ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
TECHNOLOGIJOS, FIZINIŲ IR BIOMEDICINOS MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Agnė Gudonytė

(Matematikos studijų programa, valstybinis kodas 621G10006)

Periodinės dzeta funkcijos ketvirtojo momento asimptotika kritinėje juostoje

Magistro darbas

Darbo vadovas
prof. dr. Darius Šiaučiūnas

Šiauliai, 2016

Patvirtinu, kad magistro darbas yra originalus, neturintis plagiato požymių.

....	....	....
(Parašas)	(Vardas ir pavardė)	(Data)

Turinys

1 Įvadas

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o $a_m \in \mathbb{C} : m \in \mathbb{N}$. Eilutės, kurių pavidalas yra

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s},$$

vadinamos paprastosiomis Dirichlė (Dirichlet) eilutėmis. Gerai žinoma, kad Dirichlė eilučių konvergavimo sritis yra pusplokštumė.

Dirichlė eilutės nėra tokios svarbios analizėje kaip, tarkime, laipsninės eilutės, tačiau vaidina svarbų vaidmenį analizinėje skaičių teorijoje. Labai svarbūs analiziniai objektai – dzeta ar L funkcijos – yra apibrėžiamos Dirichlė eilutėmis.

Žinomiausia iš dzeta funkcijų yra Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama tokia eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

Funkcija $\zeta(s)$ buvo žinoma jau XVIII amžiuje L. Oileriui (Euler). Tačiau jis šią funkciją nagrinėjo tik kaip realaus kintamojo s funkciją. Tik 1859 B. Rymanas (Riemann) pradėjo nagrinėti $\zeta(s)$ laikydamas s kompleksiniu kintamuoju ir atskleidė jos svarbą pirminių skaičių pasiskirstyme. Rymanas pratęsė funkciją $\zeta(s)$ į visą kompleksinę plokštumą, įrodė funkcinę lygtį ir suformulavo keletą hipotezių, keletas iš kurių yra neišspręstos iki šių dienų. Svarbiausia iš Rymano hipotezių tvirtina, kad visi netrivialieji funkcijos $\zeta(s)$ nuliai yra išsidėstę kritinėje tiesėje $\sigma = \frac{1}{2}$.

Įvairūs funkcijos $\zeta(s)$ apibendrinimai taip pat vadinami dzeta funkcijomis. Kurioje nors pusplokštumėje jos yra apibrėžiamos Dirichlė eilutėmis su koeficientais a_m, turinčiais tam tikrą aritmetinę prasmę. Tarp jų Hurvico (Hurvitz), Lercho (Lerch), Dedekindo (Dedekind), periodinė, modulinių formų ir elipsinių kreivių dzeta funkcijos.

Dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymas yra labai sudėtingas ir priklauso nuo koeficientų a_m. Pagrindinės reikšmių pasiskirstymo problemos yra susijusios su nulių ir a-reikšmių išsidėstymo, analizinėmis ir asimptotinėmis dzeta funkcijų savybėmis. Iš kitos pusės, asimptotinės savybės yra charakterizuojamos įvairiais įverčiais, momentų asimptotika ir įverčiais, tikimybinėmis ribinėmis teoremomis. Nulių pasiskirstymas apima nulių neturinčias sritis, nulių skaičiaus įverčius, nulių tankio teoremas. Analizinės savybės susijusios su analizinio pratęsimo problema, įvairiomis funkcinėmis ir artutinėmis funkcinėmis lygtimis, universalumo savybe ir kitomis savybėmis.

2 Periodinė dzeta funkcija $\zeta_\lambda(s)$

Magistro darbe nagrinėjama viena iš periodinių dzeta funkcijų, funkcija $\zeta_\lambda(s)$, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama tokia Dirichlė eilute

$$\zeta_\lambda(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i\lambda m}}{m^s},$$

čia λ – realusis parametras. Ši funkcija gali būti analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą. Kai $\lambda \in \mathbb{Z}$, tada funkcija $\zeta_\lambda(s)$ virsta Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$, todėl laikykime, kad $0 < \lambda < 1$. Be to $\zeta_\lambda(s)$ funkcija yra glaudžiai susijui su Lercho dzeta funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$, čia α yra fiksuotas parametras, $\alpha \in (0; 1]$. Priminsime, kad pusplokštumėje $\sigma > 1$, Lercho dzeta funkcija apibrėžiama tokia Dirichlė eilute

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i\lambda m}}{(m+\alpha)^s},$$

ir, kai $0 < \lambda < 1$, analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, kurioje ji yra sveikoji funkcija.

Kai $\lambda \in \mathbb{Z}$, funkciją $L(\lambda, \alpha, s)$ virsta Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$, kuri turi paprastą polių taške $s = 1$ su reziduumu 1.

Akivaizdu, kad

$$\zeta_\lambda(s) = \mathrm{e}^{2\pi i\lambda} L(\lambda, 1, s). \tag{2.1}$$

Vadinasi, kai $0 < \lambda < 1$, funkcija $\zeta_\lambda(s)$ taip pat yra sveikoji.

Iš antrojo momento rezultatų Lercho dzeta funkcijai (žiūrėti [2],[3]) ir iš (2.1) lygybės gauname, kad funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ antrajam momentui kritinėje tiesėje $\sigma = \frac{1}{2}$ galioja tokia asimptotinė formulė

$$\int_1^T \left|\zeta_\lambda\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 \mathrm{d}t = T\log T + T(c(\lambda) + \gamma_0 - 1 - \log 2\pi) + O(T^{1/2}\log T),$$

čia konstanta $c(\lambda)$ yra dydis iš tokios lygybės

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+\lambda} = \log n + c(\lambda) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty,$$

o γ_0 yra Oilerio konstanta. Funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ antrajam momentui kritnėje juostoje $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ galioja tokia asimptotinė formulė

$$\int_1^T |\zeta_\lambda(\sigma + it)|^2 \mathrm{d}t = \zeta(2\sigma)T + \frac{(2\pi)^{2\sigma-1}}{2-2\sigma}\zeta(2-2\sigma, \lambda)T^{2-2\sigma} + O(T^{1-\sigma}\log T) + O(T^{\sigma/2}).$$

Šio darbo tikslas – įrodyti asimptotines formules funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ ketvirtąjam momentui kritnėje juostoje $\frac{1}{2} < \sigma < 1$.

