VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA

Magistro baigiamasis darbas

Binominio ir susijusių skirstinių taikymai įsipareigojimų nevykdymo tikimybei vertinti

Applications of Binomial and Related Distributions to Estimate Probability of Default

Monika Krisiukėnaitė

Darbo vadovas Doc. Dr. A.Grigutis

VILNIUS 2023

Binominio ir susijusių skirstinių taikymai įsipareigojimų nevykdymo tikimybei vertinti

Santrauka

Šiame darbe apžvelgsime Pluto ir Tache metodą [1], pagal kurį yra vertinama įsipareigojimų nevykdymo tikimybė mažos rizikos portfeliuose. Atvejį, kuomet įsipareigojimų nevykdymai yra priklausomi nuo sisteminio faktoriaus, susiesime su beta ir daugiamačiu normaliuoju skirstiniu. Be to, pateiksime skaičiavimo pavyzdžių ir juos palyginsime.

Raktiniai žodžiai: įsipareigojimų nevykdymo tikimybė, mažos rizikos portfelis, sisteminis faktorius, beta skirstinys, binominis skirstinys, daugiamatis normalusis skirstinys

Applications of Binomial and Related Distributions to Estimate Probability of Default

Abstract

This paper will review Pluto and Tache's method [1] for estimating the probability of default in low-risk portfolios. We will associate the case where defaults depend on the systemic factor with beta and multivariate normal distributions. In addition, we will provide calculation examples and compare them.

Key words: probability of default, low risk portfolio, systemic factor, beta distribution, binomial distribution, multivariate normal distribution

Turinys

1 Įvadas

Pagrindinis indėlis į šiuolaikinius kredito rizikos modeliavimo ir valdymo metodus yra skolininko įsipareigojimų nevykdymo tikimybės (toliau PD) vertinimas (*angl. probability of default*). Ši reikšmė parodo, kad skolininkas per kokį nors laikotarpį tinkamai nesilaikys prisiimtų įsipareigojimų (dažniausiai šis laikotarpis laikomas vieneri metai). Šis rodiklis yra vienas svarbiausių rizikos valdymui, kadangi PD įverčių tikslumas lemia kredito rizikos modelių rezultatų kokybę, kuri leidžia finansų įstaigoms nustatyti tinkamus kapitalo reikalavimus ir valdyti savo bendrą riziką. Trumpai tariant, PD yra pagrindinis kredito rizikos matas, kuris būtinas priimant pagrįstus skolinimo ir investavimo sprendimus.

Vienas didžiausių sunkumų vertintant PD yra nedidelis istorinių įsipareigojimų nevykdymo duomenų skaičius mažos rizikos portfeliuose. Tai reiškia, kad juose įsipareigojimų neįvykdymo atvejų pasitaiko labai retai, arba iš viso nepasitaiko. Šiai problemai spręsti K.Tache ir Pluto [1] savo darbe siūlo taikyti Bernulio eksperimentą „sėkmės" tikimybei vertinti bei išskiria kelis atvejus:

- kai įsipareigojimų nevykdymo atvejai yra nepriklausomi,
- kai įsipareigojimų nevykdymo atvejai laikomi nepriklausomais, bet juos veikia sisteminis faktorius.

Šiame darbe apžvelgsime PD skaičiavimui naudojamą konservatyvumo metodą ir formulę, kai PD atvejus veikia sisteminis faktorius, susiesime su daugiamačiu normaliuoju ir beta skirstiniai. Be to, pateiksime skaičiavimo pavyzdžių.

2 Rizika ir jos valdymas

Bankai bei kitos finansinės institucijos kasdienėje savo veikloje susiduria su įvairiomis finansinėmis bei nefinansinėmis rizikomis. Tam, kad rinkoje būtų užtikrintas stabilumas, labai svarbu jas identifikuoti bei tinkamai valdyti. Šiame skyriuje aptarsime pagrindinius rizikos tipus bei vieną svarbiausių kredito rizikos rodiklių padedančių ją įvertinti - įsipareigojimų nevykdymo tikimybę.

2.1 Rizikų tipai

Pagrindiniai rizikų tipai yra laikomi šie [9]:

- **Kredito rizika** (*angl. credit risk*) – tikimybė, kad skolininkas nesugebės atsiskaityti sutartyje nustatyta tvarka.
- **Rinkos rizika** (*angl. market risk*) – tikimybė, kad rinkos kintamieji – palūkanų norma, valiutos kursas, nuosavybės vertybinių popierių, biržos prekių kainos – pasikeis taip, jog bankas dėl sudaryto sandorio patirs nuostolių.
- **Operacinė rizika** (*angl. operational risk*) – tikimybė patirti nuostolių dėl žmonių, sistemų, netinkamų ar nepavykusių vidaus procesų arba dėl išorės įvykių įtakos, įskaitant teisinę riziką.

2.2 Kredito rizika ir įsipareigojimų nevykdymo tikimybė

Galima teigti, kad kredito rizika yra viena svarbiausių iš paminėtų **2.1** poskyryje, kadangi Bazelio komitetas išnagrinėjęs ekonomiškai išsivysčiusių šalių bankų krizes, nustatė jog dauguma jų sietinos su kredito rizika [10].

Šios rizikos vertinimui yra labai svarbus kuo tikslesnis įsipareigojimų nevykdymo tikimybės apskaičiavimas, kuris bankui bei finansinėms institucijoms padeda įvertinti tikėtinus nuostolius bei apskaičiuoti pakankamą rezervą ir užtikrinti veiklos tęstinumą.

Šiame darbe analizuosime įsipareigojimų nevykdymo tikimybes, kai turime mažos rizikos porfelį, kuriame skolininkai yra suskirstyti į skirtingas reitingo klases, tad apibrėžkime pagrindinius terminus, kuriuos naudosime:

- **Įsipareigojimų nevykdymo tikimybė (PD)** (*angl. probability of default*) - tikimybė, kad skolininkas per tam tikrą laikotarpį neįvykdys įsipareigojimų (dažniausiai laikoma, kad per vienerius metus).

- **Mažos rizikos portfelis** (*angl. low risk portfolio*) - portfelis, sudarytas iš skolininkų, kurių kredito reitingas aukšto saugumo, arba kitaip tariant įsipareigojimų nevykdymo skaičius labai mažas, arba tokių atvejų iš viso nepasitaiko.

- **Skolininko kredito reitingas** (*angl. obligor grade*) - rodiklis, suteikiantis investuotojams (kreditoriams) koncentruotą informaciją apie skolininko gebėjimo vykdyti savo finansinius įsipareigojimus lygį. Skolininkui gali būti suteikti reitingai nuo apibūdinančių aukščiausią saugumo lygį, kai skolininko pajėgumas laiku įvykdyti finansinius įsipareigojimus ypač didelis, iki atitinkančių finansinių įsipareigojimų nevykdymą.

- **Sisteminis faktorius** (*angl. systemic factor*) - ekonominis, politinis ar kitas veiksnys, kuris gali daryti įtaką stebimiems parametrams.

