

ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
TECHNOLOGIJOS FAKULTETAS
MECHANIKOS INŽINERIJOS KATEDRA

Nerijus Partaukas

DVISLUOKSNIŲ VAMZDINIŲ KONSTRUKCIJŲ
SKAIČIAVIMAS

Magistro darbas

Vadovas

KTU Panevėžio instituto
Technologijų fakulteto dekanas
prof. hab. dr. J. Bareišis

Šiauliai, 2007

Partaukas N. Computation of Two-Ply Tubular Constructions: Master thesis of mechanical engineer/research advisor Assoc. Prof. Hab.Dr. J.Bareišis; Šiauliai University, Technological Faculty, Mechanical Engineering Department. - Šiauliai, 2007.- 86p.

SUMMARY

In this Master of Science thesis, analytical model was formulated for the linear, elastic stress analysis of two layer, axial loaded tube (bars). Tube made from couple thick, concentric cylinders.

Proposed model based on assumption, that length and longitudinal (axial) deformations of bar members are equal. Radial tightness, before loading isn't equal zero. We also considered the influence of Poisson's ratio difference between members (contact pressure appears).

A constitutive model is proposed to describe the dependence between stress state and mechanical properties, dimensions, external load. Result of proposed model, are compared with Finite Elements Method results.

Key words: Two Layer Tube (Bars), Axial Loading, Contact Pressure, Thick cylinders, Axial (Circumferential, Hoop) Stress

TURINYS

LENTELIŲ SĄRAŠAS	4
PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS	5
SANTRUMPŲ IR TERMINŲ ŽODYNAS	7
IŽANGA	9
1. DAUGIASLUOKSNIAI KONSTRUKCINIAI ELEMENTAI	12
1.1. Daugiasluoksnių konstrukcinių elementų ypatumai	12
1.2. Daugiasluoksniai strypai (DS)	15
1.3. Analitinės DS skaičiavimo metodikos	18
1.3.1. Supaprastinta DS skaičiavimo metodika	19
1.3.2. Lamė storasienių cilindrų (SC) skaičiavimo uždavinys	21
1.4. Skaitiniai DS skaičiavimo metodai	26
1.4.1. Baigtinių elementų metodas (BEM)	26
1.4.2. Kiti skaitiniai metodai	27
2. DVISLUOKSNIŲ TEMPIAMŲ-GNIUŽDOMŲ STRYPŲ ANALIZĖ	29
2.1. Tyrimo objektas, tikslas ir uždaviniai	29
2.2. Įtempių skaičiavimo metodika	30
2.3. Įtempių lygčių analizė	37
3. TEMPIAMŲ-GNIUŽDOMŲ DVISLUOKSNIŲ STRYPŲ TYRIMAS	40
3.1. Įtempių analizė	40
3.1.1. Įtempių priklausomybė nuo konstrukcijos tipo	40
3.1.2. Įtempių priklausomybė nuo tamprumo modulių santykio ϕ	45
3.1.3. Įtempių priklausomybė nuo Puasono koeficientų santykio χ	51
3.1.4. Įtempių priklausomybė nuo radialinės įvaržos δ	55
3.1.5. Įtempių priklausomybė nuo skerspjuvio plotų santykio ψ	59
3.1.6. Įtempių priklausomybė nuo sujungimo spindulio R_1	62
3.2. Įtempių būvio tyrimas baigtinių elementų metodu	65
3.2.1. Programinės įrangos pasirinkimas	65
3.2.2. Programos testavimas	66
3.2.3. Uždavinio sprendimas	70
REZULTATAI IR IŠVADOS	797
LITERATŪROS SĄRAŠAS	79
PRIEDAI	80
1 PRIEDAS	81
2 PRIEDAS	83

3 PRIEDAS.....	85
----------------	----

LENTELIŲ SARAŠAS

3.1.1.1. Pasiūlytos metodikos įtempių komponentų vertės, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametrai r_1	45
3.1.2.1. Pasiūlytos metodikos tiesioginio tipo, pilnavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametrai ϕ	49
3.1.2.2. Pasiūlytos metodikos atvirkštinio tipo, pilnavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametrai ϕ	49
3.1.2.3. Pasiūlytos metodikos tiesioginio tipo, tuščiavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametrai ϕ	50
3.1.2.4. Pasiūlytos metodikos atvirkštinio tipo, tuščiavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametrai ϕ	51
3.1.3.1. Pasiūlytos metodikos, pilnavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametrai χ	54
3.1.3.2. Pasiūlytos metodikos, tuščiavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametrai χ	54
3.1.4.1. Pasiūlytos metodikos tiesioginio tipo, pilnavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametrai δ	57
3.1.4.2. Pasiūlytos metodikos atvirkštinio tipo, pilnavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametrai δ	58
3.1.4.3. Pasiūlytos metodikos tiesioginio tipo, tuščiavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametrai δ	58
3.1.4.4. Pasiūlytos metodikos atvirkštinio tipo, tuščiavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametrai δ	59
3.1.5.1. Pasiūlytos metodikos pilnavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametrai ψ	60
3.2.2.1. Duomenys programos testavimui	67
3.2.2.2. Storasienio cilindro analitinės skaičiavimo metodikos ir baigtinių elementų metodo rezultatai, jų palyginimas.....	68
3.2.3.1. Duomenys daugiasluoksnio strypo uždavinio sprendimui	71
3.2.3.2. Dvisluoksnų strypo, vidinio cilindro analitinės skaičiavimo metodikos ir baigtinių elementų metodo rezultatai, jų palyginimas	74
3.2.3.3. Dvisluoksnų strypo, išorinio cilindro analitinės skaičiavimo metodikos ir baigtinių elementų metodo rezultatai, jų palyginimas	75

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

1.1 pav. Dvisluoksnis strypas	13
1.2 pav. Daugiasluoksnis velenas	13
1.3 pav. Daugiasluoksnė sija	14
1.4 pav. Daugiasluoksnė plokštė	14
1.5 pav. Daugiasluoksnis kevalas	14
1.6 pav. Dvisluoksnis vamzdis	15
1.7 pav. DS tipai pagal konstrukciją.....	16
1.8 pav. DS tipai pagal skerspjūvio ploto kontūrą.....	16
1.9 pav. DS tipai pagal sluoksnių išsidėstymą.....	17
1.10 pav. DS konstrukcinė schema.....	20
1.11 pav. DS apkrovimo schema	21
1.12 pav. Cilindrų geometrija prieš ir po surinkimo.....	22
2.1. pav. Strypo schema, apkrovos	29
3.1. pav. Tiesioginio tipo konstrukcijos ašinių įtempių priklausomybė nuo parametro r_1	40
3.2. pav. Tiesioginio tipo konstrukcijos radialinių įtempių priklausomybė nuo parametro r_1	41
3.3. pav. Tiesioginio tipo konstrukcijos žiedinių įtempių priklausomybė nuo parametro r_1	41
3.4. pav. Tiesioginio tipo konstrukcijos ekvivalentinių įtempių priklausomybė nuo parametro r_1 ..	41
3.5. pav. Atvirkštinio tipo konstrukcijos ašinių įtempių priklausomybė nuo parametro r_1	43
3.6. pav. Atvirkštinio tipo konstrukcijos radialinių įtempių priklausomybė nuo parametro r_1	43
3.7. pav. Atvirkštinio tipo konstrukcijos žiedinių įtempių priklausomybė nuo parametro r_1	43
3.8. pav. Atvirkštinio tipo konstrukcijos ekvivalentinių įtempių priklausomybė nuo parametro r_1 .	44
3.9. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos ašinių įtempių priklausomybė nuo parametro ϕ	46
3.10. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos radialinių įtempių priklausomybė nuo parametro ϕ	47
3.11. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos žiedinių įtempių priklausomybė nuo parametro ϕ	47
3.12. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos įtempių intensyvumo priklausomybė nuo parametro ϕ	48
3.13. pav. Pilnavidurės konstrukcijos ašinių įtempių priklausomybė nuo parametro χ	52

