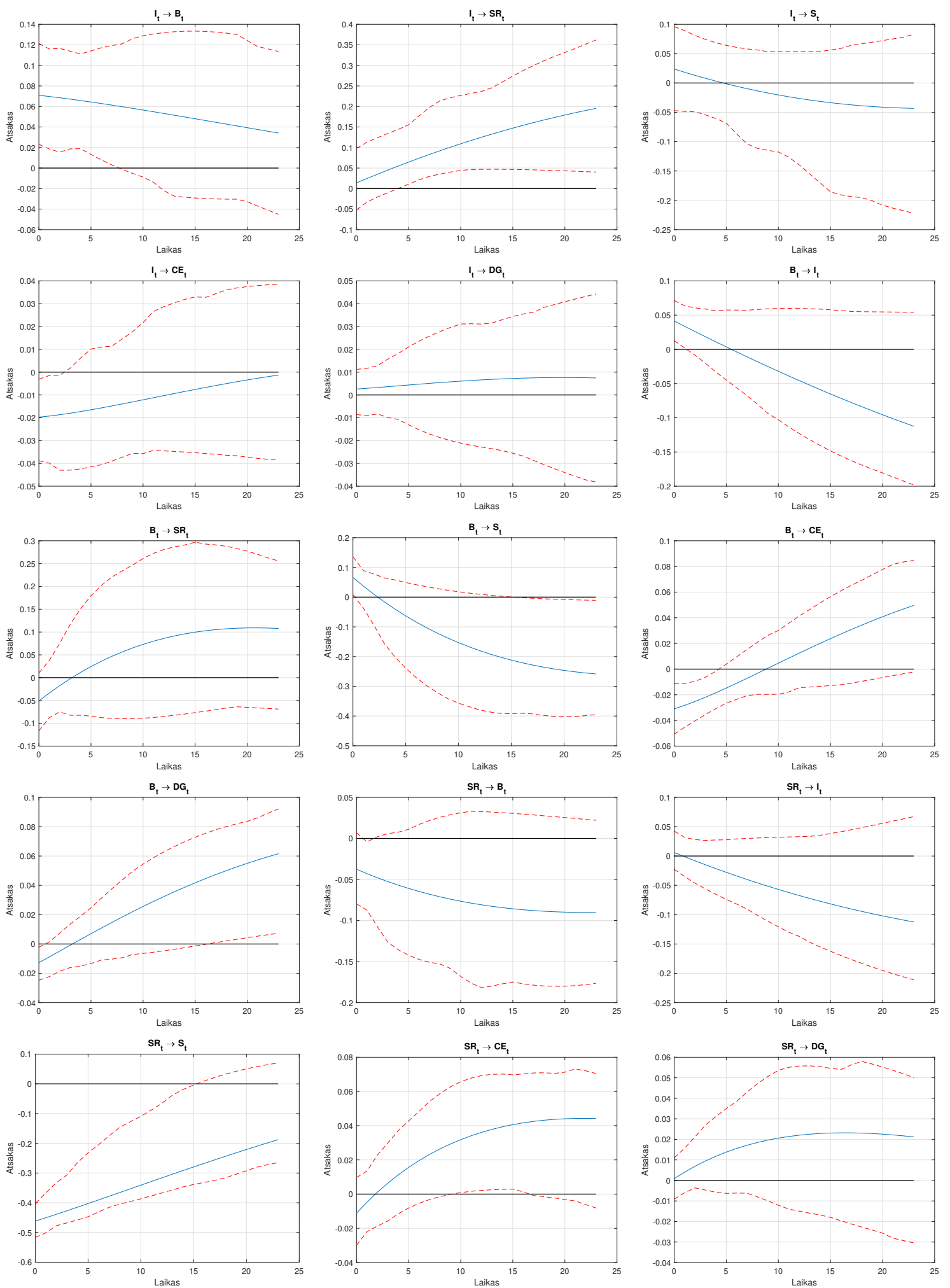
33 pav.: IRF grafikai Kanados atveju (impulsas  $\rightarrow$  atsakas).



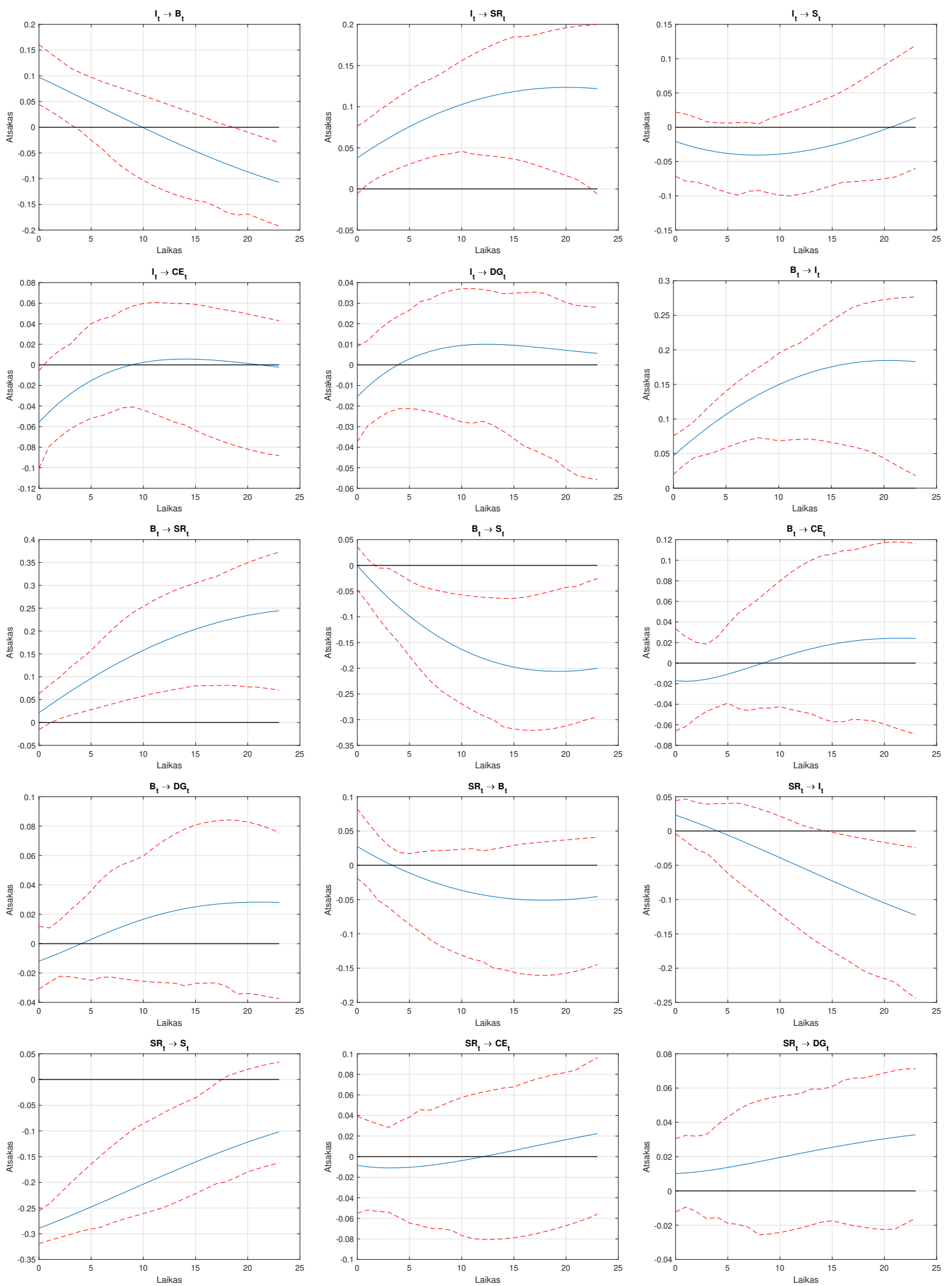
34 pav.: IRF grafikai Vokietijos atveju (impulsas  $\rightarrow$  atsakas).



35 pav.: IRF grafikai Japonijos atveju (impulsas  $\rightarrow$  atsakas).

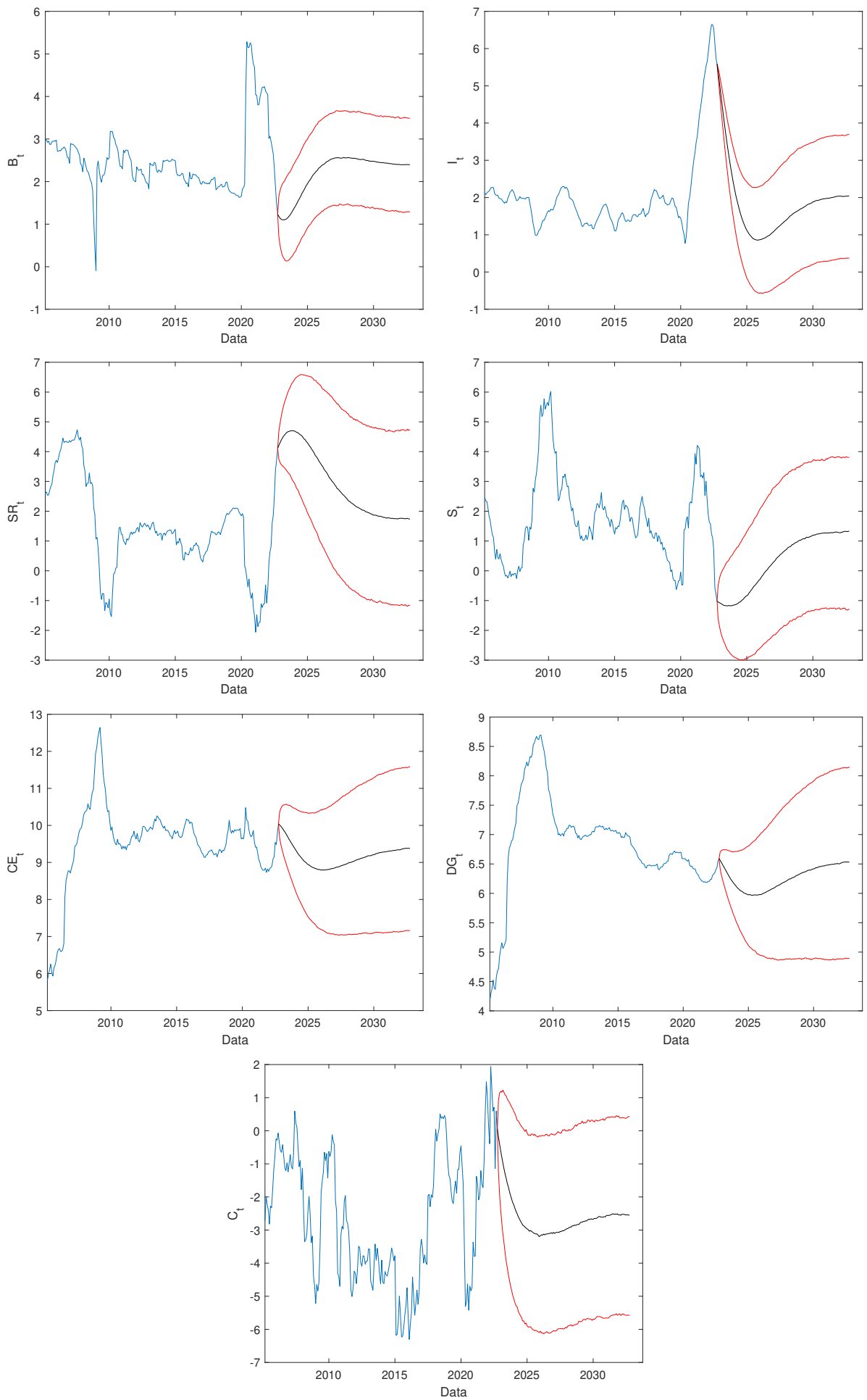


36 pav.: IRF grafikai JAV atveju (impulsas  $\rightarrow$  atsakas).