Darbo tikslui pasiekti yra iškelti šie uždaviniai:

1. Išanalizuoti metodus, kurie taikomi dzeta ir L funkcijų momentų teorijoje.

2. Įrodyti artutinę funkcinę lygtį periodinei dzeta funkcijai $\zeta_\lambda(s)$.

3. Įrodyti asimptotinę formulę funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ ketvirtąjam momentui kritnėje juostoje $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ iracionalaus λ, $0 < \lambda < 1$, atveju.

3. Įrodyti asimptotinę formulę funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ ketvirtąjam momentui kritnėje juostoje $\frac{3}{4} < \sigma < 1$ racionalaus λ, $0 < \lambda < 1$, atveju.

3 Artutinė funkcinė lygtis

Šiame skyriuje įrodysime artutinę funkcinę lygtį periodinei dzeta funkcijai $\zeta_\lambda(s)$.

Tegul $[u]$ žymi skaičiaus u sveikąją dalį, o $\{u\}$ – skaičiaus u trupmeninę dalį. Pažymėkime

$$m(t) = \left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - 1\right], \quad q(t) = \left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right],$$

$$g(\lambda, t) = 2\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - m(t) - q(t) - \lambda - 1,$$

$$\begin{aligned} f(\lambda, t) \quad = \quad & -\frac{t}{2\lambda}\log\frac{t}{2\pi \mathrm{e}} - \frac{7}{8} + \frac{1}{2}(1-\lambda^2) + m(t) - q(t) + 2\sqrt{\frac{t}{2\pi}}(q(t) \\ & -m(t) + \lambda - 1) - \frac{1}{2}(q(t)+m(t)) - \lambda(1 + q(t) - m(t)) \end{aligned}$$

ir

$$\psi(z) = \frac{\cos\pi((z^2/2) - z - (1/8))}{\cos\pi z}.$$

Tuomet periodinės dzeta funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ artutinė funkcinė lygtis gaunama tokia teorema.

3.1 teorema. *Tegul* $0 < \lambda < 1$ *ir* $0 \le \sigma \le 1$*. Tada, kai* $t \ge t_0 > 0$*,*

$$\begin{aligned} \zeta_\lambda(s) \quad = \quad & \sum_{1 \le m \le m(t)} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i \lambda m}}{m^s} + \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1/2-\sigma-it} \mathrm{e}^{it+(\pi i/4)} \sum_{0 \le m \le q(t)} \frac{1}{(m+\lambda)^{1-s}} \\ & + \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-(\sigma/2)} \mathrm{e}^{\pi i f(\lambda,t) + 2\pi i \lambda}\psi(g(\lambda,t)) + O(t^{(\sigma/2)-1}). \end{aligned}$$

Šios teoremos įrodymui naudojama Lercho dzeta funkcijos artutinė funkcinė lygtis.

3.2 lema. *Tegul* $0 < \lambda \le 1$*,* $0 < \alpha \le 1$*,* $0 \le \sigma \le 1$ *ir, kai* $t \ge 1$*,* $y = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$*,* $q = [y]$*,* $n = [y - \alpha]$*,* $\beta = q - n$*, tuomet*

$$\begin{aligned} L(\lambda, \alpha, s) = & \sum_{m=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda m}}{(m+\alpha)^s} + \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\sigma - \frac{1}{2} + it} \mathrm{e}^{it + \frac{\pi i}{4} - 2\pi i\{\lambda\}\alpha} \sum_{m=0}^{q} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha m}}{(m+\lambda)^{1-s}} \\ & + \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\frac{\sigma}{2}} \mathrm{e}^{\pi i f(\lambda,\alpha,\sigma,t)}\psi(2y - 2q + \beta - \{\lambda\} - \alpha) + O\left(t^{\frac{\sigma-2}{2}}\right), \end{aligned}$$

čia

$$f(\lambda,\alpha,\sigma,t) = -\frac{t}{2\pi}\log\frac{t}{2\pi\mathrm{e}} - \frac{7}{8} + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \{\lambda\}^2) - \alpha\beta + 2y(\beta + \{\lambda\} - \alpha) - \frac{1}{2}(q+m) - \{\lambda\}(\alpha+\beta).$$

Šią lemą įrodė R. Garunkštis, A. Laurinčikas ir J. Štoidingas (Steuding) [1] straipsnyje.

3.1 teoremos įrodymas. Teoremos tvirtinimas gaunamas iš (2.1) lygybės ir 3.2 lemos. △

4 Funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ ketvirtasis momentas, kai λ iracionalusis skaičius

Šiame skyriuje nagrinėsime periodinės dzeta funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ ketvirtojo momento

$$\int_1^T |\zeta_\lambda(\sigma+it)|^4 dt, \qquad T\to\infty,$$

asimptotiką kritinėje juostoje $\frac{1}{2}<\sigma<1$.

Pagrindinis šio skyrelio rezultatas formuluojamas tokia teorema.

4.1 teorema. *Tarkime, kad λ yra iracionalusis skaičius,* $0<\lambda<1$. *Tada, kai* $1/2<\sigma<1$,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta_\lambda(\sigma+it)|^4 \mathrm{d}t=\frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}-2\sum_{\substack{m_1n_1=m_2n_2\\ m_1+n_1\neq m_2+n_2}}\frac{\sin^2\pi\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}{(m_1n_1)^{2\sigma}}.$$

Kadangi $\lambda\in\mathbb{Z}$, $\zeta_\lambda(s)=\zeta(s)$ ir $\sin^2\pi\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)=0$, tai 4.1 teoremos tvirtinimas taip pat galioja ir kai λ yra sveikasis skaičius, [7] straipsnio 7.5. teorema.