3.14. pav. Pilnavidurės konstrukcijos radialinių įtempių priklausomybė nuo parametro χ	52
3.15. pav. Pilnavidurės konstrukcijos žiedinių įtempių priklausomybė nuo parametro χ	53
3.16. pav. Pilnavidurės konstrukcijos įtempių intensyvumo priklausomybė nuo parametro χ	53
3.17. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos ašinių įtempių priklausomybė nuo parametro δ	55
3.18. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos radialinių įtempių priklausomybė nuo parametro δ	56
3.19. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos žiedinių įtempių priklausomybė nuo parametro δ	56
3.20. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos įtempių intensyvumo priklausomybė nuo parametro δ	57
3.21. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos ašinių įtempių priklausomybė nuo parametro ψ	60
3.22. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos radialinių įtempių priklausomybė nuo parametro ψ	61
3.23. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos žiedinių įtempių priklausomybė nuo parametro ψ	61
3.24. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos įtempių intensyvumo priklausomybė nuo parametro ψ	62
3.25. pav. Tiesioginio tipo tuščiavidurės konstrukcijos ašinių įtempių priklausomybė nuo parametro R_1	63
3.26. pav. Tiesioginio tipo tuščiavidurės konstrukcijos radialinių įtempių priklausomybė nuo parametro R_1	63
3.27. pav. Tiesioginio tipo tuščiavidurės konstrukcijos žiedinių įtempių priklausomybė nuo parametro R_1	64
3.28. pav. Tiesioginio tipo tuščiavidurės konstrukcijos įtempių intensyvumo priklausomybė nuo parametro R_1	64
3.29. pav. Storasienio cilindro skaičiavimo schema.....	67
3.30. pav. Plokščios srities suskaidymas į BE, jų numeracija.....	67
3.31. pav. Kontūrą veikiančios apkrovos ir atramos.....	68
3.32. pav. Dvisluoksnio strypo skaičiavimo schema.....	71
3.33. pav. Vidinio cilindro BE, mazgai, jų numeracija.....	71
3.34. pav. Vidinio cilindro kraštinės sąlygos.....	72
3.35. pav. Išorinio cilindro BE, mazgai, jų numeracija.....	72
3.36. pav. Pilna dvisluoksnių strypo skaičiavimo BEM schema.....	73

3.37. pav. Radialinių įtempių pasiskirstymas išoriniame cilindre.....	73
3.38. pav. Radialinių įtempių pasiskirstymas vidiniame cilindre.....	73

SANTRUMPŲ IR TERMINŲ ŽODYNAS

1, 2 – žymi medžiagos (sluoksnio) numerį daugiasluoksnėje konstrukcijoje.

A_i – strypo i-jo elemento (sluoksnio) skerspjūvio plotas.

A_{Σ} – daugiasluoksnės konstrukcijos skerspjūvio plotas.

ATK – atvirkštinio tipo konstrukcija.

B_i – strypo i-jo elemento (sluoksnio) ašinis standumas.

B_{Σ} – daugiasluoksnės konstrukcijos ašinis standumas.

BE – baigtinis elementas.

BEM – baigtinių elementų metodas.

DKE – daugiasluoksnis konstrukcinis elementas.

E_1, E_2 – medžiagos tamprumo (Jungo) moduliai.

F_z – konstrukciją veikianti išorinė, ašinė (oz) jėga.

GC – geometrinis (skerspjūvio) centras.

HKE – homogeninis konstrukcinis elementas.

i – DKE sluoksnio indeksas.

k – cilindro vidinio ir išorinio spindulio santykis.

L – strypo ilgis.

p – kūno paviršiuje veikiantis slėgis (išskirstyta apkrova).

p_i – išoriniame cilindrinio kūno paviršiuje veikiantis slėgis.

p_v – vidiniame cilindrinio kūno paviršiuje veikiantis slėgis.

p_k – kontaktinis slėgis, veikiantis tarp DKE elementų sluoksnių.

r – cilindro vidinis spindulys.

R – cilindro išorinis spindulys.

SC – standumo centras.

SE – super-elementas.

TTK – tiesioginio tipo konstrukcija.

δ – radialinė įvarža tarp cilindrų ($\delta = R_1 - r_2$).

Δ – dydžio pokytis.

Δ_{\max} – dydžio paklaidos režis (maksimali santykinė paklaida).

∂ – dydžio dalinis diferencialas.

π – apskritimo lanko ir skersmens santykis.

ρ, θ, z – cilindrinės koordinačių sistemos komponentės.

x, y, z – stačiakampės koordinačių sistemos komponentės.

ϕ – konstrukcijos medžiagų tamprumo modulių santykis ($\phi = E_2/E_1$).

χ – konstrukcijos medžiagų Puasono koeficientų santykis ($\chi = \nu_2/\nu_1$).

ψ – konstrukcijos skerspjūvio plotų santykis ($\psi = A_2/A_1$).

ε – tamprus kūno deformacija.

ν – medžiagos Puasono koeficientas.

σ – įtempiai tampriai deformuotame kūne.

σ_e – ekvivalentiniai įtempiai (energetinė stiprumo teorija).

IŽANGA

Praėjusio amžiaus pirmame dešimtmetyje, norint sustiprinti betono kolonas buvo pasiūlyta jas padengti plieno lakštais. Vėliau skystas betonas imtas tiesiogiai lieti į iš anksto parengtą metalinę formą. Toks patobulinimas leido ne tik pagreitinti, supaprastinti statybos procesą bet ir apsaugojo betoną nuo mechaninių, atmosferinių poveikių. Netrukus buvo pastebėta kad nauja konstrukcija gali atlaikyti keletą kartų didesnes apkrovas, kadangi suirus betonui kevalas trukdo jam išbyrėti. Dabartiniu metu šio tipo konstrukcijų stiprumo skaičiavimo ir projektavimo teorija yra gana gerai išvystyta [5-12]. Jos plačiai naudojamos statant tiltus, kelius, namus.

Minėtos sustiprinto betono kolonos - konkretus labai plačios srities, vadinamųjų daugiasluoksnių konstrukcinių elementų, efektyvaus panaudojimo pavyzdys.

Daugiasluoksnis konstrukcinis elementas (DKE), tai elementas sudarytas iš kelių skirtingų medžiagų. Medžiagų mechaninės charakteristikos yra skirtingos, o sluoksniai išorines apkrovas atlaiko kartu. Lyginant su įprastais, vienalyčiais konstrukciniais elementais, DKE pasižymi daugeliu pranašumų. Pirmiausia keičiant sluoksnių medžiagą ir jų išdėstymą galima pakeisti visos konstrukcijos mechanines charakteristikas: stiprumą, standumą, patvarumą, atsparumą dilimui ir t.t.. Antra, gerokai lengviau pakeisti nemechaninius parametrus: laidumą šilumai, atsparumą cheminiam poveikiui, estetinę išvaizdą. Galiausiai, jų panaudojimas leidžia sumažinti konstrukcijos masę, kainą, efektyviau panaudoti medžiagas.

