ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
TECHNOLOGIJOS, FIZINIŲ IR BIOMEDICINOS MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Odeta Janelionytė
(Matematikos studijų programa, valstybinis kodas: 621G10006)

Diskreti ribinė teorema Estermano dzeta funkcijoms

Magistro darbas

Darbo vadovė
prof. dr. R. Macaitienė

Šiauliai, 2016

Patvirtinu, kad magistro darbas yra originalus, neturintis plagiato požymių.

....	....	....
(Parašas)	(Vardas ir pavardė)	(Data)

Turinys

ĮVADAS

Matematikoje nagrinėjamos įvairių tipų eilutės, tarp kurių reikšmingiausios yra laipsninės eilutės, naudojamos apibrėžiant analizines funkcijas. Dirichlė (Dirichlet) eilutės – kitas svarbus bendrosios analizės objektas, apibrėžiantis neplačią beveik periodinių funkcijų klasę ir turintis specifinę įtaką analizėje. Iš kitos pusės, Dirichlė eilutės vaidina esminį vaidmenį analizinėje skaičių teorijoje, kaip generuojančiosios aritmetinių objektų funkcijos bei turinčios platų pritaikymą ne tik skaičių teorijoje.

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra kompleksinių skaičių seka, o $\{\lambda_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra tokia didėjanti realiųjų skaičių seka, kad $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty$. Eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s} \tag{1}$$

yra vadinama bendrąja Dirichlė eilute. Jei $\lambda_m = \log m$, ši eilutė tampa paprastąja Dirichlė eilute

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}. \tag{2}$$

Gerai žinoma, kad Dirichlė eilutės konvergavimo bei absoliutaus konvergavimo sritys yra pusplokštumės. Be to, jei (1) eilutė konverguoja pusplokštumėje $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_0\}$, tai eilutės suma yra analizinė funkcija šioje srityje.

Trumpai aptarsime keletą dzeta funkcijų, apibrėžiamų paprastosiomis Dirichlė eilutėmis, o plačiau – Estermano (Estermann) dzetą funkciją, kurios reikšmių pasiskirstymas nagrinėjamas magistro darbe.

Be abejo, svarbiausia ir paslaptingiausia yra Rymano (Riemann) dzeta funkcija $\zeta(s)$, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama paprastąja Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s},$$

turinčia analizinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Klasikine prasme, ši funkcija atlieka ypatingą vaidmenį, sprendžiant pirminių skaičių pasiskirstymo klausimus ir, apskritai, turi didžiulę įtaką įvairiose matematikos srityse.

Natūralus Rymano dzeta funkcijos apibendrinimas yra periodinės dzeta funkcijos, Hurvico (Hurwitz), Lercho (Lerch), Estermano ir kitos dzeta funkcijos.

Kaip jau minėjome, magistro darbe nagrinėjamas Estermano dzeta funkcijos reikšmių pasiskirstymas. 1934 metais Estermanas spręsdamas vieną adityviosios skaičių teorijos uždavinį (siekta skaičius užrašyti tam tikrų dviejų sandaugų suma) apibrėžė naują dzetą funkciją.

Tarkime, kad α yra kompleksinis skaičius, o $\sigma_\alpha(m)$ apibendrintoji daliklių funkcija

$$\sigma_\alpha(m) = \sum_{d|m} d^\alpha, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Jei $\alpha = 0$, tada $\sigma_\alpha(m)$ tampa daliklių funkcija

$$\sigma_0(m) = d(m) = \sum_{d|m} 1.$$

Žinoma, kad kiekvienam teigiamam ϵ

$$d(m) \ll_\epsilon m^\epsilon, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Iš $\sigma_\alpha(m)$ apibrėžimo išplaukia, kad

$$\sigma_\alpha(m) = m^\alpha \sigma_{-\alpha}(m) \tag{3}$$

ir su kiekvienu $\epsilon > 0$

$$\sigma_\alpha(m) \ll_\epsilon m^{\epsilon + \max(\Re\alpha, 0)}; \tag{4}$$

čia $f(x) \ll_\eta g(x)$, $g(x) > 0$, $x \in I \subset \mathbb{R}$, reiškia, jog egzistuoja tokia konstanta $c = c(\eta) > 0$, kad

$$|f(x)| \leq cg(x), \qquad x \in I \subset \mathbb{R}.$$

Tegul k ir l yra tarpusavyje pirminiai skaičiai. Estermano dzeta funkcija $E\left(s; \frac{k}{l}, \alpha\right)$ su parametrais α ir $\frac{k}{l}$ pusplokštumėje $\sigma > \max(1, 1 + \Re\alpha)$ apibrėžiama eilute

$$E\left(s; \frac{k}{l}, \alpha\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(m)}{m^s} \exp\left\{2\pi i m \frac{k}{l}\right\}$$

ir yra analiziškai tęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus taškus $s = 1$ ir $s = 1 + \alpha$ (paprastieji poliai), kai $\alpha \neq 0$, ir tašką $s = 1$ (antros eilės polius), kai $\alpha = 0$. Taigi, šioje pusplokštumėje Estermano dzeta funkcija yra paprastosios Dirichlė eilutės (2) su koeficientais $a_m = \sigma_\alpha(m) \exp\left\{2\pi i m \frac{k}{l}\right\}$ suma.

Funkcija $E\left(s; \frac{k}{l}, \alpha\right)$, skirtingai nuo funkcijos $\zeta(s)$, neturi Oilerio (Euler) sandaugos pagal pirminius, nes eilutės, kuria ji apibrėžiama, koeficientai nėra multiplikatyvieji. Primename, kad aritmetinė funkcija $g(m)$, $m \in \mathbb{N}$ yra vadinama multiplikatyviąja, jeigu $g(1) = 1$ ir $g(mn) = g(m)g(n)$ su visais tarpusavyje pirminiais $m, n \in \mathbb{N}$. Todėl funkcijos $E\left(s; \frac{k}{l}, \alpha\right)$ savybės iš esmės skiriasi nuo funkcijos $\zeta(s)$ savybių.

I. Kiuchi [7] nagrinėjo Estermano dzeta funkcijos $E\left(s;\frac{k}{l},\alpha\right)$ reikšmių pasiskirstymą, kai $\alpha\in(-1;0]$. R. Šleževičienė, J. Štoidingas (Steuding) nagrinėjo Estermano dzeta funkcijos nulių pasiskirstymą bei antrąjį momentą [15]. Pastarieji mokslininkai kartu su A. Laurinčiku ir R. Garunkščiu įrodė ir $E\left(s;\frac{k}{l},\alpha\right)$ universalumą [5].

Kadangi iš (3) lygybės išplaukia, jog funkcija $E\left(s;\frac{k}{l},\alpha\right)$ tenkina funkcinę lygtį [1]

$$E\left(s;\frac{k}{l},\alpha\right)=E\left(s-\alpha;\frac{k}{l},-\alpha\right),$$

neprarasdami bendrumo, galime tarti, jog $\Re\alpha\le 0$.

Pirmuosius rezultatus charakterizuojant funkcijos $E\left(s;\frac{k}{l},\alpha\right)$ asimptotinę elgseną tikimybiniais metodais pateikė profesorius A. Laurinčikas [10]. Įrodyta ribinė teorema tikimybinių matų silpnojo konvergavimo prasme kompleksinėje plokštumoje. Suformuluosime šį rezultatą.

Tegul $\gamma=\{s\in\mathbb{C}:|s|=1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje ir

$$\Omega=\prod_p\gamma_p;$$

čia $\gamma_p=\gamma$ visiems pirminiams p ($p\in\mathcal{P}$). Pagal Tichonovo (Tikhonov) teoremą, su sandaugos topologija ir pataškine daugyba begaliniamatis toras Ω yra kompaktinė topologinė Abelio (Abel) grupė. Todėl tikimybinėje erdvėje $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega))$, kur $\mathcal{B}(\Omega)$ žymi erdvės Ω Borelio (Borel) aibių klasę, egzistuoja tikimybinis Haro (Haar) matas m_H. Gaunama tikimybinė erdvė $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),m_H)$. Pažymėkime $\omega(p)$ elemento $\omega\in\Omega$ projekciją į koordinatinę erdvę γ_p, $p\in\mathcal{P}$, ir pratęskime funkciją $\omega(p)$ į aibę $\mathbb{N}$ formule

$$\omega(m)=\prod_{p^q\|m}\omega^q(p),\qquad m\in\mathbb{N};$$

čia $p^q\|m$ reiškia, kad $p^q|m$, bet $p^{q+1}\nmid m$.