- **Reikšmingumo lygmuo** (*angl. significance level*) - dar vadinamas statistiniu patikimumu – tikimybė pagrįstai atmesti klaidingą hipotezę. Žymėsime simboliu γ.

- **Pasiklautinis intervalas** (*angl. confidence interval*) - intervalas, kuriame, tikėtina, yra matuojamo dydžio parametras. Šiuo atveju įsipareigojimų nevykdymo tikimybės įvertis.

2.3 Konservatyvumo metodas

Šiame darbe bus nagrinėjamas K.Pluto ir D.Tache [1] straipsnyje aprašytas konservatyvumo metodas. Taikydami šį metodą tariame, kad skolininkai yra išskirstyti į skirtingas reitingo klases R_1, R_2,..., R_t , kur $t \in \mathbb{N}$ žymi klasių kiekį, ir jas atitinkamai sudaro n_{R_1}, n_{R_2},..., n_{R_t} skolininkų. Grupė su geriausiais skolininkais (t.y. kurių įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė mažiausia) pažymėta R_1, su blogiausiais - R_t. Be to, p_{R_t}, $n \in \mathbb{N}$ žymi tam tikros reitingo klasės PD. Darome prielaidą, kad nei vienoje skolininkų grupėje R_1, R_2,...,R_t nebuvo įsipareigojimų nevykdymo atvejų. Tuomet, vertinant PD galioja

$$p_{R_1} \leq p_{R_2} \leq ... \leq p_{R_t}, \tag{1}$$

konservatyvumo metodu vertindami tikimybę p_{R_1}, darome prielaidą, kad tikimybės p_{R_1},..., p_{R_t} yra lygios. Tuomet iš (1) gauname, kad

$$p_{R_1} = p_{R_2} = ... = p_{R_t}. \tag{2}$$

Tad pagal lygybę (2), įsipareigojimo nevykdymo tikimybę visuose ranguose vertinsime taip pat konservatyviai. Be to, (1) galios visiems PD vertinimams, kurie bus nagrinėjami vėliau.

3 Įsipareigojimų nevykdymo atvejų tikimybės yra nepriklausomos

3.1 Atvejis, kai portfelyje nėra įsipareigojimų nevykdymų

Jeigu galioja (2), tuomet galime teigti, kad p_{R_1}, p_{R_2},..., p_{R_t} rangų rizikingumas yra vienodas. Vadinasi, turime homogenišką imtį $n_{R_1} + n_{R_2} + ... + n_{R_t} = n$, kur n žymi visų skolininkų skaičių bei kurioje nebuvo įsipareigojimų neįvykdymo atvejų. Darome prielaidą, kad PD atvejai nepriklausomi, tuomet pasinaudosime binominio skirstinio tikimybės išraiška.

Apibrėžimas 1. *Sakome, kad atsitiktinis dydis X yra pasiskirstęs pagal binominį skirstinį su parametrais $n \in \mathbb{N}$ ir $p \in (0,1)$ (žymimas $X \sim \mathcal{B}in(n,p)$), jeigu konkrečios reikšmės įgijimo tikimybė aprašoma lygtimi*

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, ..., n,$$

kai

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Tuomet, atsitiktinio binominio dydžio pasiskirstymo funkcija (angl. comulative distribution function) yra

$$\mathcal{B}in_{n,p}(k) := \mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, k = 0, 1, ..., n.$$

Pritaikę 1 apibrėžimą galime išreikšti p_{R_1} tikimybę, kai įsipareigojimų nevykdymo nėra (t.y. $k = 0$). Gauname, kad

$$\mathbb{P} = \binom{n}{0} (1 - p_{R_1})^{n-0} = (1 - p_{R_1})^n.$$

Norėdami įvertinti p_{R_1} tikimybę su pasirinktu reikšmingumo lygmeniu γ sprendžiame nelygybę:

$$1 - \gamma \leq (1 - p_{R_1})^n,$$

tuomet visas galimas p_{R_1} reikšmes galima išreikšti

$$p_{R_1} \leq 1 - (1 - \gamma)^{1/n}.$$

Pagal konservatyvumo metodą, vertindami PD, imame intervalo viršutinį rėžį. Tada gauname, kad

$$p_{R_1} = 1 - (1 - \gamma)^{1/n}.$$

Tuomet iš (1) nelygybės, tikimybė p_{R_2} negali būti didesnė už p_{R_3},...,p_{R_t}. Pagal konservatyvumo metodą p_{R_2} yra randama darant prielaidą, jog $p_{R_2} = p_{R_3} = ... = p_{R_t}$. Tuomet, viršutinis rėžis su pasikliautiniu intervalu γ tikimybei p_{R_2} yra randamas iš nelygybės

$$1 - \gamma \leq (1 - p_{R_2})^{n_{R_3} + ... + n_{R_t}}$$

ir visos galimos p_{R_2} reikšmės yra

$$p_{R_2} \leq 1 - (1 - \gamma)^{1/(n_{R_2} + n_{R_3} + n_{R_t})}.$$

Analogiškai spręsdami galime rasti tikimybę p_{R_t}:

$$p_{R_t} \leq 1 - (1 - \gamma)^{1/R_t}.$$

3.1.1 Pavyzdys

Tarkime, mūsų portfelis yra sudarytas iš $n = 1000$ tarpusavyje nepriklausomų skolininkų, kurie išskirstyti į 4 skolininkų klases R_1, R_2, R_3 ir R_4, kuriose $n_{R_1} = 200, n_{R_2} = 400, n_{R_3} = 300$ ir $n_{R_4} = 100$. Pritaikę konservatyvumo metodą, kai $k = 0$ apskaičiavome tikimybių viršutinius rėžius su skirtingomis γ reikšmėmis bei atvaizdavome juos lentelėje:

γ	50%	75%	90%	95%	99%
$\hat{p_{R_1}}$	0.0693%	0.1385%	0.2299%	0.2991%	0.4595%
$\hat{p_{R_2}}$	0.0866%	0.1731%	0.2874%	0.3738%	0.5740%
$\hat{p_{R_3}}$	0.1731%	0.3460%	0.5740%	0.7461%	1.1447%
$\hat{p_{R_4}}$	0.6908%	1.3767%	2.2763%	2.9513%	4.5007%

1 lentelė: Tikimybių $\hat{p_{R_1}}, \hat{p_{R_2}}, \hat{p_{R_3}}$ ir $\hat{p_{R_4}}$ viršutiniai rėžiai

Iš lentelės matome, kad didėjant pasikliautinio intervalo reikšmei, didėja ir įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės įvertis. Be to, akivaizdu, jog visais atvejais galioja (1) nelygybė.

3.2 Atvejis, kai portfelyje buvo keli įsipareigojimų nevykdymai

Turime jau nagrinėtą portfelį, kurį sudaro atitinkamai $n_{R_1} + n_{R_2}+, ..., +n_{R_t}$ skolininkų, kurie yra išskirstyti į R_1, R_2,...,R_t reitingų grupes. Darome prielaidą, kad buvo pastebėti k įsipareigojimų nevykdymo atvejai ir $k = k_{R_1} + k_{R_1} + ... + k_{R_t}$. Kaip ir pirmuoju atveju (iš 3.1 skyrelio), kai nebuvo stebėti įsipareigojimų nevykdymo atvejai, vertindami PD taikome konservatyvumo metodą.