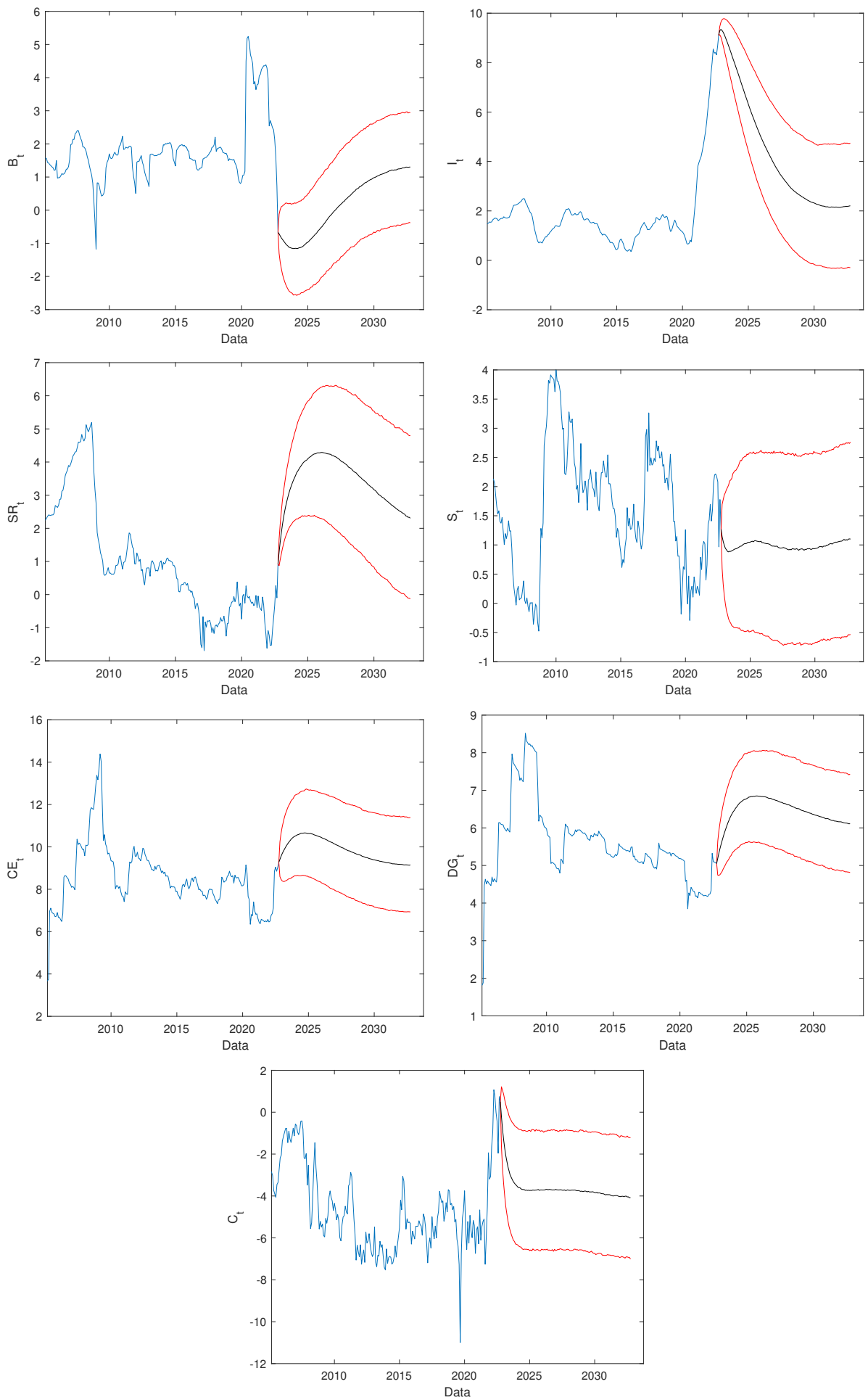


37 pav.: IRF grafikai JK atveju (impulsas  $\rightarrow$  atsakas).

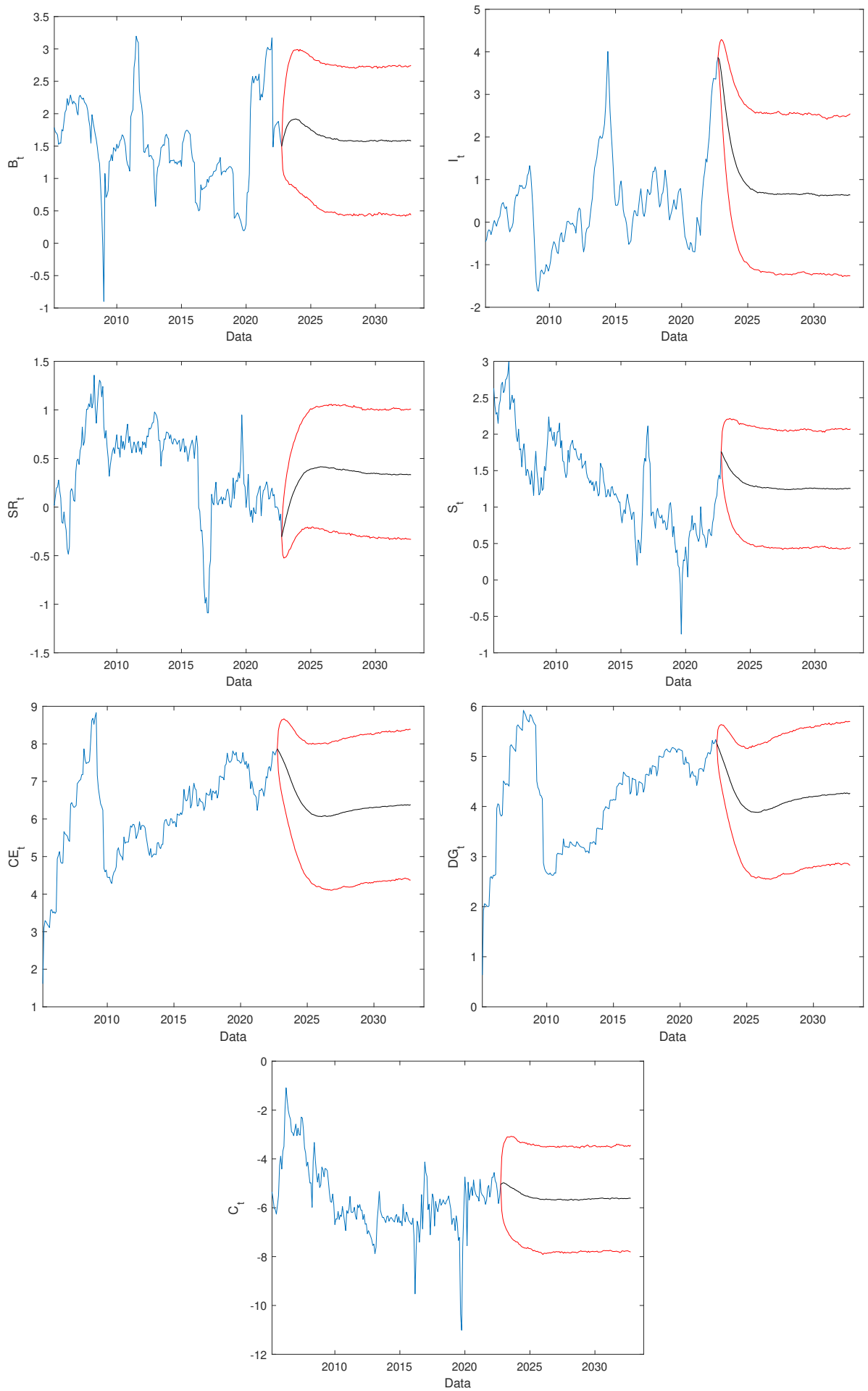




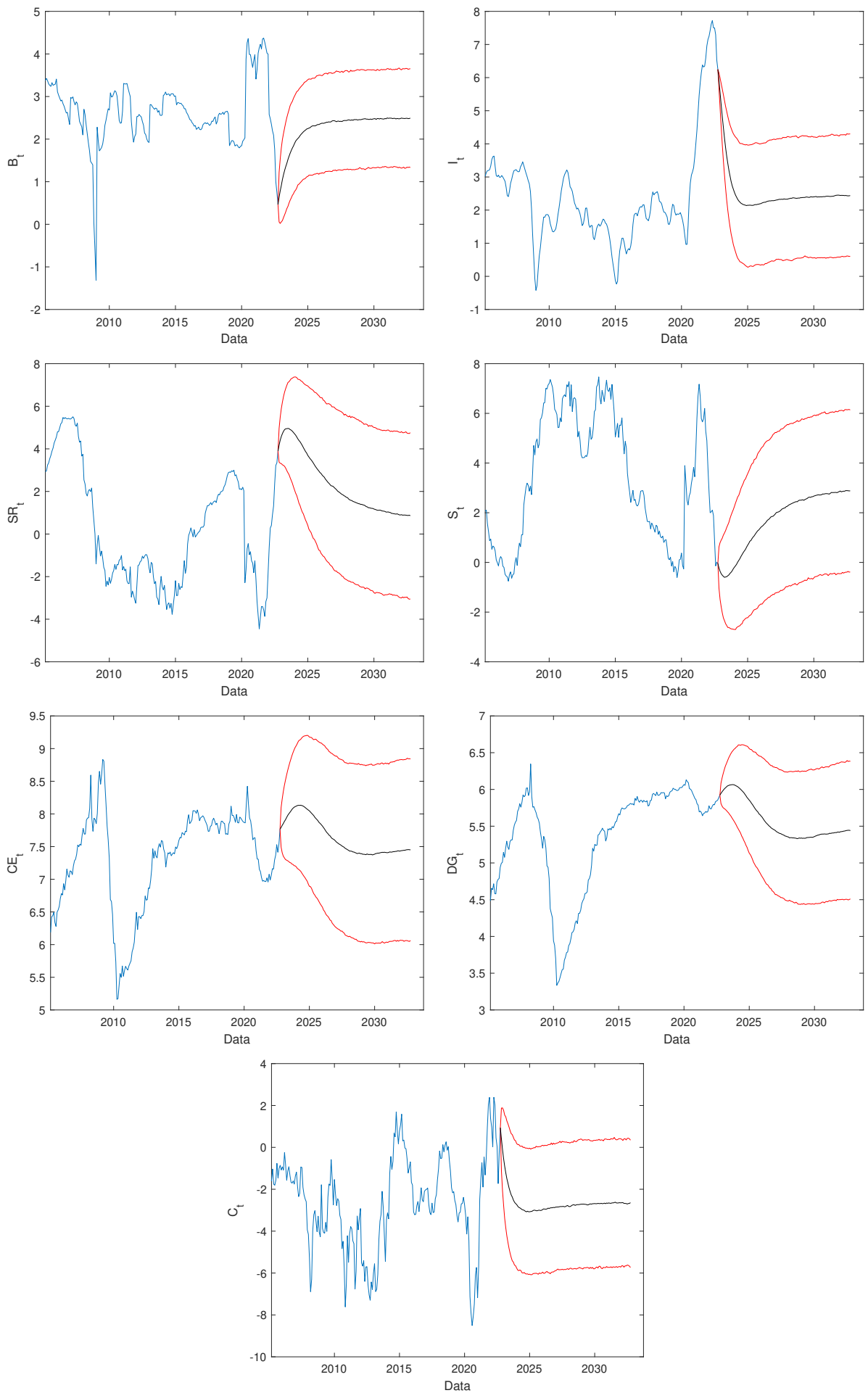
38 pav.: VAR(2) modelio 10-ties metų prognozės Kanados atveju.



