ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS

TECHNOLOGIJOS, FIZINIŲ IR BIOMEDICINOS MOKSLŲ FAKULTETAS

MATEMATIKOS KATEDRA

Sandra Rapimbergaitė

(Matematikos studijų programa, valstybinis kodas: 621G10006)

Rymano dzeta funkcijos ir periodinių Hurvico dzeta funkcijų funkcinis nepriklausomumas

Magistro darbas

Darbo vadovė

prof. dr. Roma Kačinskaitė

Šiauliai, 2016

Patvirtinu, kad magistro darbas yra originalus, neturintis plagiato požymių.

....

(Parašas) (Vardas ir pavardė) (Data)

Turinys

Žymėjimai

p	– pirminis skaičius
k, l, m, n, r	– natūralieji skaičiai
$\mathbb{N}$	– natūraliųjų skaičių aibė
$\mathbb{N}_0$	– neneigiamų sveikųjų skaičių aibė
$\mathbb{Z}$	– sveikųjų skaičių aibė
$\mathbb{P}$	– pirminių skaičių aibė
$\mathbb{Q}$	– racionaliųjų skaičių aibė
$\mathbb{R}$	– realiųjų skaičių aibė
$\mathbb{C}$	– kompleksinių skaičių aibė
i	– menamasis vienetas, $i = \sqrt{-1}$
$s = \sigma + it$	– kompleksinis kintamasis
$H(D)$	– analizinių funkcijų srityje D erdvė
$A \times B$	– aibių A ir B Dekarto sandauga
$\mathcal{B}(S)$	– erdvės S Borelio aibių klasė
m_H	– Haro matas
$\Gamma(s)$	– Oilerio gama funkcija pusplokštumėje $\sigma > 0$ apibrėžiama
	$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ ir analiziškai pratęsiama į visą s plokštumą
$\zeta(s)$	– Rymano dzeta funkcija
$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$	– periodinė Hurvico dzeta funkcija
$f^{(l)}(x)$	– funkcijos $f(x)$ l-osios eilės išvestinė

Įvadas

Funkcinio, tam tikrų funkcijų, nepriklausomumo tyrimo problema turi pakankamai ilgą istoriją bei yra aktualus ir šių dienų uždavinys.

$s = \sigma + it$ pažymėkime kompleksinį kintamąjį, o $\mathbb{P}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ atitinkamai tegul yra pirminių, natūraliųjų, neneigiamų sveikųjų, sveikųjų, racionaliųjų, realiųjų ir kompleksinių skaičių aibės.

Sakome, kad funkcijos $f_1(s), ..., f_m(s)$ yra funkciškai nepriklausomos, jei bet kurioms tolydžioms funkcijoms $F_0, F_1, ..., F_n : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ funkcija

$$\sum_{j=0}^{n} s^j F_j(f_1(s), ..., f_m(s))$$

nelygi nuliui su $s \in \mathbb{C}$.

1887 m. O. Hiolderis (Hölder) įrodė gama funkcijos $\Gamma(s)$ algebrinį diferencialinį nepriklausomumą, t.y., kad nėra tokio polinomo $P \not\equiv 0$, kad

$$P\Big(s, \Gamma(s), \Gamma'(s), ..., \Gamma^{(n-1)}(s)\Big) = 0$$

su visais $s \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Pirmą kartą dzeta funkcijų funkcinio nepriklausomumo problemą 1900 m. suformulavo D. Hilbertas (Hilbert) [4]. Jis iškėlė hipotezę, kad Rymano (Riemann) dzeta funkcija $\zeta(s)$ netenkina jokios algebrinės diferencialinės lygties.

Priminsime, kad dzeta funkcijos – tai kompleksinio kintamojo s funkcijos, kurios tam tikroje pusplokštumėje yra apibrėžiamos Dirichlė eilutėmis

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s};$$

čia $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra kompleksinių skaičių a_m seka ir $\{\lambda_m : m \in \mathbb{N}\}$ – griežtai didėjanti realiųjų skaičių seka, $\lambda_m \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_m = \infty$.

Taip pat D. Hilbertas pasiūlė nagrinėti bendresnį atvejį, t. y. eilutę

$$\zeta(s, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m^s},$$

kuri netenkina jokios algebrinės diferencialinės lygties. 1920 m. šį uždavinį išsprendė A. Ostrovskis (Ostrowski) [12]. Vėliau Hilberto problemą apibendrino A.G. Postnikovas

(Postnikov) [13, 14].

1973 m. S.M. Voroninas (Voronin) gavo Rymano dzeta funkcijos funkcinį nepriklausomumą [17]. Jis įrodė, kad funkcija $\zeta(s)$ netenkina jokios diferencialinės lygties

$$\sum_{j=0}^{n} s^j F_j\Big(\zeta(s), \zeta'(s), ..., \zeta^{(N-1)}(s)\Big) \equiv 0;$$

čia F_j yra tolydi funkcija, $j = 1, ..., n$, ir ne visos jos tapačiai lygios nuliui.

S.M. Voronino rezultatą apibendrino R. Garunkštis, A. Laurinčikas, K. Matsumoto, H. Mišu (Mishou), J. Štoidingas (Steuding) ir daugelis kitų matematikų (žr. [8, 16]).

Mišrus jungtinis dzeta funkcijų funkcinis nepriklausomumas pirmą kartą buvo gautas 2007 m. H. Mišu Rymano dzeta ir Hurvico (Hurwitz) dzeta funkcijoms [11]. Vėliau R. Kačinskaitė ir A. Laurinčikas apibendrino šį rezultatą Hurvico dzeta ir periodinei Hurvico dzeta funkcijoms [6].

Šiame darbe nagrinėsime Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ ir periodinės Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ funkcinį nepriklausomumą. Pagrindinių darbo teoremų formuluotes pateiksime trečiame skyriuje.