Visų pirma, pasiremdami binominiu skirstiniu (aprašytu 1 apibrėžime), vertiname įsipareigojimų neįvykdymo tikimybę R_1 skolininkų grupei. Gauname:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p_{R_1}^{i} (1 - p_{R_1})^{n-i},$$

tada

$$1-\gamma \leq \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p_{R_1}^i (1-p_{R_1})^{n-i} \tag{3}$$

ir analogiškai tęsdami gauname

$$1-\gamma \leq \sum_{i=0}^{k_{R_2}+...+k_{R_t}} \binom{n_{R_2}+...+n_{R_t}}{i} p_{R_2}^i (1-p_{R_t})^{n_{R_2}+...+n_{R_t}-i} \tag{4}$$

$$\vdots$$

$$1-\gamma \leq \sum_{i=0}^{k_{R_t}} \binom{n_{R_t}}{i} p_{R_t}^i (1-p_{R_1})^{n_{R_t}-i}. \tag{5}$$

Nelygybės (3),(4) ir (5) gali būti išspręstos analitiškai pritaikius **2 apibrėžimą** ir **1 teiginį**. Binomio skirstinio sąsają su beta skirstiniu detaliau aptarsime **6** skyriuje.

3.2.1 Pavyzdys

Tarkime, vėl nagrinėjame praeitą portfelį, kai $n_{R_1} = 200$, $n_{R_2} = 400$, $n_{R_3} = 300$ ir $n_{R_4} = 100$ bei atitinkamai turime, $0, 1, 1, 2$ įsipareigojimų nevykdymo atvejus. Pritaikę 6 skyriuje aprašytą teoremą (3),(4) ir (5) formulėms, apskaičiavome įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių įverčius bei juos atvaizdavome *2 lentelėje.*

γ	50%	75%	90%	95%	99%
$\hat{p_{R_1}}$	0.4669%	0.6267%	0.7978%	0.9130%	1.1561%
$\hat{p_{R_2}}$	0.5836%	0.7832%	0.9967%	1.1405%	1.4437%
$\hat{p_{R_3}}$	0.9172%	1.2740%	1.6625%	1.9269%	2.4893%
$\hat{p_{R_4}}$	2.6651%	3.8829%	5.2345%	6.1619%	8.1412%

2 lentelė: Tikimybių $\hat{p_{R_1}}, \hat{p_{R_2}}, \hat{p_{R_3}}$ ir $\hat{p_{R_4}}$ viršutiniai rėžiai

Akivaizdu, kad ir šiuo atveju galioja (1) nelygybė. Be to, pastebime, kad tikimybių įverčiai didesni lyginant su variantu, kai nebuvo įsipareigojimų nevykdymo atvejų iš *1 lentelės.*

4 Įsipareigojimų nevykdymo atvejai yra priklausomi nuo sisteminio faktoriaus

Galima teigti, kad finansų rinkoje nepriklausomumo sąlyga nėra realistiška, kadangi skoliningų elgesys gali priklausyti nuo įvarių faktorių. Šioje skyriuje, nagrinėsime įsipareigojimų neįvykdymo atvejus, kurie yra priklausomi nuo sisteminio faktoriaus. Toliau šiame darbe laikysime, kad turto koreliacija veikia įsipareigojimų nevykdymo tikimybę, tad ją ir laikysime kaip sisteminį faktorių. Turto koreliacija yra apibūdinama kaip priklausomybė nuo turto, atsižvelgiant į visos šalies ekonomiką ir visi skolininkai yra susiję vienas su kitu pagal šį rizikos faktorių [5].Pagal Basel II [5],mažiausia siūloma jos reikšmė yra 12%, tad ją ir naudosime tolimesniems skaičiavimams. Taip pat, išskirsime 2 variantus: kai portfelyje nebuvo įsipareigojimų nevykdymo atvejų ir

Tegul X, Y yra du nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai ir $Z = aX + Y, a \in \mathbb{R}$. Tada

$$Z = aX + Y \Leftrightarrow \tilde{Z} = a \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Z} \cdot \tilde{X} + \frac{\sigma_Y}{\sigma_Z} \cdot \tilde{Y},$$

kur

$$\tilde{Z} = \frac{Z - \mathbb{E}Z}{\sigma_Z}, \tilde{X} = \frac{X - \mathbb{E}X}{\sigma_X}, \tilde{Y} = \frac{Y - \mathbb{E}Y}{\sigma_Y}.$$

Tarkime, kad r_i $(i = 1, ..., n)$ yra logaritminė turto grąža per tam tikrą laikotarpį (dažniausiai vienerius metus), kurią galime užrašyti kaip

$$r_i = \beta_i S_i + \xi_i,$$

kur S_i ir ξ_i yra nepriklausomi, normaliai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir S yra vadinamas sisteminiu faktoriumi, o ξ individualiu faktoriumi. Taip pat, laikome, kad S_i ir ξ_i yra nepriklausomos S ir ξ kopijos.

Tuomet gauname, kad

$$\tilde{r} = \beta \cdot \frac{\sigma_S}{\sigma_r} \cdot \tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r} \cdot \tilde{\xi},$$

kur

$$\tilde{S} = \frac{S - \mathbb{E}S}{\sigma_s} \text{ ir } \tilde{\xi} = \frac{\xi - \mathbb{E}\xi}{\sigma_\xi}.$$

Kadangi,

$$\sqrt{\left(\beta \cdot \frac{\sigma_S}{\sigma_r} \cdot \sigma_{\tilde{S}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r} \cdot \sigma_{\xi}\right)^2} = \sqrt{\left(\beta \cdot \frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2} = \sigma_{\tilde{r}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r} = \sqrt{1 - \left(\beta \cdot \frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2},$$

tada

$$\tilde{r} = \sqrt{\varrho} \cdot \tilde{S} + \sqrt{1 - \varrho} \cdot \tilde{\xi},$$

kur

$$\varrho = \left(\beta \cdot \frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 = \frac{\beta^2 \cdot \sigma_S^2}{\beta^2 \cdot \sigma_S^2 + \sigma_\xi^2},$$

ir koeficientas ϱ yra vadinamas turto koreliacija.

Koeficientas ϱ yra vadinamas turto koreliacija, kadangi koreliacija tarp $\tilde{r}$ ir $\tilde{S}$ yra

$$\rho = \rho(\tilde{r}, \tilde{S}) = \frac{cov(\tilde{r}, \tilde{S})}{\sigma_{\tilde{r}} \cdot \sigma_{\tilde{S}}} = cov\left(\beta \cdot \frac{\sigma_S}{\sigma_r} \cdot \tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r} \cdot \tilde{\xi}, \tilde{S}\right)$$
$$= \beta \cdot \frac{\sigma_S}{\sigma_r} cov(\tilde{S}, \tilde{S}) + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r} cov(\tilde{\xi}, \tilde{S}) = \beta \cdot \frac{\sigma_S}{\sigma_r} = \sqrt{\varrho}.$$

Taip pat, standartizuotos grąžos dispersija yra

$$1 = \sigma_{\tilde{r}}^2 = cov(\tilde{r}, \tilde{r}) = ... = \varrho + (1 - \varrho).$$

Be to, galima nesunkiai patikrinti, kad S ir ξ yra nepriklausomi, tada ir tik tada, jeigu $\tilde{S}$ ir $\tilde{\xi}$ yra nepriklausomi.