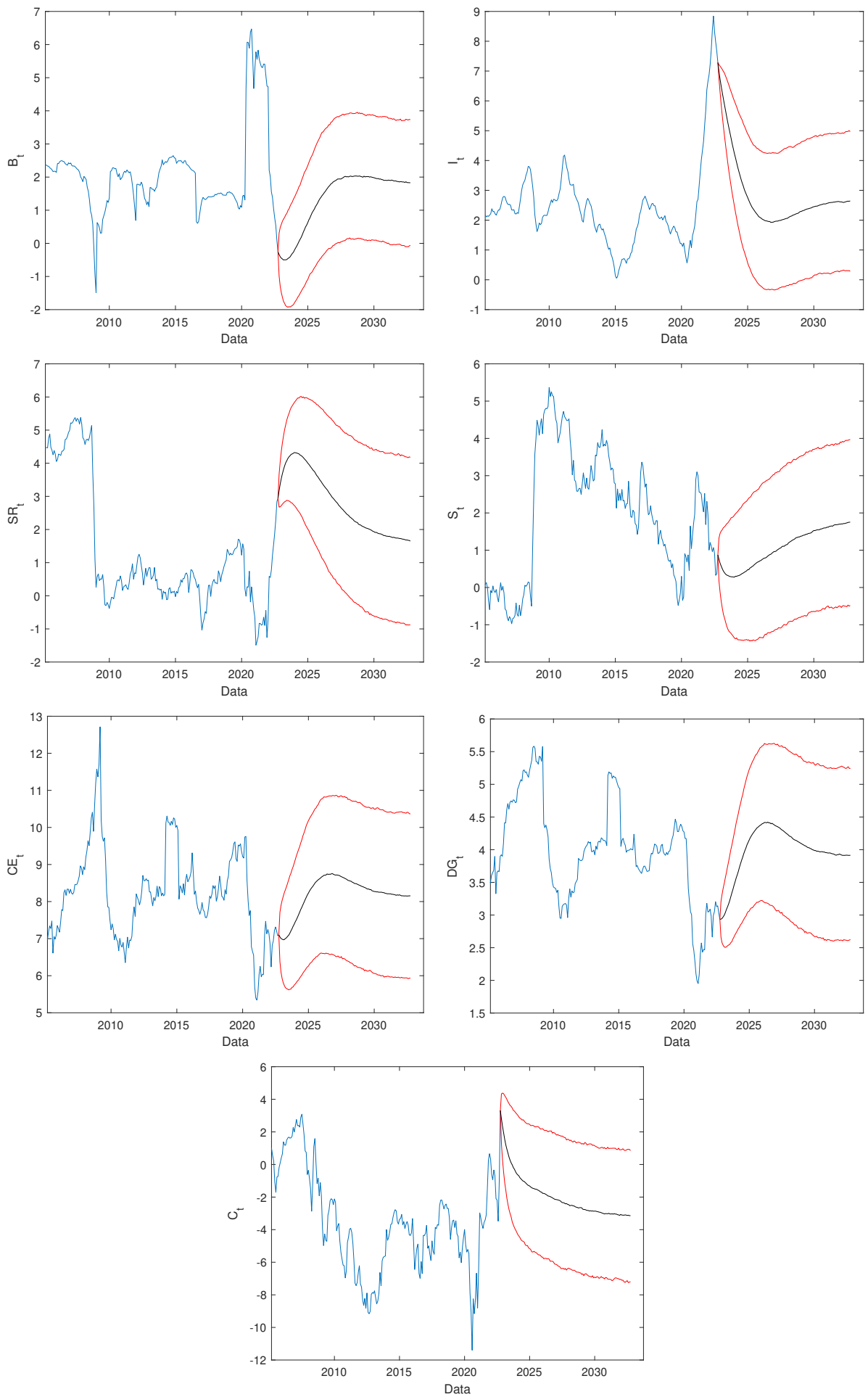
39 pav.: VAR(2) modelio 10-ties metų prognozės Vokietijos atveju.



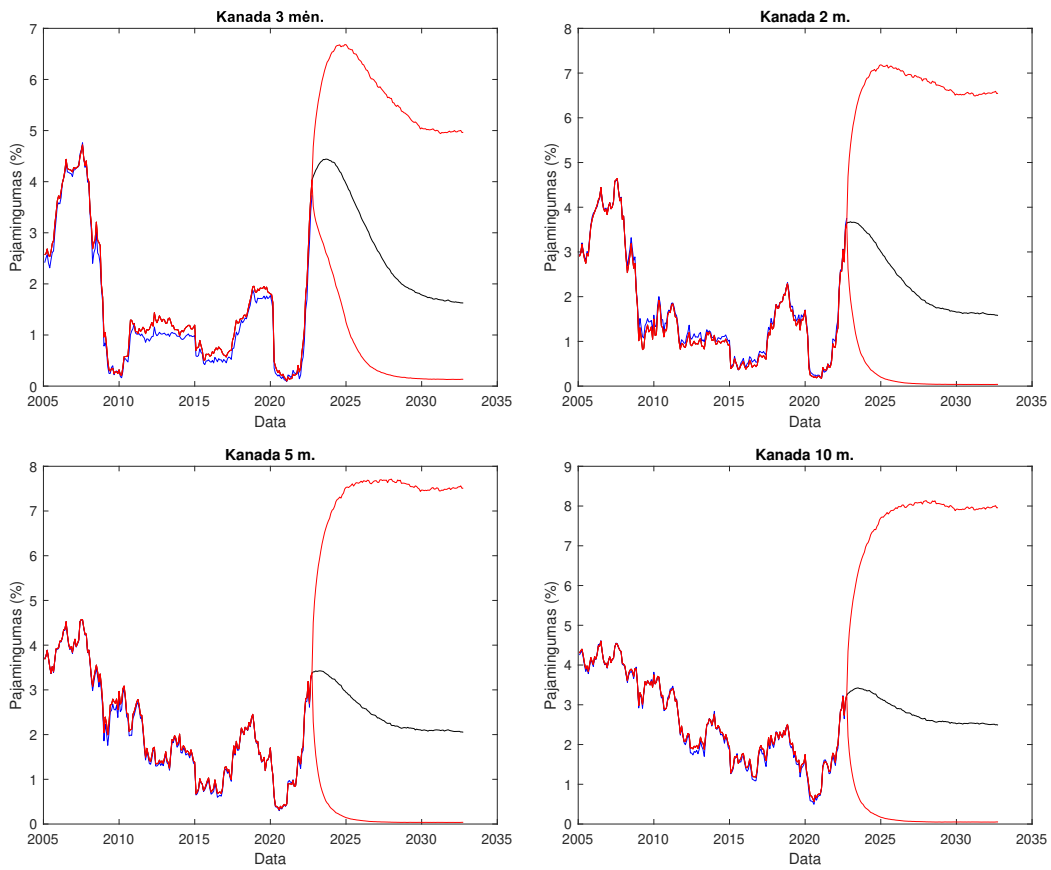
40 pav.: VAR(2) modelio 10-ties metų prognozės Japonijos atveju.



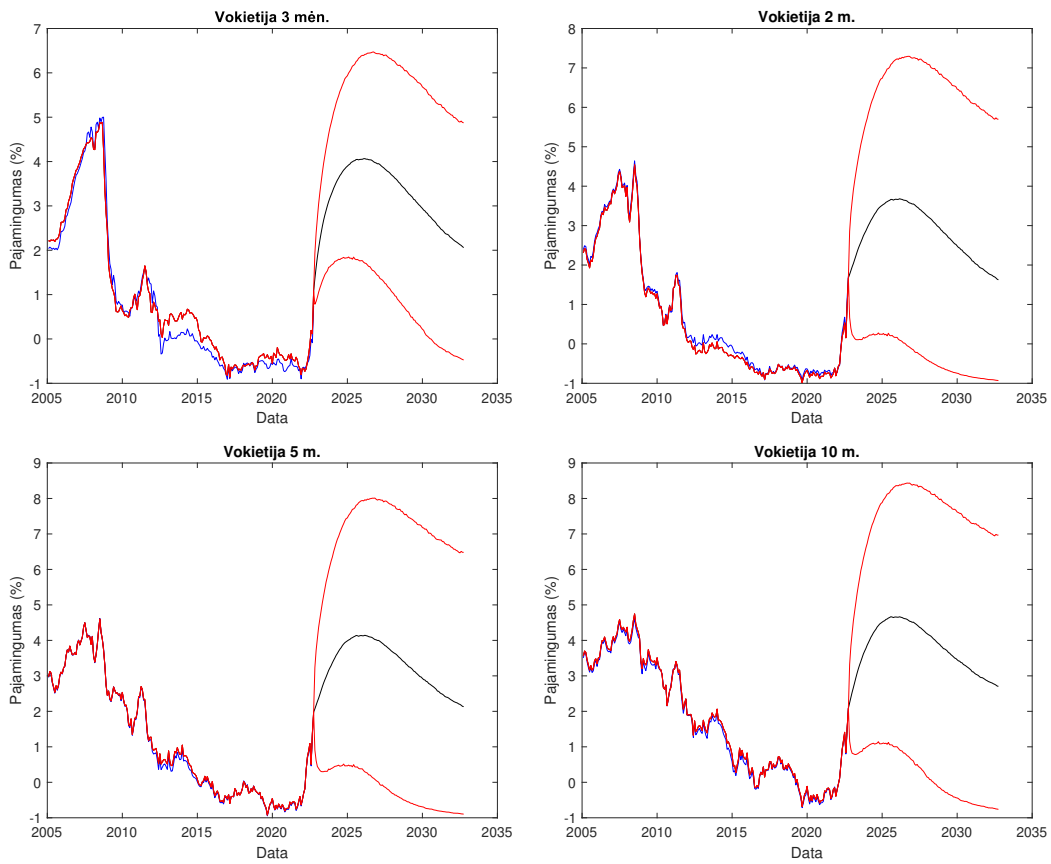
41 pav.: VAR(2) modelio 10-ties metų prognozės JAV atveju.