Tikimybinėje erdvėje $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),m_H)$ apibrėžkime kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį elementą

$$E\left(\sigma;\frac{k}{l},\alpha;\omega\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(m)\omega(m)}{m^\sigma}\exp\left\{2\pi im\frac{k}{l}\right\},\qquad \sigma>\frac{1}{2},$$

ir $P^{\mathbb{C}}_{E,\sigma}$ pažymėkime jo skirstinį

$$P^{\mathbb{C}}_{E,\sigma}(A)=m_H\left(\omega\in\Omega:E\left(\sigma;\frac{k}{l},\alpha;\omega\right)\in A\right),\qquad A\in\mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Be to, tegul $\text{meas}\{A\}$ žymi mačiosios aibės $A\subset\mathbb{R}$ Lebego (Lebesgue) matą. Kaip jau minėjome, 2005 metais A. Laurinčikas [10] įrodė ribinę teoremą Estermano dzeta funkcijai kompleksinėje plokštumoje.

A teorema. [10] *Tarkime, kad* $\sigma > \frac{1}{2}$ *ir* $\Re\alpha \leq 0$. *Tuomet tikimybinis matas*

$$\frac{1}{T}\text{meas}\left\{t \in [0,T] : E\left(\sigma + it; \frac{k}{l}, \alpha\right) \in A\right\}, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $T \to \infty$, *silpnai konverguoja į matą* $P^{\mathbb{C}}_{E,\sigma}$.

Tais pačias metais A. Laurinčikas [11] pateikė A teoremos apibendrinimą meromorfinių funkcijų erdvėje.

Minėti profesoriaus A. Laurinčiko rezultatai yra tolydaus tipo – pateiktose teoremose tikimybiniai matai apibrėžti naudojant postūmius, kintančius tolydžiai intervale $[0, T]$. Magistro darbe nagrinėjami diskretūs atvejai, kuomet tikimybiniai matai apibėžiami postūmiais, įgyjančiais reikšmes iš tam tikros aritmetinės progresijos. A. Laurinčikas ir R. Macaitienė įrodė diskrečiąją ribinę teoremą Estermano dzeta funkcijai meromorfinių funkcijų erdvėje [12] bei daugiamatę ribinę teoremą meromorfinių funkcijų erdvėje Estermano dzeta funkcijų rinkiniui [13].

Magistro darbo tikslas – įrodyti diskrečiąją ribinę teoremą Estermano dzeta funkcijai kompleksinėje plokštumoje.

Tegul $N \in \mathbb{N}_0$ ir

$$\mu_N(...) = \frac{1}{N+1} \sum_{\substack{0 \leq m \leq N \\ ...}} 1;$$

čia vietoje daugtaškių rašoma sąlyga, kurią tenkina m.

Pagrindinė teorema. *Tarkime, kad* $\sigma > \frac{1}{2}$ *ir* $\Re\alpha \leq 0$. *Be to, tegul* $h > 0$ *yra toks fiksuotas skaičius, kad* $\exp\left\{\frac{2\pi r}{h}\right\}$ *yra iracionalusis skaičius su visais* $r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. *Tuomet tikimybinis matas*

$$\mu_N\left(E\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right) \in A\right), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $N \to \infty$, *silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento skirstinį* $P^{\mathbb{C}}_{E,\sigma}$.

Be abejo, kyla klausimas – ar galime rasti tokią h reikšmę, kad $\exp\left\{\frac{2\pi r}{h}\right\}$ būtų iracionalusis skaičius? Pavyzdžiui, tegul $h = 2\pi$, tuomet

$$\exp\left\{\frac{2\pi r}{2\pi}\right\} = \exp\{r\}.$$

Kadangi $r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, vadinasi, jis yra algebrinis skaičius, tuomet remdamiesi Ermito-Lindemano (Hermite-Lindemann) teorema gauname, jog $\exp\{r\}$ yra iracionalusis skaičius.

Magistro darbą sudaro įvadas ir 2 skyriai. Pirmajame skyriuje pateikiami pagrindiniai darbe vartojami terminai, sąvokos ir rezultatai. Antrajame darbo skyriuje įrodoma ribinė teorema tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme kompleksinėje plokštumoje bei pagalbiniai rezultatai, reikalingi jos įrodymui. Darbo pabaigoje pateikiamos išvados, literatūros sąrašas, santrauka anglų kalba.

Apibrėžimai, teoremos, lemos ir formulės žymimos dviem skaičiais: pirmasis skaičius nurodo skyriaus numerį, antrasis – teiginio (formulės) numerį skyriuje. Teoremų ir lemų įrodymų pabaiga žymima simboliu $\blacktriangle$.

1. NAUDOJAMOS SĄVOKOS IR REZULTATAI

Šiame skyriuje pateikiami pagrindiniai darbe vartojamų sąvokų apibrėžimai, pagalbiniai rezultatai, reikalingi pagrindinės teoremos įrodymui, supažindinama su tikimybinių metodų panaudojimo, tyrinėjant funkcijų, apibrėžtų Dirichlė eilutėmis, reikšmių pasiskirstymą, idėja, kuri grindžiama silpno tikimybinių matų konvergavimo taikymu (vienu pagrindinių asimptotinių metodų).

1.1 apibrėžimas. *Tarkime, kad Ω yra netuščia aibė. Aibės Ω poaibių sistema $\mathcal{F}$ vadinama Borelio kūnu (σ-kūnu), jei:*

a) $\Omega \in \mathcal{F}$;

b) $A^c \in \mathcal{F}$, *čia* $A \in \mathcal{F}$ *(čia A^c aibės A papildinys);*

c) $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{F}$ *visoms* $A_m \in \mathcal{F}$, $m = 1, 2, \ldots.$

1.2 apibrėžimas. *Neneigiama funkcija P, apibrėžta šeimoje $\mathcal{F}$ ir turinti savybes*

a) $P(\Omega) = 1$;

b) $P\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} P(A_m)$ *visoms $A_m \in \mathcal{F}$, tokioms, kad $A_k \cap A_l \neq 0$, jei $k \neq\ l$,*

vadinama tikimybiniu matu.

1.3 apibrėžimas. *Trejetas $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vadinamas tikimybine erdve.*

Tegul $\mathcal{T}$ topologinė erdvė, o $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ – erdvės $\mathcal{T}$ Borelio aibių klasė, t. y. visų atvirų aibių sistemos generuotas σ-kūnas. Tada kiekvienas matas klasėje $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ vadinamas Borelio matu.

Tarkime, kad P_n ir P – tikimybiniai matai erdvėje $(\mathrm{S}, \mathcal{B}(\mathrm{S}))$.

1.4 apibrėžimas. *Sakome, kad P_n silpnai konverguoja į P, kai $n \to \infty$, jei*

$$\int\limits_{\mathrm{S}} f dP_n \to \int\limits_{\mathrm{S}} f dP, \quad n \to \infty,$$

kiekvienai realiai, apibrėžtai, tolydžiai funkcijai f iš S. Žymėsime $P_n \Rightarrow P$.

Yra žinoma keletas tikimybinių matų silpnojo konvergavimo ekvivalentų.

1.5 teorema. *Tegu P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Tada šie tvirtinimai yra ekvivalentūs:*

1. $P_n \Rightarrow P$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_S f dP_n = \int\limits_S f dP$ *visoms realioms aprėžtoms ir tolygiai tolydžioms funkcijoms* $f \in S$;
3. $\liminf\limits_{n\to\infty} P_n(F) \leq P(F)$ *visoms uždaroms aibėms* F;
4. $\limsup\limits_{n\to\infty} P_n(G) \geq P(G)$ *visoms atviroms aibėms* G;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$ *visoms mato $\mathbb{P}$ tolydumo aibėms A (t.y., kurioms $P(\partial A) = 0$).*

Teoremos įrodymą galima rasti [1].

Darbe naudojamas vienas iš paprasčiausių silpno konvergavimo kriterijų [1; 2.2 teorema].

1.6 teorema. *$P_n \Rightarrow P$ tada ir tik tada, jei iš kiekvieno posekio $\{P'_n\}$ galima išskirti kitą posekį $\{P''_n\}$, taip kad $P''_n \Rightarrow P$.*

1.7 apibrėžimas. *Apibrėžtų erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra reliatyviai kompaktiška, jei kiekvienas elementų iš $\{P\}$ posekis turi silpnai konverguojantį posekį.*

1.8 apibrėžimas. *Tikimybinių matų šeima P vadinama tiršta, jei kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja kompaktiška aibė $K \subset S$ tokia, kad $P(K) > 1 - \varepsilon$, visiems P iš $\{P\}$.*

Tikimybinių matų silpno konvergavimo teorijoje svarbų vaidmenį atlieka Prochorovo (Prokhorov) teoremos, susiejančios reliatyvaus kompaktiškumo ir suspaustumo (tirštumo) sąvokas.