Dėl to, kad funkcija $\psi(z)$ yra aprėžta, funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ artutinę funkcinę lygtį galime užrašyti tokiu būdu

$$\zeta_\lambda(s)=S_1(s)+S_2(s)+O(t^{-(1/4)}), \tag{4.1}$$

čia

$$S_1(s)=\sum_{1\le m\le m(t)}\frac{\mathrm{e}^{2\pi i\lambda m}}{m^s}$$

ir

$$S_2(s)=\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1/2-\sigma-it}\mathrm{e}^{it+(\pi i/4)}\sum_{0\le m\le q(t)}\frac{1}{(m+\lambda)^{1-s}}.$$

Kadangi $|\zeta_\lambda(s)|^4=(\zeta_\lambda(s))^2\overline{(\zeta_\lambda(s))^2}$, todėl

$$\begin{aligned}
|\zeta_\lambda(s)|^4 &= |S_1(s)+S_2(s)+O(t^{-(1/4)})|^4\\
&= (S_1(s)+S_2(s)+O(t^{-(1/4)}))^2(\overline{S_1(s)}+\overline{S_2(s)}+O(t^{-(1/4)}))^2\\
&= (S_1^2(s)+S_2^2(s)+2S_1(s)S_2(s)+O(|S_1(s)t^{-(1/4)}|)+O(|S_2(s)|t^{-(1/4)})\\
&\quad +O(t^{-1/2}))\times(\overline{S_1^2(s)}+\overline{S_2^2(s)}+2\overline{S_1(s)S_2(s)}+O(|S_1(s)|t^{-(1/4)})
\end{aligned}$$

$$+O(|S_2(s)|t^{-(1/4)}) + O(t^{-1/2})) = |S_1(s)|^4 + S_1^2(s)\overline{S_2^2(s)}$$

$$+2S_1^2(s)\overline{S_1(s)S_2(s)} + \overline{S_1^2(s)}S_2^2(s) + |S_2(s)|^4$$

$$+2\overline{S_1(s)}S_2^2(s)\overline{S_2(s)} + 2S_1(s)\overline{S_1^2(s)}S_2(s) + 2S_1(s)\overline{S_2^2(s)}S_2(s)$$

$$+4|S_1(s)|^2|S_2(s)|^2 + O(|S_1(s)|^3t^{-(1/4)}) + O(|S_1(s)|^2|S_2(s)|t^{-(1/4)})$$

$$+O(|S_1(s)|^2t^{-1/2}) + O(|S_1(s)||S_2(s)|^2t^{-(1/4)}) + O(|S_2(s)|^3t^{-(1/4)})$$

$$+O(|S_2(s)|^2t^{-1/2}) + O(|S_1(s)||S_2(s)|t^{-1/2}) + O(|S_1(s)|t^{-3/4})$$

$$+O(|S_2(s)|t^{-3/4}) + O(t^{-1}). \tag{4.2}$$

Taigi, norint gauti funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ ketvirtojo momento asimptotiką, užtenka gauti dydžių $S_1(s)$ ir $S_2(s)$ ketvirtųjų momentų asimptotikas.

4.2 lema. *Tegul* $T \to \infty$. *Tada, kai* $1/2 < \sigma < 1$,

$$\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^4 dt$$

$$= T\left(\frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)} - 2\sum_{\substack{m_1n_1=m_2n_2\\ m_1+n_1=m_2+n_2}} \frac{\sin^2\pi\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}{(m_1n_1)^{2\sigma}}\right)(1+o(1)).$$

Įrodymas. Naudosime panašius argumentus, kaip ir Rymano dzeta funkcijos atveju. Turime, kad

$$|S_1(\sigma+it)|^4 = \sum_{m_1}\frac{\mathrm{e}^{2\pi i\lambda m_1}}{m_1^{\sigma+it}}\sum_{n_1}\frac{\mathrm{e}^{2\pi i\lambda n_1}}{n_1^{\sigma+it}}\sum_{m_2}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi i\lambda m_2}}{m_2^{\sigma-it}}\sum_{n_2}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi i\lambda n_2}}{n_2^{\sigma-it}}$$

$$= \sum_{m_1,n_1,m_2,n_2}\frac{\mathrm{e}^{2\pi i\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}}{(m_1n_1m_2n_2)^\sigma}\left(\frac{m_2n_2}{m_1n_1}\right)^{it};$$

čia kiekvenoje sumoje sumuojame iki $[1, m(t)]$. Taigi

$$\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^4\mathrm{d}t = \int_1^T \sum_{m_1,n_1,m_2,n_2}\frac{\mathrm{e}^{2\pi i\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}}{(m_1n_1m_2n_2)^\sigma}\left(\frac{m_2n_2}{m_1n_1}\right)^{it}\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{1\le m_1,n_1,m_2,n_2\le m(T)}\frac{\mathrm{e}^{2\pi i\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}}{(m_1n_1m_2n_2)^\sigma}\int_{T_1}^T\left(\frac{m_2n_2}{m_1n_1}\right)^{it}\mathrm{d}t;$$

čia $T_1 = 2\pi \max((m_1+1)^2, (n_1+1)^2, (m_2+1)^2, (n_2+1^2))$. Taigi, gauname, kad

$$\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^4 \mathrm{d}t = \sum_{m_1n_1=m_2n_2}^{*} \frac{(T-T_1)\mathrm{e}^{2\pi i\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}}{(m_1n_1)^{2\sigma}}$$

$$+O\Bigg(\sum_{m_1n_1\neq m_2n_2}^{*} \frac{|\log(m_2n_2/m_1n_1)|^{-1}}{(m_1n_1m_2n_2)^{\sigma}}\Bigg), \qquad (4.3)$$

žvaigždutė $*$ reiškia, kad sumuojame pagal $m_1, n_1, m_2, n_2 \in [1, m(T)]$.

Tegul

$$d(k) = \sum_{d|k} 1,\ \ k \in \mathbb{N},$$

yra daliklių funkcija, o $N(k)$ – lygties $m_1n_1 = m_2n_2 = k$ sprendinių skaičius. Tada, turime, kad

$$N(k) = d^2(k),\ \text{jei } k \leq u,\ \ m_1, n_1, m_2, n_2 \leq u,$$

ir

$$N(k) \leq d^2(k),\ \text{jei } k \geq u,\ \ m_1, n_1, m_2, n_2 \leq u.$$

Gerai žinoma ([7] straipsnio 1.2.10. formulė), kad, kai $\sigma > 1/2$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2(k)}{k^{2\sigma}} = \frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}.$$