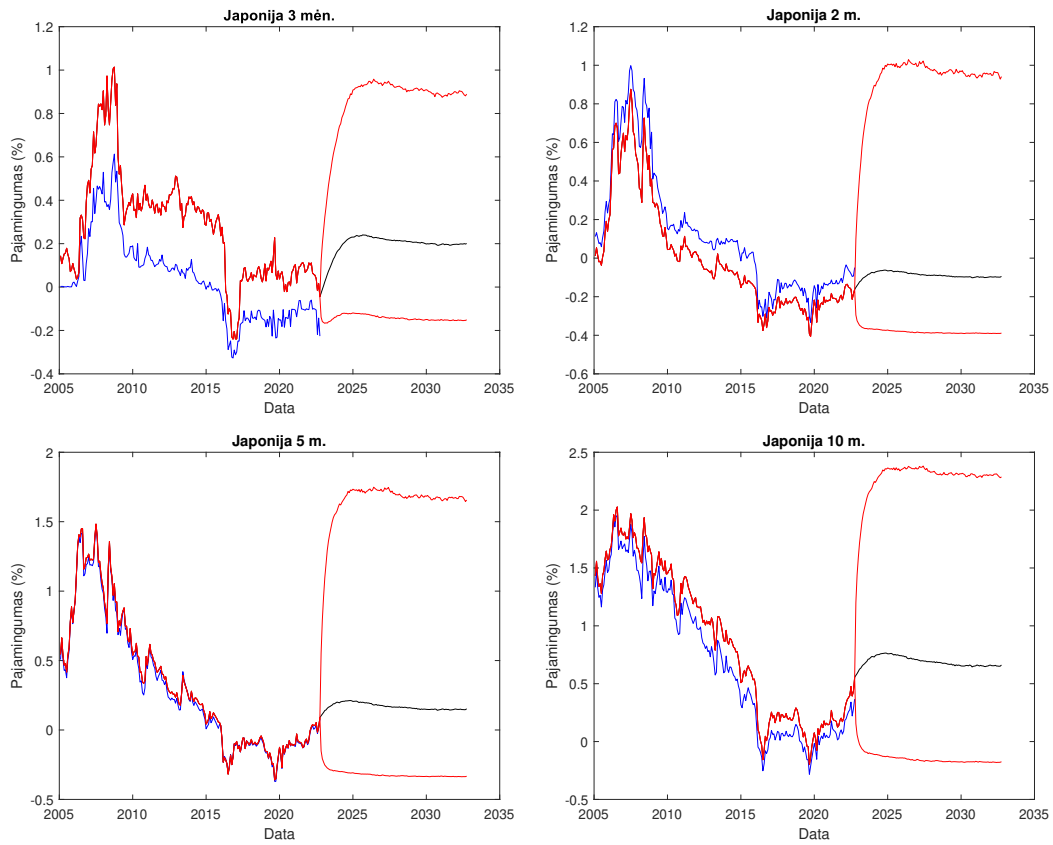
42 pav.: VAR(2) modelio 10-ties metų prognozės JK atveju.



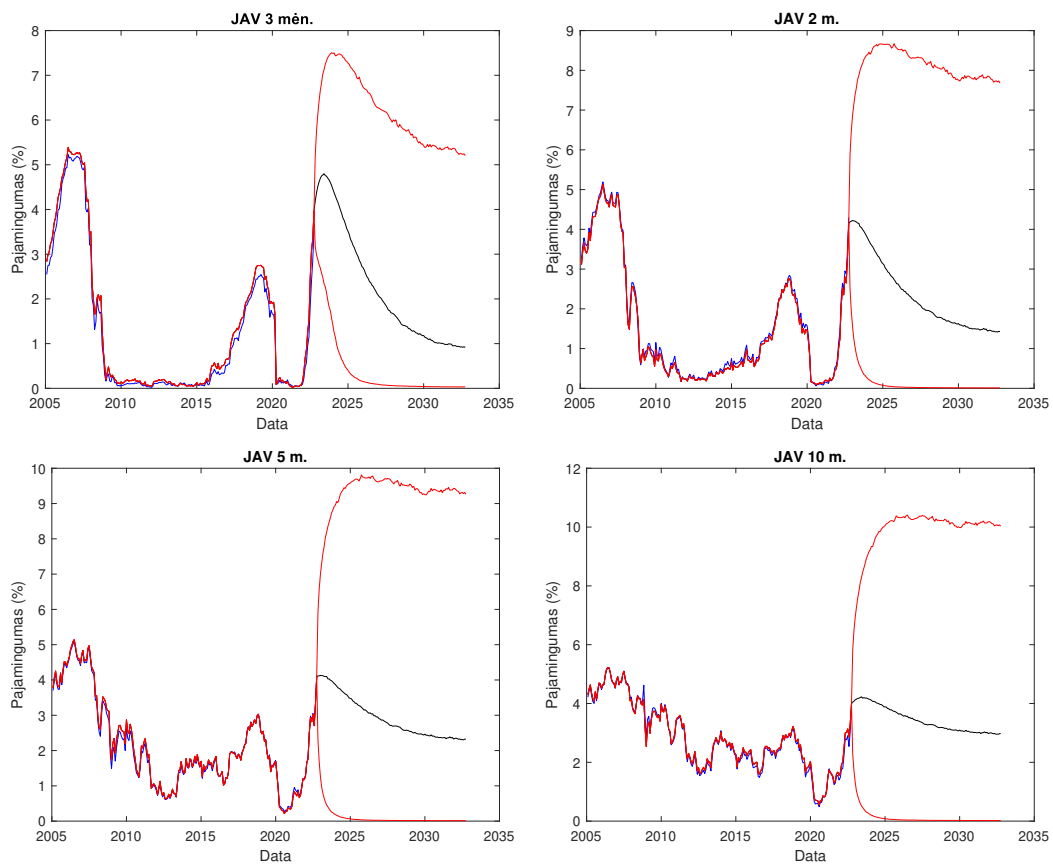
43 pav.: VAR(2) modelio Kanados palūkanų normų prognozės skirtingais išpirkimo laikotarpiais.



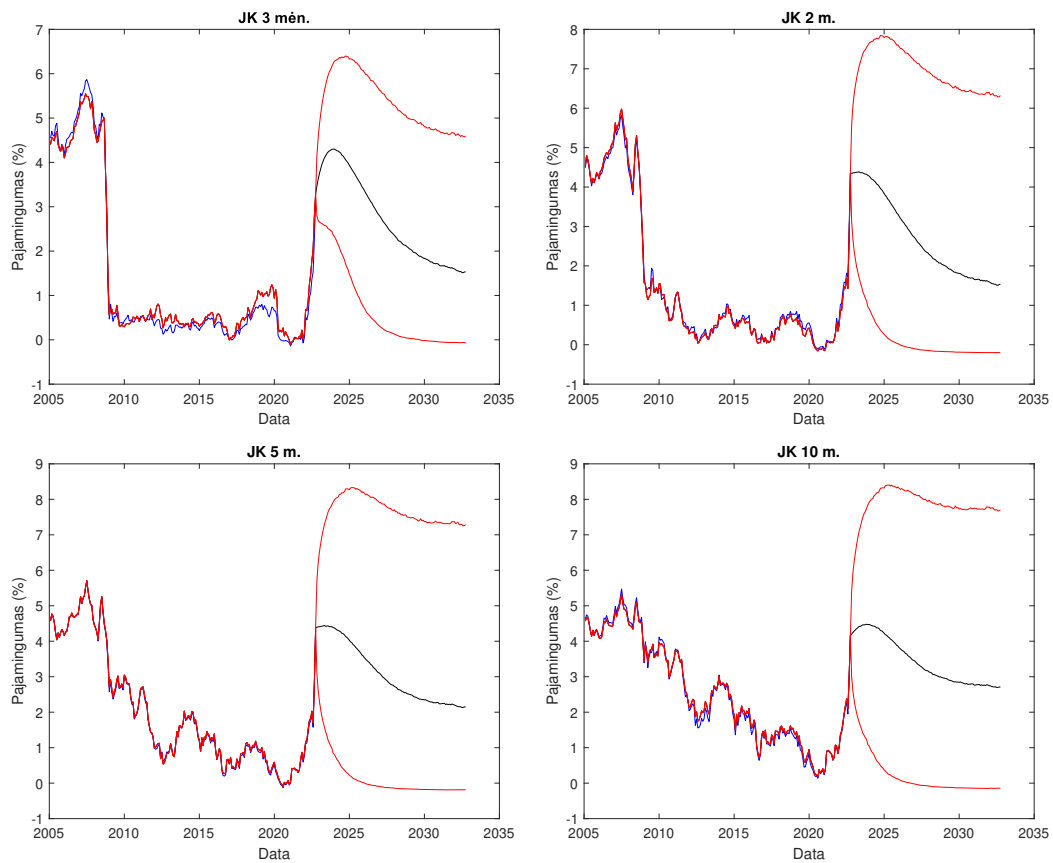
44 pav.: VAR(2) modelio Vokietijos palūkanų normų prognozės skirtingais išpirkimo laikotarpiais.



45 pav.: VAR(2) modelio Japonijos palūkanų normų prognozės skirtingais išpirkimo laikotarpiais.



46 pav.: VAR(2) modelio JAV palūkanų normų prognozės skirtingais išpirkimo laikotarpiais.



47 pav.: VAR(2) modelio JK palūkanų normų prognozės skirtingais išpirkimo laikotarpiais.



## B Lentelės

	6 mėn.		2 m.		5 m.	
	$\Delta RER_{t,h} = \alpha_{0h} + \alpha_{1h}RER_{t-h} + \epsilon_t$					
	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$
USD	-0,03	-0,09	-0,13	-0,38	-0,32	-0,99
CAD	0,10	-0,24	0,25	-0,61	0,41	-1,00
GBP	-0,12	-0,10	-0,49	-0,39	-1,13	-0,91
JPY	0,79	-0,15	3,19	-0,62	4,42	-0,86
	$\Delta NER_{t,h} = \beta_{0h} + \beta_{1h}\Delta RER_{t,h} + \epsilon_t$					
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_0$	$\beta_1$
	USD	0,01	1,00	0,03	0,99	0,06
CAD	0,00	0,96	0,00	0,92	0,00	0,85
GBP	0,01	0,91	0,03	0,79	0,07	0,64
JPY	-0,01	0,99	-0,03	1,02	-0,07	1,02
	$\Delta RPI_{t,h} = \gamma_{0,h} + \gamma_{1,h}\Delta RER_{t,h} + \epsilon_t$					
	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_0$	$\gamma_1$
	USD	-0,01	0,00	-0,03	0,01	-0,06
CAD	0,00	0,04	0,00	0,08	0,00	0,15
GBP	-0,01	0,09	-0,03	0,21	-0,07	0,36
JPY	0,01	0,01	0,03	-0,02	0,07	-0,02

	6 mėn.		2 m.		5 m.	
	$\Delta RER_{t,h} = \alpha_{0h} + \alpha_{1h}RER_{t-h} + \epsilon_t$					
	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$
USD	-0,04	-0,09	-0,15	-0,38	-0,37	-0,99
CAD	-0,02	-0,24	-0,05	-0,62	-0,09	-1,00
GBP	-0,15	-0,10	-0,63	-0,39	-1,44	-0,91
JPY	0,67	-0,15	2,80	-0,62	3,89	-0,86
	$\Delta NER_{t,h} = \beta_{0h} + \beta_{1h}\Delta RER_{t,h} + \epsilon_t$					
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_0$	$\beta_1$
	USD	0,01	1,00	0,03	0,99	0,06
CAD	0,00	0,99	0,00	0,94	0,00	0,87
GBP	0,01	0,94	0,03	0,80	0,07	0,65
JPY	-0,01	1,00	-0,03	1,02	-0,07	1,02
	$\Delta RPI_{t,h} = \gamma_{0,h} + \gamma_{1,h}\Delta RER_{t,h} + \epsilon_t$					
	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_0$	$\gamma_1$
	USD	-0,01	0,00	-0,03	0,01	-0,06
CAD	0,00	0,01	0,00	0,06	0,00	0,13
GBP	-0,01	0,06	-0,03	0,20	-0,07	0,35
JPY	0,01	0,00	0,03	-0,02	0,07	-0,02

4.1 lentelė: Valiutų kursų dėsningumai. LHS - naudojant infliacijos indeksus, RHS - naudojant infliacijos būsenas.

	JAV	Vokietija	Kanada	Didžioji Britanija	Japonija
$\kappa$	0	-1,1	0	-0,25	-0,5
$\eta$	1,3				

4.2 lentelė: Šešėlinės normos transformacijos koeficientų reikšmės.