Klasikinės tamprumo teorijos skaičiavimo metodikos sukurtos HKE, todėl DKE skaičiavimui sunkiai pritaikomos. Pavyzdžiui S.P.Timoshenko pasiūlyta redukuoto skerspjuvio metodika, sijų skaičiavimui, tinka tik simetrinėms konstrukcijoms. Be to netinka tangentinių įtempių nustatymui, nes gaunamas neteisingas įtempių pasiskirstymo pobūdis ir klaidingos reikšmės.

Sustiprinto betono kolonų skaičiavimo metodika negali būti pritaikyta kitiems DKE, nes betono irimo mechanizmas būdingas tik keraminėms medžiagoms. Antra jų esmė – skaitinių, empirinių algoritmų taikymas, todėl gaunami rezultatai yra apytiksliai ir jiems negali būti suteikta analitinė išraiška.

Baigtinių elementų metodas (BEM) - universalus ir tinkamai naudojamas duoda gana tikslius rezultatus, dėl to taikomas projektuojant DKE kaip patikrinamoji priemonė. Nepaisant privalumų, jis netinka, kai reikia nustatyti priklausomybes siejančias konstrukcinius ir stiprumo parametrus. Jų nežinant sunku suprasti priežastinius ryšius, prognozuoti konstrukcijos savybes, reakciją į išorines apkrovas, be to sumažėja optimizavimo metodų panaudojimo galimybės.

Nustatyta kad mažėjant daugiasluoksnių sijų sluoksnių storiui jos, analitiškai apskaičiuotos, mechaninės savybės artėja prie sluoksniuotos kompozitinės medžiagos savybių. Vadinasi DKE projektavimas, tam tikra prasme, prilygsta naujos kompozitinės medžiagos kūrimui. Todėl galimybė iš sudedamųjų dalių savybių gauti medžiagos charakteristikas yra pagrindinė priemonė kuriant tokio tipo medžiagas.

Nepaisant to, kad sritis labai plati, ir svarbi praktiniu požiūriu, analitinių metodikų DKE skaičiuoti nėra daug. Pagrindinės priežastys: didelė DKE įvairovė, sudėtingumas ir naujumas. Ypač mažai tokių kurios tiktų bendriems, sudėtingesnio apkrovimo atvejams, mat dauguma jų remiasi prielaidomis, gerokai suprastinančiomis nagrinėjamą reiškinį. Realiomis sąlygomis šios prielaidos retai yra tenkinamos, todėl apskaičiuotos įtempių ir deformacijų reikšmės yra apytikslės, o tam tikrais atvejais, gali būti nepatikimos.

Šiame darbe bus nagrinėjama viena DKE apkrovimo schema – tempiami-gniuždomi vamzdžiai (strypai). Pagrindinį dėmesį skirsime žiedo (skritulio) formos dvisluoksniams vamzdžiams-strypams (žr. 1.7 pav.). Dažniausiai tokio tipo elementams skaičiuoti naudojama supaprastinta metodika [1]. Ji remiasi prielaidomis, kad nei strypo šoniniuose paviršiuose, nei tarp sluoksnių, nėra slėgio apkrovų, o išilginės jų deformacijos - vienodos. Realiose konstrukcijose šios apkrovos atsiranda. Išoriniuose paviršiuose dėl dujų arba skysčių slėgio, vidiniuose dėl medžiagų Puasono, temperatūrinio plėtimosi koeficientų verčių skirtumo, radialinės (surinkimo) įvaržos.

Pagrindinis darbo tikslas - pateikti analitinę tempiamų-gniuždomų dvisluoksnių vamzdžių-strypų skaičiavimo metodiką, atsižvelgiant į medžiagų Puasono koeficientų verčių skirtumą ir surinkimo įvaržą.

Darbo uždaviniai – nustatyti funkcines priklausomybes tarp konstrukcijos geometrinių, medžiagų mechaninių charakteristikų bei svarbiausių įtempių. Galiausiai kritiškai įvertinti apytikslę skaičiavimo metodiką, nustatyti gaunamų paklaidų vertes, nuo kokių faktorių jos priklauso ir kokiomis aplinkybėmis gali būti naudojama, o kada ne.

Tyrimo objektas - dvisluoksnius strypas (vamzdis), veikiamas tempimo (gniuždymo) apkrovų, kai sluoksnius sudarančių medžiagų Puasono koeficientai nėra vienodi. Apkrovus tokį strypą ašine jėga tarp cilindrinų paviršių susidaro kontaktinis slėgis.

Tyrimo objektas sudėtingas ir originalus, todėl pirmiausia detalai išnagrinėsime atskirus supaprastintus jo atvejus, fiksuodami prielaidas kuriomis jie remiasi. Tuomet remdamiesi tamprumo teorijos lygtimis ir priklausomybėmis eliminuosime šias prielaidas iš matematinio modelio. Tokiu būdu atskirus dalinius atvejus apjungsime į vieną, bendresnį.

Mokslinis naujumas – daugiasluoksniams strypams skaičiuoti yra pasiūlyta supaprastinta metodika [1]. Ji neatsižvelgia į strypo medžiagų Puasono koeficientų, radialinės įvaržos įtaką. Šiame darbe bus pasiūlyta nauja patikslinta skaičiavimo metodika, įvertinanti šių veiksnių įtaką.

Darbe be detalaus įtempių lygčių išvedimo ir egzistuojančių metodikų analizės pateikiama daug grafinės medžiagos parodančios kaip svarbiausi įtempiai, priklauso nuo medžiagų poros, tamprumo modulių, Puasono koeficientų, skerspjūvio plotų, konstrukcijos tipo, matmenų. Taip pat pasiūlyta metodika lyginama su baigtinių elementų metodo ir apytikslės metodikos duodamais rezultatais. Analizuojami skirtingų metodikų trūkumai ir privalumai, gaunamos paklaidos, jų atsiradimo priežastys, praktinio panaudojimo galimybės ir ribos.

1. DAUGIASLUOKSNIAI KONSTRUKCINIAI ELEMENTAI

1.1. Daugiasluoksnių konstrukcinių elementų ypatumai

Daugiasluoksnis konstrukcinis elementas (DKE) – tai konstrukcinis elementas sudarytas iš dviejų, ar daugiau, skirtingų medžiagų ir atlaikantis išorines apkrovas tarsi vientisas kūnas. Medžiagos laikomos skirtingomis jei jų mechaninių charakteristikų vertės skiriasi.

Nuo įprastų homogeninių konstrukcinių elementų (HKE), DKE skiriasi ne tik struktūra bet ir ribinių būvių nustatymo metodika. Pavyzdžiui HKE stiprumas įvertinamas ekvivalentiniais įtempiais (plastiškoms medžiagoms), arba maksimalių tangentinų įtempių verte (trapioms medžiagoms). Tuo tarpu DKE dar turi tenkinti vientisumo sąlygą. Tai reiškia kad sluoksniai turi išlikti sukibę, konstrukcija veikia kaip vientisas kūnas.

Daugelis DKE pasižymi specifiniu irimo mechanizmu, atskiri sluoksniai suklumpa, pakinta medžiagos savybės ar ištrupa atskiri jos tūriai, bet elementas pilnai nesuyra. Tokiais atvejais sunku nustatyti ribinį būvį, todėl naudojamas sąlyginiai būviai. Tai reiškia kad elementas laikomas suirusiu kai netenka tam tikros dalies pradinių savo charakteristikų, (pavyzdžiui standumo). Ši sąlyginė riba priklauso nuo konstrukcijai keliamų reikalavimų.