Apibrėžkime įvykį D, su kuriuo standartizuota grąža $r = \sqrt{\varrho} \cdot S + \sqrt{1 - \varrho} \cdot \xi$ yra mažiau už x_p

$$D = \begin{cases} 1, \text{ jeigu } \sqrt{\varrho} \cdot S + \sqrt{1 - \varrho} \cdot \xi < x_p, \\ 0, \text{ kitais atvejais.} \end{cases}$$

Kadangi žinome grąžos r pasiskirstymo funkcija $\Phi(x_p)$, D galime perrašyti taip:

$$D = \begin{cases} 1, \text{ jeigu } \sqrt{\varrho} \cdot S + \sqrt{1-\varrho} \cdot \xi < \Phi^{-1}(p), \\ 0, \text{ kitais atvejais.} \end{cases}$$

Jeigu standartizuotas sisteminis faktorius S įgyja tam tikrą reikšmę $y \in \mathbb{R}$, pvz.: $S = y$, tuomet

$$D = \begin{cases} 1, \text{ jeigu } \xi < \frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho} y}{\sqrt{1-\varrho}}, \\ 0, \text{ kitais atvejais.} \end{cases}$$

ir

$$\mathbb{P}(D = 1 | S = y) = \mathbb{P}\left(\xi < \frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho} y}{\sqrt{1-\varrho}} \right) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho} y}{\sqrt{1-\varrho}} \right),$$

tai nurodo vieno sandorio įsipareigojimų nevykdymo tikimybę, jeigu $S = y$.

Tuomet tikimybė, kad portfelyje iš n nepriklausomų skoliningų k neįvykdys įsipareigojimų yra

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{k iš n }) &= \mathbb{P}(X = k) \\ &= \binom{n}{k} (\mathbb{P}(...))^k (1 - \mathbb{P}(...))^{n-k}, \end{aligned}$$

ir tikimybė, kad įsipareigojimų neįvykdys nuo 0 iki k skolininkų iš visų n yra

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{iki k iš n }) &= \mathbb{P}(X \leq k) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} (\mathbb{P}(...))^i (1 - \mathbb{P}(...))^{n-i}. \end{aligned}$$

Įvykio tikimybę galime užrašyti su indikatoriumi. Nagrinėkime pavyzdį:

$$\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1, \text{ jeigu įvykis A ivyks,} \\ 0, \text{ kitu atveju.} \end{cases}$$

Tada

$$\mathbb{E}\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{P}(A) + 0 \cdot \mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(A).$$

Apibrėžiame

$$\mathbb{1}_i = \begin{cases} 1, & \text{jeigu nuo i iki n skolininkų neįvykdys įsipareigojimų,} \\ 0, & \text{kitu atveju,} \end{cases}$$

ir

$$X = \mathbb{1}_0 + ... + \mathbb{1}_k, k = 0, ..., n.$$

Tada

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_0 + ... + \mathbb{1}k) = \mathbb{E}\mathbb{1}_0 + ... + \mathbb{E}\mathbb{1}_k \\ &= \mathbb{P}(0 \text{ iš n }) + ... + \mathbb{P}(\text{k iš n }) \\ &= \mathbb{P}(\text{nuo 0 iki k iš n} = \mathbb{P}(X \leq k) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} (\mathbb{P}(...))^i (1 - \mathbb{P}(...))^{n-i}. \end{aligned}$$

Tuomet pritaikome sąlyginės tikimybės savybę:

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}_S(\mathbb{E}(X|S = y)).$$

Galiausiai

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{E}X = \mathbb{E}_S(\mathbb{E}(X|S = y)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\mathbb{E}(X|S = y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \cdot \mathbb{P}(X \leq k|S = y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \left(\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}} \right) \right)^i \left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}} \right) \right)^{n-i} dy, \end{aligned} \tag{6}$$

kur φ ir Φ yra standartinio normalaus atsitiktinio dydžio tankio bei pasiskirstymo funkcijos, Φ^{-1} yra atvirkštinė Φ funkcija ir ϱ yra turto koreliacija.

4.1 Atvejis, kai įsipareigojimų nevykdymo nėra

Nagrinėkime atvejį, kuomet portfelyje nebuvo pastebėta įsipareigojimų neįvykdymo atvejų. Tuomet į (6) išraišką įsistatę $k = 0$, gauname

$$\mathbb{P}(X \leq 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho} y}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^n dy.$$

Pagal C. Bluhm, L. Overbeck ir C. Wagner [7] viršutinį p_{R_1} rėžį galime rasti iš

$$1 - \gamma \leq \int_{\infty}^{-\infty} \varphi(y) \left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_{R_1}) + \sqrt{\varrho} y}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^n dy,$$

Toliau tęsdami gauname, kad

$$1 - \gamma \leq \int_{\infty}^{-\infty} \varphi(y) \left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_{R_2}) + \sqrt{\varrho} y}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{n_{R_2}+\ldots+n_{R_t}} dy,$$

$$\vdots$$

$$1 - \gamma \leq \int_{\infty}^{-\infty} \varphi(y) \left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_{R_t}) + \sqrt{\varrho} y}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{n_{R_t}} dy.$$

4.1.1 Pavyzdys

Vėl nagrinėsime portfelį, kuriame $n_{R_1} = 200, n_{R_2} = 400, n_{R_3} = 300$ ir $n_{R_4} = 100$. Šį kartą, įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės yra priklausomos nuo sisteminio faktoriaus, portfelyje nebuvo pastebėta įsipareigojimų nevykdymo atvejų ir ϱ reikšmė yra 0.12%. Skaičiavimams pritaikėme **4.1** skyrelyje esančias formules mūsų nagrinėjamam porfeliui bei radome tikimybių įverčius, kuriuos atvaizdavome *3 lentelėje*.

γ	50%	75%	90%	95%	99%
$\hat{p_{R_1}}$	0.1262%	0.3350%	0.7234%	1.1030%	2.2655%
$\hat{p_{R_2}}$	0.1549%	0.4026%	0.8639%	1.3081%	2.6533%
$\hat{p_{R_3}}$	0.2849%	0.7249%	1.5034%	2.2299%	4.3330%
$\hat{p_{R_4}}$	0.9926%	2.3438%	4.5195%	6.3947%	11.3225%

3 lentelė: Tikimybių $\hat{p_{R_1}}, \hat{p_{R_2}}, \hat{p_{R_3}}$ ir $\hat{p_{R_4}}$ viršutiniai rėžiai

Iš rezultatų matome, kad su bet kuriuo reikšmingumo $\hat{p_{R_1}}$ PD tikimybės mažiausios, o su $\hat{p_{R_4}}$ - didžiausios. Be to, palyginus gautus rezultatus, su įverčiais iš *1 lentelės*, kai įvykiai buvo nepriklausomi bei nebuvo įsipareigojimų neįvykdymo atvejų ir *2 lentelės*, kai jų jau turėjome, matome, kad šiame pavyzdyje įverčiai didesni už abu, jau anksčiau nagrinėtus atvejus.