H0	Sprendimas	Skirstinys	Statistika	p reikšmė	Kritinė/ypatingoji reikšmė
$\phi_{1,2} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{1,2} = 0$	F(1;204)	8,3672	0,0042	3,8874
$\phi_{1,3} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{1,3} = 0$	F(1;204)	1,3614	0,2446	3,8874
$\phi_{1,4} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{1,4} = 0$	F(1;204)	2,9919	0,0852	3,8874
$\phi_{1,5} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{1,5} = 0$	F(1;204)	30,2456	0,0000	3,8874
$\phi_{1,6} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{1,6} = 0$	F(1;204)	25,9352	0,0000	3,8874
$\phi_{1,7} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{1,7} = 0$	F(1;204)	0,7178	0,3979	3,8874
$\phi_{2,1} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{2,1} = 0$	F(1;204)	0,1103	0,7401	3,8874
$\phi_{2,3} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{2,3} = 0$	F(1;204)	41,8867	0,0000	3,8874
$\phi_{2,4} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{2,4} = 0$	F(1;204)	26,5168	0,0000	3,8874
$\phi_{2,5} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{2,5} = 0$	F(1;204)	0,2781	0,5985	3,8874
$\phi_{2,6} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{2,6} = 0$	F(1;204)	0,8943	0,3454	3,8874
$\phi_{2,7} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{2,7} = 0$	F(1;204)	4,7133	0,0311	3,8874
$\phi_{3,1} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{3,1} = 0$	F(1;204)	7,2449	0,0077	3,8874
$\phi_{3,2} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{3,2} = 0$	F(1;204)	0,4795	0,4894	3,8874
$\phi_{3,4} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{3,4} = 0$	F(1;204)	1,0348	0,3102	3,8874
$\phi_{3,5} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{3,5} = 0$	F(1;204)	3,9539	0,0481	3,8874
$\phi_{3,6} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{3,6} = 0$	F(1;204)	1,0295	0,3115	3,8874
$\phi_{3,7} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{3,7} = 0$	F(1;204)	31,1730	0,0000	3,8874
$\phi_{4,1} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{4,1} = 0$	F(1;204)	2,7239	0,1004	3,8874
$\phi_{4,2} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{4,2} = 0$	F(1;204)	0,0034	0,9537	3,8874
$\phi_{4,3} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{4,3} = 0$	F(1;204)	0,4552	0,5006	3,8874
$\phi_{4,5} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{4,5} = 0$	F(1;204)	2,9316	0,0884	3,8874
$\phi_{4,6} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{4,6} = 0$	F(1;204)	1,0410	0,3088	3,8874
$\phi_{4,7} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{4,7} = 0$	F(1;204)	21,6842	0,0000	3,8874
$\phi_{5,1} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{5,1} = 0$	F(1;204)	0,4260	0,5147	3,8874
$\phi_{5,2} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{5,2} = 0$	F(1;204)	3,0940	0,0801	3,8874
$\phi_{5,3} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{5,3} = 0$	F(1;204)	0,3656	0,5461	3,8874
$\phi_{5,4} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{5,4} = 0$	F(1;204)	0,0564	0,8125	3,8874
$\phi_{5,6} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{5,6} = 0$	F(1;204)	2,8173	0,0948	3,8874
$\phi_{5,7} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{5,7} = 0$	F(1;204)	0,5433	0,4619	3,8874
$\phi_{6,1} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{6,1} = 0$	F(1;204)	3,2741	0,0719	3,8874
$\phi_{6,2} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{6,2} = 0$	F(1;204)	2,8340	0,0938	3,8874
$\phi_{6,3} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{6,3} = 0$	F(1;204)	1,7440	0,1881	3,8874
$\phi_{6,4} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{6,4} = 0$	F(1;204)	4,9806	0,0267	3,8874
$\phi_{6,5} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{6,5} = 0$	F(1;204)	1,0560	0,3053	3,8874
$\phi_{6,7} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{6,7} = 0$	F(1;204)	1,7932	0,1820	3,8874
$\phi_{7,1} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{7,1} = 0$	F(1;204)	9,9632	0,0018	3,8874
$\phi_{7,2} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{7,2} = 0$	F(1;204)	3,3816	0,0674	3,8874
$\phi_{7,3} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{7,3} = 0$	F(1;204)	1,6696	0,1978	3,8874
$\phi_{7,4} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{7,4} = 0$	F(1;204)	2,2158	0,1381	3,8874
$\phi_{7,5} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{7,5} = 0$	F(1;204)	3,0181	0,0838	3,8874
$\phi_{7,6} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{7,6} = 0$	F(1;204)	0,4491	0,5035	3,8874

4.3 lentelė: Modelio koeficientai ir jų standartinės paklaidos.

H0	Sprendimas	Skirstinys	Statistika	p reikšmė	Kritinė/ypatingoji reikšmė
$\phi_{1,2} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{1,2} = 0$	F(1;204)	0,0457	0,8309	3,8874
$\phi_{1,3} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{1,3} = 0$	F(1;204)	1,9370	0,1655	3,8874
$\phi_{1,4} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{1,4} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{1,5} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{1,5} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{1,6} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{1,6} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{1,7} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{1,7} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{2,1} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{2,1} = 0$	F(1;204)	1,5547	0,2139	3,8874
$\phi_{2,3} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{2,3} = 0$	F(1;204)	19,8444	0,0000	3,8874
$\phi_{2,4} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{2,4} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{2,5} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{2,5} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{2,6} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{2,6} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{2,7} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{2,7} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{3,1} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{3,1} = 0$	F(1;204)	3,4314	0,0654	3,8874
$\phi_{3,2} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{3,2} = 0$	F(1;204)	8,6624	0,0036	3,8874
$\phi_{3,4} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{3,4} = 0$	F(1;204)	0,5630	0,4539	3,8874
$\phi_{3,5} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{3,5} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{3,6} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{3,6} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{3,7} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{3,7} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{4,1} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{4,1} = 0$	F(1;204)	8,3425	0,0043	3,8874
$\phi_{4,2} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{4,2} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{4,3} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{4,3} = 0$	F(1;204)	0,5018	0,4795	3,8874
$\phi_{4,5} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{4,5} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{4,6} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{4,6} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{4,7} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{4,7} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{5,1} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{5,1} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{5,2} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{5,2} = 0$	F(1;204)	4,8945	0,0281	3,8874
$\phi_{5,3} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{5,3} = 0$	F(1;204)	6,0114	0,0151	3,8874
$\phi_{5,4} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{5,4} = 0$	F(1;204)	2,1307	0,1459	3,8874
$\phi_{5,6} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{5,6} = 0$	F(1;204)	18,6173	0,0000	3,8874
$\phi_{5,7} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{5,7} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{6,1} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{6,1} = 0$	F(1;204)	2,1092	0,1480	3,8874
$\phi_{6,2} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{6,2} = 0$	F(1;204)	3,9084	0,0494	3,8874
$\phi_{6,3} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{6,3} = 0$	F(1;204)	5,7742	0,0172	3,8874
$\phi_{6,4} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{6,4} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{6,5} = 0$	Atmetama, jog $\phi_{6,5} = 0$	F(1;204)	8,0614	0,0050	3,8874
$\phi_{6,7} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{6,7} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{7,1} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{7,1} = 0$	F(1;0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{7,2} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{7,2} = 0$	F(1;0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{7,3} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{7,3} = 0$	F(1;204)	0,2892	0,5913	3,8874
$\phi_{7,4} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{7,4} = 0$	F(1;204)	0,1491	0,6998	3,8874
$\phi_{7,5} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{7,5} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000
$\phi_{7,6} = 0$	Negalima atmesti, jog $\phi_{7,6} = 0$	F(1,0e-03;204)	-	-	0,0000

4.4 lentelė: Modelio koeficientai ir jų standartinės paklaidos.

Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.
GVQ0	0,070	0,057	0,054	0,055	0,074
GVL0	0,087	0,087	0,082	0,086	0,120
GVC0	0,100	0,094	0,087	0,090	0,113
GVD0	0,568	0,604	0,632	0,601	0,443
GVY0	0,072	0,064	0,060	0,071	0,110
EQ	0,103	0,093	0,086	0,096	0,140
<b>Rizika (1 m. hor.)</b>					
Std	0,030	0,028	0,027	0,029	0,037
VaR_0,95	-0,062	-0,057	-0,055	-0,058	-0,075
CVaR_0,95	-0,074	-0,069	-0,066	-0,070	-0,090
<b>Procentiliai (1 m. hor.)</b>					
1%	-0,081	-0,076	-0,073	-0,077	-0,100
5%	-0,062	-0,057	-0,055	-0,058	-0,075
25%	-0,032	-0,030	-0,029	-0,031	-0,040
50%	-0,013	-0,011	-0,011	-0,012	-0,016
75%	0,009	0,008	0,008	0,008	0,010
95%	0,038	0,036	0,034	0,036	0,045
99%	0,057	0,054	0,052	0,055	0,069

Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.
GVQ0*	0,087	0,080	0,086	0,099	0,119
GVL0*	0,111	0,101	0,114	0,135	0,146
GVC0*	0,091	0,101	0,119	0,147	0,167
GVD0*	0,146	0,255	0,339	0,361	0,251
GVY0*	0,531	0,418	0,285	0,174	0,177
EQ*	0,034	0,045	0,058	0,084	0,139
<b>Rizika (1 m. hor.)</b>					
Std	0,007	0,008	0,010	0,012	0,016
VaR_0,95	0,003	-0,002	-0,006	-0,010	-0,014
CVaR_0,95	0,000	-0,005	-0,010	-0,015	-0,020
<b>Procentiliai (1 m. hor.)</b>					
1%	-0,002	-0,008	-0,013	-0,018	-0,023
5%	0,003	-0,002	-0,006	-0,010	-0,014
25%	0,010	0,006	0,003	0,001	0,000
50%	0,014	0,012	0,010	0,009	0,010
75%	0,019	0,018	0,017	0,017	0,021
95%	0,026	0,026	0,027	0,030	0,037
99%	0,031	0,032	0,034	0,039	0,050

\* Panaikinus valiutinę riziką.

4.5 lentelė: Rizikos pariteto rezultatai nagrinėjant 1-5 m. VVP indeksus skirtingu horizontu (įtraukiant akcijų indeksą).

Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.
GVQ0	0,083	0,071	0,068	0,073	0,100
GVL0	0,124	0,112	0,103	0,110	0,158
GVC0	0,122	0,112	0,101	0,107	0,135
GVD0	0,594	0,632	0,657	0,622	0,468
GVY0	0,077	0,072	0,070	0,087	0,139
<b>Rizika (1 m. hor.)</b>					
Std	0,030	0,028	0,027	0,029	0,037
VaR_0,95	-0,056	-0,053	-0,051	-0,055	-0,071
CVaR_0,95	-0,069	-0,065	-0,062	-0,067	-0,086
<b>Procentiliai (1 m. hor.)</b>					
1%	-0,076	-0,071	-0,069	-0,074	-0,095
5%	-0,056	-0,053	-0,051	-0,055	-0,071
25%	-0,028	-0,027	-0,026	-0,028	-0,036
50%	-0,008	-0,008	-0,007	-0,008	-0,011
75%	0,012	0,012	0,011	0,012	0,014
95%	0,041	0,039	0,038	0,040	0,051
99%	0,061	0,058	0,055	0,059	0,075

Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.
GVQ0*	0,091	0,099	0,121	0,154	0,171
GVL0*	0,101	0,104	0,125	0,163	0,196
GVC0*	0,091	0,103	0,123	0,158	0,191
GVD0*	0,129	0,240	0,323	0,334	0,231
GVY0*	0,588	0,455	0,309	0,190	0,210
<b>Rizika (1 m. hor.)</b>					
Std	0,007	0,008	0,010	0,012	0,012
VaR_0,95	0,005	0,000	-0,005	-0,008	-0,005
CVaR_0,95	0,002	-0,004	-0,009	-0,013	-0,010
<b>Procentiliai (1 m. hor.)</b>					
1%	0,000	-0,006	-0,012	-0,016	-0,013
5%	0,005	0,000	-0,005	-0,008	-0,005
25%	0,011	0,008	0,005	0,004	0,006
50%	0,015	0,013	0,012	0,011	0,014
75%	0,020	0,019	0,018	0,019	0,022
95%	0,026	0,027	0,028	0,031	0,033
99%	0,030	0,031	0,034	0,038	0,040

\* Panaikinus valiutinę riziką.