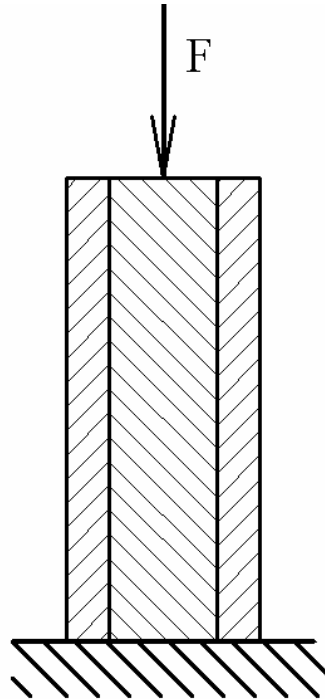
DKE pasižymi didele įvairove tiek formos, tiek konstrukcijos, tik apkrovimo schemas atžvilgiu todėl pravartu panagrinėti jų klasifikaciją. Pagal sluoksnių skaičių skirstomi į dvisluoksnius ir daugiasluoksnius, pastarieji į lyginio ir nelyginio sluoksnių skaičiaus konstrukcijas. Pagal formą ir apkrovimo schemą DKE skirstomi į tokias grupes:

- Strypai – tiesūs strypo formos DKE apkrauti simetrinėmis ašinėmis jėgomis. Apkrovos laikomos simetrinėmis jei jų atstojamoji pridėta strypo skerspjūvio standumo centre (SC).
- Velenai – tiesūs strypo formos DKE, apkrauti sukimo momentais.
- Sijos – tiesūs arba kreivi strypo formos DKE, apkrauti lenkimo momentais ir/arba jėgomis statmenomis geometriniai strypo ašiai.
- Kevalai (plokštės) – kreivalinijinio paviršiaus (plokštės) formos DKE, apkrauti slėgio ir/arba centruotomis jėgomis, momentais.
- Vamzdžiai – cilindro formos DKE apkrauti simetriškai jo ašies atžvilgiu pasiskirsčiusiu normaliniu slėgiu.

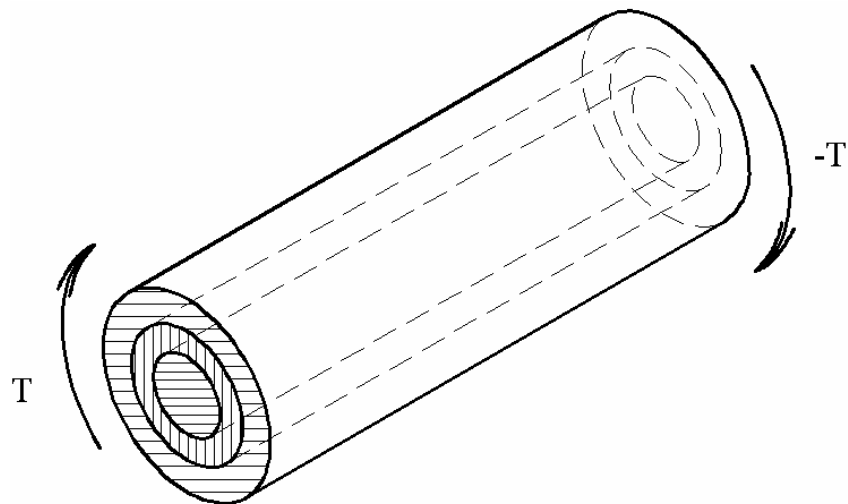
Išvardintos grupės atitinka paprastus (grynuosius) apkrovimo atvejus. Realiuose konstrukcijose dažnai pasitaiko sudėtinės apkrovos. Štai keletas pavyzdžių. Necentriškai gniuždomame strype veikia ašinės apkrovos ir lenkimo momentai. Smagračio velenas veikiamas

sukimo, lenkimo momentų ir radialinių jėgų, bei šiame darbe nagrinėjamas, dvisluksnis strypas-vamzdis, kuriame be ašinių apkrovų veikia ir kontaktinis slėgis.

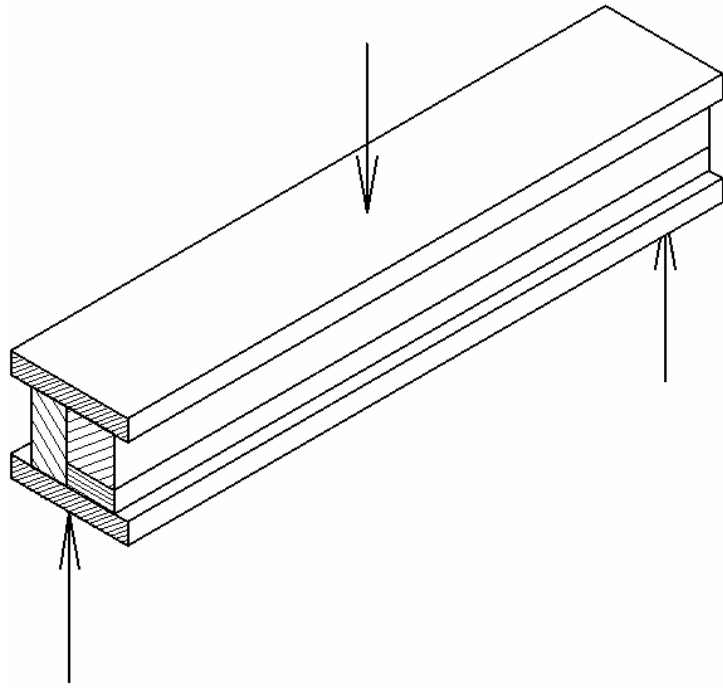
Tiesinėje tamprumo zonoje, kur galioja superpozicijos principas sudėtinį, apkrovimą galima išskaidyti į keletą paprastų. Tokiu būdu nustatyti įtempiai sumuojami, gautas redukuotas įtempis naudojamas konstrukcijos stiprumo įvertinimui.