4.2 Įsipareigojimų nevykdymo atvejai yra priklausomi nuo sisteminio faktoriaus ir turime kelis įsipareigojimų nevykdymus

Pasinaudojant konservatyvumo ir pasiklautinųjų intervalų metodu, galima rasti p_{R_1}, p_{R_2},..., p_{R_t} tikimybes, kai portfelyje buvo aptikta iki k įsipareigojimų neįvykdymų atvejų.

Taigi, R_1 rango įsipareigojimų neįvykdymo tikimybę galima išskaičiuoti iš nelygybės:

$$1-\gamma \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} H(p_{R_1}, \varrho, y)^i (1 - H(p_{R_1}, \varrho, y))^{n-i} dy, \tag{7}$$

čia

$$H(p_A, \varrho, y) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_{R_1}) - \sqrt{\varrho} y}{\sqrt{1-\varrho}}\right).$$

Tuomet p_{R_2} rasime iš:

$$1-\gamma \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \sum_{i=0}^{k_{R_2}+,...,+k_{R_t}} \binom{n_{R_2}+...,+n_{R_t}}{i} H(p_{R_2}, \varrho, y)^i (1 - H(p_{R_2}, \varrho, y))^{n_{R_2}+...,+n_{R_t}-i} dy,$$

$$\vdots$$

ir galiausiai

$$1-\gamma \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \sum_{i=0}^{k_{R_t}} \binom{n_{R_t}}{i} H(p_{R_t}, \varrho, y)^i (1 - H(p_{R_t}, \varrho, y))^{n_{R_t}-i} dy.$$

4.2.1 Pavyzdys

Turime tą patį porfelį, kai $n_{R_1} = 200, n_{R_2} = 400, n_{R_3} = 300$ ir $n_{R_4} = 100$ bei atitinkamai 0,1,1,3 įsipareigojimų nevykdymo atvejus, kurie yra veikiami sisteminio faktoriaus. Skaičiavimams pritaikėme formules iš **4.2** skyrelio bei įverčius pateikėme lentelėje:

γ	50%	75%	90%	95%	99%
$p_{\hat{R_1}}$	0.7250%	1.4220%	2.4812%	3.3824%	5.7801%
$p_{\hat{R_2}}$	0.8860%	1.7121%	2.9447%	3.9846%	6.7106%
$p_{\hat{R_3}}$	1.3205%	2.5143%	4.2471%	5.6765%	9.3270%
$p_{\hat{R_4}}$	3.4244%	6.2033%	9.9355%	12.8142%	19.6037%

4 lentelė: Tikimybių $p_{\hat{R_1}}, p_{\hat{R_2}}, p_{\hat{R_3}}$ ir $p_{\hat{R_4}}$ viršutiniai rėžiai

Pažvelgus į lentelės rezulatatus, akivaizdu, kad sisteminis faktorius ir įsipareigojimų nevykymo atvejai daro didelę įtaką įverčių reikšmėms, kadangi šiuo atveju gavome didžiausias tikimybes.

5 Daugiamatis normalusis skirstinys ir įsipareigojimų nevykdymo tikimybė

Kai įsipareigojimų neįvykdymo atvejai yra priklausomi nuo sisteminio faktoriaus, tuomet turime nelygybę

$$1-\gamma \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \left(\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p)-\sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{i} \left(1-\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p)-\sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{n-i} dy.$$

Jeigu portfelyje nebuvo įsipareigojimų nevykdymo atvejų t.y. $k=0$, tuomet gauname:

$$1-\gamma \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left(1-\Phi^{n}\left(\frac{\Phi^{-1}(p)-\sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right) dy.$$

Pritaikę simetriškumą

$$1-\Phi(x)=\Phi(-x),$$

gauname

$$1-\gamma \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left(\Phi^{n}\left(\frac{-\Phi^{-1}(p)+\sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right) dy.$$

Išvada 1. *Jeigu $k=0$, $n \in \mathbb{N}$ ir $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, tada*

$$\mathbb{E}\Phi^{n}\left(\sqrt{\frac{\varrho}{1-\varrho}}Y-\frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\Phi^{n}\left(\sqrt{\frac{\varrho}{1-\varrho}}y-\frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}}\right) dy \tag{8}$$

$$= \Phi_R(-\Phi^{-1}(p), \ldots, -\Phi^{-1}(p)), \tag{9}$$

kur Φ_R yra Gauso kopula su koreliacijos matrica

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \varrho & \dots & \varrho \\ \varrho & 1 & \dots & \varrho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varrho & \varrho & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Tuomet

$$R^{-1} - I = \frac{1}{(1-\varrho)(1+(n-1)\varrho)} \begin{pmatrix} (n-2)\varrho & -\varrho & \dots & -\varrho \\ -\varrho & (n-2)\varrho & \dots & -\varrho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varrho & -\varrho & \dots & (n-2)\varrho \end{pmatrix}.$$

Ir jeigu $A^T = (-\Phi^{-1}(p), ..., -\Phi^{-1}(p))$, daugiamatį Φ_R tankį galime užrašyti taip:

$$\varphi_R(p) = \frac{1}{\sqrt{|R|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot A^T \cdot (R^{-1} - I) \cdot A\right), \tag{10}$$

kur $|R|$ yra matricos R determinantas ir

$$|R| = (1-\varrho)^{n-1}(1+(n-1)\varrho).$$

Įrodymas. Tegu a, $b \in \mathbb{R}$. Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $Y_1, \dots, Y_n$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę pagal $\mathcal{N}(0, 1)$. Jeigu $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ kaip ir visos nepriklausomos X kopijos $Y_1, \dots, Y_n$. Tada

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Y_1 < aX + b, \dots, Y_n < aX + b) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_1 < aX + b, \dots, Y_n < aX + b | X = x)\varphi(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\Phi^n(ax+b)\, dx = \mathbb{E}\Phi^n(aX+b). \end{aligned}$$