Magistro darbas sudarytas iš 4 pagrindinių skyrių. Pirmasis skirtas Rymano dzeta funkcijos, antrasis – periodinės Hurvico dzeta funkcijos apibrėžimams bei kai kurioms savybėms. Trečiąjame formuluojame pagrindines darbo teoremas. Ketvirtasis skyrius skirtas šių teoremų įrodymui, t. y. įrodomas funkcinis rinkinių ($\zeta(s)$, $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$) ir ($\zeta(s)$, $\zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_1)$, $\zeta(s, \alpha_2; \mathfrak{a}_2)$) nepriklausomumas.

1. Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$

Kadangi viena iš mūsų rinkinyje esančių funkcijų yra Rymano dzeta funkcija, pirmiausiai pateiksime jos apibrėžimą ir paminėsime kai kurias šios funkcijos savybes.

Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

1859 m. ją apibrėžė B. Rymanas [15]. Kai $\sigma > 1$, funkciją $\zeta(s)$ galima užrašyti Oilerio (Euler) sandauga pagal pirminius skaičius, t. y.

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1};$$

čia p yra pirminis skaičius.

Funkcija $\zeta(s)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą $\mathbb{C}$, o taškas $s = 1$ yra jos paprastasis polius su reziduumu 1. Ši funkcija tenkina funkcinę lygtį

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s)\zeta(1-s);$$

čia $\Gamma(s)$ yra gama funkcija, kuri pusplokštumėje $\sigma > 0$ apibrėžiama lygybe

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

ir analiziškai pratęsiama į visą s-plokštumą.

Vis dar neįrodyta Rymano hipotezė teigia, kad visi funkcijos $\zeta(s)$ nuliai yra išsidėstę kritinės juostos $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \sigma < 1\}$ tiesėje $\sigma = \frac{1}{2}$.

Priminsime, kad Rymano dzeta funkcijos statistinių savybių tyrimą pradėjo H. Boras (Bohr) 1910 m. (žr. [1, 2]), o vėliau buvo tęsiama daugelio matematikų (žr. [10]). S.M. Voroninas įrodė [18] Rymano dzeta funkcijos universalumo savybę, kuri teigia, kad bet kuri analizinė funkcija gali būti tolygiai aproksimuojama $\zeta(s)$ postūmiais.

2. Periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$

Kita mūsų darbe nagrinėjama funkcija yra periodinė Hurvico dzeta funkcija. Ją 2006 m. apibrėžė A. Laurinčikas ir A. Javtokas [5].

Sakykime, kad $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių a_m seka su periodu $k \in \mathbb{N}$. Periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ su fiksuotu parametru α, $0 < \alpha \leq 1$, pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m+\alpha)^s}.$$

Jeigu $a_m \equiv 1$, tai gauname klasikinę Hurvico dzeta funkciją $\zeta(s, \alpha)$, t. y.

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}, \qquad \sigma > 1.$$

Iš sekos $\mathfrak{a}$ periodiškumo seka, kad

$$\begin{aligned} \zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}) &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_r}{(mk + r + \alpha)^s} = \frac{1}{k^s} \sum_{r=0}^{k-1} a_r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(m + \left(\frac{r+\alpha}{k}\right)\right)^s} = \\ &= \frac{1}{k^s} \sum_{r=0}^{k-1} a_r \zeta\left(s; \frac{r+\alpha}{k}\right), \qquad \sigma > 1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Gerai žinoma, kad Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ yra analiziškai pratęsiama į visą s-plokštumą išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu 1. Todėl iš (2.1) lygybės seka, kad periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ taip pat yra analizinė visoje s-plokštumoje išskyrus galbūt paprastąjį polių $s = 1$ su reziduumu

$$a := \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} a_r.$$

Jeigu $a = 0$, tai funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ yra analizinė visoje baigtinėje s-plokštumoje, t. y. ji yra sveikoji funkcija.

Hurvico dzeta funkcijos statistinės savybės priklauso nuo parametro α prigimties. Pavyzdžiui, kai parametras $\alpha = 1$ ir $\mathfrak{a} \equiv 1$, tai $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ tampa Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$.

3. Pagrindinių darbo teoremų formuluotės

Šiame skyriuje suformuluosime pagrindines darbo teoremas.

Pirmoji iš jų skirta Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ ir periodinės Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ jungtiniam funkciniam nepriklausomumui.

Priminsime, kad skaičius α yra vadinamas *transcendenčiuoju*, jeigu jis nėra jokio polinomo su racionaliaisiais koeficientais šaknis, $\pi \approx 3,14159...$ ir $e \approx 2,71828...$ yra labiausiai žinomi transcendentalūs skaičiai.

1 teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, $0 < \alpha \le 1$. Tegul $F_l : \mathbb{C}^{2N} \to \mathbb{C}$ yra tolydi funkcija su kiekvienu $l = 0,1,...,n$, $N \in \mathbb{N}$ ir*

$$\sum_{l=0}^{n} s^l \cdot F_l\Big(\zeta(s), \zeta'(s), ..., \zeta^{(N-1)}(s), \zeta(s,\alpha;\mathfrak{a}), \zeta'(s,\alpha;\mathfrak{a}), ..., \zeta^{(N-1)}(s,\alpha;\mathfrak{a})\Big) \equiv 0.$$

Tada $F_l \equiv 0$, $l = 0,1,...,n$.

Antroji darbo teorema skirta Rymano dzeta funkcijos ir dviejų periodinių Hurvico dzeta funkcijų su atitinkamai skirtingais parametrais α_1 bei α_2, ir skirtingomis periodinėmis sekomis $\mathfrak{a}_1$ ir $\mathfrak{a}_2$ jungtiniam funkciniam nepriklausomumui.

Priminsime, kad skaičiai α_1 ir α_2 yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$, jei negalime rasti tokio polinomo $p(x_1,x_2) \not\equiv 0$ su racionaliaisiais koeficientais, kad $p(\alpha_1,\alpha_2) = 0$.