1.9 teorema. *Jei tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra tiršta, tai ji yra ir reliatyviai kompaktiška.*

1.10 teorema. *Tegul S – pilna separabili metrinė erdvė. Jei apibrėžtų erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra reliatyviai kompaktiška, tai ji yra ir suspausta (tiršta).*

1.8, 1.9 teoremų įrodymai pateikti [1].

Tegul S_1 ir S_2 metrinės erdvės, o $\mathcal{B}(S_1)$, $\mathcal{B}(S_2)$ jų Borelio aibių klasės. Be to, tegul $h : S_1 \to S_2$ yra matusis atvaizdis, o P tikimybinis matas erdvėje $(S_1, \mathcal{B}(S_1))$. Tuomet šis matas indukuoja erdvėje $(S_2, \mathcal{B}(S_2))$ vienintelį tikimybinį matą Ph^{-1}, apibrėžiamą lygybe

$$Ph^{-1}(A) = P(h^{-1})A, \quad A \in \mathcal{B}(S_2).$$

Tegul $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ yra tikimybinė erdvė, o $(S, \mathcal{B}(S))$ – metrinė erdvė su Borelio aibių klase.

1.11 apibrėžimas. *Tegul $X : \Omega \to S$. Jei $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$ kiekvienai $A \in \mathcal{B}(S)$, tuomet X vadinamas S-reikšmiu atsitiktiniu elementu, apibrėžtu aibėje Ω.*

Jei $S = \mathbb{R}$, sakome, kad X yra atsitiktinis dydis.

1.12 apibrėžimas. *S-reikšmio atsitiktinio elemento X skirstiniu vadinamas tikimybinis matas P, apibrėžtas erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$, toks kad*

$$P(A) = P(X^{-1}A) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\},$$

visoms $A \in \mathcal{B}(S)$.

1.13 apibrėžimas. *Atsitiktinių elementų seka $\{X_n\}$ konverguoja pagal skirstinį į atsitiktinį elementą X, kai $n \to \infty$, jei elementų X_n skirstiniai silpnai konverguoja į elemento X skirstinį. Žymėsime ($X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$).*

Tegul S – separabili metrinė erdvė su metrika ρ, o $X_n, X_{n1}, X_{n2}, ...$ yra S-reikšmiai atsitiktiniai elementai, apibrėžti erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1.14 teorema. *Tarkime, kad $X_{k_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} X_k$, kai $n \to \infty$, kiekvienam k, bei $X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, kai $k \to \infty$. Jei kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbb{P}\{\rho(X_{k_n}, Y_n) \geq \varepsilon\} = 0,$$

tai $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, kai $n \to \infty$.

Įrodymą galima rasti [1; 4.2 teorema].

Taip pat pateikiame sąvokas, susijusias su vienu iš pagrindinių komponentų ribinių teoremų įrodymuose – Haro matu.

1.15 apibrėžimas. *Borelio matas P, apibrėžtas kompaktiškoje topologinėje grupėje G, vadinamas invariantiniu, jei $P(A) = P(xA) = P(Ax)$ visoms $A \in \mathcal{B}(G)$ ir $x \in G$. Čia xA ir Ax yra atitinkamai aibės $\{xy : y \in A\}$ ir $\{xy : x \in A\}$.*

1.16 apibrėžimas. *Invariantinis Borelio matas, apibrėžtas kompaktiškoje topologinėje grupėje, vadinamas Haro matu.*

1.17 teorema. *Kiekvienoje kompaktiškoje topologinėje grupėje egzistuoja vienintelis tikimybinis Haro matas.*

Teoremos įrodymą galima rasti [6].

Kitas svarbus aspektas ribinės teoremos įrodyme yra ergodinės teorijos taikymas, todėl šiame skyriuje pateikiame pagrindines sąvokas.

1.18 apibrėžimas. *Atsitiktinis procesas $X(\tau, \omega)$ vadinamas aprėžtai stacionariu, jei visi jo baigtiniamačiai skirstiniai yra invariantiški postūmio dydžio u atžvilgiu.*

Yra žinoma, kad kiekvieno atsitiktinio proceso baigtiniamačiai skirstiniai erdvėje $(Y, \mathcal{B}(Y))$ apibrėžia tikimybinį matą Q. Be to, jei atsitiktinis procesas $X(\tau, \omega)$ yra stipriai stacionarus, tai postūmis g_u yra išsaugantis matą, t. y., kiekvienai aibei $A \in \mathcal{B}(Y)$ ir visiems $u \in \mathbb{R}$ yra teisinga lygybė $Q(A) = Q(A_u)$, čia $A_u = g_u(A)$.

1.19 apibrėžimas. *Aibė $A \in \mathcal{B}(Y)$ vadinama proceso $X(\tau, \omega)$ invariantine aibe, jei kiekvienam u aibės A ir A_u skiriasi viena nuo kitos nulinio Q-mato aibe. Kitaip sakant, $Q(A\Delta A_u) = 0$.*

1.20 apibrėžimas. *Griežtai stacionarus procesas $X(\tau, \omega)$ yra ergodiškas, jei jo invariantinių aibių σ–kūną sudaro aibės, kurių matas Q lygus 0 arba 1.*

Ergodiniam procesui yra teisinga klasikinė Birchofo-Chinčino (Birkhoff-Chintchin) teorema.

1.21 teorema. *Tarkime, procesas $X(\tau,\omega)$ ergodiškas, $E|X(\tau,\omega)|<\infty$, ir tegul trajektorijos yra integruojamos Rymano prasme kiekviename baigtiniame intervale. Tuomet beveik visur galioja lygybė*

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T X(\tau,\omega)d\tau = EX(0,\omega).$$

Teoremos įrodymas pateiktas [3].

Ribinių teoremų įrodymuose svarbų vaidmenį vaidina tikimybinių matų transformacijos. Simboliu γ pažymėkime vienetinį apskritimą kompleksinėje plokštumoje: $\gamma=\{s\in\mathbb{C}:|s|=1\}$ ir tegul tikimybinis matas Q yra apibrėžtas erdvėje $(\gamma^m,\mathcal{B}(\gamma^m))$.

1.22 apibrėžimas. *Tikimybinio mato Q Furjė transformacija $g(k_1,...,k_m)$ apibrėžiama lygybe*

$$g(k_1,...,k_m)=\int_{\gamma^m} x_1^{k_1},...,x_m^{k_m}dQ;$$

čia $k_j\in\mathbb{Z},x_j\in\gamma,j=1,...,m.$

1.23 teorema. *Tarkime, $\{Q_n\}$ yra tikimybinių matų, apibrėžtų erdvėje $(\gamma^m,\mathcal{B}(\gamma^m))$ seka ir $\{g_n(k_1,...,k_m)\}$ yra atitinkamų Furjė transformacijų seka. Sakykime, kad kiekvienam sveikųjų skaičių rinkiniui $(k_1,...,k_m)$ egzistuoja riba*

$$g(k_1,...,k_m)=\lim_{n\to\infty}g_n(k_1,...,k_m).$$

Tuomet erdvėje $(\gamma^m,\mathcal{B}(\gamma^m))$ egzistuoja tikimybinis matas Q, toks, kad $Q_n\Rightarrow Q$. Be to, $g(k_1,...,k_m)$ yra tikimybinio mato Q Furjė transformacija.

Ši teorema yra specialus tolydumo teoremos tikimybiniams matams kompaktinėse Abelio grupėse atvejis. Įrodymą galima rasti [2; 1.4.2 teorema].

Dabar tarkime, jog

$$\Omega=\prod_p \gamma_p;$$

čia $\gamma_p=\gamma$ visiems pirminiams p. Tarkime, Q yra tikimybinis matas erdvėje $(\Omega,\mathbb{B}(\Omega))$.

1.24 apibrėžimas. *Mato Q Furjė transformacija $g(\underline{k})$ yra apibrėžiama formule*

$$g(\underline{k})=\int_\Omega\prod_p x_p^{k_p}dQ.$$

Čia $\underline{k}=(k_2,k_3,k_5,...)$, kur tik baigtinis sveikųjų skaičių k_p skaičius yra nelygus nuliui ir $x_p\in\gamma$, $p\in\mathcal{P}$.