Taigi, kai $d(k) \ll k^{\varepsilon}$, čia $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{m_1n_1=m_2n_2}^{*} \frac{T\mathrm{e}^{2\pi i\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}}{(m_1n_1)^{2\sigma}}$$

$$= T \sum_{m_1n_1=m_2n_2\leq m(T)} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}}{(m_1n_1)^{2\sigma}} + T \sum_{m(T)\leq m_1n_1=m_2n_2\leq m^2(T)}^{*} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}}{(m_1n_1)^{2\sigma}}$$

$$= T \sum_{m_1n_1=m_2n_2\leq m(T)} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}}{(m_1n_1)^{2\sigma}} + O\Bigg(T \sum_{k\geq m(T)} \frac{d^2(k)}{k^{2\sigma}}\Bigg)$$

$$= T \sum_{\substack{m_1n_1=m_2n_2\\ m_1+n_1=m_2+n_2}} \frac{1}{(m_1n_1)^{2\sigma}} + T \sum_{\substack{m_1n_1=m_2n_2\\ m_1+n_1\neq m_2+n_2}} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}}{(m_1n_1)^{2\sigma}} + O(T^{3/2-\sigma+\varepsilon})$$

$$= T \sum_{m_1n_1=m_2n_2} \frac{1}{(m_1n_1)^{2\sigma}} - T \sum_{\substack{m_1n_1=m_2n_2\\ m_1+n_1\neq m_2+n_2}} \frac{1-\cos 2\pi\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}{(m_1n_1)^{2\sigma}}$$

$$+iT \sum_{\substack{m_1n_1=m_2n_2\\ m_1+n_1\neq m_2+n_2}} \frac{\sin 2\pi\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}{(m_1n_1)^{2\sigma}} + O(T^{3/2-\sigma+\varepsilon})$$

$$= T\frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)} - T \sum_{\substack{m_1n_1=m_2n_2\\ m_1+n_1\neq m_2+n_2}} \frac{1-\cos 2\pi\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}{(m_1n_1)^{2\sigma}}$$

$$+iT \sum_{\substack{m_1n_1=m_2n_2\\ m_1+n_1\neq m_2+n_2}} \frac{\sin 2\pi\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}{(m_1n_1)^{2\sigma}} + O(T^{3/2-\sigma+\varepsilon}). \tag{4.4}$$

Iš T_1 apibrėžimo ir simetrijos gauname, kad

$$\sum_{m_1n_1=m_2n_2}^{*} \frac{T_1}{(m_1n_1)^{2\sigma}} \leq 2\pi \sum_{m_1n_1=m_2n_2}^{*} \frac{(m_1+1)^2+(n_1+1)^2+(m_2+1)^2+(n_2+1)^2}{(m_1n_1m_2n_2)^{\sigma}}$$

$$= O\Bigg(\sum_{m_1n_1=m_2n_2}^{*} \frac{m_1^2}{(m_1n_1m_2n_2)^{\sigma}}\Bigg) = O\Bigg(\sum_{m_1,n_1}^{*} \frac{m_1^2 d(m_1n_1)}{(m_1n_1)^{2\sigma}}\Bigg)$$

$$= O\Bigg(T^{\varepsilon} \sum_{m_1\leq m(T)} \frac{1}{m_1^{2\sigma-2}} \sum_{n_1\leq m(T)} \frac{1}{n_1^{2\sigma}}\Bigg)$$

$$= O(T^{\varepsilon}(T^{1/2(3-2\sigma)}) = O(T^{3/2-\sigma+\varepsilon}). \tag{4.5}$$

Naudodami [7] straipsnio 7.2 skyriaus įvertį

$$\sum\sum_{0<m<n\leq T} \frac{1}{m^{\sigma}n^{\sigma}\log(n/m)} = O(T^{2-2\sigma}\log T),\ \frac{1}{2}\leq\sigma<1,$$

turime, kad

$$\sum_{m_1n_1\neq m_2n_2}^{*} \frac{|\log(m_2n_2/m_1n_1)|^{-1}}{(m_1n_1m_2n_2)^{\sigma}} = O\Bigg(\sum\sum_{0<m<n\leq m^2(T)} \frac{d(m)d(n)}{(mn)^{\sigma}\log(n/m)}\Bigg)$$

$$= O\Bigg(T^{\varepsilon}\sum\sum_{0<m<n\leq m^2(T)} \frac{1}{(mn)^{\sigma}\log(n/m)}\Bigg) = O(T^{2-2\sigma+\varepsilon}).$$

Kai $\sigma > 1/2$ ir lemmos formulės kairioji pusė yra reali, ši ir (4.3)-(4.5) išraiškos parodo, kad

$$\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^4 \mathrm{d}t = T\Bigg(\frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)} - 2\sum_{\substack{m_1n_1=m_2n_2\\ m_1+n_1\neq m_2+n_2}} \frac{\sin^{\pi}\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}{(m_1n_1)^{2\sigma}}\Bigg)$$

$$+O(T^{3/2-\sigma+\varepsilon}),$$

o tai įrodo lemmą. $\triangle$

4.1 teoremos įrodymui užtenka gauti tinkamą $S_2(s)$ ketvirtąjį momento įvertį. Toliau pateiktas mums naudingas tvirtinimas.

4.3 lema. *Tegul $u_1, \ldots, u_r$ yra kompleksiniai skaičiai, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ skirtingi realieji skaičiai, ir*

$$\delta_m = \min_{n \neq m} |\lambda_n - \lambda_m|.$$

Tada

$$\sum_{m,n=1}^{r} u_m \overline{u}_n (\lambda_n - \lambda_m)^{-1} \ll \sum_{m=1}^{r} |u_m|^2 \delta_m^{-1}.$$

Įrodymas. Ši lema yra dalis Montgomerio-Vono (Montgomery-Vaughan) teoremos, žiūrėti [6] staripsnio 2 teoremą. $\triangle$

4.4 lema. *Tegul $T \to \infty$, $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, ir tegul λ yra iracionalusis. Tada, bet kokiam pakankamai mažam $\varepsilon > 0$, turime, kad*

$$\int_1^T |S_2(\sigma + it)|^4 \mathrm{d}t \ll_\lambda T^{2-2\sigma+\varepsilon}.$$

Įrodymas. Pažymėkime

$$Z(T) = \int_1^T \left| \sum_{0 \leq m \leq q(t)} \frac{1}{(m+\lambda)^{1-\sigma-it}} \right|^4 \mathrm{d}t.$$