2 teorema. *Sakykime, kad α_1 ir α_2 yra algebriškai nepriklausomi virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. Tegul $F_l : \mathbb{C}^{3N} \to \mathbb{C}$ yra tolydi funkcija, $l = 0,1,...,n$, $N \in \mathbb{N}$. Tegul*

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{n} s^l \cdot F_l\Big(& \zeta(s), \zeta'(s), ..., \zeta^{(N-1)}(s),\\ & \zeta(s,\alpha_1;\mathfrak{a}_1), \zeta'(s,\alpha_1;\mathfrak{a}_1), ..., \zeta^{(N-1)}(s,\alpha_1;\mathfrak{a}_1),\\ & \zeta(s,\alpha_2;\mathfrak{a}_2), \zeta'(s,\alpha_2;\mathfrak{a}_2), ..., \zeta^{(N-1)}(s,\alpha_2;\mathfrak{a}_2)\Big)\end{aligned}$$

tapačiai lygi nuliui. Tada $F_l \equiv 0$ su visais $l = 0,...,n$.

4. Mišraus jungtinio funkcinio nepriklausomumo įrodymas

Šiame skyriuje pateiksime mišraus jungtinio funkcinio nepriklausomumo įrodymus rinkiniams $(\zeta(s),\ \zeta(s,\alpha;\mathfrak{a}))$ ir $(\zeta(s),\ \zeta(s,\alpha_1;\mathfrak{a}_1),\ \zeta(s,\alpha_2;\mathfrak{a}_2))$. Dzeta funkcijų funkcinis nepriklausomumas yra įrodomas remiantis šių funkcijų universalumo savybe. Pastarajam rezultatui gauti reikia ribinių teoremų silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme analizinių funkcijų erdvėje. Taip pat naudojama tirštumo lema. Todėl, pateikdami mūsų nagrinėjamų rinkinių funkcinio nepriklausomumo įrodymą, suformuluosime minėtus teiginius ir pateiksime jų įrodymus.

4.1. $\zeta(s)$ ir $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ funkcinis nepriklausomumas

Nagrinėsime Rymano dzeta $\zeta(s)$ ir periodinės Hurvico dzeta $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ funkcijų rinkinį.

4.1.1. Mišri jungtinė ribinė teorema Rymano dzeta ir periodinei Hurvico dzeta funkcijoms

$\mathcal{B}(S)$ pažymėkime aibės S Borelio aibių klasę. Tarkime, kad G yra bet kokia atvira aibė kompleksinėje plokštumoje, o $H(G)$ – analizinių funkcijų aibėje G erdvė su tolygaus konvergavimo topologija. Priminsime, kad šioje topologinėje struktūroje seka $\{g_n(s), n \in \mathbb{N}\} \subset H(G)$ konverguoja į funkciją $g(s) \in H(G)$, jei kiekvienam kompaktiškam poaibiui $K \subset D$

$$\lim \sup_{s\in K} |g_n(s) - g(s)| = 0.$$

Tuomet egzistuoja aibės G kompaktiniai poaibiai $\{K_l; l \in \mathbb{N}\}$ tokie, kad $K_1 \subset K_2 \subset ...$, $G = \cup_{l=1}^{\infty} K_l$, ir bet kuriam kompaktiniam poaibiui $K \subset G$ egzistuoja l, su kuriuo $K \subset K_l$. Todėl erdvėje $H(G)$ galime apibrėžti metriką tokiu būdu

$$\rho(f,g) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup_{s\in K_l} |f(s) - g(s)|}{1 + \sup_{s\in K_l} |f(s) - g(s)|};$$

čia $f, g \in H(G)$.

Sakykime, kad γ yra vienetinis kompleksinės plokštumos apskritimas, t. y. $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. Apibrėžkime torą

$$\Omega_1 = \prod_{p\in\mathbb{P}} \gamma_p; \tag{4.1}$$

čia $\gamma_p = \gamma$ visiems p. Su sandaugos topologija ir pataškine daugyba Ω_1 yra kompaktiška topologinė grupė, kurioje egzistuoja Haro matas m_{1H} toks, kad $m_{1H}(\Omega_1) = 1$. Todėl galime apibrėžti tikimybinę erdvę $(\Omega_1, \mathcal{B}(\Omega_1), m_{1H})$. $\omega_1(p)$ pažymėkime elemento $\omega_1 \in \Omega_1$ projekciją į koordinatinę erdvę γ_p. Kiekvienam $k \in \mathbb{N}$ projekciją $\omega_1(k)$ apibrėžkime formule

$$\omega_1(k) = \prod_{j=1}^{r} \omega_1(p_j)^{\gamma_j},$$

kai k galima išskaidyti pirminiais daugikliais $k = p_1^{\gamma_1} \cdots p_r^{\gamma_r}$.

Apibrėžkime funkciją

$$\zeta(s, \omega_1) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{\omega_1(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Tuomet $\zeta(s, \omega_1)$ konverguoja beveik tikrai tolygiai bet kuriame pusplokštumės $D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\}$ kompaktiniame poaibyje. Be to $\zeta(s, \omega_1)$ yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas erdvėje $(\Omega_1, \mathcal{B}(\Omega_1), m_{1H})$ (žr. [8]).

Dabar tegul

$$\Omega_2 = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m, \tag{4.2}$$

čia $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathbb{N}_0$. Kaip ir Rymano dzeta funkcijai, Ω_2 yra kompaktiška topologinė grupė su sandaugos topologija ir pataškine daugyba, kurioje galime apibrėžti Haro matą m_{2H}. Taip gauname tikimybinę erdvę $(\Omega_2, \mathcal{B}(\Omega_2), m_{2H})$. Apibrėžkime

$$\zeta(s, \alpha, \omega_2; \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m \omega_2(m)}{(m+\alpha)^s}; \tag{4.3}$$

čia $\omega_2(m)$ yra elemento $\omega_2 \in \Omega_2$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_m. Kadangi periodinė seka $\mathfrak{a}$ yra aprėžta, (4.3) eilutė konverguoja beveik visur tolygiai bet kuriame D kompaktiniame poaibyje, todėl ji apibrėžia $H(D)$-reikšmį atsitiktinį elementą erdvėje $(\Omega_2, \mathcal{B}(\Omega_2), m_{2H})$.