4.6 lentelė: Rizikos pariteto rezultatai nagrinėjant 1-5 m. VVP indeksus skirtingu horizontu (neįtraukiant akcijų indekso).

Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.
G5O2	0,092	0,079	0,078	0,075	0,082
G5L0	0,109	0,117	0,115	0,111	0,125
G5C0	0,123	0,121	0,116	0,114	0,121
G5D0	0,449	0,471	0,497	0,506	0,432
G5Y0	0,092	0,086	0,080	0,081	0,101
EQ	0,135	0,126	0,114	0,112	0,139
<b>Rizika (1 m. hor.)</b>					
Std	0,040	0,038	0,037	0,037	0,040
VaR_0,95	-0,088	-0,086	-0,084	-0,084	-0,090
CVaR_0,95	-0,105	-0,102	-0,100	-0,099	-0,107
<b>Procentiliai (1 m. hor.)</b>					
1%	-0,114	-0,111	-0,109	-0,108	-0,116
5%	-0,088	-0,086	-0,084	-0,084	-0,090
25%	-0,051	-0,050	-0,049	-0,049	-0,052
50%	-0,025	-0,024	-0,024	-0,024	-0,025
75%	0,003	0,002	0,002	0,002	0,003
95%	0,041	0,040	0,038	0,038	0,042
99%	0,067	0,065	0,063	0,062	0,069

Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.
G5O2*	0,129	0,099	0,088	0,092	0,122
G5L0*	0,142	0,113	0,108	0,119	0,147
G5C0*	0,109	0,104	0,108	0,126	0,153
G5D0*	0,157	0,199	0,262	0,339	0,292
G5Y0*	0,398	0,417	0,363	0,237	0,153
EQ*	0,065	0,069	0,072	0,087	0,132
<b>Rizika (1 m. hor.)</b>					
Std	0,014	0,014	0,014	0,017	0,019
VaR_0,95	-0,013	-0,014	-0,018	-0,024	-0,027
CVaR_0,95	-0,019	-0,020	-0,024	-0,031	-0,035
<b>Procentiliai (1 m. hor.)</b>					
1%	-0,023	-0,023	-0,028	-0,036	-0,040
5%	-0,013	-0,014	-0,018	-0,024	-0,027
25%	0,001	-0,001	-0,004	-0,009	-0,010
50%	0,010	0,008	0,006	0,002	0,003
75%	0,019	0,017	0,015	0,013	0,016
95%	0,033	0,031	0,030	0,030	0,036
99%	0,042	0,040	0,040	0,042	0,051

\* Panaikinus valiutinę riziką.

4.7 lentelė: Rizikos pariteto rezultatai nagrinėjant 1-10 m. VVP indeksus skirtingu horizontu (įtraukiant akcijų indeksą).

Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.
G5O2	0,109	0,099	0,096	0,094	0,108
G5L0	0,161	0,153	0,144	0,139	0,163
G5C0	0,153	0,146	0,137	0,134	0,145
G5D0	0,478	0,505	0,531	0,536	0,459
G5Y0	0,099	0,097	0,093	0,097	0,126
<b>Rizika (1 m. hor.)</b>					
Std	0,040	0,039	0,038	0,038	0,041
VaR_0,95	-0,084	-0,082	-0,081	-0,081	-0,087
CVaR_0,95	-0,100	-0,098	-0,096	-0,096	-0,104
<b>Procentiliai (1 m. hor.)</b>					
1%	-0,110	-0,108	-0,106	-0,106	-0,114
5%	-0,084	-0,082	-0,081	-0,081	-0,087
25%	-0,047	-0,046	-0,045	-0,046	-0,048
50%	-0,020	-0,020	-0,020	-0,020	-0,020
75%	0,007	0,006	0,005	0,005	0,008
95%	0,046	0,045	0,042	0,042	0,049
99%	0,072	0,070	0,068	0,068	0,075

Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.
G5O2*	0,137	0,121	0,122	0,140	0,175
G5L0*	0,138	0,118	0,119	0,142	0,191
G5C0*	0,119	0,110	0,114	0,138	0,176
G5D0*	0,142	0,189	0,256	0,329	0,284
G5Y0*	0,464	0,461	0,390	0,250	0,175
<b>Rizika (1 m. hor.)</b>					
Std	0,013	0,013	0,015	0,017	0,019
VaR_0,95	-0,011	-0,012	-0,017	-0,024	-0,024
CVaR_0,95	-0,016	-0,018	-0,023	-0,031	-0,032
<b>Procentiliai (1 m. hor.)</b>					
1%	-0,020	-0,022	-0,027	-0,035	-0,037
5%	-0,011	-0,012	-0,017	-0,024	-0,024
25%	0,003	0,001	-0,002	-0,007	-0,007
50%	0,012	0,010	0,007	0,004	0,006
75%	0,021	0,019	0,017	0,016	0,018
95%	0,034	0,032	0,031	0,033	0,037
99%	0,042	0,040	0,040	0,043	0,048

\* Panaikinus valiutinę riziką.

4.8 lentelė: Rizikos pariteto rezultatai nagrinėjant 1-10 m. VVP indeksus skirtingu horizontu (neįtraukiant akcijų indekso).

	GVQ0 <sup>+</sup>	GVL0 <sup>+</sup>	GVC0 <sup>+</sup>	GVD0 <sup>+</sup>	GVY0 <sup>+</sup>	EQ <sup>+</sup>
GVQ0 <sup>+</sup>	1,000	0,727	0,599	0,395	0,104	-0,135
GVL0 <sup>+</sup>	0,727	1,000	0,579	0,396	0,186	-0,177
GVC0 <sup>+</sup>	0,599	0,579	1,000	0,583	0,125	-0,163
GVD0 <sup>+</sup>	0,395	0,396	0,583	1,000	0,121	-0,233
GVY0 <sup>+</sup>	0,104	0,186	0,125	0,121	1,000	0,044
EQ <sup>+</sup>	-0,135	-0,177	-0,163	-0,233	0,044	1,000

	GVQ0 <sup>*</sup>	GVL0 <sup>*</sup>	GVC0 <sup>*</sup>	GVD0 <sup>*</sup>	GVY0 <sup>*</sup>	EQ <sup>*</sup>
GVQ0 <sup>*</sup>	1,000	0,741	0,573	0,349	0,490	0,395
GVL0 <sup>*</sup>	0,741	1,000	0,619	0,403	0,618	0,246
GVC0 <sup>*</sup>	0,573	0,619	1,000	0,556	0,568	0,086
GVD0 <sup>*</sup>	0,349	0,403	0,556	1,000	0,496	-0,127
GVY0 <sup>*</sup>	0,490	0,618	0,568	0,496	1,000	0,081
EQ <sup>*</sup>	0,395	0,246	0,086	-0,127	0,081	1,000

	GVQ0 <sup>**</sup>	GVL0 <sup>**</sup>	GVC0 <sup>**</sup>	GVD0 <sup>**</sup>	GVY0 <sup>**</sup>	EQ <sup>**</sup>
GVQ0 <sup>**</sup>	1,000	0,864	0,794	0,723	0,797	0,495
GVL0 <sup>**</sup>	0,864	1,000	0,816	0,746	0,836	0,380
GVC0 <sup>**</sup>	0,794	0,816	1,000	0,847	0,854	0,236
GVD0 <sup>**</sup>	0,723	0,746	0,847	1,000	0,873	0,125
GVY0 <sup>**</sup>	0,797	0,836	0,854	0,873	1,000	0,252
EQ <sup>**</sup>	0,495	0,380	0,236	0,125	0,252	1,000

	G5O2 <sup>+</sup>	G5L0 <sup>+</sup>	G5C0 <sup>+</sup>	G5D0 <sup>+</sup>	G5Y0 <sup>+</sup>	EQ <sup>+</sup>
G5O2 <sup>+</sup>	1,000	0,756	0,664	0,497	0,245	-0,136
G5L0 <sup>+</sup>	0,756	1,000	0,641	0,515	0,327	-0,162
G5C0 <sup>+</sup>	0,664	0,641	1,000	0,656	0,306	-0,132
G5D0 <sup>+</sup>	0,497	0,515	0,656	1,000	0,413	-0,196
G5Y0 <sup>+</sup>	0,245	0,327	0,306	0,413	1,000	-0,003
EQ <sup>+</sup>	-0,136	-0,162	-0,132	-0,196	-0,003	1,000

	G5O2 <sup>*</sup>	G5L0 <sup>*</sup>	G5C0 <sup>*</sup>	G5D0 <sup>*</sup>	G5Y0 <sup>*</sup>	EQ <sup>*</sup>
G5O2 <sup>*</sup>	1,000	0,716	0,526	0,233	0,382	0,405
G5L0 <sup>*</sup>	0,716	1,000	0,525	0,256	0,470	0,256
G5C0 <sup>*</sup>	0,526	0,525	1,000	0,419	0,326	0,112
G5D0 <sup>*</sup>	0,233	0,256	0,419	1,000	0,125	-0,121
G5Y0 <sup>*</sup>	0,382	0,470	0,326	0,125	1,000	0,075
EQ <sup>*</sup>	0,405	0,256	0,112	-0,121	0,075	1,000

	G5O2 <sup>**</sup>	G5L0 <sup>**</sup>	G5C0 <sup>**</sup>	G5D0 <sup>**</sup>	G5Y0 <sup>**</sup>	EQ <sup>**</sup>
G5O2 <sup>**</sup>	1,000	0,824	0,708	0,568	0,722	0,524
G5L0 <sup>**</sup>	0,824	1,000	0,709	0,585	0,751	0,391
G5C0 <sup>**</sup>	0,708	0,709	1,000	0,686	0,704	0,243
G5D0 <sup>**</sup>	0,568	0,585	0,686	1,000	0,701	0,069
G5Y0 <sup>**</sup>	0,722	0,751	0,704	0,701	1,000	0,248
EQ <sup>**</sup>	0,524	0,391	0,243	0,069	0,248	1,000

<sup>+</sup> Gautas 1 metų grąžų prognozių atveju.

<sup>\*</sup> Gautas 5 metų grąžų prognozių atveju.

<sup>\*\*</sup> Gautas 10 metų grąžų prognozių atveju.

4.9 lentelė: Nagrinėjamų draustų aktyvų grąžų koreliacijų matricos skirtingais prognozavimo horizontais (EQ žymi akcijų indeksą).