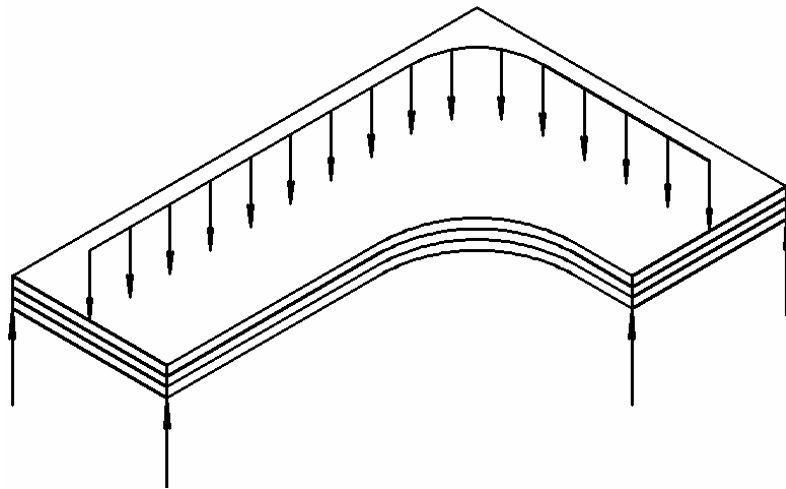
1.1 pav. Dvisluksnis strypas



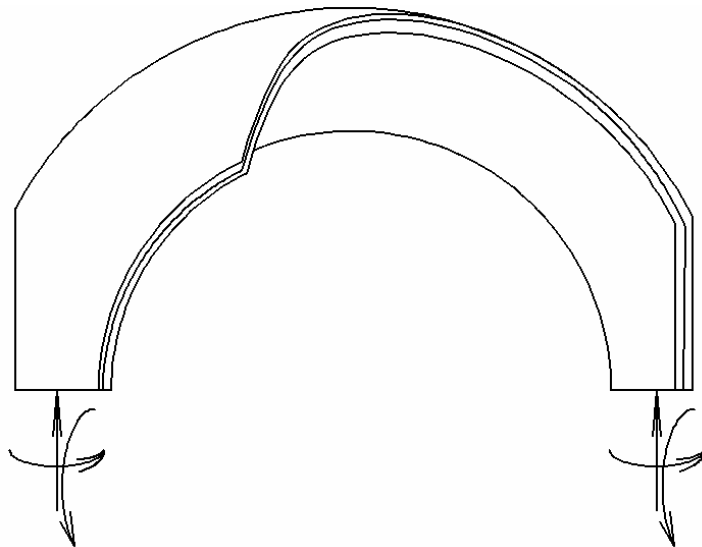
1.2 pav. Daugiasluksnis velenas



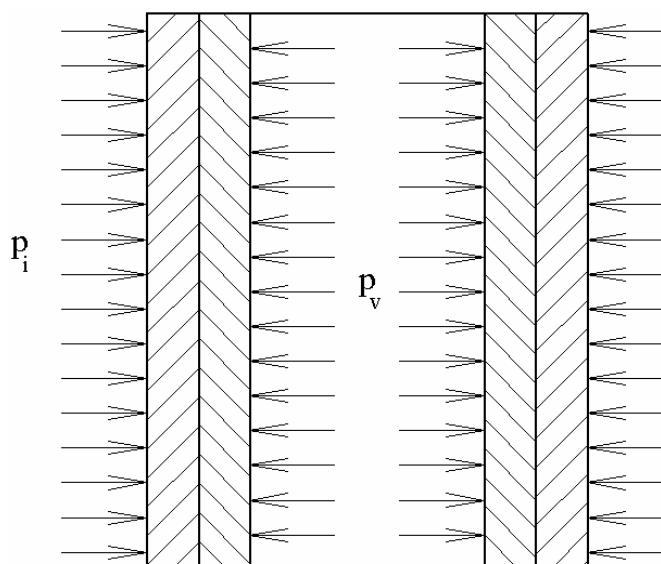
1.3 pav. Daugiasluoksė sija



1.4 pav. Daugiasluoksė plokštė



1.5 pav. Daugiasluoksnis kevalas



1.6 pav. Dvisluoksnis vamzdis

Pagrindinis DKE skirtumas, lyginant su HKE, tai kad galima keisti ne tik konstrukcijos kaip visumos stiprumo charakteristikas bet ir jos mechanines, fizikines ar chemines savybes pasirinkta kryptimi. Nemažai DKE pradžioje buvo sukurti siekiant išgauti reikiamus masės, savikainos, paviršių fizikinius parametrus. Ir tik vėliau kai šios konstrukcijos gana greitai atsisluoksniuodavo ar suirdavo, buvo imta detaliam nagrinėti jų deformavimo, irimo mechanizmai.

Istoriškai DKE pirmiausiai pradėti naudoti kosmoso ir karinėje technikoje. Vėliau sėkmingai panaudoti civilinėje aviacijoje, statyboje. Šiandien skverbiasi į automobilių, buitinių prietaisų, baldų pramonę. Tradicines metalų konstrukcijas DKE išstumia tose srityse kur be stiprumo svarbios ir kitos savybės: masė, kaina, laidumas šilumai, atsparumas cheminiam poveikiui, paviršių faktūra, tekstūra, estetika ir t.t.. Kadangi tokių sričių skaičius nepaliaujamai auga, galima neabejoti jog šios srities moksliniai tyrimai yra perspektyvūs ir turi didelę praktinę vertę.

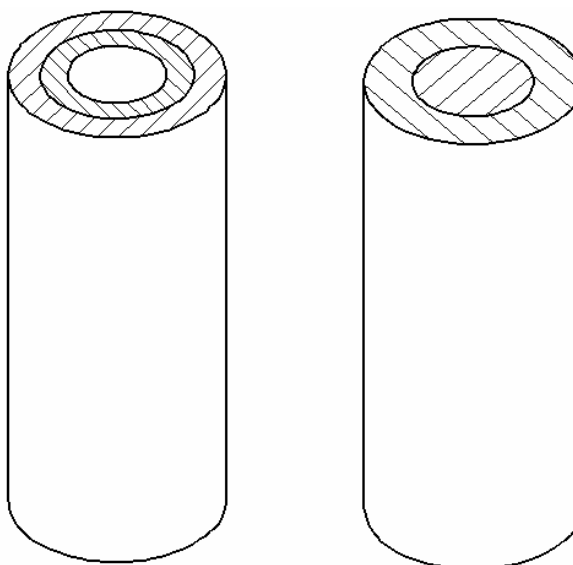
Šiame darbe mes sutelksime dėmesį ties vienu DKE tipu – daugiasluoksniais strypais, didžiausią dėmesį skirdami dvisluoksniams, apskrito skerspjuvio, tempiamiems-gniuždomiems strypams.

1.2. Daugiasluoksniai strypai (DS)

Daugiasluoksniai strypai (DS) – tai tiesios geometrinės ašies strypo formos DKE, veikiami ašinių jėgų. Tam kad neatsirastų lenkimo momentų, šių jėgų atstojamoji turi būti pridėta strypo skerspjuvio standumo centre. Dvisluoksniui strypui SC yra atkarpoje jungiančioje jo elementų skerspjuvio plotų geometrinius centrus (GC). Standumo centras dalija šią atkarpą į dvi dalis kurių ilgiai yra atvirkščiai proporcingi sluoksnio standumui. Kitaip tariant pirmojo sluoksnio standumo ir atstumo nuo strypo GC iki SC sandauga lygi antrojo sluoksnio standumo ir atstumo nuo jo GC iki to paties SC, sandaugai. Sluoksnio standumu vadiname jo skerspjuvio ploto ir medžiagos tamprumo modulio sandaugą.

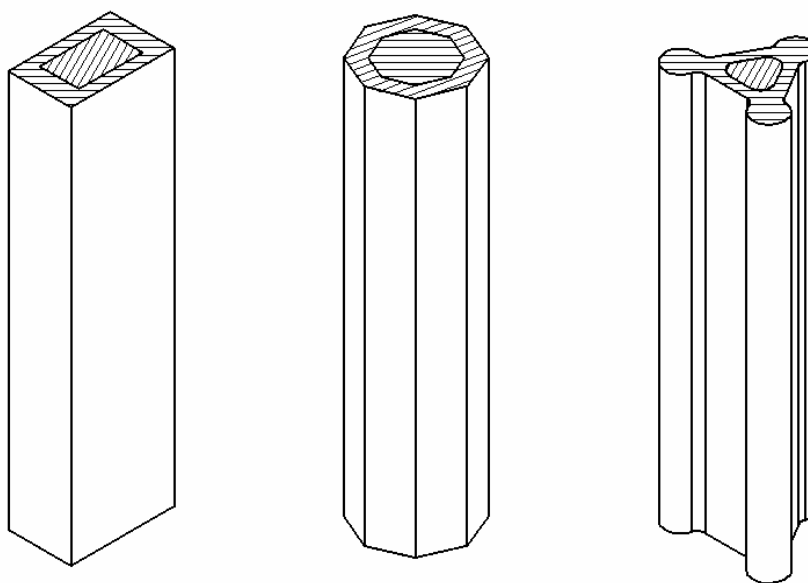
Trisluoksniams strypui pirmiausiai nustatomas dviejų gretimų sluoksnių SC. Tuomet šie du sluoksniai pakeičiami vienu ekvivalentiniu, kurio plotas ir standumas lygus sudedamųjų dalių atitinkamų plotų ir standumų sumai. Taip gaunama nauja kvazidvisluoksė konstrukcija kurios SC laikomas kartu ir GC. Visos konstrukcijos SC nustatomas kaip ir dvisluoksniui strypui. Keturių sluoksnių konstrukcijai SC nustatomas analogiškai kaip ir trijų, tik atsiranda papildomas iteracinis veiksmas. Pagal tą pačią skaičiavimo schemą nustatomas ir n sluoksnių strypo SC. Pažymėtina jog naudojant baigtinį, pastovų medžiagų skaičių ir neapreštai mažinant sluoksnių storį (jų storių suma turi išlikti pastovi) nustatytas SC artėja prie DKE skerspjūvio GC.