Tegul $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, o m_H yra tikimybinis Haro matas apibrėžtas matų m_{1H} ir m_{2H} sandauga. Pažymėkime $H^2(D) = H(D) \times H(D)$. Apibrėžkime $H^2(D)$-reikšmį atsitiktinį elementą erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$

$$\underline{\zeta}(s, \omega) = (\zeta(s, \omega_1), \zeta(s, \alpha, \omega_2; \mathfrak{a}));$$

čia $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$.

$P_{\underline{\zeta}}$ pažymėkime $H^2(D)$-reikšmio atsitiktinio elemento $\underline{\zeta}(s,\omega)$ skirstinį, t. y.

$$P_{\underline{\zeta}}(A) = m_H\{\omega \in \Omega : \underline{\zeta}(s,\omega) \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}(H^2(D)).$$

$\text{meas}\{A\}$ pažymėkime mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą ir imkime $T > 0$. Tada teisinga tokia mišri jungtinė ribinė teorema Rymano dzeta ir periodinei Hurvico dzeta funkcijoms silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme analizinių funkcijų erdvėje.

3 teorema. *Sakykime, kad α yra transcendentusis skaičius, $0 \le \alpha < 1$. Tada, kai $T \to \infty$,*

$$\frac{1}{T}\text{meas}\{\tau \in [0,T] : \underline{\zeta}(s+i\tau,\omega) \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}(H^2(D)),$$

silpnai konverguoja į $P_{\underline{\zeta}}(A)$.

Įrodymas. Kadangi Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$ yra atskiras periodinės dzeta funkcijos atvejis, tai šios teoremos įrodymas pilnai sutampa su 6 teoremos iš [6] įrodymu. Taip pat, jos analogą galima rasti [7] (2.1 teorema). □

4.1.2. Mišri jungtinė universalumo teorema Rymano dzeta ir periodinei Hurvico dzeta funkcijoms

Kitas svarbus teiginys reikalingas funkcinio nepriklausomumo įrodyme – mišri jungtinė universalumo teorema rinkiniui $(\zeta(s), \zeta(s,\alpha;\mathfrak{a}))$.

Nagrinėkime kompaktinę aibę $K \subset \mathbb{C}$. $H^c(K)$ pažymėkime aibę kompleksines reikšmes įgyjančių funkcijų, tolydžių toje aibėje ir analizinių aibės K viduje, o $H_0^c(K)$ aibės $H^c(K)$ poaibį, kurį sudaro nenuliniai aibėje K aibės $H^c(K)$ elementai.

Kaip ir praėjusiame poskyryje D žymime kompleksinės plokštumos $\mathbb{C}$ juostą $\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$. Tada rinkiniui $\big(\zeta(s), \zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})\big)$ teisinga tokia mišri jungtinio universalumo teorema.

4 teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius. Tegul K_1 ir K_2 yra juostos D kompaktiniai poaibiai turintys jungiuosius papildinius. Sakykime, kad $f_1 \in H_0^c(K_1)$, o $f_2 \in H^c(K_2)$. Tada kiekvienam $\varepsilon > 0$ teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\Big\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s\in K_2} |\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) - f_2(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Įrodymas. Kaip ir 3 teoremos atveju, šio teiginio įrodymas yra analogiškas 4 teoremos iš [6] įrodymui. □

4 teoremoje esanti nelygybė parodo, kad Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ ir periodinės Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$, kuriomis atitinkamai aproksimuojamos funkcijos $f_1(s)$ ir $f_2(s)$, postūmių aibė yra pakankamai turtinga, t. y. ji turi teigiamą apatinį tankį.

Priminsime, kad pirmasis mišrųjį universalumą funkcijoms $\zeta(s)$ ir $\zeta(s,\alpha)$ gavo H. Mišu [11]. Vėliau R. Kačinskaitė ir A. Laurinčikas ją apibendrino periodinei dzeta ir periodinei Hurvico dzeta funkcijoms [6]. Toliau buvo gautas kitų dzeta funkcijų mišrus universalumas. Šių rezultatų išsamią apžvalgą galima rasti K. Matsumoto straipsnyje „A survey on the theory of universality for zeta and L-functions“ [9].

4.1.3. Tirštumo lema

Kitas žingsnis funkcinio nepriklausomumo įrodyme – tirštumo lema.

Apibrėžkime funkciją $u:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^{2N}$ formule

$$\begin{aligned} u(t) \;=\Big(\;& \zeta(\sigma+it),\zeta'(\sigma+it),...,\zeta^{(N-1)}(\sigma+it),\\ & \zeta(\sigma+it,\alpha;\mathfrak{a}),\zeta'(\sigma+it,\alpha;\mathfrak{a}),...,\zeta^{(N-1)}(\sigma+it,\alpha;\mathfrak{a})\Big); \end{aligned}$$

čia $\frac{1}{2}<\sigma<1$.

1 lema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius. Tuomet atvaizdis $u(\mathbb{R})$ yra tirštas erdvėje $\mathbb{C}^{2N}$.*

Įrodymas. Kaip ir prieš tai buvusioms 3 ir 4 teoremoms, ši lema įrodoma kaip ir 13 lema iš [6]. □

4.1.4. 1 teoremos įrodymas

Dabar įrodysime mišraus jungtinio Rymano dzeta ir periodinės Hurvico dzeta funkcijų funkcinį nepriklausomumą, t. y. remiantis anksčiau pateiktais pagalbiniais rezultatais (3 ir 4 teoremomis bei 1 lema) įrodysime pirmąjį mūsų darbo tvirtinimą – 1 teoremą.

Pirmiausiai įrodysime, kad $F_l\equiv 0$, $l=0,...,n$.

Nagrinėkme bendresnį atvejį, vietoje F_j imkime tolydžią funkciją $F:\mathbb{C}^{2N}\to\mathbb{C}$, t. y.

$$F\big(\zeta(s),\zeta'(s),...,\zeta^{(N-1)}(s),\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a}),\zeta'(s,\alpha;\mathfrak{a}),...,\zeta^{(N-1)}(s,\alpha;\mathfrak{a})\big)\equiv 0.$$

Įrodysime, kad $F \equiv 0$.