	GVQ0	GVL0	GVC0	GVD0	GVY0	EQ
1 m.	0,021	0,017	0,019	0,016	0,005	0,104
5 m.	0,010	0,009	0,009	0,005	0,008	0,028
10 m.	0,009	0,008	0,009	0,006	0,009	0,017

	G5O2	G5L0	G5C0	G5D0	G5Y0	EQ
1 m.	0,027	0,024	0,029	0,024	0,010	0,104
5 m.	0,012	0,011	0,011	0,007	0,008	0,028
10 m.	0,009	0,009	0,009	0,006	0,009	0,017

4.10 lentelė: Indeksų, kurių atveju yra panaikinta valiutinė rizika, grąžų standartiniai nuokrypiai atitinkamu investavimo horizontu (duomenys sumetinti).

	GVQ0 <sup>+</sup>	GVL0 <sup>+</sup>	GVC0 <sup>+</sup>	GVD0 <sup>+</sup>	GVY0 <sup>+</sup>	EQ <sup>+</sup>
GVQ0 <sup>+</sup>	1,000	0,489	0,501	0,371	0,680	0,287
GVL0 <sup>+</sup>	0,489	1,000	0,490	0,188	0,309	0,565
GVC0 <sup>+</sup>	0,501	0,490	1,000	0,215	0,321	0,360
GVD0 <sup>+</sup>	0,371	0,188	0,215	1,000	0,494	0,002
GVY0 <sup>+</sup>	0,680	0,309	0,321	0,494	1,000	0,118
EQ <sup>+</sup>	0,287	0,565	0,360	0,002	0,118	1,000
	GVQ0 <sup>*</sup>	GVL0 <sup>*</sup>	GVC0 <sup>*</sup>	GVD0 <sup>*</sup>	GVY0 <sup>*</sup>	EQ <sup>*</sup>
GVQ0 <sup>*</sup>	1,000	0,510	0,481	0,169	0,613	0,557
GVL0 <sup>*</sup>	0,510	1,000	0,469	0,106	0,280	0,509
GVC0 <sup>*</sup>	0,481	0,469	1,000	0,163	0,233	0,370
GVD0 <sup>*</sup>	0,169	0,106	0,163	1,000	0,150	-0,078
GVY0 <sup>*</sup>	0,613	0,280	0,233	0,150	1,000	0,423
EQ <sup>*</sup>	0,557	0,509	0,370	-0,078	0,423	1,000
	GVQ0 <sup>**</sup>	GVL0 <sup>**</sup>	GVC0 <sup>**</sup>	GVD0 <sup>**</sup>	GVY0 <sup>**</sup>	EQ <sup>**</sup>
GVQ0 <sup>**</sup>	1,000	0,544	0,488	0,135	0,577	0,539
GVL0 <sup>**</sup>	0,544	1,000	0,474	0,029	0,357	0,533
GVC0 <sup>**</sup>	0,488	0,474	1,000	0,170	0,262	0,348
GVD0 <sup>**</sup>	0,135	0,029	0,170	1,000	-0,015	-0,134
GVY0 <sup>**</sup>	0,577	0,357	0,262	-0,015	1,000	0,476
EQ <sup>**</sup>	0,539	0,533	0,348	-0,134	0,476	1,000

	G5O2 <sup>+</sup>	G5L0 <sup>+</sup>	G5C0 <sup>+</sup>	G5D0 <sup>+</sup>	G5Y0 <sup>+</sup>	EQ <sup>+</sup>
G5O2 <sup>+</sup>	1,000	0,510	0,524	0,436	0,694	0,272
G5L0 <sup>+</sup>	0,510	1,000	0,504	0,268	0,352	0,566
G5C0 <sup>+</sup>	0,524	0,504	1,000	0,319	0,361	0,358
G5D0 <sup>+</sup>	0,436	0,268	0,319	1,000	0,539	0,047
G5Y0 <sup>+</sup>	0,694	0,352	0,361	0,539	1,000	0,116
EQ <sup>+</sup>	0,272	0,566	0,358	0,047	0,116	1,000
	G5O2 <sup>*</sup>	G5L0 <sup>*</sup>	G5C0 <sup>*</sup>	G5D0 <sup>*</sup>	G5Y0 <sup>*</sup>	EQ <sup>*</sup>
G5O2 <sup>*</sup>	1,000	0,527	0,511	0,315	0,641	0,566
G5L0 <sup>*</sup>	0,527	1,000	0,494	0,215	0,328	0,540
G5C0 <sup>*</sup>	0,511	0,494	1,000	0,262	0,298	0,413
G5D0 <sup>*</sup>	0,315	0,215	0,262	1,000	0,374	0,100
G5Y0 <sup>*</sup>	0,641	0,328	0,298	0,374	1,000	0,420
EQ <sup>*</sup>	0,566	0,540	0,413	0,100	0,420	1,000
	G5O2 <sup>**</sup>	G5L0 <sup>**</sup>	G5C0 <sup>**</sup>	G5D0 <sup>**</sup>	G5Y0 <sup>**</sup>	EQ <sup>**</sup>
G5O2 <sup>**</sup>	1,000	0,560	0,513	0,237	0,610	0,555
G5L0 <sup>**</sup>	0,560	1,000	0,507	0,111	0,400	0,560
G5C0 <sup>**</sup>	0,513	0,507	1,000	0,215	0,324	0,393
G5D0 <sup>**</sup>	0,237	0,111	0,215	1,000	0,168	-0,020
G5Y0 <sup>**</sup>	0,610	0,400	0,324	0,168	1,000	0,472
EQ <sup>**</sup>	0,555	0,560	0,393	-0,020	0,472	1,000

<sup>+</sup> Gautos 1 metų grąžų prognozių atveju.

<sup>\*</sup> Gautos 5 metų grąžų prognozių atveju.

<sup>\*\*</sup> Gautos 10 metų grąžų prognozių atveju.

4.11 lentelė: Nagrinėjamų nedraustų aktyvų grąžų koreliacijų matricos skirtingais prognozavimo horizontais (EQ žymi akcijų indeksą).

	GVQ0	GVL0	GVC0	GVD0	GVY0	EQ
1 m.	0,080	0,072	0,071	0,016	0,101	0,090
5 m.	0,026	0,024	0,024	0,005	0,031	0,025
10 m.	0,016	0,014	0,015	0,006	0,018	0,015

	G5O2	G5L0	G5C0	G5D0	G5Y0	EQ
1 m.	0,081	0,071	0,072	0,024	0,103	0,090
5 m.	0,026	0,023	0,023	0,007	0,032	0,025
10 m.	0,016	0,014	0,015	0,006	0,018	0,015

4.12 lentelė: Indeksų, turinčių valiutinę riziką, grąžų standartiniai nuokrypiai atitinkamu investavimo horizontu (duomenys sumetinti).

Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.
GVQ0*	0,035	0,037	0,045	0,064	0,088
GVL0*	0,039	0,039	0,046	0,068	0,101
GVC0*	0,035	0,039	0,045	0,066	0,098
GVD0	0,399	0,468	0,517	0,491	0,334
GVY0*	0,226	0,171	0,114	0,079	0,108
GVQ0	0,043	0,036	0,034	0,032	0,036
GVL0	0,053	0,054	0,051	0,050	0,058
GVC0	0,062	0,059	0,055	0,053	0,055
GVY0	0,044	0,040	0,038	0,042	0,053
EQ	0,064	0,058	0,054	0,056	0,068
<b>Rizika (1 m. hor.)</b>					
Std	0,019	0,019	0,019	0,019	0,020
VaR_0,95	-0,033	-0,032	-0,033	-0,032	-0,032
CVaR_0,95	-0,041	-0,040	-0,040	-0,040	-0,041
<b>Procentiliai (1 m. hor.)</b>					
1%	-0,046	-0,046	-0,046	-0,046	-0,046
5%	-0,033	-0,032	-0,033	-0,032	-0,032
25%	-0,014	-0,014	-0,015	-0,014	-0,013
50%	-0,001	-0,001	-0,002	-0,002	0,000
75%	0,012	0,012	0,011	0,012	0,014
95%	0,031	0,030	0,029	0,030	0,033
99%	0,044	0,043	0,042	0,043	0,047
<b>Sumetinta grąža atitinkamu horizontu</b>					
1 m. hor.	-0,001	-0,001	-0,002	-0,001	0,000
2 m. hor.	0,006	0,006	0,005	0,006	0,007
3 m. hor.	0,013	0,013	0,013	0,013	0,014
5 m. hor.	0,022	0,022	0,022	0,023	0,023
10 m. hor.	0,027	0,027	0,028	0,028	0,027
<b>Diversifikacijos rodikliai (1 m. hor.)</b>					
ENMTB	6,897	6,912	6,930	7,245	7,665

Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.
G5O2*	0,088	0,080	0,084	0,110	0,139
G5L0*	0,088	0,078	0,082	0,111	0,152
G5C0*	0,076	0,073	0,079	0,108	0,140
G5D0	0,253	0,285	0,330	0,368	0,315
G5Y0*	0,297	0,304	0,271	0,195	0,139
G5O2	0,033	0,027	0,024	0,017	0,017
G5L0	0,039	0,040	0,035	0,025	0,026
G5C0	0,044	0,041	0,035	0,025	0,025
G5Y0	0,033	0,029	0,024	0,018	0,021
EQ	0,049	0,043	0,035	0,025	0,028
<b>Rizika (1 m. hor.)</b>					
Std	0,020	0,019	0,019	0,019	0,020
VaR_0,95	-0,033	-0,032	-0,033	-0,033	-0,033
CVaR_0,95	-0,041	-0,040	-0,041	-0,041	-0,040
<b>Procentiliai (1 m. hor.)</b>					
1%	-0,045	-0,045	-0,045	-0,046	-0,045
5%	-0,033	-0,032	-0,033	-0,033	-0,033
25%	-0,014	-0,014	-0,015	-0,015	-0,014
50%	-0,001	-0,001	-0,002	-0,002	0,000
75%	0,012	0,012	0,011	0,011	0,013
95%	0,031	0,030	0,030	0,030	0,033
99%	0,045	0,043	0,042	0,043	0,047
<b>Sumetinta grąža atitinkamu horizontu</b>					
1 m. hor.	-0,001	-0,001	-0,002	-0,002	0,000
2 m. hor.	0,009	0,009	0,009	0,010	0,011
3 m. hor.	0,018	0,018	0,018	0,019	0,021
5 m. hor.	0,028	0,028	0,029	0,030	0,031
10 m. hor.	0,032	0,033	0,033	0,035	0,035
<b>Diversifikacijos rodikliai (1 m. hor.)</b>					
ENMTB	9,188	8,942	8,474	7,526	7,722

\* Panaikinus valiutinę riziką.

4.13 lentelė: Rizikos pariteto portfelių optimizavimo rezultatai skirtingais investavimo horizontais, taikant rizikos pariteto metodiką, kai siektina CVaR<sub>0,95</sub> reikšmė lygi 4%.