1.25 teorema. *Tarkime* Q_n *yra tikimybinių matų, apibrėžtų erdvėje* $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ *seka, o* $g_n(k)$ *yra atitinkamų Furjė transformacijų seka. Sakykime, kad kiekvienam vektoriui* $\underline{k}$ *egzistuoja riba* $g(\underline{k}) = \lim_{n\to\infty} g_n(k)$. *Tuomet erdvėje* $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ *egzistuoja tikimybinis matas* Q, *toks, kad* $Q_n \Rightarrow Q$. *Be to,* $g_{\underline{k}}$ *yra mato* Q *Furjė transformacija.*

Teoremos įrodymą galima rasti [3].

2. PAGRINDINĖS TEOREMOS ĮRODYMAS

Šiame skyriuje pateikiami rezultatai, reikalingi pagrindinės teoremos įrodymui – įrodomos ribinės teoremos tore bei absoliučiai konverguojančioms eilutėms. Remiantis turimais rezultatais įrodoma pagrindinė teorema.

2.1. RIBINĖ TEOREMA TORE

Taikymuose labai svarbu žinoti išreikštinę ribinio mato formą. Ribinio mato išreikštiniam pavidalui surasti mums bus reikalingos begaliniamačio toro savybės.

Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje ir, kaip jau apibrėžėme 1 skyriuje,

$$\Omega = \prod_p \gamma_p;$$

čia $\gamma_p = \gamma$ visiems pirminiams p. Pagal Tichonovo teoremą [4], su sandaugos topologija ir pataškine daugyba begaliniamatis toras Ω yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$, kur $\mathcal{B}(\Omega)$ žymi erdvės Ω Borelio aibių klasę, egzistuoja tikimybinis Haro matas m_H. Gaunama tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Pažymėkime $\omega(p)$ elemento $\omega \in \Omega$ projekciją į koordinatinę erdvę γ_p, $p \in \mathcal{P}$, ir pratęskime funkciją $\omega(p)$ į aibę $\mathbb{N}$ formule

$$\omega(m) = \prod_{p^q \| m} \omega^q(p), \qquad m \in \mathbb{N};$$

čia $p^q \| m$ reiškia, kad $p^q | m$, bet $p^{q+1} \nmid m$.

Ribinės teoremos absoliučiai konverguojančioms eilutėms įrodymui reikalinga įrodyti diskrečiąją ribinę teoremą tore Ω.

2.1 lema. *Tegul $h > 0$ yra toks fiksuotas skaičius, kad $\exp\{\frac{2\pi r}{h}\}$ yra iracionalusis skaičius su visais $r \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Tada tikimybinis matas*

$$Q_N(A) = \mu_N\left(\left(p^{-imh} : p \in \mathcal{P}\right) \in A\right), \qquad A \in \mathcal{B}(\Omega),$$

kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_H.

Įrodymas. Apibrėžkime toro Ω dualiąją grupę

$$\mathcal{D} \stackrel{ap.}{=} \bigoplus_p \mathbb{Z}_p;$$

čia $\bigoplus$ žymi tiesioginę aibių sumą, $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}$ su kiekvienu pirminiu p. Žinoma, kad grupės $\mathcal{D}$ elementas $\underline{k} = (k_2, k_3, k_5, \ldots)$, kur tik baigtinis sveikųjų skaičių k_p, $p \in \mathcal{P}$, skaičius nėra nuliai, elgiasi grupėje Ω pagal taisyklę

$$\omega \to \omega^{\underline{k}} = \prod_p \omega^{k_p}(p).$$

Žinoma [6], jog kiekvienas matas erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ yra vienareikšmiškai apibrėžiamas jo Furjė transformacija. Taigi, mato Q_N atveju turime, jog

$$\begin{aligned} g_N(\underline{k}) &= \int_\Omega \prod_p \omega^{k_p}(p) dQ_N = \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \prod_p p^{-imhk_p} = \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \exp\left\{ -imh \sum_p k_p \log p \right\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

čia, kaip ir anksčiau, tik baigtinis sveikųjų skaičių k_p, $p \in \mathcal{P}$, skaičius yra ne nuliai. Gerai žinoma, kad sistema $\{\log p : p \in \mathcal{P}\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių $\mathbb{Q}$ kūno. Be to,

$$\prod_p p^{k_p} = \exp\left\{ \sum_p k_p \log p \right\}$$

yra racionalusis skaičius, kai

$$\exp\left\{ \frac{2\pi r}{h} \right\}$$

yra iracionalusis skaičius su visais $r \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ (pagal lemos reikalavimą). Taigi, gauname, kad

$$\exp\left\{ -ih \sum_p k_p \log p \right\} \neq 1, \qquad \underline{k} \neq \underline{0}.$$

Atsižvelgę į (2.1) lygybę gauname, jog

$$g_N(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \underline{k} = \underline{0}, \\ \frac{1}{N+1} \frac{1 - \exp\left\{ -i(N+1)h \sum_p k_p \log p \right\}}{1 - \exp\left\{ -ih \sum_p k_p \log p \right\}}, & \text{jei } \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

Iš čia seka, kad

$$\lim_{N \to \infty} g_N(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \underline{k} = \underline{0}, \\ 0, & \text{jei } \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

Pasinaudoję 1.4.2 teorema [6], gauname, kad matas Q_N, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_H (Furjė transformacijos riba sutampa su Haro matu). ▲

2.2. RIBINĖ TEOREMA ABSOLIUČIAI KONVERGUOJANČIAI EILUTEI

Tegul $\sigma_1 > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius. Pažymėkime

$$\nu_n(m) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\}, \qquad m, n \in \mathbb{N},$$

ir apibrėžkime

$$E_n\left(s; \frac{k}{l}, \alpha\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(m)\nu_n(m)}{m^s} \exp\left\{2\pi i m \frac{k}{l}\right\}, \qquad \sigma > \frac{1}{2},$$

bei

$$E_n\left(s; \frac{k}{l}, \alpha; \widehat{\omega}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(m)\nu_n(m)\widehat{\omega}(m)}{m^s} \exp\left\{2\pi i m \frac{k}{l}\right\}$$

visiems $\widehat{\omega} \in \Omega$.

Kadangi pagal (4), kai $\Re\alpha \leq 0$, įvertis $\sigma_\alpha(m) \ll m^\epsilon$ yra teisingas, nesunku pastebėti, kad eilutės $E_n\left(s; \frac{k}{l}, \alpha\right)$ ir $E_n\left(s; \frac{k}{l}, \alpha; \widehat{\omega}\right)$ konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$. Smulkiau to neaptarsime, kadangi įrodymas seka iš įrodymo, pateikto A. Laurinčiko monografijoje [9; 5 skyrius].

Pasinaudoję 1 skyriaus žymėjimais, tikimybinėje erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ apibrėžkime tikimybinius matus

$$\begin{aligned} P_{N,n,\sigma} &= \mu_N\left(E_n\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right) \in A\right), \\ \widehat{P}_{N,n,\sigma} &= \mu_N\left(E_n\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha; \widehat{\omega}\right) \in A\right). \end{aligned}$$

2.2 lema. *Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$ ir $\Re\alpha \leq 0$. Tegul $h > 0$ yra toks fiksuotas skaičius, kad $\exp\left\{\frac{2\pi r}{h}\right\}$ yra iracionalusis skaičius su visais $r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Tuomet tikimybinėje erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja tikimybinis matas $P_{n,\sigma}$, toks, kad abu matai $P_{N,n,\sigma}$ ir $\widehat{P}_{N,n,\sigma}$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į $P_{n,\sigma}$.*

2.2 lemos įrodymas remsis diskrečiąja ribine teorema tore Ω, kurią įrodėme 2.1 poskyryje.

2.2 lemos įrodymas. Apibrėžkime funkciją $u_{n,\sigma} : \Omega \to \mathbb{C}$ formule

$$u_{n,\sigma}(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(m)\omega(m)v_n(m)}{m^\sigma} \exp\left\{2\pi i m \frac{k}{l}\right\}.$$

Funkcijos $u_{n,\sigma}$ tolydumas seka iš absoliutaus eilutės konvergavimo pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$. Nesunku pastebėti, jog

$$u_{n,\sigma}\left(\left(p^{-imh} : p \in \mathcal{P}\right)\right) = E_n\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right).$$

Iš čia turime, kad $P_{N,n,\sigma} = Q_N u_{n,\sigma}^{-1}$. Remdamiesi 2.1 lema ir 5.1 teorema [1] gauname, kad matas $P_{N,n,\sigma}$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į $m_H u_{n,\sigma}^{-1}$.