Tarkime priešingai, t. y., kad $F \not\equiv 0$. Tada egzistuoja taškas

$$\underline{a} := (a_{10}, a_{11}, ..., a_{1,N-1}, a_{20}, a_{21}, ..., a_{2,N-1}) \in \mathbb{C}^{2N}$$

toks, kad $F(\underline{a}) \neq 0$. Kadangi funkcija F yra tolydi, tai galima rasti aprėžtą sritį $G \subset \mathbb{C}^{2N}$, $\underline{a} \in G$, ir tokią, kad su visais $\underline{s} \in G$ būtų teisinga nelygybė

$$|F(\underline{s})| \geq c > 0. \tag{4.4}$$

Pagal 1 lemą egzistuoja tokios t reikšmės, kad

$$\begin{aligned}\big(\quad & \zeta(\sigma + it), \zeta'(\sigma + it), ..., \zeta^{(N-1)}(\sigma + it), \\ & \zeta(\sigma + it, \alpha; \mathfrak{a}), \zeta'(\sigma + it, \alpha; \mathfrak{a}), ..., \zeta^{(N-1)}(\sigma + it, \alpha; \mathfrak{a})\big) \in G,\end{aligned}$$

o $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Tačiau pastarasis sąryšis kartu su (4.4) prieštarauja prielaidai, kad $F \not\equiv 0$.

Taikant šį principą galima įrodyti, kad ir kiekviena funkcija $F_l \not\equiv 0$, $l = 0, ..., n$.

4.2. Rinkinio $(\zeta(s),\ \zeta(s,\alpha_1;\mathfrak{a}_1),\ \zeta(s,\alpha_2;\mathfrak{a}_2))$ funkcinis nepriklausomumas

Šiame skyriuje įrodysime mišrų jungtinį rinkinio $(\zeta(s),\ \zeta(s,\alpha_1;\mathfrak{a}_1),\ \zeta(s,\alpha_2;\mathfrak{a}_2))$ funkcinį nepriklausomumą.

4.2.1. Mišri jungtinė ribinė teorema Rymano dzeta ir periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms

Kaip jau minėjome 4.1.1 skyrelyje, įrodant funkcinį nepriklausomumą, svarbų vaidmenį atlieka mišri jungtinė ribinė teorema silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme analizinių funkcijų erdvėje.

Sudarykime erdvių $H(D)$ Dekarto sandaugą

$$H^3(D) = H(D) \times H(D) \times H(D).$$

Sakykime, kad Ω_1 ir Ω_2 yra apibrėžti (4.1) ir (4.2) lygybėmis. Apibrėžkime

$$\underline{\Omega} = \Omega_1 \times \Omega_{21} \times \Omega_{22};$$

čia $\Omega_{2j} = \Omega_2$ su $j = 1, 2$. Tuomet pagal Tichonovo (Tikhonov) teoremą $\underline{\Omega}$ yra kompaktinė topologinė Abelio grupė ir galima apibrėžti tikimybinę erdvę $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}), \underline{m}_H)$ (žr. [8]). Čia $\underline{m}_H$ yra Haro matų m_{H1}, m_{H21} ir m_{H22} sandauga, kurioje m_{H1} – tikimybinis Haro matas erdvėje $(\Omega_1, \mathcal{B}(\Omega_1))$, o m_{H2j} – tikimybinis Haro matas erdvėje $(\Omega_{2j}, \mathcal{B}(\Omega_{2j}))$, $j = 1, 2$. $\omega_1(p)$ tegul būna toks pat kaip ir 4.1.1 skyrelyje, o $\omega_{2j}(m) \in \Omega_{2j}$ yra projekcija į γ_m, $m \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, 2$.

Trumpumo dėlei pažymėkime $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\underline{\mathfrak{a}} = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$. Tada

$$\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}) = (\zeta(s), \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_1), \zeta(s, \alpha_2; \mathfrak{a}_2)).$$

Pažymėkime $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_{21}, \omega_{22}) \in \underline{\Omega}$ ir apibrėžkime $H^3(D)$–reikšmį atsitiktinį elementą $\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathfrak{a}})$ tikimybinėje erdvėje $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}), \underline{m}_H)$ formule

$$\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathfrak{a}}) = (\zeta(s, \omega_1), \zeta(s, \alpha_1, \omega_{21}; \mathfrak{a}_1), \zeta(s, \alpha_2, \omega_{22}; \mathfrak{a}_2));$$

čia kaip ir anksčiau

$$\zeta(s,\omega_1)=\prod_{p\in\mathbb{P}}\Big(1-\frac{\omega_1(p)}{p^s}\Big)^{-1},$$

$$\zeta(s,\alpha_j,\omega_{2j};\mathfrak{a}_j)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_{mj}\omega_{2j}(m)}{(m+\alpha_j)^s},\qquad j=1,2;\qquad s\in D.$$

Pastarosios eilutės konverguoja su beveik visais $\omega_1\in\Omega_1$ ir $\omega_{2j}\in\Omega_{2j}$, $j=1,2$.

Pažymėkime atsitiktinio elemento $\underline{\zeta}(s,\underline{\alpha},\underline{\omega};\underline{\mathfrak{a}})$ skirstinį $P_{\underline{\zeta}}$, t. y.

$$P_{\underline{\zeta}}(A)=\underline{m}_H(\underline{\omega}\in\underline{\Omega}:\underline{\zeta}(s,\underline{\alpha},\underline{\omega};\underline{\mathfrak{a}})\in A),\qquad A\in\mathcal{B}(H^3(D)).$$

Suformuluosime mišrią jungtinę ribinę teoremą rinkiniui $(\zeta(s),\,\zeta(s,\alpha_1;\mathfrak{a}_1),\,\zeta(s,\alpha_2;\mathfrak{a}_2))$.