Aiškiai matome, kad

$$Z(T) \ll \int_1^T \left| \frac{1}{\lambda^{1-\sigma-it}} \right|^4 \mathrm{d}t + Z_1(T) \ll_\lambda T + Z_1(T); \tag{4.6}$$

čia

$$Z_1(T) = \int_1^T \left| \sum_{1 \leq m \leq q(t)} \frac{1}{(m+\lambda)^{1-\sigma-it}} \right|^4 \mathrm{d}t.$$

Kaip ir $S_1(s)$ atveju, gauname, kad

$$Z_1(T) = \int_1^T \sum_{m_1,n_1,m_2,n_2} \frac{1}{((m_1+\lambda)(n_1+\lambda)(m_2+\lambda)(n_2+\lambda))^{1-\sigma}}$$

$$\times \left(\frac{(m_1+\lambda)(n_1+\lambda)}{(m_2+\lambda)(n_2+\lambda)} \right)^{it} \mathrm{d}t;$$

čia, kiekvienas m_1, n_1, m_2, n_2 įgyja reikšmes iš intervalo $[1, q(t)]$. Taigi

$$Z_1(T) = \int_1^T \sum_{1\le m_1,n_1,m_2,n_2\le q(T)} \frac{1}{((m_1+\lambda)(n_1+\lambda)(m_2+\lambda)(n_2+\lambda))^{1-\sigma}}$$

$$\times \int_{T_2}^T \left(\frac{(m_1+\lambda)(n_1+\lambda)}{(m_2+\lambda)(n_2+\lambda)}\right)^{it} \mathrm{d}t;$$

čia $T_2 = 2\pi \max(m_1^2, n_1^2, m_2^2, n_2^2)$. Kai λ yra iracionalusis, turime, kad $(m_1+\lambda)(n_1+\lambda) = (m_2+\lambda)(n_2+\lambda)$. Todėl

$$Z_1(T) \ll \sum_{m_1n_1=m_2n_2}^{*} \frac{T-T_2}{((m_1+\lambda)(n_1+\lambda))^{2-2\sigma}}$$

$$+ \sum_{(m_1+\lambda)(n_1+\lambda)\neq(m_2+\lambda)(n_2+\lambda)}^{*} \frac{1}{(m_1n_1m_2n_2)^{1-\sigma}\left|\log\frac{(m_1+\lambda)(n_1+\lambda)}{(m_2+\lambda)(n_2+\lambda)}\right|}. \tag{4.7}$$

Čia $*$ reiškia, kad sumuojame pagal $m_1, n_1, m_2, n_2 \in [1, q(T)]$. Panašiai, kaip ir prieš tai randame, kad

$$\sum_{m_1n_1=m_2n_2}^{*} \frac{T}{((m_1+\lambda)(n_1+\lambda))^{2-2\sigma}} \ll T \sum_{k\le q^2(T)} \frac{d^2(k)}{k^{2-2\sigma}} \ll T^{2\sigma+\varepsilon} \tag{4.8}$$

ir

$$\sum_{m_1n_1=m_2n_2}^{*} \frac{T_2}{((m_1+\lambda)(n_1+\lambda))^{2-2\sigma}} \ll \sum_{m_1,n_1\le q(T)} \frac{m_1^2 d(m_1n_1)}{(m_1n_1)^{2-2\sigma}}$$

$$\ll T^{\varepsilon}\left(\sum_{m_1\le q(T)} m_1^{2\sigma} \sum_{n_1\le q(T)} \frac{1}{n_1^{2-2\sigma}}\right) \ll T^{2\sigma+\varepsilon}. \tag{4.9}$$

(4.7) formulės antros sumos išraiškai, mes taikome 4.3 lemą. Kadangi $(m_1+\lambda)(n_1+\lambda) \neq (m_2+\lambda)(n_2+\lambda)$, nesunku pastebėti, kad,

$$\left|\log\frac{(m_1+\lambda)(n_1+\lambda)}{(m_2+\lambda)(n_2+\lambda)}\right| \ge \min\left(\frac{c(\lambda)}{(m_1+\lambda)(n_1+\lambda)}, \frac{c(\lambda)}{(m_2+\lambda)(n_2+\lambda)}\right);$$

čia $c(\lambda)$ yra teigiama konstanta. Pastaroji išraiška ir 4.3 lema parodo, kad

$$\sum_{\substack{m_1n_1\neq m_2n_2\\(m_1+\lambda)(n_1+\lambda)\neq(m_2+\lambda)(n_2+\lambda)}}^{*} \frac{1}{(m_1n_1m_2n_2)^{1-\sigma}|\log((m_1+\lambda)(n_1+\lambda)/(m_2+\lambda)(n_2+\lambda))|}$$

$$\ll T^{\varepsilon} \sum_{1\le m\le q^2(T)} \frac{m}{m^{2-2\sigma}} \ll_{\varepsilon} T^{2\sigma+\varepsilon},$$

ir

$$\sideset{}{^*}\sum_{\substack{m_1n_1\neq m_2n_2\\(m_1+\lambda)(n_1+\lambda)\neq(m_2+\lambda)(n_2+\lambda)}} \frac{1}{(m_1n_1m_2n_2)^{1-\sigma}|\log((m_1+\lambda)(n_1+\lambda)/(m_2+\lambda)(n_2+\lambda))|}$$

$$\ll_{\lambda} \sum_{k\le q^2(T)} \frac{kd^2(k)}{k^{2-2\sigma}} \ll T^{2\sigma+\varepsilon}.$$

Dvi paskutinės išraiškos, kartu su (4.7)-(4.9) išraiškomis duoda, kad

$$Z_1(T) \ll_{\lambda} T^{2\sigma+\varepsilon}.$$

Iš (4.6) išraiškos gauname, kad

$$Z(T) \ll_{\lambda} T^{2\sigma+\varepsilon}. \tag{4.10}$$

Dabar, naudodami $S_2(s)$ apibrėžimą ir (4.10) išraišką, mes gauname

$$\begin{aligned}\int_1^T |S_2(\sigma+it)|^4\mathrm{d}t &\ll \int_1^T t^{2-4\sigma}\mathrm{d}Z(t)\\ &= t^{2-4\sigma}Z(t)|_1^T + (4\sigma-2)\int_1^T Z(t)t^{1-4\sigma}\mathrm{d}t\\ &\ll_{\lambda} T^{2-2\sigma+\varepsilon} + \int_1^T t^{1-2\sigma+\varepsilon}\mathrm{d}t \ll_{\lambda} T^{2-2\sigma+\varepsilon}.\end{aligned}$$