<b>1 m.</b>	GVQ0*	GVL0*	GVC0*	GVD0*	GVY0*	GVQ0	GVL0	GVC0	GVY0*	EQ
GVQ0*	1,000	0,727	0,599	0,395	0,104	0,014	-0,145	-0,094	0,267	-0,275
GVL0*	0,727	1,000	0,579	0,396	0,186	0,115	-0,234	-0,080	0,300	-0,221
GVC0*	0,599	0,579	1,000	0,583	0,125	0,183	0,061	-0,009	0,343	-0,142
GVD0*	0,395	0,396	0,583	1,000	0,121	0,371	0,188	0,215	0,494	-0,050
GVY0*	0,104	0,186	0,125	0,121	1,000	-0,108	-0,092	-0,140	0,050	-0,038
GVQ0	0,014	0,115	0,183	0,371	-0,108	1,000	0,489	0,501	0,680	0,217
GVL0	-0,145	-0,234	0,061	0,188	-0,092	0,489	1,000	0,490	0,309	0,535
GVC0	-0,094	-0,080	-0,009	0,215	-0,140	0,501	0,490	1,000	0,321	0,336
GVY0*	0,267	0,300	0,343	0,494	0,050	0,680	0,309	0,321	1,000	0,027
EQ	-0,275	-0,221	-0,142	-0,050	-0,038	0,217	0,535	0,336	0,027	1,000
<b>5 m.</b>	GVQ0*	GVL0*	GVC0*	GVD0*	GVY0*	GVQ0	GVL0	GVC0	GVY0*	EQ
GVQ0*	1,000	0,741	0,573	0,349	0,490	-0,260	-0,187	-0,150	-0,014	-0,165
GVL0*	0,741	1,000	0,619	0,403	0,618	-0,142	-0,265	-0,119	-0,039	-0,138
GVC0*	0,573	0,619	1,000	0,556	0,568	-0,053	-0,038	-0,149	0,003	-0,163
GVD0*	0,349	0,403	0,556	1,000	0,496	0,169	0,106	0,163	0,150	-0,098
GVY0*	0,490	0,618	0,568	0,496	1,000	-0,139	-0,079	0,004	-0,248	-0,207
GVQ0	-0,260	-0,142	-0,053	0,169	-0,139	1,000	0,510	0,481	0,613	0,494
GVL0	-0,187	-0,265	-0,038	0,106	-0,079	0,510	1,000	0,469	0,280	0,500
GVC0	-0,150	-0,119	-0,149	0,163	0,004	0,481	0,469	1,000	0,233	0,359
GVY0*	-0,014	-0,039	0,003	0,150	-0,248	0,613	0,280	0,233	1,000	0,326
EQ	-0,165	-0,138	-0,163	-0,098	-0,207	0,494	0,500	0,359	0,326	1,000
<b>10 m.</b>	GVQ0*	GVL0*	GVC0*	GVD0*	GVY0*	GVQ0	GVL0	GVC0	GVY0*	EQ
GVQ0*	1,000	0,864	0,794	0,723	0,797	-0,182	-0,119	-0,007	-0,101	-0,180
GVL0*	0,864	1,000	0,816	0,746	0,836	-0,095	-0,163	0,007	-0,104	-0,154
GVC0*	0,794	0,816	1,000	0,847	0,854	0,001	-0,042	0,010	-0,088	-0,177
GVD0*	0,723	0,746	0,847	1,000	0,873	0,135	0,029	0,170	-0,015	-0,131
GVY0*	0,797	0,836	0,854	0,873	1,000	-0,016	-0,074	0,089	-0,188	-0,176
GVQ0	-0,182	-0,095	0,001	0,135	-0,016	1,000	0,544	0,488	0,577	0,494
GVL0	-0,119	-0,163	-0,042	0,029	-0,074	0,544	1,000	0,474	0,357	0,526
GVC0	-0,007	0,007	0,010	0,170	0,089	0,488	0,474	1,000	0,262	0,344
GVY0*	-0,101	-0,104	-0,088	-0,015	-0,188	0,577	0,357	0,262	1,000	0,392
EQ	-0,180	-0,154	-0,177	-0,131	-0,176	0,494	0,526	0,344	0,392	1,000

\* Panaikinus valiutinę riziką.

4.14 lentelė: Draustų bei nedraustų aktyvų (1-5 m. VVP indeksų) gražų koreliacijų matricos skirtingais investavimo horizontais.

<b>1 m.</b>	G5O2*	G5L0*	G5C0*	G5D0*	G5Y0*	G5O2	G5L0	G5C0	G5Y0	EQ
G5O2*	1,000	0,756	0,664	0,497	0,245	0,116	-0,061	0,007	0,315	-0,256
G5L0*	0,756	1,000	0,641	0,515	0,327	0,208	-0,115	0,023	0,357	-0,184
G5C0*	0,664	0,641	1,000	0,656	0,306	0,261	0,136	0,139	0,376	-0,100
G5D0*	0,497	0,515	0,656	1,000	0,413	0,436	0,268	0,319	0,539	-0,007
G5Y0*	0,245	0,327	0,306	0,413	1,000	0,002	-0,029	-0,072	0,233	-0,046
G5O2	0,116	0,208	0,261	0,436	0,002	1,000	0,510	0,524	0,694	0,201
G5L0	-0,061	-0,115	0,136	0,268	-0,029	0,510	1,000	0,504	0,352	0,532
G5C0	0,007	0,023	0,139	0,319	-0,072	0,524	0,504	1,000	0,361	0,329
G5Y0	0,315	0,357	0,376	0,539	0,233	0,694	0,352	0,361	1,000	0,023
EQ	-0,256	-0,184	-0,100	-0,007	-0,046	0,201	0,532	0,329	0,023	1,000
<b>5 m.</b>										
G5O2*	1,000	0,716	0,526	0,233	0,382	-0,188	-0,147	-0,127	0,060	-0,137
G5L0*	0,716	1,000	0,525	0,256	0,470	-0,069	-0,235	-0,115	0,074	-0,091
G5C0*	0,526	0,525	1,000	0,419	0,326	0,039	0,025	-0,091	0,144	-0,069
G5D0*	0,233	0,256	0,419	1,000	0,125	0,315	0,215	0,262	0,374	0,062
G5Y0*	0,382	0,470	0,326	0,125	1,000	-0,154	-0,116	-0,071	-0,197	-0,207
G5O2	-0,188	-0,069	0,039	0,315	-0,154	1,000	0,527	0,511	0,641	0,499
G5L0	-0,147	-0,235	0,025	0,215	-0,116	0,527	1,000	0,494	0,328	0,526
G5C0	-0,127	-0,115	-0,091	0,262	-0,071	0,511	0,494	1,000	0,298	0,396
G5Y0	0,060	0,074	0,144	0,374	-0,197	0,641	0,328	0,298	1,000	0,322
EQ	-0,137	-0,091	-0,069	0,062	-0,207	0,499	0,526	0,396	0,322	1,000
<b>10 m.</b>										
G5O2*	1,000	0,824	0,708	0,568	0,722	-0,179	-0,113	-0,041	-0,041	-0,165
G5L0*	0,824	1,000	0,709	0,585	0,751	-0,083	-0,170	-0,036	-0,028	-0,130
G5C0*	0,708	0,709	1,000	0,686	0,704	0,020	-0,015	-0,028	0,017	-0,126
G5D0*	0,568	0,585	0,686	1,000	0,701	0,237	0,111	0,215	0,168	-0,031
G5Y0*	0,722	0,751	0,704	0,701	1,000	-0,033	-0,101	0,021	-0,153	-0,175
G5O2	-0,179	-0,083	0,020	0,237	-0,033	1,000	0,560	0,513	0,610	0,506
G5L0	-0,113	-0,170	-0,015	0,111	-0,101	0,560	1,000	0,507	0,400	0,549
G5C0	-0,041	-0,036	-0,028	0,215	0,021	0,513	0,507	1,000	0,324	0,384
G5Y0	-0,041	-0,028	0,017	0,168	-0,153	0,610	0,400	0,324	1,000	0,387
EQ	-0,165	-0,130	-0,126	-0,031	-0,175	0,506	0,549	0,384	0,387	1,000

\* Panaikinus valiutinę riziką.

4.15 lentelė: Draustų bei nedraustų aktyvų (1-10 m. VVP indeksų) gražų koreliacijų matricos skirtingais investavimo horizontais.

Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.
GVQ0*	0,179	0,100	0,052	0,054	0,231
GVL0*	0,208	0,207	0,190	0,160	0,000
GVC0*	0,052	0,016	0,000	0,000	0,153
GVD0*	0,061	0,177	0,267	0,451	0,309
GVY0*	0,300	0,300	0,291	0,135	0,000
GVQ0	0,017	0,020	0,026	0,013	0,000
GVL0	0,092	0,093	0,091	0,095	0,054
GVC0	0,091	0,087	0,074	0,057	0,146
GVY0	0,000	0,000	0,009	0,035	0,000
EQ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,106
<b>Rizika (1 m. hor.)</b>					
Std	0,014	0,014	0,015	0,017	0,022
VaR <sub>0,95</sub>	-0,012	-0,015	-0,019	-0,026	-0,031
CVaR <sub>0,95</sub>	-0,018	-0,021	-0,025	-0,033	-0,040
<b>Procentiliai (1 m. hor.)</b>					
1%	-0,021	-0,024	-0,028	-0,038	-0,046
5%	-0,012	-0,015	-0,019	-0,026	-0,031
25%	0,001	-0,002	-0,005	-0,010	-0,010
50%	0,011	0,008	0,005	0,001	0,004
75%	0,020	0,017	0,015	0,012	0,019
95%	0,034	0,031	0,029	0,030	0,040
99%	0,043	0,041	0,040	0,040	0,055
<b>Sumetinta grąža atitinkamu horizontu</b>					
1 m. hor.	0,011	0,008	0,006	0,002	0,004
2 m. hor.	0,018	0,015	0,013	0,010	0,011
3 m. hor.	0,023	0,020	0,018	0,016	0,018
5 m. hor.	0,028	0,026	0,025	0,024	0,028
10 m. hor.	0,029	0,028	0,027	0,028	0,032
<b>Diversifikacijos rodiklis (1 m. hor.)</b>					
ENMTB	7,066	6,813	6,869	6,727	5,760

Portfelio svoriai	1 m.	2 m.	3 m.	5 m.	10 m.
G5O2*	0,246	0,139	0,065	0,081	0,300
G5L0*	0,192	0,191	0,193	0,106	0,000
G5C0*	0,000	0,000	0,000	0,003	0,100
G5D0*	0,062	0,170	0,243	0,310	0,397
G5Y0*	0,300	0,300	0,300	0,300	0,000
G5O2	0,000	0,000	0,011	0,025	0,000
G5L0	0,108	0,109	0,107	0,099	0,000
G5C0	0,092	0,091	0,081	0,076	0,200
G5Y0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
EQ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,003
<b>Rizika (1 m. hor.)</b>					
Std	0,018	0,018	0,018	0,019	0,023
VaR <sub>0,95</sub>	-0,021	-0,025	-0,029	-0,032	-0,030
CVaR <sub>0,95</sub>	-0,028	-0,032	-0,037	-0,040	-0,039
<b>Procentiliai (1 m. hor.)</b>					
1%	-0,033	-0,036	-0,042	-0,045	-0,045
5%	-0,021	-0,025	-0,029	-0,032	-0,030
25%	-0,003	-0,008	-0,012	-0,014	-0,009
50%	0,009	0,004	0,001	-0,001	0,006
75%	0,021	0,016	0,013	0,011	0,022
95%	0,038	0,034	0,031	0,030	0,043
99%	0,051	0,047	0,045	0,042	0,059
<b>Sumetinta grąža atitinkamu horizontu</b>					
1 m. hor.	0,009	0,005	0,001	-0,001	0,001
2 m. hor.	0,018	0,014	0,011	0,009	0,012
3 m. hor.	0,025	0,021	0,019	0,017	0,022
5 m. hor.	0,031	0,029	0,027	0,026	0,032
10 m. hor.	0,033	0,032	0,031	0,031	0,037
<b>Diversifikacijos rodiklis (1 m. hor.)</b>					
ENMTB	8,047	8,186	8,072	7,793	5,913

\* Panaikinus valiutinę riziką.

4.16 lentelė: Vidurkio-dispersijos portfelių optimizavimo rezultatai skirtingais investavimo horizontais, taikant rizikos pariteto metodiką, kai siektina CVaR<sub>0,95</sub> reikšmė lygi 4%.