5 teorema. *Sakykime, kad α_1 ir α_2 yra algebriškai nepriklausomi virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. Tada*

$$\frac{1}{T}\text{meas}\{\tau\in[0,T]:\underline{\zeta}(s+i\tau,\underline{\alpha};\underline{\mathfrak{a}})\in A\},\qquad A\in\mathcal{B}(H^3(D)),$$

silpnai konverguoja į $P_{\underline{\zeta}}$, kai $T\to\infty$.

Tai yra atskiras 4 teoremos iš [3] atvejis.

4.2.2. Mišri jungtinė universalumo teorema Rymano dzeta ir periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms

Kaip ir rinkinio $(\zeta(s),\,\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a}))$ atveju, dabar suformuluosime mišrią jungtinę universalumo teoremą rinkiniui $(\zeta(s),\,\zeta(s,\alpha_1;\mathfrak{a}_1),\,\zeta(s,\alpha_2;\mathfrak{a}_2))$.

6 teorema. *Sakykime, kad α_1 ir α_2 yra algebriškai nepriklausomi virš kūno $\mathbb{Q}$. Tegul K_1 yra toks pat kaip ir 4 teoremoje, o $K_{2j}\in D$ yra kompaktiški poaibiai su jungiaisiais papildiniais, $j=1,2$. Sakykime, kad $f_1\in H_0^c(K_1)$ ir $f_{2j}\in H^c(K_{2j})$, $j=1,2$. Tada kiekvienam $\varepsilon>0$ teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty}\tfrac{1}{T}\text{meas}\Big\{\tau\in[0,T]:\ \sup_{s\in K_1}|\zeta(s+i\tau)-f_1(s)|<\varepsilon,$$
$$\sup_{1\le j\le 2}\sup_{s\in K_{2j}}|\zeta(s+i\tau,\alpha_j;\mathfrak{a}_j)-f_{2j}(s)|<\varepsilon\Big\}>0.$$

Įrodymas. Tai yra 3 teoremos iš [3] atskiras atvejis. □

4.2.3. Tirštumo lema

Įrodant mišrų rinkinio $(\zeta(s),\ \zeta(s,\alpha_1;\mathfrak{a}_1),\ \zeta(s,\alpha_2;\mathfrak{a}_2))$ funkcinį nepriklausomumą, reikalinga tirštumo lema.

Apibrėžkime atvaizdį $u:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^{3N}$ formule

$$\begin{aligned} u(t) = (\ & \zeta(\sigma+it), \zeta'(\sigma+it), ..., \zeta^{(N-1)}(\sigma+it), \\ & \zeta(\sigma+it,\alpha_1;\mathfrak{a}_1), \zeta'(\sigma+it,\alpha_1;\mathfrak{a}_1), ..., \zeta^{(N-1)}(\sigma+it,\alpha_1;\mathfrak{a}_1), \\ & \zeta(\sigma+it,\alpha_2;\mathfrak{a}_2), \zeta'(\sigma+it,\alpha_2;\mathfrak{a}_2), ..., \zeta^{(N-1)}(\sigma+it,\alpha_2;\mathfrak{a}_2)); \end{aligned}$$

čia $\frac{1}{2}<\sigma<1$.

2 lema. *Sakykime, kad α_1 ir α_2 yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Tuomet aibės $\mathbb{R}$ vaizdas yra tirštas erdvėje $\mathbb{C}^{3N}$ atvaizdžio u atžvilgiu.*

Įrodymas. Įrodymas seka standartiniu keliu (žr. [8, 16]).

Turime įrodyti, kad kiekvienam $\varepsilon>0$ egzistuoja seka $\{\tau_m:\tau_m\in\mathbb{R}\}$ tokia, kad $|u(\tau_m)-\underline{a}|<\varepsilon$; čia $\underline{a}:=(a_{10},a_{11},...,a_{1N-1},a_{20},a_{21},...,a_{2N-1},a_{30},a_{31},...,a_{3N-1})\in\mathbb{C}^{3N}$. Iš tiesų galime rasti seką $\{\tau_m:\tau_m\in\mathbb{R}\}$, $\lim\limits_{m\to\infty}\tau_m=+\infty$, tokią, kad kiekvienam $\varepsilon>0$ su visais $l=0,...,N-1$ teisingos nelygybės

$$|\zeta^{(l)}(\sigma+i\tau_m)-s_{1l}|<\frac{\varepsilon}{2N},$$

$$|\zeta^{(l)}(\sigma+i\tau_m,\alpha_1;\mathfrak{a}_1)-s_{2l}|<\frac{\varepsilon}{2N}$$

ir

$$|\zeta^{(l)}(\sigma+i\tau_m,\alpha_2;\mathfrak{a}_2)-s_{3l}|<\frac{\varepsilon}{2N};$$

čia s_{kl} – bet kokie kompleksiniai skaičiai, $k=1,2,3$.

Nagrinėkime polinomą

$$p_{kN}(s)=\frac{s_{k,N-1}\cdot s^{N-1}}{(N-1)!}+\frac{s_{k,N-2}\cdot s^{N-2}}{(N-2)!}+...+\frac{s_{k,0}}{0!},\qquad k=1,2,3.$$

Tada su visais $l=0,...,N-1$ ir $k=1,2,3$ turime, kad

$$p_{kN}^{(l)}(0)=s_{kl}.$$

Fiksuojame σ_0, $\frac{1}{2}<\sigma_0<1$ ir imame tokį juostos D kompaktinį poaibį K, kad σ_0 būtų vidinis poaibio K taškas. Tuomet pagal 6 teoremą egzistuoja seka $\{\tau_m : \tau_m \in \mathbb{R}\}$, $\lim\limits_{m\to\infty} \tau_m = +\infty$ tokia, kad

$$\sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau_m) - p_{1N}(s-\sigma_0)| < \frac{\varepsilon\delta^N}{2^{N+1}N!},$$

$$\sup_{s\in K_{2j}} |\zeta(s+i\tau_m, \alpha_j; \mathfrak{a}_j) - p_{j+1N}(s-\sigma_0)| < \frac{\varepsilon\delta^N}{2^{N+1}N!}, \qquad j=1,2;$$