Tai įrodo lemą. △

4.1 teoremos įrodymas. Iš Koši-Švarco (Cauchy-Schwarz) nelygybės savybės, ir 4.2 ir 4.4 lemų turime, kad

$$\int_1^T (S_1^2(\sigma+it)\overline{S_2^2(\sigma+it)} + \overline{S_1^2(\sigma+it)}S_2^2(\sigma+it) + 4|S_1^2(\sigma+it)|^2|S_2^2(\sigma+it)|^2)\mathrm{d}t$$

$$\ll \left(\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^4\mathrm{d}t \int_1^T |S_2(\sigma+it)|^4\mathrm{d}t\right)^{1/2} \ll_{\lambda} T^{3/2-\sigma+\varepsilon},$$

$$\int_1^T (2S_1^2(\sigma+it)\overline{S_1(\sigma+it)S_2(\sigma+it)} + 2S_1(\sigma+it)\overline{S_1^2(\sigma+it)}S_2(\sigma+it)$$

$$+2\overline{S_1(\sigma+it)}S_2^2(\sigma+it)\overline{S_2(\sigma+it)}+2S_1(\sigma+it)\overline{S_2^2(\sigma+it)}S_2(\sigma+it))\mathrm{d}t$$

$$\ll \left(\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^2|S_2(\sigma+it)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\left(\left(\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^4\mathrm{d}t\right)^{1/2}\right.\right.$$

$$\left.+\left(\int_1^T |S_2(\sigma+it)|^4\mathrm{d}t\right)^{1/2}\right) \ll_\lambda \left(\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^4\mathrm{d}t\int_1^T |S_2(\sigma+it)|^4\mathrm{d}t\right)^{(1/4)}$$

$$\times(T^{1/2}+T^{1-\sigma+\varepsilon}) \ll_\lambda T^{3/4-(\sigma/2)+\varepsilon}(T^{1/2}+T^{1-\sigma+\varepsilon}) \ll_\lambda T^{(5/4)-(\sigma/2)+\varepsilon},$$

$$\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^3t^{-(1/4)}\mathrm{d}t \ll \left(\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^4\mathrm{d}t\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^2t^{-1/2}\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

$$\ll T^{3/4+\varepsilon},$$

$$\int_1^T |S_2(\sigma+it)|^3t^{-(1/4)}\mathrm{d}t$$

$$\ll \left(\int_1^T |S_2(\sigma+it)|^4\mathrm{d}t\int_1^T |S_2(\sigma+it)|^2t^{-1/2}\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

$$\ll_\lambda T^{3/2-3/2\sigma+\varepsilon},$$

$$\int_1^T |S_1(\sigma+it)||S_2(\sigma+it)|^2t^{-(1/4)}\mathrm{d}t$$

$$\ll \left(\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^2t^{-1/2}\mathrm{d}t\int_1^T |S_2(\sigma+it)|^4\mathrm{d}t\right)^{1/2} \ll_\lambda T^{(5/4)-\sigma+\varepsilon},$$

$$\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^2|S_2(\sigma+it)|t^{-(1/4)}\mathrm{d}t \ll \left(\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^4\mathrm{d}t\right.$$

$$\times \int_1^T |S_2(\sigma+it)|^2 t^{-1/2}\mathrm{d}t\Bigg)^{1/2} \ll_\lambda T^{1-(\sigma/2)+\varepsilon},$$

$$\int\limits_1^T |S_1(\sigma+it)S_2(\sigma+it)|t^{-1/2}\mathrm{d}t \ll \Bigg(\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^2 t^{-1/2}\mathrm{d}t$$

$$\times \int_1^T |S_2(\sigma+it)|^2 t^{-1/2}\mathrm{d}t\Bigg)^{1/2} \ll_\lambda T^{3/4-(\sigma/2)+\varepsilon}.$$

Visi šie įverčiai kartu su 4.2 ir 4.4 lemomis, kai $T \to \infty$ duoda, kad

$$\int_1^T |\zeta_\lambda(\sigma+it)|^4\mathrm{d}t$$

$$= T\Bigg(\frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)} - 2\sum_{\substack{m_1n_1\neq m_2n_2\\ m_1+n_1\neq m_2+n_2}} \frac{\sin^2 \pi\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}{(m_1n_1)^{2\sigma}}\Bigg) + o(T).$$

△

5 Funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ ketvirtasis momentas, kai λ racionalusis skaičius

Šiame skyriuje įrodysime funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ ketvirtojo momento asimptotiką, kai λ racionalusis skaičius.

5.1 teorema. *Tarkime, kad λ yra racionalusis skaičius, $0 < \lambda < 1$. Tada, kai $3/4 < \sigma < 1$, galioja 4.1 teoremos formulė.*

Dydžio $S_1(s)$ ketvirtojo momento asimptotinė formulė neprikauso nuo parametro λ aritmetinės prigimties, todėl ji lieka panaši, kaip ir 4.2 lemoje.

5.2 lema. *Tegul $0 < \lambda < 1$ ir $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Tada*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^4 \mathrm{d}t = \frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)} - 2\sum_{m_1n_1=m_2n_2} \frac{\sin^2 \pi\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}{(m_1n_1)^2\sigma}.$$

Įrodymas. Pateiksime tik įrodymo santrauką. Tegul

$$T_1 = 2\pi \max((m_1+1)^2, (n_1+1)^2, (m_2+1)^2, (n_2+1)^2).$$

Tada iš $S_1(s)$ apibrėžimo, randame, kad

$$\begin{aligned}\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^4 \mathrm{d}t &= \sum_{m_1n_1=m_2n_2}^{*} \frac{(T-T_1)\mathrm{e}^{2\pi i\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}}{(m_1n_1)^2\sigma} \\ &+ O\Bigg(\sum_{m_1n_1\neq m_2n_2}^{*} \frac{|\log(m_2n_2/m_1n_1)|^{-1}}{(m_1n_1m_2n_2)^\sigma}\Bigg), \qquad (5.1)\end{aligned}$$