Pagal konstrukcijos tipą DS būna tuščiaviduriai arba pilnaviduriai (žr. 1.7 pav.).



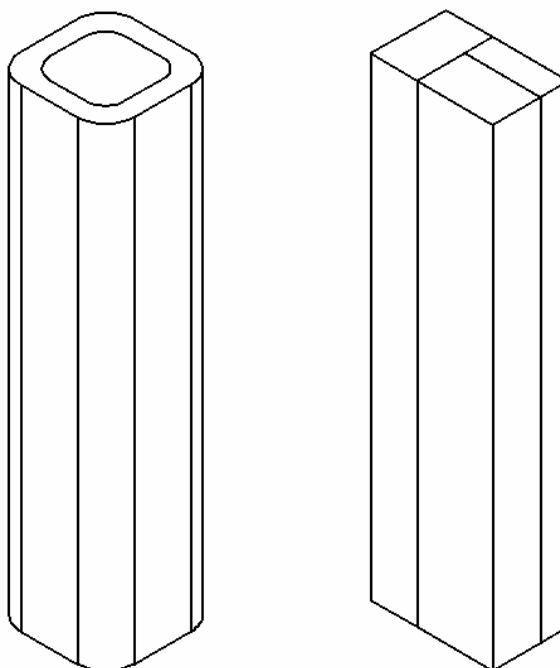
1.7 pav. DS tipai pagal konstrukciją

Pagal DS skerspjūvio plotą skirstomi į: apvalaus, stačiakampio, daugiakampio ir kreivalinijinio skerspjūvio kontūro (žr. 1.6 pav).



1.8 pav. DS tipai pagal skerspjūvio ploto kontūrą

Pagal formos ir sluoksnių išsidėstymą skirstomi į ašiai simetriškus ir asimetrinius (žr. 1.9 pav.).



1.9 pav. DS tipai pagal sluoksnių išsidėstymą

Be šių tipų DS dar skirstomi į dvisluoksnių ir daugiasluoksnius, pagal sluoksnių tamprumo modulių, dydį į tiesioginio, atvirkštinio, mišraus standumo, pagal sluoksnių skerspjūvio santykį į vienodų ir skirtingų plotų konstrukcijas.

Taigi matome jog, atrodytų tokia paprasta DKE grupė kaip DS, pasižymi didžiule konstrukcinių variantų įvairove. Viena vertus tai suteikia plačias galimybes renkantis konstrukcinę chemą, ypač kai tenka atsižvelgti į tokius nemechaninius jos parametrus kaip savikaina, lyginamasis svoris, atsparumas atmosferiniams, cheminiams poveikiams ir t.t.. Tačiau kita vertus gerokai apsunkina projektavimą. Pirmiausiai dėl to kad sunku iš anksto numatyti kuris variantas geriausiai atitiktų techninę užduotį. Kadangi keičiamų parametrų labai daug, empiriniai-euristiniai metodai čia menkaverčiai, nes negali užtikrinti jog jų pateiktas sprendinys yra tikrai optimalus ar bent jau jam artimas. Antra sunku perprasti kurie kintamieji yra svarbūs (jų pokytis daro esminį poveikį konstrukcijos stiprumui, standumui), o kurie mažareikšmiai (į jų įtaką galima nekreipti dėmesio). Galiausiai ar kintamojo svarba pastovi, ar priklauso nuo tam tikrų aplinkybių, jei taip kokios tos aplinkybės ir kokią įtaką daro.

Visi šie klausymai gali pasirodyti antraeiliai ir geriausiu atveju tik ribotu dydžiu pagerinti konstrukcijos stiprumo, ekonominius ar kitus parametrus, bet negalinčius iš esmės pakeisti požiūrio į nagrinėjamą objektą. Tačiau tam tikromis sąlygomis šie klausimai gali tapti esminiais ar net gyvybiškai svarbiais. Pateiksime keletą pavyzdžių, vienas jų, iš įžangoje minėtų sustiprinto betono kolonų, panaudojimo antras iš aviacijos istorijos.

Pastebėjus kad sustiprinto, plieno šarvu, betono kolonos gali atlaikyti gerokai didesnes apkrovas lyginant su įprasto betono kolonomis, imta didinti leistinas jų apkrovas. Kadangi tiek eksperimentiniai bandymai tiek praktinė patirtis rodė konstrukciją esant visiškai pajėgią atlaikyti tokio dydžio apkrovimus imta plačiai jas naudoti statybose. Iš pradžių tai visiškai pasiteisino, mat kolonos gerai atlaikydavo vidutinius ir net didelius žemės drebėjimus. Netrukus nutiko tai ko niekas nelaukė. Pastatuose dėl teroristinių išpuolių ar kitų priežasčių kilus gaisrui temperatūra pakyla iki 300-500 °C, ar net daugiau. Esant tokiai temperatūrai sumažėja medžiagos stiprumo riba, tamprumo modulis, kompozitinės medžiagos dar ir apdega, sutrūkinėja. Betono šerdis būna tiek apkrauta kad joje dar statybos metu susiformuoja daugybė plyšių. Susilpnėjęs šarvui plyšiai toliau plečiasi, šerdis galutinai suyra ir vos gaubiantis šarvas praplyšta, visa kolona akimirksniu sugriūva.

Aviacijoje kniedytus plieninius naikintuvų korpusus ėmus keisti kompozitiniais, sparnai prie fiuzeliažo būdavo prijungiami plieniniais lynais. Tvirtinimas gerai atlaikydavo tiek statiškai tiek dinamiškai pridėtas jėgas, todėl imtas naudoti naujame karinių naikintuvų modelyje. Po bandomųjų skrydžių keletas lėktuvų nukrito. Kadangi panašūs incidentai dažnai pasitaikydavo ir ankstesnių modelių bandymų metu, niekas tam neteikė didelės reikšmės. Tačiau avarijos nesiliovė ir netgi ėmė dažnėti. Visi incidentai vykdavo pagal vieną scenarijų. Lėktuvui pikiuojant, staigiai pakeitus atakos kampą sparnai, tiesiogine ta žodžio prasme, nulūždavo. Pakartotinai bandymai priežasties neišaiškino, nes laboratorijos sąlygomis sparnai atlaikydavo ir keletą kartų padidintas jėgas. Situacija paaiškėjo pradėjus detaliai nagrinėti aerodinamines apkrovų pridėties zonas. Sparnas buvo sukonstruotas ir apskaičiuotas taip lyg keliamoji jėga veiktų jo skerspjūvio geometriniame centre. Iš tikrųjų ši jėga veikia pirmame jo trečdalyje. Vadinasi sparną be lenkimo momentų veikė ir sukimo momentas. Veikiančios apkrovos sumuojasi, pirmiausiai ištraukiami kraštiniai lynai, o po to ir kiti.