Dabar apibrėžkime funkciją $\widehat{u}_{n,\sigma} : \Omega \to \mathbb{C}$ formule

$$\widehat{u}_{n,\sigma}(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(m)\widehat{\omega}(m)\omega(m)v_n(m)}{m^\sigma} \exp\left\{2\pi i m \frac{k}{l}\right\}.$$

Kaip ir prieš tai turėtu atveju gauname, kad matas $\widehat{P}_{N,n,\sigma}$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į $m_H \widehat{u}_{n,\sigma}^{-1}$. Nesunku pastebėti, jog

$$\widehat{u}_{n,\sigma}(\omega) = u_{n,\sigma}(\omega\widehat{\omega}) = u_{n,\sigma}(u(\omega));$$

čia $u(\omega) = \omega\widehat{\omega}$, $\omega \in \Omega$. Kadangi Haro matas yra invariantiškas postūmių atžvilgiu, tai

$$m_H \widehat{u}_{n,\sigma}^{-1} = m_H (u_{n,\sigma} u)^{-1} = (m_H u^{-1}) u_{n,\sigma}^{-1} = m_H u_{n,\sigma}^{-1}.$$

▲

2.3. APROKSIMAVIMAS VIDURKIU

Kad įrodytume pagrindinę teoremą, turime „pereiti“nuo funkcijos $E_n\left(s;\frac{k}{l},\alpha\right)$ prie funkcijos $E\left(s;\frac{k}{l},\alpha\right)$. Tam mums reikalingas dydžio

$$\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N}\left|E\left(\sigma+imh;\frac{k}{l},\alpha\right)-E_n\left(\sigma+imh;\frac{k}{l},\alpha\right)\right|$$

įvertis. Jei $\sigma>\frac{1}{2}$ ir $\Re\alpha\le 0$, tuomet yra žinoma [15], kad

$$\int\limits_1^T\left|E\left(\sigma+it;\frac{k}{l},\alpha\right)\right|^2dt\ll T,\qquad T\to\infty. \tag{2.2}$$

Šiuo atveju yra reikalingas (2.2) įverčio diskretus atvejis. Kad gautume tokį įvertį, pasinaudosime Galaghero (Gallagher) lema [12; 1.4 lema].

2.3 lema. *Tegul T_0 ir $T\ge\delta>0$ yra realieji skaičiai, $\mathcal{T}$ yra baigtinė aibė intervale $\left[T_0+\frac{\delta}{2},T_0-\frac{\delta}{2}\right]$ ir*

$$N_\delta(x)=\sum_{\substack{t\in\mathcal{T}\\|t-x|<\delta}}1.$$

Dar daugiau, tegul $S(x)$ yra kompleksinio kintamojo tolydi funkcija intervale $[T_0,T_0+T]$, turinti tolydžią išvestinę intervale (T_0,T_0+T). Tuomet

$$\sum_{t\in\mathcal{T}}N_\delta^{-1}|S(t)|^2\le\frac{1}{\delta}\int\limits_{T_0}^{T_0+T}|S(x)|^2dx+\left(\int\limits_{T_0}^{T_0+T}|S(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{T_0}^{T_0+T}|S'(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.4 lema. *Tarkime, kad $\sigma>\frac{1}{2},\sigma\ne 1,\sigma\ne 1+\Re\alpha$ ir jei $\alpha\ne 0,\Re\alpha\le 0$. Tuomet*

$$\sum_{m=0}^{N}\left|E\left(\sigma+imh+i\tau;\frac{k}{l},\alpha\right)\right|^2\ll N+|\tau|.$$

Įrodymas. Pritaikę Koši (Cauchy) integralinę formulę bei pasinaudoję (4), gauname, jog

$$\int\limits_1^T\left|E'\left(\sigma+it;\frac{k}{l},\alpha\right)\right|^2dt\ll T.$$

Tuomet, pasinaudoję (2.2) įverčiu bei 2.3 lema, gauname, kad

$$\sum_{m=0}^{N}\left|E\left(\sigma+imh+i\tau;\frac{k}{l},\alpha\right)\right|^2\le\frac{1}{h}\int\limits_0^{hN}\sum_{m=0}^{N}\left|E\left(\sigma+it+i\tau;\frac{k}{l},\alpha\right)\right|^2dt+$$

$$+\left(\int\limits_0^{hN}\sum_{m=0}^{N}\left|E\left(\sigma+it+i\tau;\frac{k}{l},\alpha\right)\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^{hN}\sum_{m=0}^{N}\left|E'\left(\sigma+it+i\tau;\frac{k}{l},\alpha\right)\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\ll$$

$$\ll \int_{-|\tau|}^{hN+|\tau|} \left|E\left(\sigma+it;\frac{k}{l},\alpha\right)\right|^2 dt+$$
$$+\left(\int_{-|\tau|}^{hN+|\tau|} \left|E\left(\sigma+it;\frac{k}{l},\alpha\right)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-|\tau|}^{hN+|\tau|} \left|E'\left(\sigma+it;\frac{k}{l},\alpha\right)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$
$$\ll N+|\tau|.$$

▲

2.5 lema. *Tarkime, kad* $\sigma > \frac{1}{2}$ *ir* $\Re\alpha \le 0$. *Tuomet*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \left| E\left(\sigma+imh;\frac{k}{l},\alpha\right) - E_n\left(\sigma+imh;\frac{k}{l},\alpha\right)\right| = 0.$$

Įrodymas. Tegul σ_1 toks pat kaip 2.2 poskyryje. Pažymėkime

$$l_n(s) = \frac{s}{\sigma_1}\Gamma\left(\frac{s}{\sigma_1}\right) n^s, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Tuomet, kai $\sigma > \frac{1}{2}$ [10],

$$E_n\left(s,\frac{k}{l},\alpha\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} E\left(s+z;\frac{k}{l},\alpha\right) l_n(z)\frac{dz}{z}.$$

Apibrėžkime σ_2 ($\sigma_2<\sigma$) tokiu būdu

$$\sigma_2 > \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{jei } \alpha = 0 \quad \text{ar} \quad 1+\Re\alpha-\sigma>0, \\ 1+\Re\alpha, & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Tuomet pasinaudoję reziduumų teorema gauname, kad

$$E_n\left(s;\frac{k}{l},\alpha\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-\sigma-i\infty}^{\sigma_2-\sigma+i\infty} E\left(s+z;\frac{k}{l},\alpha\right) l_n(z)\frac{dz}{z} + E\left(s;\frac{k}{l},\alpha\right) + R\left(s;\frac{k}{l},\alpha\right);$$

čia

$$R\left(s;\frac{k}{l},\alpha\right) = \begin{cases} \operatorname*{Res}_{z=1-s} E\left(s+z;\frac{k}{l},\alpha\right)\frac{l_n(z)}{z}, & \text{jei } \alpha=0, \\ \operatorname*{Res}_{z=1-s} E\left(s+z;\frac{k}{l},\alpha\right)\frac{l_n(z)}{z}+ & \\ \qquad + \operatorname*{Res}_{z=1+\alpha-s} E\left(s+z;\frac{k}{l},\alpha\right)\frac{l_n(z)}{z}, & \text{jei } 1+\Re\alpha-\sigma>0. \end{cases}$$

Iš čia seka, jog

$$\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N}\left|E\left(\sigma+imh;\frac{k}{l},\alpha\right) - E_n\left(\sigma+imh;\frac{k}{l},\alpha\right)\right| \ll$$

$$\ll \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{|l_n(\sigma_2 - \sigma - i\tau)|}{|\sigma_2 - \sigma + i\tau|} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \left| E\left(\sigma_2 + imh + i\tau; \frac{k}{l}, \alpha\right) \right| \right) d\tau +$$
$$+ \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \left| R\left(\sigma_2 - \sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right) \right|. \tag{2.3}$$

Parinkime $\sigma_2 \neq 1$ ir $\sigma_2 \neq 1 + \Re\alpha$. Tuomet pagal 2.4 lemą

$$\frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \left| E\left(\sigma_2 + imh + i\tau; \frac{k}{l}, \alpha\right) \right| \ll$$
$$\ll \frac{1}{N} \left(\sum_{m=0}^{N} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=0}^{N} \left| E\left(\sigma_2 + imh + i\tau; \frac{k}{l}, \alpha\right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$
$$\ll 1 + |\tau|. \tag{2.4}$$

Dar kartą pritaikę 2.3 lemą gauname įvertį

$$\sum_{m=0}^{N} \left| R\left(\sigma_2 - \sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right) \right| \ll \sqrt{N} \left(\sum_{m=0}^{N} \left| R\left(\sigma_2 - \sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$
$$\ll \sqrt{N} \Bigg(\int_0^{Nh} \left| R\left(\sigma_2 - \sigma + it; \frac{k}{l}, \alpha\right) \right|^2 dt +$$
$$+ \left(\int_0^{Nh} \left| R\left(\sigma_2 - \sigma + it; \frac{k}{l}, \alpha\right) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{Nh} \left| R'\left(\sigma_2 - \sigma + it; \frac{k}{l}, \alpha\right) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg)^{\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