čia δ yra atstumas nuo poaibių K_1 ir K_{2j} sienų iki taško σ_0. Pritaikę integralinę Koši formulę Rymano dzeta funkcijai gauname

$$\begin{aligned} |\zeta^{(l)}(\sigma_0+i\tau_m) - s_{1l}| &= \\ &= \Big|\frac{l!}{2\pi i}\int_{|s-\sigma_0|=\frac{\delta}{2}} \frac{\zeta(s+i\tau_m) - p_{1N}(s-\sigma_0)}{|s-\sigma_0|^{l+1}} ds\Big| < \frac{\varepsilon}{2N}. \end{aligned}$$

Analogiškai periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms turime

$$|\zeta^{(l)}(\sigma_0+i\tau_m, \alpha_j; \mathfrak{a}_j) - s_{j+1l}| =$$

$$= \Big|\frac{l!}{2\pi i}\int_{|s-\sigma_0|=\frac{\delta}{2}} \frac{\zeta(s+i\tau_m, \alpha_j; \mathfrak{a}_j) - p_{j+1N}(s-\sigma_0)}{|s-\sigma_0|^{l+1}} ds\Big| < \frac{\varepsilon}{2N}, \qquad j=1,2,$$

kai $l = 0, 1, ..., N-1$. Tai įrodo lemą. □

4.2.4. 2 teoremos įrodymas

Remdamiesi anksčiau pateiktais pagalbiniais rezultatais (5 ir 6 teoremomis bei 2 lema) galime įrodyti antrąjį mūsų darbo tvirtinimą.

Pirmiausiai įrodysime, kad 2 teoremoje esanti tolydi funkcija $F_l \equiv 0$, $l = 1, ..., n$.

Nagrinėkime bendresnį atvejį ir vietoje F_j imkime tolydžią funkciją $F : \mathbb{C}^{3N} \to \mathbb{C}$, t. y.

$$\begin{aligned} F\big(\; & \zeta(s), \zeta'(s), ..., \zeta^{(N-1)}(s), \\ & \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_1), \zeta'(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_1), ..., \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_1), \\ & \zeta(s, \alpha_2; \mathfrak{a}_2), \zeta'(s, \alpha_2; \mathfrak{a}_2), ..., \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_2; \mathfrak{a}_2)\big) \equiv 0. \end{aligned}$$

Įrodysime, kad $F \equiv 0$.

Tarkime priešingai, kad $F \not\equiv 0$. Tada egzistuoja taškas $\underline{a} \in \mathbb{C}^{3N}$

$$\underline{a} := (a_{10}, a_{11}, ..., a_{1N-1}, a_{20}, a_{21}, ..., a_{2N-1}, a_{30}, a_{31}, ..., a_{3N-1}) \in \mathbb{C}^{3N}$$

toks, kad $F(\underline{a}) \neq 0$. Kadangi funkcija F yra tolydi, tai galima rasti aprėžtą sritį $G \subset \mathbb{C}^{3N}$, $\underline{a} \in G$, ir tokią, kad su visais $\underline{s} \in G$ būtų teisinga nelygybė

$$|F(\underline{s})| \geq c > 0. \tag{4.5}$$

Pagal 2 lemą egzistuoja seka $\{\tau_m : \tau_m \in \mathbb{R}\}$, $\lim\limits_{m\to\infty} \tau_m = \infty$ tokia, kad

$$\begin{aligned}\Big(\quad & \zeta(\sigma + i\tau_m), \zeta'(\sigma + i\tau_m), ..., \zeta^{(N-1)}(\sigma + i\tau_m),\\ & \zeta(\sigma + i\tau_m, \alpha_1; \mathfrak{a}_1), \zeta'(\sigma + i\tau_m, \alpha_1; \mathfrak{a}_1), ..., \zeta^{(N-1)}(\sigma + i\tau_m, \alpha_1; \mathfrak{a}_1),\\ & \zeta(\sigma + i\tau_m, \alpha_2; \mathfrak{a}_2), \zeta'(\sigma + i\tau_m, \alpha_2; \mathfrak{a}_2), ..., \zeta^{(N-1)}(\sigma + i\tau_m, \alpha_2; \mathfrak{a}_2)\Big) \in G\end{aligned}$$

ir $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Tačiau pastarasis sąryšis kartu su (4.5) nelygybe prieštarauja prielaidai, kad $F \not\equiv 0$.

Tokiu būdu galima įrodyti, kad kiekviena tolydi funkcija $F_l \not\equiv 0$, $l = 1, ..., n$. 2 teoremos įrodymas yra baigtas.

Išvados

Magistro darbe nagrinėjamas Rymano dzeta ir periodinių Hurvico dzeta funkcijų rinkinių funkcinis nepriklausomumas. Pirmoji darbo teorema yra skirta rinkinio $(\zeta(s)$, $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a}))$ funkcinio nepriklausomumo tyrimui. Antrąja teorema įrodome, kad rinkinys $(\zeta(s)$, $\zeta(s,\alpha_1;\mathfrak{a}_1)$, $\zeta(s,\alpha_2;\mathfrak{a}_2))$ taip pat yra funkciškai nepriklausomas, kai parametrai α_1 ir α_2 yra algebriškai nepriklausomi.

Santrauka

Magistro darbas skirtas Rymano dzeta ir periodinių Hurvico dzeta funkcijų funkcinio nepriklausomumo tyrimui.

Sakykime, kad α yra transcendentusis skaičius, $0 < \alpha <\leq 1$, $F_l : \mathbb{C}^{2N} \to \mathbb{C}$ yra tolydi funkcija su kiekvienu $l = 0, 1, ..., n$ ir su $N \in \mathbb{N}$. Tuomet, jei

$$\sum_{l=0}^{n} s^l \cdot F_l\Big(\zeta(s), \zeta'(s), ..., \zeta^{(N-1)}(s), \zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}), \zeta'(s, \alpha; \mathfrak{a}), ..., \zeta^{(N-1)}(s, \alpha; \mathfrak{a})\Big) \equiv 0,$$

tai $F_l \equiv 0$, kai $l = 0, 1, ..., n$.