Sekančiuose dvejuose skyreliuose apžvelgsime pagrindinius DS skaičiavimo būdus. Panagrinėsime trūkumus, privalumus, naudojimo galimybes, ribas ir pan..

1.3. Analitinės DS skaičiavimo metodikos

Visus konstrukcinių elementų stiprumo skaičiavimo būdus iš esmės galima suskirstyti į du pagrindinius tipus: analitinius arba skaitinius. Analitinės pateikia įtempimų, deformacijų funkcijų analitines išraiškas nuo argumentų (konstrukcinių parametru). Konstrukciniai parametrai: strypo matmenys, skerspjūvio plotas, medžiagų mechaninės charakteristikos, veikiančios apkrovos. Tuo tarpu skaitiniai metodai pateikia tik šios funkcijos reikšmę, atitinkančią nurodytą argumentų rinkinį. Atkreipsime dėmesį, kad skaitiniai metodai visuomet yra apytiksliai nes operuoja ne tiksliais skaičių vertėmis, o jų artiniais – turinčiais baigtinį skaičių reikšminių skaitmenų. Atliekant veiksmus su tokiais skaičiais jų paklaidos didėja.

Analitiniai patogūs tuo, kad jiems galima taikyti tiek klasikinės matematikos, tiek operacijų tyrimų, matematinio programavimo ir kitus metodus. Didžiausi trūkumai: tinka tik kuriai nors siaurai uždavinių klasei, remiasi tam tikrom prielaidomis, kurios ne visada gali būti tenkinamos, be to dažnai esti gana sudėtingos.

Skaitiniai metodai dažniausiai esti universalūs, bet iš pateikiamų rezultatų sunku nustatyti priežastinius ryšius tarp stiprumo ir konstrukcinių parametrų. Tuo jie panašūs į fizinį bandymą kurio metu eksperimentiškai nustatomas minėtas ryšys. Todėl kartais uždavinio sprendimas atliekamas panaudojant skaitinį metodą vadinamas – skaitiniu eksperimentu.

Sekančiuose poskyriuose pateikiame svarbiausias analitines DS skaičiavimo metodikas: supaprastintą [1] ir G.Lamé sukurtą storasienių cilindrų skaičiavimui. Pastaroji klasikinėje tamprumo teorijoje naudojama presuotiems cilindrams skaičiuoti. Mūsų atveju ji svarbi tuo, kad panašiai kaip ir presuotose cilindruose, DS kurio medžiagų Puasono koeficientų vertės skiriasi, deformacijos metu atsiranda kontaktinis slėgis. jis gali atsirasti ir dėl surinkimo įvaržos, bei dėl skirtingų terminio plėtimosi koeficientų verčių. Skirtumas tas, kad Lamé uždavinyje nėra ašinių įtempių sunertuose cilindruose. Būtent dėl šių priežasčių bus pateiktas detalus Lamé uždavinio sprendimas, fiksuojant prielaidas kuriomis remiamasi.

1.3.1. Supaprastinta DS skaičiavimo metodika

Šiame poskyryje pateiksime [1, 2] daugiasluoksnių tempiamų-gniuždomų strypų skaičiavimo metodiką, nagrinėsime jos trūkumus ir privalumus.

Imkime dviejų sluoksnių, apskrito skerspjūvio formos tempiamą-gniuždomą strypą (žr. 1.10 pav.). Pradiniai abiejų sluoksnių ilgiai vienodi (ašinė įvarža lygi nuliui). Tarkime strypinė konstrukcija sudaryta iš dviejų, skirtingų medžiagų, koncentrinų cilindrų 1, 2 įstatytų tarp plokščių 3, 4 yra veikama gniuždymo ašinės apkrovos (1.11 pav.). Išorinių jėgų atstojamoji eina per cilindru ašį (jei ši sąlyga netenkinama gauname ekscentrinį tempimą-gniuždymą). Konstrukcijos geometriniai parametrai yra vidiniai (r_i) ir išoriniai (R_i) spinduliai. Nagrinėjamai dvisluoksnei konstrukcijai $i \in (1,2)$. Sluoksnių (1, 2) mechanines savybes apibūdina tamprumo moduliai (E_i) ir Puasono koeficientai (ν_i). Bendriausiu atveju šios charakteristikos skiriasi t.y. $E_1 \neq E_2$ ir $\nu_1 \neq \nu_2$.

Priimame kad Puasono koeficientų vertės lygios ($\nu_1 = \nu_2$), o vidinio cilindro išorinis spindulys lygus išorinio cilindro vidiniam spinduliui ($R_1 = r_2$). Esant tokioms sąlygoms tarp susiliečiančių cilindrinų paviršių negali atsirasti kontaktinis slėgis. Kadangi veikia tik ašinės apkrovos, abiejose sluoksniuose yra vienmatis (ašinis) įtempių būvis.

Jei plokštelės (3,4 – 1.10 pav.), per kurias perduodama išorinė apkrova (F) (1.11 pav.)gerokai standesnės už cilindrus (1, 2 – 1.10 pav.), tuomet pastarųjų ašinės (oz) deformacijos yra vienodos:

$$\varepsilon_{z,1} = \varepsilon_{z,2} \quad (1.3.1.1)$$

čia:

$\varepsilon_{z,1}$, $\varepsilon_{z,2}$ - atitinkamai 1 ir 2 cilindrų ašinės (oz) deformacijos.

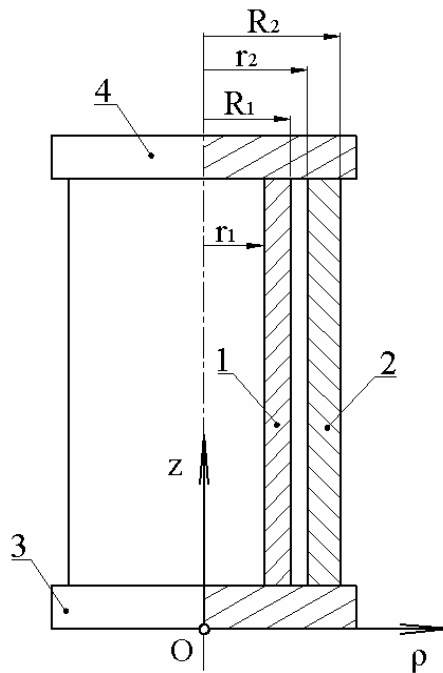
Iš elementų statinės pusiausvyros sąlygos gauname:

$$F = F_1 + F_2 \quad (1.3.1.2)$$

čia:

F – išorinė, konstrukciją veikianti jėga,

F_1 ir F_2 – atitinkamai 1 ir 2 cilindrų ašinės įrašos.