Kadangi funkcija $l_n(s)$ turi Oilerio gama funkciją, gauname įvertį

$$\int_0^{Nh} \left| R\left(\sigma_2 - \sigma + it; \frac{k}{l}, \alpha\right) \right| dt \ll 1. \tag{2.6}$$

Pasinaudoję šiuo įverčiu ir Koši integraline formule gauname, jog

$$\int_0^{Nh} \left| R'\left(\sigma_2 - \sigma + it; \frac{k}{l}, \alpha\right) \right| dt \ll 1.$$

Tuomet iš čia, (2.5) ir (2.6) įverčių seka, jog

$$\frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \left| R\left(\sigma_2 - \sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right) \right| dt \ll \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Todėl atsižvelgę į (2.3) ir (2.4), gauname, jog

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \left| E\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right) - E_n\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right) \right| \ll$$
$$\ll \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_2 - \sigma + i\tau)|(1 + |\tau|) dt. \tag{2.7}$$

Tačiau, kadangi $\sigma_2 - \sigma < 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_2 - \sigma + i\tau)|(1 + |\tau|)dt = 0.$$

Teoremos įrodymas ir yra (2.7) įverčio išvada. ▲

Mums taip pat reikalingas 2.5 lemos analogas funkcijoms $E\left(s; \frac{k}{l}, \alpha, \omega\right)$ ir $E_n\left(s; \frac{k}{l}, \alpha, \omega\right)$.

2.6 lema. *Tegul $\sigma > \frac{1}{2}$ ir $\Re\alpha \leq 0$. Tuomet beveik visiems $\omega \in \Omega$*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \left| E\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) - E_n\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) \right| = 0.$$

Įrodymas. Yra įrodyta [10; 5 lema], kad beveik visiems $\omega \in \Omega$

$$\int_0^T \left| E\left(\sigma + it; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) \right|^2 dt \ll T.$$

Taigi, panašiai kaip ir 2.4 lemos įrodyme, gauname, kad

$$\sum_{m=0}^{N} \left| E\left(\sigma + imh + i\tau; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) \right|^2 \ll N + |\tau| \tag{2.8}$$

beveik visiems $\omega \in \Omega$.

Kadangi atsitiktiniai dydžiai $\omega(m)$, $m \in \mathbb{N}$, yra poromis ortogonalūs, tai yra

$$\mathbb{E}(\omega(m)\overline{\omega(n)}) = \begin{cases} 1, & \text{jei } m = n, \\ 0, & \text{jei } m \neq n; \end{cases}$$

čia $\mathbb{E}(X)$ žymi X vidurkį, $\overline{\omega(n)}$ – kompleksinio skaičiaus $\omega(n)$ jungtinį skaičių, tuomet

$$\mathbb{E}\left(\frac{\sigma_\alpha(m)\omega(m)}{m^\sigma} \frac{\overline{\sigma_\alpha(n)}\overline{\omega}(n)}{n^\sigma} \exp\left\{2\pi i \frac{k}{l}(m-n)\right\} \right) = \begin{cases} \frac{|\sigma_\alpha(m)|^2}{m^{2\sigma}}, & \text{jei } m = n, \\ 0, & \text{jei } m \neq n. \end{cases}$$

Atsižvelgę į (2.2), matome, jog

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E} \left| \frac{\sigma_\alpha(m)\omega(m)}{m^\sigma} \exp\left\{2\pi i m \frac{k}{l}\right\} \right|^2 \log^2 m$$

konverguoja, kai $\sigma > \frac{1}{2}$. Todėl, pagal Rademašerio (Rademacher) teoremą [12], eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(m)\omega(m)}{m^\sigma} \exp\left\{2\pi i m \frac{k}{l}\right\}$$

su fiksuotu $\sigma > \frac{1}{2}$, konverguoja beveik visiems $\omega \in \Omega$. Be to, beveik visiems $\omega \in \Omega$, eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(m)\omega(m)}{m^\sigma} \exp\left\{2\pi i m \frac{k}{l}\right\}$$

konverguoja tolygiai kompaktiniuose pusplokštumės $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\}$ poaibiuose. Taigi, beveik visiems $\omega \in \Omega$, funkcija $E\left(s; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right)$ yra analizinė srityje $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\}$. Be to, pasinaudoję išraiška

$$E_n\left(s; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} E\left(s + z; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) l_n(z) \frac{dz}{z},$$

gauname, kad, kai $\frac{1}{2} < \sigma_2 < \sigma$,

$$E_n\left(s; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1 - \sigma - i\infty}^{\sigma_1 - \sigma + i\infty} E\left(s + z; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) l_n(z) \frac{dz}{z} + E\left(s; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right)$$

beveik visiems $\omega \in \Omega$. Pasinaudojus pastarąja bei (2.7) formulėmis, įrodymas užbaigiamas tokiu pat būdu kaip ir 2.5 lemos atveju. ▲

2.4. PAGRINDINĖS TEOREMOS ĮRODYMAS

Apibrėžkime dar vieną tikimybinį matą

$$\widehat{P}_{N,\sigma} = \mu_N\left(E\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) \in A\right), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Pagrindinės teoremos įrodymui pasinaudosime dar vienu pagalbiniu rezultatu.

2.7 lema. *Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$ ir $\Re\alpha \leq 0$. Tuomet erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P_σ, kad matai $P_{N,\sigma}$ ir $\widehat{P}_{N,\sigma}$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į P_σ.*

Įrodymas. Remiantis 2.2 lema, matai

$$P_{N,n,\sigma} = \mu_N\left(E_n\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right) \in A\right), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

ir

$$\widehat{P}_{N,n,\sigma} = \mu_N\left(E_n\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) \in A\right), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į tą patį matą $P_{n,\sigma}$ pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$ $(\omega \in \Omega)$.

Remiantis Čebyševo (Chebyshev) nelygybe, galime įrodyti, jog egzistuoja toks teigiamas skaičius M, kad

$$\begin{aligned} P_{N,n,\sigma}(\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\}) &= \mu_N\left(\left|E_n\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right)\right| > M\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{M(N+1)} \sum_{m=0}^{N} \left|E_n\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right)\right|. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Kaip jau minėjome, eilutė $E_n\left(s; \frac{k}{l}, \alpha\right)$ konverguoja absoliučiai, kai $\sigma > \frac{1}{2}$. Pastaroji savybė galioja ir funkcijai $E_n'\left(s; \frac{k}{l}, \alpha\right)$. Todėl, pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_1^T \left|E_n\left(\sigma + it; \frac{k}{l}, \alpha\right)\right|^2 dt &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\sigma_\alpha(m)|^2 v_n^2(m)}{m^{2\sigma}} \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\sigma_\alpha(m)|^2}{m^{2\sigma}} < \infty \end{aligned} \tag{2.10}$$

ir

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_1^T \left|E_n'\left(\sigma + it; \frac{k}{l}, \alpha\right)\right|^2 dt &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\sigma_\alpha(m)|^2 v_n^2(m) \log^2 m}{m^{2\sigma}} \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\sigma_\alpha(m)|^2 \log^2 m}{m^{2\sigma}} < \infty. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Pasinaudoję 2.3 lema, gauname

$$\frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \left|E_n\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right)\right| \ll \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{m=0}^{N} \left|E_n\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{\sqrt{N}}\Bigg(\frac{1}{Nh}\int\limits_0^{Nh}\Big|E_n\Big(\sigma+it;\frac{k}{l},\alpha\Big)\Big|^2 dt+$$

$$+\Big(\frac{1}{N}\int\limits_0^{Nh}\Big|E_n\Big(\sigma+it;\frac{k}{l},\alpha\Big)\Big|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{N}\int\limits_0^{Nh}\Big|E_n\Big(\sigma+it;\frac{k}{l},\alpha\Big)\Big|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

Iš čia, (2.10) ir (2.11) turime, kad

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N}\left|E_n\left(\sigma+imh;\frac{k}{l},\alpha;\omega\right)\right|\leq C(h)R; \tag{2.12}$$