Lygybė (8) yra gaunama, parinkus

$$a = \sqrt{\frac{\varrho}{1-\varrho}},\ b = -\frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-p}},$$

o lygybė (9) gaunama, pastebėjus, kad

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\sqrt{1-\varrho}Y_1 - \sqrt{\varrho}X < -\Phi^{-1}(p), \dots, \sqrt{1-\varrho}Y_n - \sqrt{\varrho}X < -\Phi^{-1}(p)\right) \\ &= \Phi_R\left(-\Phi^{-1}(p), \dots, -\Phi^{-1}(p)\right), \end{aligned}$$

kur

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \varrho & \dots & \varrho \\ \varrho & 1 & \dots & \varrho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varrho & \varrho & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n},$$

nes

$$corr\left(\sqrt{1-\varrho}Y_i - \sqrt{\varrho}X,\ \sqrt{1-\varrho}Y_j - \sqrt{\varrho}X\right) = \begin{cases} 1,\ i=j, \\ \varrho,\ i\neq j \end{cases}$$

ir

$$\mathbb{E}\left(\sqrt{1-\varrho}Y_i - \sqrt{\varrho}X\right) = 0,\ i=1,\ \dots,\ n.$$

$\square$

Pasiremdami (10) daugiamačio tankio formule ir parinkę $\gamma = 0.01$ bei $\varrho = 0.12$ gauname, kad kai

- $n = 2$,

$$\varphi_R(p) = \frac{1}{1-\varrho^2}\exp\left(\frac{(\Phi^{-1}(p))^2\varrho}{1-\varrho}\right) = 2.1222$$
$$\Rightarrow p = 0.9899$$

- $n = 3$

$$\varphi_R(p) = \frac{1}{(1-\varrho)^2(1+2\varrho)}\exp\left(\frac{3((\Phi)^{-1}(p))^2\cdot\varrho(\varrho+1)}{(\varrho-1)(2\varrho+1)}\right) = 0.1409$$
$$\Rightarrow p = 0.6696$$

Pabandę pritaikyti (10) mažiems n, supratome, kad formulė nėra itin praktiška mūsų nagrinėjamam atvejui ir yra mažiau resursų reikalaujančių būdų, kaip pvz.: pateiktame **5.1** skyrelyje.

Išvada 2. *Jei $n = 1$ ir neturime nei vieno įsipareigojimų neįvykdymo porfelyje, tai*

$$p = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\Phi\left(\frac{-\sqrt{\varrho}y + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}}\right)dy = \mathbb{P}\left(Y_1 < -\sqrt{\frac{\varrho}{1-\varrho}}X + \frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}}\right).$$

Jei $n = 2$, *o* $Z_1, Z_2 \sim N(0,1), cov(Z_1, Z_2) = \varrho$, *tai*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{-\sqrt{\varrho}y + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}} \right) dy = \mathbb{P}(Z_1 < \Phi^{-1}(p), Z_2 < \Phi^{-1}(p))$$
$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p)} \exp\left\{ -\frac{x^2 - 2\varrho xy + y^2}{2(1-\varrho^2)} \right\} dxdy$$
$$= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p)} \varphi(y) \Phi \left(\frac{-\varrho y + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho^2}} \right) dy.$$

5.1 Pavyzdys

Pagal **2 išvadą**, jeigu $n = 1, k = 0$, tai $1 - p \geq \gamma$ ir $p \leq 1 - \gamma$.

Pasiremdami daugiamatės funkcijos aprašymu iš **1 išvados** parodykime kaip galima įvertinti įsipareigojimo nevykdymo tikimybę. Tarkime, reikšmingumo lygmuo yra $\gamma = 0.01$:

- Tegu $n = 2, k = 0, \varrho = 0.12$. Tada

$$\Phi_R(-\Phi^{-1}(p), -\Phi^{-1}(p)) \geq 0.99 \Rightarrow -\Phi^{-1}(p) \geq -1.3857 \Rightarrow p \leq \Phi(1.3857) = 0.9171$$

- Tegu $n = 3, k = 0, \varrho = 0.12$. Tada

$$\Phi_R(-\Phi^{-1}(p), -\Phi^{-1}(p), -\Phi^{-1}(p)) \geq 0.99 \Rightarrow -\Phi^{-1}(p) \geq -0.9436 \Rightarrow p \leq \Phi(0.9436) = 0.8278$$

...

tuomet analogiškai tęsdami skaičiavimus, pritaikysime juos porfeliui, kuris sudarytas iš daugiau skolininkų.

Tam, kad galėtume palyginti gautus rezultatus, nagrinėjme tą patį portfelį su $n_A = 200, n_B = 400, n_C = 300, n_D = 100$ skolininkais. Įverčius apskaičiavome pagal aukščiau pateiktą principą su mažais n ir pateikėme lentelėje:

γ	50%	75%	90%	95%	99%
$p_{\hat{R_1}}$	0.1255%	0.334%	0.7252%	1.1026%	2.2801%
$p_{\hat{R_2}}$	0.1533%	0.4024%	0.8644%	1.3061%	2.6591%
$p_{\hat{R_3}}$	0.2859%	0.7247%	1.4963%	2.2243%	4.3142%
$p_{\hat{R_4}}$	0.9943%	2.3459%	4.5195%	6.3955%	11.3260%

5 lentelė: Tikimybių $p_{\hat{R_1}}, p_{\hat{R_2}}, p_{\hat{R_3}}$ ir $p_{\hat{R_4}}$ viršutiniai rėžiai

Palyginus rezultatus su esančiais **4.1.1** pavyzdyje, matome, kad rezultatai skiriasi neženkliai per kelias šimtąsias arba tūkstantąsias procentines dalis. Be to, verta paminėti, kad šis būdas yra praktiškesnis ir mažiau resursų reikalaujantis praktiniams skaičiavimams, kai portfelis yra gana nedidelis (tarkime iki 1000 skolininkų), nes tikimybės įverčius galima surasti daug paprasčiau. Didesnio portfelio atveju matrica tampa labai didelė, tad skaičiavimai darosi sudėtingesni bei reikalauja daugiau resursų.

6 Beta skirstinys ir įsipareigojimų nevykdymo tikimybė

Apibrėžimas 2. *Sakome, kad atsitiktinis dydis X yra pasiskirstęs pagal beta skirstinį su parametrais $\alpha > 0$ ir $\beta > 0$ (žymimas $X \sim \mathcal{B}(\alpha, \beta)$), jeigu jo tankio funkcija yra*

$$b_{\alpha,\beta}(x) := \frac{x^{\alpha}(1-x)^{\beta}}{B(\alpha, \beta)},\ x \in (0,\ 1),$$

kur

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

ir gama funkcija kompleksiniams skaičiams $s \in \mathbb{C}$ yra

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}dt,\ \Re s > 0.$$

Tuomet apibrėžiame beta atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkciją kaip

$$\mathcal{B}_{\alpha,\beta}(x) = \int_0^{x} b_{\alpha,\beta}(y)dy,\ x \in (0,\ 1)$$

ir jos atvirkštinę $\mathcal{B}^{-1}_{\alpha,\beta}(x)$, $x \in (0,\ 1)$.