čia $*$ reiškia, kad sumuojame pagal visus $m_1, n_1, m_2, n_2 \in [1, m(T)]$. Kai $T\to\infty$, iš formulės

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2(k)}{k^{2\sigma}} = \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(4\sigma)}, \quad \sigma > \frac{1}{2},$$

čia $d(k)$ žymi daliklių funkciją, gauname tokį įvertį

$$\begin{aligned}\sum_{m_1n_1=m_2n_2}^{*} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}}{(m_1n_1)^2\sigma} &= \frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)} - 2\sum_{m_1n_1=m_2n_2} \frac{\sin^2 \pi\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}{(m_1n_1)^{2\sigma}} \\ &+ i\sum_{m_1n_1=m_2n_2} \frac{\sin^2 \pi\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}{(m_1n_1)^{2\sigma}} + o(1), \quad (5.2)\end{aligned}$$

T_1 apibrėžimas ir riba

$$\sum\sum_{0<m<n\le T} \frac{1}{m^\sigma n^\sigma \log(n/m)} = O(T^{2-2\sigma}\log T), \quad \frac{1}{2} \le \sigma < 1,$$

reiškia, kad, kai $T \to \infty$, galioja įvertis

$$\frac{1}{T} \sum_{m_1 n_1 = m_2 n_2}^{*} \frac{T_1}{(m_1 n_1)^{2\sigma}} = o(1)$$

ir

$$\frac{1}{T} \sum_{m_1 n_1 \neq m_2 n_2}^{*} \frac{|\log(m_2 n_2 / m_1 n_1)|^{-1}}{(m_1 n_1 m_2 n_2)^{\sigma}} = o(1)$$

Taigi (5.1) ir (5.2) įrodo 5.2 lemą. $\triangle$

Dabar rasime dydžio $S_2(s)$ ketvirtojo momento įvertį.

5.3 lema. *Tarkime, kad λ yra racionalusis skaičius ir $0 < \lambda < 1$. Tada, kai $\frac{3}{4} < \sigma < 1$ ir $T \to \infty$,*

$$\frac{1}{T} \int_1^T |S_2(\sigma + it)|^4 \mathrm{d}t = o(1).$$

Įrodymas. Pažymėkime

$$Z(T) = \int_1^T \Bigg| \sum_{0 \le m \le q(t)} \frac{1}{(m+\lambda)^{1-\sigma-it}} \Bigg|^4 \mathrm{d}t$$

ir

$$Z_1(T) = \int_1^T \Bigg| \sum_{1 \le m \le q(t)} \frac{1}{(m+\lambda)^{1-\sigma-it}} \Bigg|^4 \mathrm{d}t.$$

Tada, akivaizdu, kad

$$Z(T) \ll_\lambda T + Z_1(T). \tag{5.3}$$

Turime, kad

$$Z_1(T) = \int_1^T \sum_{m_1, n_1, m_2, n_2} \frac{1}{((m_1+\lambda)(n_1+\lambda)(m_2+\lambda)(n_2+\lambda))^{1-\sigma}} \left(\frac{(m_1+\lambda)(n_1+\lambda)}{(m_2+\lambda)(n_2+\lambda)} \right)^{it} \mathrm{d}t,$$

čia, kiekvienas m_1, n_1, m_2, n_2 įgyja visas reikšmes iš intervalo $[1, q(t)]$. Todėl

$$\begin{aligned} Z_1(T) \quad = \quad & \sum_{1 \le m_1, n_1, m_2, n_2 \le q(T)} \frac{1}{((m_1+\lambda)(n_1+\lambda)(m_2+\lambda)(n_2+\lambda))^{1-\sigma}} \\ & \times \int_{T_2}^{T} \left(\frac{(m_1+\lambda)(n_1+\lambda)}{(m_2+\lambda)(n_2+\lambda)} \right)^{it} \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

čia $T_2 = 2\pi \max(m_1^2, n_1^2, m_2^2, n_2^2)$. Iš pastarosios lygybės pastebime, kad

$$Z_1(T) \quad \ll \quad \sum_{(m_1+\lambda)(n_1+\lambda) = (m_2+\lambda)(n_2+\lambda)}^{*} \frac{T - T_2}{((m_1+\lambda)(n_1+\lambda))^{2-2\sigma}}$$

$$+\sum_{(m_1+\lambda)(n_1+\lambda)\neq(m_2+\lambda)(n_2+\lambda)}^{*} \frac{\left|\frac{\log(m_1+\lambda)(n_1+\lambda)}{(m_2+\lambda)(n_2+\lambda)}\right|^{-1}}{(m_1n_1m_2n_2)^{1-\sigma}}, \tag{5.4}$$

čia žvaigždutė $*$ reiškia, kad sumuojame pagal visus $m_1, n_1, m_2, n_2 \in [1, q(T)]$.

Pirmoji suma (5.4) išraiškoje yra įvertinama taip

$$\ll T \sum_{m\leq q^2(T)}\sum_{m-\sqrt{T}\leq n\leq m+\sqrt{T}} \frac{d(m)d(n)}{m^{2-2\sigma}}$$

$$\ll T^{3/2+\varepsilon}\sum_{m\leq q^2(T)} \frac{d(m)}{m^{2-2\sigma}} \ll T^{1/2+2\sigma+\varepsilon}$$

ir

$$\ll \sum\sum_{m_1,n_1\leq q(T)}\sum_{m_1n_1-\sqrt{T}\leq n\leq m_1n_1+\sqrt{T}} \frac{m_1^2 d(m_1n_1)d(n)}{m^{2-2\sigma}}$$

$$\ll T^{1/2+\varepsilon}\left(\sum_{m_1\leq q(T)} m_1^{2\sigma} \sum_{n_1\leq q(T)} \frac{1}{n_1^{2\sigma-2}}\right) \ll T^{1/2+2\sigma+\varepsilon}. \tag{5.5}$$

Išriškoje (5.4) antrosios sumos riba yra gauta naudojant Montgomerio-Vono teoremą, kuri yra pateikta 4.3 lemoje. Su realiąja teigiama konstanta $c(\lambda)$

$$\left|\log\frac{(m_1+\lambda)(n_1+\lambda)}{(m_2+\lambda)(n_2+\lambda)}\right| \geq c(\lambda)\min\left(\frac{1}{(m_1+\lambda)(n_1+\lambda)}, \frac{1}{(m_2+\lambda)(n_2+\lambda)}\right).$$