čia

$$R=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\sigma_\alpha(m)|^2}{m^{2\sigma}}+\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\sigma_\alpha(m)|^2}{m^{2\sigma}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\sigma_\alpha(m)|^2\log^2 m}{m^{2\sigma}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Tarkime, kad $\epsilon>0$ ir $M_\epsilon=C(h)R\epsilon^{-1}$. Tuomet iš (2.9) ir (2.12) seka, kad

$$\limsup_{N\to\infty}P_{N,n,\sigma}(\{z\in\mathbb{C}:|z|>M_\epsilon\})\leq\epsilon. \tag{2.13}$$

Apibrėžkime tolydžią funkciją $u:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, $z\to|z|$. Tuomet, remiantis 2.2 lema ir 5.1 teorema [1] turime, kad tikimybinis matas

$$\mu_N\left(\left|E_n\left(\sigma+imh;\frac{k}{l},\alpha\right)\right|\in A\right),\qquad A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

kai $N\to\infty$, silpnai konverguoja į $P_{n,\sigma}u^{-1}$ pusplokštumėje $\sigma>\frac{1}{2}$. Iš čia, (2.13) įverčio ir 2.1 teoremos [1] seka, jog

$$\begin{aligned}P_{n,\sigma}(\{z\in\mathbb{C}:|z|>M_\epsilon\}) &\leq \liminf_{N\to\infty}P_{N,n,\sigma}(\{z\in\mathbb{C}:|z|>M_\epsilon\})\leq\\ &\leq \limsup_{N\to\infty}P_{N,n,\sigma}(\{z\in\mathbb{C}:|z|>M_\epsilon\})\leq\epsilon\end{aligned} \tag{2.14}$$

visiems $n\in\mathbb{N}$. Pažymėkime $K_\epsilon=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq M_\epsilon\}$. Tokiu atveju aibė K_ϵ yra kompaktinė ir

$$P_{n,\sigma}(K_\epsilon)\geq 1-\epsilon$$

visiems $n\in\mathbb{N}$. Tai reiškia, kad tikimybinių matų šeima $\{P_{n,\sigma}:n\in\mathbb{N}\}$ yra tiršta ir, pagal Prokhorovo teoremą [1; 6.1 teorema], reliatyviai kompaktiška. Taigi, egzistuoja toks posekis $\{P_{n_k,\sigma}\}\subset\{P_{n,\sigma}\}$, kai $k\to\infty$, kad $P_{n_k,\sigma}$ silpnai konverguoja į tam tikrą matą P_σ tikimybinėje erdvėje $(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$.

Tegul θ_N yra atsitiktinis dydis, apibrėžtas tam tikroje tikimybinėje erdvėje $(\widehat{\Omega},\mathcal{B}(\widehat{\Omega}),\mathbb{P})$ su skirstiniu

$$\mathbb{P}(\theta_N=mh)=\frac{1}{N+1},\qquad m=0,1,...,N.$$

Apibrėžkime

$$X_{N,n} = X_{N,n}(\sigma) = E_n\left(\sigma + i\theta_N; \frac{k}{l}, \alpha\right)$$

ir pažymėkime $X_n = X_n(\sigma)$ kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį kintamąjį su skirstiniu $P_{n,\sigma}$. Tuomet pagal 2.2 lemą

$$X_{N,n} \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}} X_n; \tag{2.15}$$

čia $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ žymi konvergavimą pagal pasiskirstymą. Tokiu atveju

$$X_{n_k}(\sigma) \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} P_\sigma. \tag{2.16}$$

Dabar apibrėžkime atsitiktinį elementą

$$X_N(\sigma) = E\left(\sigma + i\theta_N; \frac{k}{l}, \alpha\right).$$

Atsižvelgę į 2.3 lemą, kai $\sigma > \frac{1}{2}$ ir $\epsilon > 0$, nesunkiai gauname, jog

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{P}(|X_N(\sigma) - X_{N,n}(\sigma)| \geq \epsilon) = \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mu_N\left(\left|E\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right) - E_n\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right)\right| \geq \epsilon\right) \leq \\
&\quad \leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{\epsilon(N+1)} \sum_{m=1}^{\infty} \left|E\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right) - E_n\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right)\right| = 0.
\end{aligned}$$

Iš čia, (2.15), (2.16) ir 4.2 teoremos [1] seka, kad

$$X_N(\sigma) \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}} P_\sigma. \tag{2.17}$$

Tai yra ekvivalentu mato $P_{N,\sigma}$ silpnam konvergavimui į matą P_σ.

Be to, (2.17) sąryšis parodo, kad matas P_σ yra nepriklausomas nuo sekos $\{P_{n_k,\sigma}\}$ pasirinkimo. Taigi, gauname, kad

$$X_n(\sigma) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} P_\sigma. \tag{2.18}$$

Apibrėžkime du atsitiktinius elementus

$$\widehat{X}_{N,n} = \widehat{X}_{N,n}(\sigma) = E_n\left(\sigma + i\theta_N; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right)$$

ir

$$\widehat{X}_N = \widehat{X}_N(\sigma) = E\left(\sigma + i\theta_N; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right).$$

Tuomet, mąstydami kaip ir anksčiau bei pasinaudoję 2.6 lema ir sąryšiu (2.18), randame, kad matas $\widehat{P}_{N,\sigma}$, kai $N \to \infty$, taip pat silpnai konverguoja į P_σ. ▲

Pagrindinės teoremos įrodymas. Liko identifikuoti ribinį matą P_σ. Tegul $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ yra fiksuota ribinio mato P_σ tolydumo aibė. Tuomet turime, kad

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N \left(E\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right) \in A \right) = P_\sigma(A). \tag{2.19}$$

Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ apibrėžkime atsitiktinį dydį θ formule

$$\theta = \theta(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jei } E\left(\sigma; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) \in A, \\ 0, & \text{jei } E\left(\sigma; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) \notin A. \end{cases}$$

Tuomet turime, kad

$$\mathbb{E}\theta = \int_\Omega \theta dm_H = m_H \left(\omega \in \Omega : E\left(s; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) \in A \right) = P^{\mathbb{C}}_{E,\sigma}. \tag{2.20}$$

Dabar tegul $a_h = \{p^{-ih} : p \in \mathcal{P}\}$. Apibrėžkime transformaciją f_h aibėje Ω lygybe $f_h(\omega) = a_h\omega$, $\omega \in \Omega$. Nesunku įrodyti, jog transformacija f_h yra ergodinė. Tuomet pagal klasikinę Birchofo-Chinčino teoremą [8] gauname, kad

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \theta\left(f_h^m(\omega)\right) = \mathbb{E}\theta \tag{2.21}$$

beveik visiems $\omega \in \Omega$. Tačiau pagal f_h apibrėžimą turime, kad

$$\frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \theta\left(f_h^m(\omega)\right) = \mu_N \left(E\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) \in A \right).$$

Iš čia, (2.20) ir (2.21) įverčių gauname, kad

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N \left(E\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) \in A \right) = P^{\mathbb{C}}_{E,\sigma}(A).$$

Remdamiesi (2.19) įrodome, jog $P_\sigma(A) = P^{\mathbb{C}}_{E,\sigma}(A)$ bet kokioms mato P_σ tolydumo aibėms. Kadangi šios aibės sudaro determinuojančią klasę, gauname, kad $P_\sigma(A) = P^{\mathbb{C}}_{E,\sigma}(A)$ visoms aibėms $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

Teorema įrodyta. ▲

IŠVADOS

Magistro darbe nagrinėtas Estermano dzeta funkcijos reikšmių pasiskirstymas. Įrodyta diskreti ribinė teorema silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme Estermano dzeta funkcijai kompleksinėje plokštumoje. Gauti rezultatai gali būti pritaikyti jungtiniam Estermano dzeta funkcijų rinkinio reikšmių pasiskirstymui nagrinėti.