Teiginys 1. *Tegu $n \in \mathbb{N}$ ir $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ yra fiksuoti dydžiai. Tuomet beta ir binominio atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkcijas sieja lygybės*

$$1 - \mathcal{B}_{k+1,n-k}(p) = \mathcal{B}_{n-k,k+1}(1-p) = \mathcal{B}in_{n,p}(k). \tag{11}$$

Įrodymas. [3] Visų pirma, turime parodyti, kad

$$1 - \mathcal{B}_{k+1,n-k}(p) = \mathcal{B}_{n-k,k+1}(1-p).$$

Gauname, kad

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{n-k,\,k+1}(1-p) &= \frac{\int_0^{1-p} u^{n-k-1}(1-u)^k du}{B(n-k,\,k+1)} = -\frac{\int_1^p (1-x)^{n-k-1} x^k dx}{B(n-k,\,k+1)} \\
&= \frac{\int_p^1 x^k (1-x)^{n-k-1} dx}{B(k+1,\,n-k)} = \frac{B(k+1,\,n-k) - \int_0^p x^k (1-x)^{n-k-1} dx}{B(k+1,\,n-k)} \\
&= 1 - \mathcal{B}_{k+1,n-k}(p).
\end{aligned}$$

Dabar siekiame įrodyti, kad

$$1 - \mathcal{B}in_{n,p}(k) = \mathcal{B}_{n-k,k+1}(1-p),$$

kur $\mathcal{B}in_{n,p}(k)$ yra laikoma $p \in (0,1)$ funkcija, kai k ir n yra fiksuoti. Perrašykime

$$f(p) := 1 - \mathcal{B}in_{n,p}(k) = \sum_{i=k+1}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Galima pastebėti, kad $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ ir jos išvestinė

$$\begin{aligned}
\frac{d\,f(p)}{dp} &= \sum_{i=k+1}^{n} \binom{n}{i} \left(i p^{i-1}(1-p)^{n-i} - (n-i) p^i (1-p)^{n-1-i} \right) \\
&= n \sum_{i=k+1}^{n} \left(\binom{n-1}{i-1} p^{i-1}(1-p)^{n-i} - \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-1-i} 1_{\{i \leqslant n-1\}} \right) \\
&= n \Bigg(\binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} - \binom{n-1}{k+1} p^{k+1}(1-p)^{n-2-k} \\
&+ \binom{n-1}{k+1} p^{k+1}(1-p)^{n-2-k} - \binom{n-1}{k+2} p^{k+2}(1-p)^{n-3-k} + \ldots \\
&+ \binom{n-1}{n-1} p^{n-1}(1-p)^0 \Bigg) = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} p^k (1-p)^{n-1-k}
\end{aligned}$$

yra teigiama kiekvienam $p \in (0,\, 1)$. Taigi, $f(p)$ yra pasiskirstymo funkcija intervale $p \in (0,\, 1)$ ir jos išvestinė yra ne kas kita, kaip beta skirstinio tankis su parametrais $(k+1,\, n-k)$, pavyzdžiui.:

$$\frac{d\,f(p)}{dp} = b_{k+1,\,n-k}(p) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k)} p^k (1-p)^{n-k-1},\ p \in (0,\, 1).$$

$\square$

Kai įsipareigojimų neįvykdymo atvejai yra priklausomi nuo sisteminio faktoriaus, tuomet turime nelygybę

$$1-\gamma \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \left(\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p)-\sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^i \left(1-\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p)-\sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{n-i} dy.$$

Iš binominio ir beta skirstinio sąryšio žinome, kad

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \mathcal{B}_{n-k,k+1}(1-p).$$

Tuomet, pažymėję

$$\tilde{p} = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p)-\sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}\right),$$

ir pritaikę beta ir binominio skirstinio sąryšį, gauname nelygybę

$$1-\gamma \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \mathcal{B}_{n-k,k+1}\left(\Phi\left(\frac{-\Phi^{-1}(p)+\sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right) dy,$$

tada

$$1-\gamma \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{B}_{n-k,k+1}\left(\Phi\left(\frac{-\Phi^{-1}(p)+\sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right) d\Phi(y),$$

čia pasinaudojome standartinio normaliojo skirstinio simetriškumu $1-\Phi = \Phi(-x)$.

Atliekame kintamojo keitimą. Tarkime

$$\Phi(y) = x,$$

tuomet

$$y = \Phi^{-1}(x)$$

$$\Phi(-\infty) = 0 \text{ ir } \Phi(+\infty) = 1$$

Gauname išraišką

$$1-\gamma \leq \int_0^1 \mathcal{B}_{n-k,k+1}\left(\Phi\left(\frac{-\Phi^{-1}(p)+\sqrt{\varrho}\Phi^{-1}(x)}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)dx, \tag{12}$$

kur $\mathcal{B}_{n-k,k+1}(.)$ yra Beta atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.

6.1 Pavyzdys

Tarkime, turime porfelį su $n_A = 200, n_B = 400, n_C = 300, n_D = 100$ bei atitinkamai buvo $0, 1, 1, 2$ įsipareigojimų nevykdymo atvejai. Šiuo atveju, tikimybių įverčius skaičiuojame pagal (12) formulę.

γ	50%	75%	90%	95%	99%
$\hat{p_{R_1}}$	0.7245%	1.4223%	2.4794%	3.3802%	5.7808%
$\hat{p_{R_2}}$	0.8842%	1.7112%	2.9444%	3.9826%	7.1026%
$\hat{p_{R_3}}$	1.3204%	2.5144%	4.2488%	5.6771%	9.3277%
$\hat{p_{R_4}}$	3.4267%	6.2059%	9.93641%	12.8145%	19.6023%

6 lentelė: Tikimybių $\hat{p_{R_1}}, \hat{p_{R_2}}, \hat{p_{R_3}}$ ir $\hat{p_{R_4}}$ viršutiniai rėžiai

Palyginę rezultatus su pateiktais *4 lentelėje* matome, kad gauti įverčiai skiriasi neženkliai. Be to, verta paminėti, jog (12) formulė yra paprasčiau pritaikoma negu (7).

7 Išvados

Šio darbo tikslas buvo apžvelgti K. Pluto ir D. Tasche [1] straipsnyje aprašytą konservatyvumo metodą bei atvejį, kai įsipareigojimo nevykdymo atvejus veikia sisteminis faktorius, susieti su beta bei daugiamačiu normaliuoju skirstiniu.

Rezultatai parodė, kad susiejus (6) išraišką su beta skirstiniu, gauta (12) formulė yra paprastesnė praktiniams skaičiavimams. Pritaikę daugiamatę funkciją iš 1 išvados pastebėjome, kad skaičiavimai, kai turime gana nedidelį skolininkų skaičių yra paprastesni, tačiau jeigu $n > 1000$ optimaliau rinktis **4 skyriuje** naudotą PD būdą. Be to, palyginę **4 skyriuje** apskaičiuotus rezultatus su įverčiais gautais pritaikius daugiamatę funkciją bei beta skirtinį, įsitikinome, kad visi būdai yra tinkami įsipareigojimo nevykdymo tikimybei vertinti.

Literatūra

[1] Pluto, K.,Tasche,D.,2006: Estimating Probabilities of Default for Low Default Portfolios *Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. pp.* 79–103.

[2] Kubilius, J: Tikimybių teorija ir matematinė statistika. 1996.

[3] Grigutis, A: Overview of interactions between some probability distributions and probability of default. Straipsnio rankraštis: URL: https://klevas.mif.vu.lt/ andriusg/preprintai.html 1996.