Todėl Montgomerio-Vono teorema parodo, kad

$$\sum_{(m_1+\lambda)(n_1+\lambda)\neq(m_2+\lambda)(n_2+\lambda)}^{*} \frac{|\log((m_1+\lambda)(n_1+\lambda)/(m_2+\lambda)(n_2+\lambda))|^{-1}}{(m_1n_1m_2n_2)^{1-\sigma}} \ll_\lambda T^{\varepsilon}$$

$$\sum_{1\leq m\leq q\leq^2(T)} \frac{m}{m^{2-2\sigma}} \ll_\lambda T^{2\sigma+\varepsilon}. \tag{5.6}$$

Dabar iš (5.3)-(5.6) mes gauname išraišką

$$Z(T) \ll_\lambda T^{1/2+2\sigma+\varepsilon}$$

Šis įvertis ir $S_2(s)$ apibrėžimas rodo, kad

$$\int_1^T |S_2(\sigma+it)|^4 \mathrm{d}t \ll \int_1^T t^{2-4\sigma}\mathrm{d}Z(t) \ll_\lambda T^{(5/2)-2\sigma+\varepsilon}.$$

Taigi, kai $\frac{3}{4} < \sigma < 1$,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T |S_2(\sigma+it)|^4\mathrm{d}t = 0.$$

$\triangle$

5.1 teoremos įrodymas. Atsižvelgiant į 5.2 ir 5.3 lemas užtenka įvertinti (4.2) lygybės reikšmes. Iš minėtų lemų, kai $\frac{3}{4} < \sigma < 1$ ir $T \to \infty$ gauname, kad

$$\frac{1}{T} \int_1^T (S_1^2(\sigma+it)\overline{S_2^2(\sigma+it)} + \overline{S_1^2(\sigma+it)}S_2^2(\sigma+it) + 4|S_1^2(\sigma+it)|^2|S_2^2(\sigma+it)|^2)\mathrm{d}t$$

$$\ll_\lambda \frac{1}{T}\Big(\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^4 \mathrm{d}t \int_1^T |S_2(\sigma+it)|^4 \mathrm{d}t\Big)^{1/2} = o(1), \tag{5.7}$$

$$\frac{1}{T} \int_1^T (2S_1^2(\sigma+it)\overline{S_1(\sigma+it)S_2(\sigma+it)} + 2S_1(\sigma+it)\overline{S_1^2(\sigma+it)}S_2(\sigma+it)$$

$$+2\overline{S_1(\sigma+it)}S_2^2(\sigma+it)\overline{S_2(\sigma+it)} + 2S_1(\sigma+it)\overline{S_2^2(\sigma+it)}S_2(\sigma+it))\mathrm{d}t$$

$$\ll_\lambda \frac{1}{T}\Big(\int_1^T |S_1(\sigma+it)|^4 \mathrm{d}t \int_1^T |S_2(\sigma+it)|^4 \mathrm{d}t\Big)^{1/4} \times (T^{1/2} + T^{(5/4)-\sigma+\varepsilon}$$

$$= o(1). \tag{5.8}$$

Aišku, kad kiti dėmenys (4.2) lygybėje yra $o(1)$, kai $T \to \infty$.

Taigi 5.2 ir 5.3 lemos, ir (5.7), (5.8) lygybės įrodo teoremą. $\triangle$

6 Išvados

Magistro darbe įrodyta artutinė funkcinė lygtis periodinei dzeta funkcijai $\zeta_\lambda(s)$. Ši lygtis yra panaudota funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ ketvirtojo momento asimptotikai kritinėje juostoje $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ gauti. Pagrindinis darbo rezultatas yra toks: Kai λ yra iracionalusis skaičius, $0 < \lambda < 1$, ir $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, arba kai λ yra racionalusis skaičius, $0 < \lambda < 1$, ir $\frac{3}{4} < \sigma < 1$, tuomet galioja tokia funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ ketvirtojo momento asimptotinė formulė

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta_\lambda(\sigma + it)|^4 \mathrm{d}t = \frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)} - 2 \sum_{\substack{m_1 n_1 = m_2 n_2 \\ m_1 + n_1 \neq m_2 + n_2}} \frac{\sin^2 \pi\lambda(m_1 + n_1 - m_2 - n_2)}{(m_1 n_1)^{2\sigma}}.$$

7 Summary

In the master thesis we obtain the asymptotics for the fourth power moment of the periodic zeta-function $\zeta_\lambda(s)$ with rational and irrational parameter λ. The main result of the thesis is following: Let λ, $0 < \lambda < 1$, be irrational number and $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, or let λ, $0 < \lambda < 1$, be rational number and $\frac{3}{4} < \sigma < 1$, then for the function $\zeta_\lambda(s)$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta_\lambda(\sigma+it)|^4 \mathrm{d}t = \frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)} - 2 \sum_{\substack{m_1 n_1 = m_2 n_2 \\ m_1+n_1 \neq m_2+n_2}} \frac{\sin^2 \pi\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}{(m_1 n_1)^{2\sigma}}.$$

Literatūra

[1] R. Garunkštis, A. Laurinčikas, J. Steuding, An approximate functional equation for the Lerch zeta-function, *Math. Notes*, **74**(3), 469–476 (2003).

[2] R. Garunkštis, A. Laurinčikas, J. Steuding, On the mean square of Lerch zeta-functions, *Archiv der Mathematik*, **80**, 47–60 (2003).

[3] A. Laurinčikas, R. Garunkštis, *The Lerch Zeta-Function*, Kluwer, Dordrecht, (2002).

[4] A. Laurinčikas, D. Šiaučiūnas, On the fourth power moment of the function $\zeta_\lambda(s)$, *Integral Transforms Spec. Funct.*, **18**(9), 629–638 (2007).

[5] A. Laurinčikas, D. Šiaučiūnas, On the fourth power moment of the function $\zeta_\lambda(s)$ II, *Integral Transforms Spec. Funct.*, **22**(10), 759–765 (2011).

[6] H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, Hilbert‘s inequality, *J. London Math. Soc.*, **8**(2), 73–82 (1974).

[7] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, D.R. Heath-Brown (Eds.), Clarendon Press, Oxford (1986).