Antrasis darbe gautas rezultatas – rinkinio $(\zeta(s),\ \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_1),\ \zeta(s, \alpha_2; \mathfrak{a}_2))$ jungtinis funkcinis nepriklausomumas. Įrodyta, kad, jei α_1 ir α_2 yra algebriškai nepriklausomi virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$, o $F_l : \mathbb{C}^{3N} \to \mathbb{C}$ yra tolydi funkcija su visais $l = 0, 1, ..., n$ ir $N \in \mathbb{N}$ ir

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{n} s^l \cdot F_l\Big(\quad & \zeta(s), \zeta'(s), ..., \zeta^{(N-1)}(s), \\ & \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_1), \zeta'(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_1), ..., \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_1), \\ & \zeta(s, \alpha_2; \mathfrak{a}_2), \zeta'(s, \alpha_2; \mathfrak{a}_2), ..., \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_2; \mathfrak{a}_2)\Big)\end{aligned}$$

tapačiai lygi nuliui, tada $F_l \equiv 0$ su visais $l = 0, ..., n$.

Summary

Functional independence of the Riemann zeta- and the periodic Hurwitz zeta-functions

Master Thesis is devoted to the investigation of functional independence of Riemann zeta-function and periodic Hurwitz zeta-functions. First result deals with a collection $(\zeta(s), \zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}))$.

Suppose that α is a transcendental number, $0 \leq \alpha < 1$. Let $N \in \mathbb{N}$ and $F_l : \mathbb{C}^{2N} \to \mathbb{C}$ be a continuous function for each $l = 0, 1, ..., n$. Suppose that

$$\sum_{l=0}^{n} s^l \cdot F_l\Big(\zeta(s), \zeta'(s), ..., \zeta^{(N-1)}(s), \zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}), \zeta'(s, \alpha; \mathfrak{a}), ..., \zeta^{(N-1)}(s, \alpha; \mathfrak{a})\Big) \equiv 0.$$

Then $F_l \equiv 0$ for $l = 0, 1, ..., n$.

Second result of the Thesis is the mixed joint functional independence of the collection $(\zeta(s),\ \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_1),\ \zeta(s, \alpha_2; \mathfrak{a}_2))$. Suppose that α_1 and α_2 are algebraically independent over $\mathbb{Q}$, and the function $F_l : \mathbb{C}^{3N} \to \mathbb{C}$ is a continuous function for each $l = 0, 1, ..., n$, and $N \in \mathbb{N}$. It is proved that if the function

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{n} s^l \cdot F_l\Big(\quad & \zeta(s), \zeta'(s), ..., \zeta^{(N-1)}(s), \\ & \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_1), \zeta'(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_1), ..., \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_1), \\ & \zeta(s, \alpha_2; \mathfrak{a}_2), \zeta'(s, \alpha_2; \mathfrak{a}_2), ..., \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_2; \mathfrak{a}_2)\Big)\end{aligned}$$

is identically zero, then $F_l \equiv 0$ for $l = 0, ..., n$.

Literatūra

[1] H. Bohr, Űber das Verhalten vas $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$, *Nachr. Akad. Wiss. Gőttingen II Math. Phys. Kl.*, 409–428 (1911).

[2] H. Bohr, Zur Theorie der Riemannschen Zetafunction im kritischen Streifen, *Acta Math.*, **40**, 67–100 (1915).

[3] J. Genys, R. Macaitienė, S. Račkauskienė, D. Šiaučiūnas, A Mixed Joint Universality Theorem for Zeta-Functions, *Math. Model. Anal.*, **15**(4), 431–446 (2010).

[4] D. Hilbert, Mathematische Probleme, *Nachr. Konigl. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-Phys. Kl.*, 253–297 (1900).

[5] A. Javtokas, A. Laurinčikas, On the periodic Hurwitz zeta-function, *Hardy-Ramanujan J.*, **29**, 18–36, (2006).

[6] R. Kačinskaitė, A. Laurinčikas, The joint distribution of periodic zeta-functions, *Stud. Scien. Math. Hungarica*, **48**(2), 257–279 (2011).

[7] R. Kačinskaitė, K. Matsumoto, The mixed joint universality for a class of zeta-functions, *Math. Nachr.*, **288**(16), 1900–1909 (2015).

[8] A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer, Dordrecht, 1996.

[9] K. Matsumoto, A survey on the theory of universality for zeta and L-functions, *Number Theory. Plowing and Starring through High Wave Forms*, Proc. of the 7th China-Japan Seminar, Kaneko M. (ed.) et all, World Scientific Publishing Co., Singapore, 95–144 (2015).

[10] K. Matsumoto, Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions, *Sugaku Expozitions*, **17(1)**, 51–71 (2004).

[11] H. Mishou, The joint value-distribution of the Rieman zeta function and Hurwitz zeta functions, *Lith. Math. J.*, **47**, 32–47 (2007).

[12] A. Ostrowski, Über Dirichletsche reihen und algebraische Differentialgleichungen, *Math. Z.*, **8**, 241–298 (1920).

[13] A.G. Postnikov, Generalization of one of Hilbert's problems, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **107**(4), 512-515 (1956).

[14] A.G. Postnikov, On the differential independence of Dirichlet series, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **66**(4), 561-564 (1949).

[15] B. Riemann, Ű̈ber die Anzahl der Primzahlen unterhalb einer gegebenen Grősse, *Monatsber. Preuss Akad. Wiss. Berlin*, 671–680 (1859).

[16] J. Steuding, Value-Distribution of L-functions, *Lecture Notes in Math*, **1877**, Springer Verlag, Berlin etc., 2007.

[17] S.M. Voronin, On the functional independence of Dirichlet L-functions, *Acta Arith.*, **27**, 493–503 (1975) (rusų kalba).

[18] S.M. Voronin, Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, *Izv. Acad. Nauk. SSSR Ser. Matem.*, **39**, 475–486 (1975) (rusų kalba).