LITERATŪRA

1. P. Billingsley. *Convergence of probability measures.* New York: Wiley, 1968.
2. J. B. Conrey, A. Ghosh. On the Selberg class of Dirichlet series: small degrees. *Duke Math. J.*, 1993, **72**: 673–693.
3. H. Cramer, M. R. Leadbetter. *Stacionary and related stochastic process.* New York: Wiley, 1967.
4. T. Estermann. On the representation of a number as the sum of two products. *Proc. London Math. Soc.*, 1930, **31**: 123–133.
5. R. Garunkštis, A. Laurinčikas, R. Šleževičienė, J. Steuding. On the universality of Estermann zeta-functions. *Analysis*, 2002, **22**: 285–296.
6. H. Heyer. *Probability measures on locally compact groups.* Berlin: Springer-Verlag, 1977.
7. I. Kiuchi. On an exponentials sum involving the arithmetic function $\sigma_a(n)$. *Math. J. Okayma Univ.*, 1987, **29**: 193–205.
8. U. Krengel. *Ergodic theorems.* Berlin: Walter de Gruyter, 1985.
9. A. Laurinčikas. *Limit theorems for the Riemann zeta-function.* Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1996.
10. A. Laurinčikas. Limit theorems for the Estermann zeta-function. I. *Statist. Probab. Lett.*, 2005, **72**: 227–237.
11. A. Laurinčikas. Limit theorems for the Estermann zeta-function. II. *Cent. Eur. J. Math.*, 2005, **3(4)**: 580–590.
12. A. Laurinčikas, R. Macaitienė. Discrete limit theorems for Estermann zeta-functions. *Algebra and Discrete Mathematics*, 2008, **3**: 69–83.
13. A. Laurinčikas, R. Macaitienė. Limit theorems for the Estermann zeta-functions. *Chebyshevsky Sbornik*, 2007, **8**: 148–161.
14. H. L. Montgomery. *Topics in multiplicative number theory.* Berlin: Springer-Verlag, 1971.

15. R. Šleževičienė, J. Steuding. On the zeros of the Estermann zeta-function. *Integral transforms and special functions*, 2002, **13**: 363–371.

16. R. Šleževičienė, J. Steuding. *The mean-square of the Estermann zeta-function*. Vilnius: Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, Preprint 2002-32, 2002.

Diskreti ribinė teorema Estermano dzeta funkcijoms

SANTRAUKA

Magistro darbe išnagrinėtas Estermano dzeta funkcijų diskretus reikšmių pasiskirstymas.

Tolydaus tipo rezultatus, kai tikimybiniai matai apibrėžti naudojant postūmius, kintančius tolydžiai intervale $[0, T]$, pateikė profesorius Antanas Laurinčikas.

Magistro darbo tikslas – įrodyti diskrečiąją ribinę teoremą Estermano dzeta funkcijai kompleksinėje plokštumoje, kai postūmiai įgyja reikšmes iš tam tikros diskrečios aibės.

Tarkime, kad α yra kompleksinis skaičius, o $\sigma_\alpha(m)$ apibendrintoji daliklių funkcija

$$\sigma_\alpha(m) = \sum_{d|m} d^\alpha, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Jei $\alpha = 0$, tada $\sigma_\alpha(m)$ tampa daliklių funkcija

$$\sigma_0(m) = d(m) = \sum_{d|m} 1.$$

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, k ir l – tarpusavyje pirminiai skaičiai. Estermano dzeta funkcija $E\left(s; \frac{k}{l}, \alpha\right)$ su parametrais α ir $\frac{k}{l}$ pusplokštumėje $\sigma > \max(1, 1+\Re\alpha)$ apibrėžiama eilute

$$E\left(s; \frac{k}{l}, \alpha\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(m)}{m^s} \exp\left\{2\pi i m \frac{k}{l}\right\}$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus taškus $s = 1$ ir $s = 1 + \alpha$ (paprastieji poliai), kai $\alpha \neq 0$, ir tašką $s = 1$ (antros eilės polius), kai $\alpha = 0$.

Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje ir

$$\Omega = \prod_p \gamma_p;$$

čia $\gamma_p = \gamma$ visiems pirminiams p. Pagal Tichonovo teoremą, su sandaugos topologija ir pataškine daugyba begaliniamatis toras Ω yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$, kur $\mathcal{B}(\Omega)$ žymi erdvės Ω Borelio aibių klasę, egzistuoja tikimybinis Haro matas m_H. Gaunama tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Pažymėkime $\omega(p)$ elemento $\omega \in \Omega$ projekciją į koordinatinę erdvę γ_p, $p \in \mathcal{P}$, ir pratęskime funkciją $\omega(p)$ į aibę $\mathbb{N}$ formule

$$\omega(m) = \prod_{p^q \| m} \omega^q(p), \qquad m \in \mathbb{N};$$

čia $p^q \| m$ reiškia, kad $p^q | m$, bet $p^{q+1} \nmid m$.

Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžkime kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį elementą

$$E\left(\sigma; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(m)\omega(m)}{m^\sigma} \exp\left\{2\pi i m \frac{k}{l}\right\}, \qquad \sigma > \frac{1}{2},$$

ir $P^{\mathbb{C}}_{E,\sigma}$ pažymėkime jo skirstinį

$$P^{\mathbb{C}}_{E,\sigma}(A) = m_H\left(\omega \in \Omega : E\left(\sigma; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) \in A\right), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Pagrindinė teorema. *Tarkime, kad* $\sigma > \frac{1}{2}$ *ir* $\Re\alpha \leq 0$. *Be to, tegul* $h > 0$ *yra toks fiksuotas skaičius, kad* $\exp\left\{\frac{2\pi r}{h}\right\}$ *yra iracionalusis skaičius su visais* $r \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$. *Tuomet tikimybinis matas*

$$\frac{1}{N+1} \sharp \left\{0 \leq m \leq N : E\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $N \to \infty$, *silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento skirstinį* $P^{\mathbb{C}}_{E,\sigma}$.

***h* pavyzdys.** $h = 2\pi$.

Discrete limit theorem for the Estermann zeta-functions

SUMMARY

In the master thesis, the discrete value distribution of the Estermann zeta-functions has been investigated.

Some results of continuous type, when the measures are defined by shifts that can take arbitrary real values in the interval $[0, T]$, were obtained by professor Antanas Laurinčikas.

The aim of this thesis – to obtain a discrete limit theorem on the complex plane for the Estermann zeta-function, when shifts take values from some discrete set.

For arbitrary $\alpha \in \mathbb{C}$ and $m \in \mathbb{N}$, the generalized divisor function $\sigma_\alpha(m)$ is defined by

$$\sigma_\alpha(m) = \sum_{d|m} d^\alpha, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

If $\alpha = 0$, then $\sigma_\alpha(m)$ becomes the divisor function

$$\sigma_0(m) = d(m) = \sum_{d|m} 1.$$

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable, and k and l be coprime integers. For $\sigma > \max(1, 1 + \Re\alpha)$, Estermann zeta-function $E\left(s; \frac{k}{l}, \alpha\right)$ with parameters α and $\frac{k}{l}$ is defined by

$$E\left(s; \frac{k}{l}, \alpha\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(m)}{m^s} \exp\left\{2\pi i m \frac{k}{l}\right\}$$

The function $E\left(s; \frac{k}{l}, \alpha\right)$ is analytically continuable to the whole complex plane, except for two simple poles at $s = 1$ and $s = 1 + \alpha$ if $\alpha \neq 0$, and a double pole at $s = 1$ if $\alpha = 0$.

Let $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ be the unit circle on the complex plane,

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

where $\gamma_p = \gamma$ for each prime p. By the Tikhonov theorem, with the product topology and pointwise multiplication, the infinite-dimensional torus Ω is a compact topological Abelian group. Therefore, on $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$, where $\mathcal{B}(\Omega)$ denotes the class of Borel sets of the space Ω, the probability Haar measure m_H can be defined, and this leads to a probability space $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Denote by $\omega(p)$ the projection of $\omega \in \Omega$ to the coordinate space γ_p, $p \in \mathcal{P}$. We extend the function $\omega(p)$ to the set $\mathbb{N}$ by the formula

$$\omega(m) = \prod_{p^q \| m} \omega^q(p), \qquad m \in \mathbb{N},$$

where $p^q \| m$ means that $p^q | m$ but $p^{q+1} \nmid m$. Now on the probability space $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ we define, for $\sigma > \frac{1}{2}$, the complex-valued random element $E\left(\sigma; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right)$ by the series

$$E\left(\sigma; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(m)\omega(m)}{m^\sigma} \exp\left\{2\pi i m \frac{k}{l}\right\},$$

and denote by $P^{\mathbb{C}}_{E,\sigma}$ its distribution, i. e.,

$$P^{\mathbb{C}}_{E,\sigma}(A) = m_H\left(\omega \in \Omega : E\left(\sigma; \frac{k}{l}, \alpha; \omega\right) \in A\right), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Main theorem. *Suppose that* $\sigma > \frac{1}{2}$ *and* $\Re\alpha \leq 0$. *Moreover, let* $h > 0$ *be a fixed number such that* $\exp\left\{\frac{2\pi r}{h}\right\}$ *is irrational for all* $r \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. *Then the probability measure*

$$\frac{1}{N+1}\sharp\left\{0 \leq m \leq N : E\left(\sigma + imh; \frac{k}{l}, \alpha\right) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

converges weakly to $P^{\mathbb{C}}_{E,\sigma}$ as $N \to \infty$.

Example of *h*. $h = 2\pi$.