[4] Arbenz, Philipp (2013): Bayesian Copulae Distributions, with Application to Operational Risk Management—Some Comments". Methodology and Computing in Applied Probability. 15 (1): 105–108.

[5] Bank for Intenational Settlements, An Explanatory Note on the Basel II.: An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions : Basel, 2005,13,16 p.

[6] Basel Committee on Banking Supervision: Studies on the Validation of Internal Rating Systems: Basel, 2005, 120 p.

[7] C. Bluhm, L. Overbeck, C. Wagner, New York: An Introduction to Credit Risk Modeling: 2003, 384 p.

[8] J. Galambos,: Introductory Probability Theory. New York: Marcel Dekker, 1984.

[9] Lietuvos banko valdybos 2006 11 09 nutarimas nr. 138: Dėl Kapitalo pakankamumo skaičiavimo bendrosios nuostatos 2006, Vilnius.

[10] Basel Committee on Banking Supervision (BCBS):Bank Failures in Mature Economies. 2004a,13.

Priedai

R programos kodas atvejams, kai įvykių tikimybės nepriklausomos:

```
Neprikl_PD_k<-function(n, k, gamma){
  alfa<-k+1
  beta<-n-k
  p<-qbeta(gamma,alfa,beta)*100
  p }
n_R1<-200
n_R2<-400
n_Z3<-300
n_Z4<-100
n<-c(n_R1+n_R2+n_R3+n_R4,n_R1+n_R2+n_R3+n_R4,n_R1+n_R2+n_R3+n
_R4,n_R1+n_R2+n_R3+n_R4,
     n_R2+n_R3+n_R4,n_R2+n_R3+n_R4,n_R2+n_R3+n_R4,n_R2+n_R3+n_R4,
     n_R3+n_R4,n_R3+n_R4,n_R3+n_R4,n_R3+n_R4,
     n_R4,n_R4,n_R4,n_R4)
gamma1<-0.5
gamma2<-0.75
gamma3<-0.9
gamma4<-0.95
gamma5<-0.99
gamma<-c(gamma1,gamma2,gamma3,gamma4,gamma5,
         gamma1,gamma2,gamma3,gamma4,gamma5,
         gamma1,gamma2,gamma3,gamma4,gamma5)
k_R1<-0
k_R2<-1
k_R3<-2
k_R4<-3
k<-c(k_R1+k_R2+k
k_R3+k_R4,k_R1+k_R2+k_R3+k_R4,k_R1+k_R2+k_R3+k_R4,k_R1+k_R2+k_R3+k_R4,
     k_R2+k_R3+k_R4,k_R2+k_R3+k_R4,k_R2+k_R3,k_R2+k_R3+k_R4,
```

```
     k_R3+k_R4,k_R3+k_R4,k_R3+k_R4,k_R3+k_R4,
     k_R4,k_R4,k_R4,k_R4)
m<-matrix(Neprikl_PD_k(n, k, gamma),nrow=5)
t(m)
```

R programos kodas, kai atvejai priklausomi nuo sisteminio faktoriaus:

```
url <- "https://cran.r-project.org/src/contrib/Archive/VaRES/VaRES_1.0.tar.gz"
pkgFile <- "VaRES_1.0.tar.gz"
download.file(url = url, destfile = pkgFile)
url <- "https://cran.r-project.org/src/contrib/Archive/LDPD/LDPD_1.0.2.tar.gz"
pkgFile <- "LDPD_1.0.2.tar.gz"
download.file(url = url, destfile = pkgFile)
install.packages(pkgs=pkgFile, type="source", repos=NULL)
library("VaRES")
library("LDPD")
library("LaplacesDemon")
lsf.str("package:VaRES")
get.PDT<-function(n, defaults, rho, gamma){
  start.time<-Sys.time()
  confidence_interval_at_0 = gamma;
  confidence_interval_at_k = gamma;
 nevykdymu. PDTs<-PDT_solve(n, rho)
  PDTs<-PDT_solve(n, rho)
  PDT_0 <- PDTs[1]
  PDT_k <- PDTs[2]
  #Skaiciuojam PD
  PDT<-c(c(n, defaults,
           percent(defaults/n),
           percent(PDT_0),
           rho,percent(confidence_interval_at_0, 2), percent(PDT_k) ,
           rho,
           percent(confidence_interval_at_k, 2)))
```

```
  #Skaiciavimo laikas
end.time<Sys.time()
time.taken<-round(end.time-start.time, 3)
#Pavadiname
PDT<-matrix(c(PDT,time.taken), 1, 10)
colnames(PDT)<-c("Size",
                "Number of defaults",
                 "ODR","PDT_0","Correlation at 0 defaults",
                 "gamma interval at 0 defaults",
                paste("PDT_",defaults),
                paste("Correlation at", defaults,"defaults"),
                paste("gamma interval at", defaults, "defaults"),
                "Time taken (seconds)")
return(PDT)
}
vget.PDT<- Vectorize(get.PDT,c("n","defaults"))
G<-function(PDT, y, rho)
{pnorm((qnorm(PDT)-sqrt(rho)*y)/(sqrt(1-rho)))}
PDT_solve<-function(n,rho){
  y <- seq(-20, 20, by = 0.0001)
  val<-0
  f <- function(x)
  {
    for(i in 1:(length(y)-1))
    {val<-val+sum(dbinom(0:k,n,G(x,y[i],rho)))*
      (pnorm(y[i+1])-pnorm(y[i]))}
    return(val-1+alpha)
  }
  k<- 0;
  alpha <-gamma
  PDT_0<-uniroot(f,c(0,1))$root
  k<- defaults;
```

```
  alpha<-gamma
  PDT_k<-uniroot(f,c(0,1))$root
  return(c(PDT_0,PDT_k))
}
percent <- function(x,digits=4,format="f",...){
  paste0(formatC(100*x,format=format,digits=digits,...), "%")
}
n=400
defaults=2
gamma=0.5
rho=0.12
PDT = get.PDT(n,
             defaults,
             rho,
             gamma)
View(PDT)
```

Skaičiavimai daugiamačio normalaus skirstinio atveju:

```
install.packages("mvtnorm")
library(mvtnorm)
e<-matrix(0.12,nrow=1,ncol=1)
diag(e)=1
qmvnorm(0.5, sigma = e, tail = "lower.tail")
```

Tuomet gauta reikšmė buvo apskaičiuota su "Excel" funkcija NORM.S.DIST.

Wolfram Matematica kodas, kai įsipareigojimo nevykdymo tikimybė buvo rasta pritaikius beta skirstinį:

```
G = {0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 0.99}
r = 0.12
f[y_] :=
 NIntegrate[
  CDF[BetaDistribution[98, 3],
```

```
   CDF[NormalDistribution[0, 1],
    Sqrt[r/(1 - r)]*InverseCDF[NormalDistribution[0, 1], x] + y]], {x,
    0, 1}]
Table[FindRoot[f[y] == 1 - G[[i]], {y, 2}], {i, 1, 6}]
```