1.10 pav. DS konstrukcinė schema

Pritaikę Huko dėsnį vienašiam įtempių būviui:

$$\varepsilon_{z,i} = \frac{F_i}{A_i \times E_i} \quad (1.3.1.3)$$

čia:

A - skerspjūvio plotas,

E - tamprumo (Jungo) modulis,

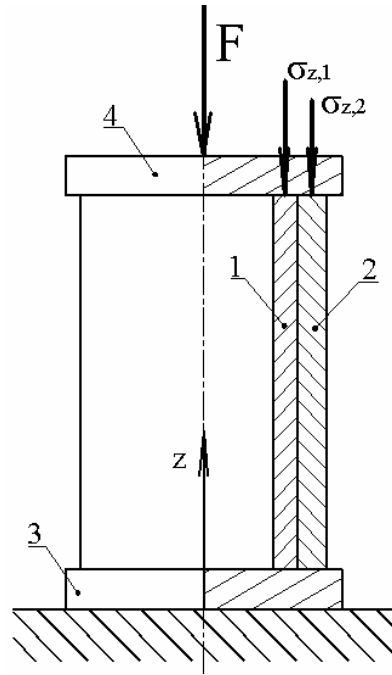
i - sluoksnio eilės numeris DS konstrukcijoje.

Į lygybę (1.3.1.1) įstatę išraišką (1.3.1.3) gauname:

$$\frac{F_1}{B_1} = \frac{F_2}{B_2} \quad (1.3.1.4)$$

čia:

B_i – strypo standumas ($B_i = A_i \times E_i$)



1.11 pav. DS apkrovimo schema

Iš lygbių (1.3.1.2) ir (1.3.1.4) sudarę tiesinių lygčių sistemą ir išsprendę ją kintamųjų F_1 ir F_2 atžvilgiu:

$$F_i = F \frac{B_i}{\sum_{j=1}^2 B_j} \quad (1.3.1.5)$$

Iš pastarosios:

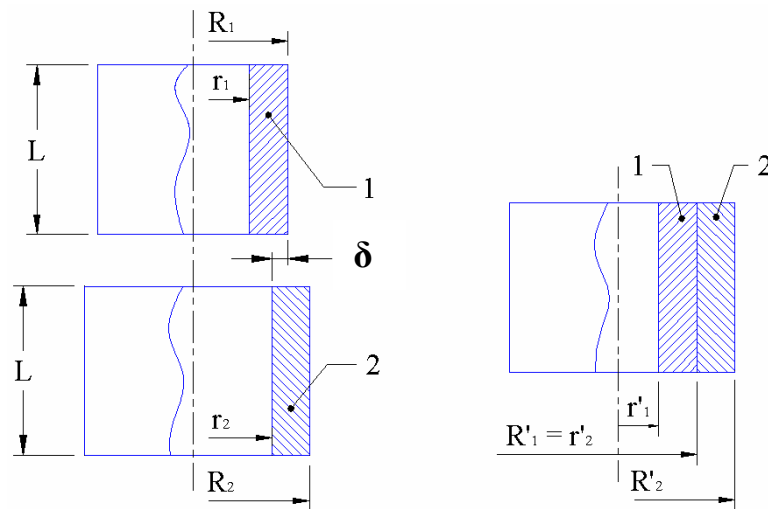
$$\sigma_i = F \frac{E_i}{\sum_{j=1}^2 B_j} \quad (1.3.1.6)$$

Pritaikę atvejui kai strypas sudarytas iš n skirtingų sluoksnių gauname:

$$\sigma_i = F \frac{E_i}{\sum_{j=1}^n B_j} \quad (1.3.1.7)$$

1.3.2. Lamė storasiėnių cilindrių (SC) skaičiavimo uždavinys

Šis uždavinys buvo išspręstas dar 19 a. G.Lamė (Gabriel Lamé). Čia jo sprendimą pateikime, nes jis yra labai svarbus šiame darbe nagrinėjamai dvisluoksnių tempiamų-gniuždomų strypų patikslintos skaičiavimo metodikos, sukūrimui.



1.12 pav. Cilindrų geometrija prieš ir po surinkimo

Cilindrų matmenys iki sujungimo pavaizduoti 1.12 paveiksle. Surinkus tarp kontaktuojančių paviršių atsiranda kontaktinis slėgis. Surinktas cilindras, su tarp kontaktinių paviršių veikiančiu slėgiu, ekvivalentiškas dviem cilindrų apkrautiems šiuo slėgiu kontaktiniuose paviršiuose kurių kiekvienas nagrinėjamas atskirai, kaip laisvas kūnas.

Kaip matyti iš 1.12 pav. po presavimo cilindrai deformuojasi, jų paviršiai pasislenka. Žinant šiuos poslinkius galima rasti deformuotų kūnų matmenis:

$$R_1' = R_1 + \Delta R_1 \quad (1.3.2.1)$$

$$r_2' = r_2 + \Delta r_2 \quad (1.3.2.2)$$

Po presavimo cilindrų kontaktiniai paviršiai sutampa:

$$R_1' = r_2' \quad (1.3.2.3)$$

Iš 1.3.2.3 išraišką įstatę 1.3.2.1 ir 1.3.2.2 lygtis gauname:

$$R_1 + \Delta R_1 = r_2 + \Delta r_2 \Rightarrow R_1 - r_2 = \Delta r_2 - \Delta R_1 \quad (1.3.2.4)$$

Įvedus pažymėjimą $\delta = R_1 - r_2$ lygtis (1.3.2.4) užrašoma:

$$\delta = -\Delta R_1 + \Delta r_2 \quad (1.3.2.5)$$

Bendru atveju kontaktinis slėgis gali būti tiek teigiamas tiek neigiamas, todėl 1.3.2.5 lygtis apibendrinta forma yra užrašoma:

$$\delta = |\Delta R_1| + |\Delta r_2| \quad (1.3.2.6)$$

Gavome vieną lygtį (žr. 1.3.2.6) su dviem nežinomaisiais. Tai reiškia, kad uždavinys yra vieną kartą statiškai neišsprendžiamas. Kad jį išspręstume, sudarysime papildomas deformacijų lygtis kurias, pasinaudoję Huko dėsnio, pertvarkysime į įtempimų lygtis. Galiausiai įstatę į jas 1.3.2.1, 1.3.2.2 išraiškas gausime vieną lygtį su vienu nežinomuoju – p_k .

Pirmiausia sudarome dvi deformacijų lygtis (jų įrodymas pateiktas priede Nr.1):

$$\Delta R_1 = R_1 \cdot \varepsilon_{\theta,1} \quad (1.3.2.7)$$

$$\Delta r_2 = r_2 \cdot \varepsilon_{\theta,2} \quad (1.3.2.8)$$

Dėl kontaktinio slėgio p_k cilindruose atsiranda du normaliniai, tarpusavyje statmeni įtempimai σ_{θ} ir σ_{ρ} . Pagal ankščiau priimtas prielaidas tangentiųjų įtempimų nėra, taigi normaliniai įtempiai kartu yra ir svarbiausieji įtempimai. Iš Huko dėsnio svarbiausios deformacijos, pirmame ir antrame kūnuose yra:

$$\varepsilon_{\theta,1}^{\rho_1} = \frac{1}{E_1} \left[\sigma_{\theta,1}^{\rho_1} - \mu_1 (\sigma_{r,1}^{\rho_1} + \sigma_{z,1}^{\rho_1}) \right] \quad (1.3.2.9)$$

$$\varepsilon_{\theta,2}^{\rho_2} = \frac{1}{E_2} \left[\sigma_{\theta,2}^{\rho_2} - \mu_2 (\sigma_{r,2}^{\rho_2} + \sigma_{z,2}^{\rho_2}) \right] \quad (1.3.2.10)$$

Pagal apkrovimo schemą veikia tik kontaktinis slėgis, todėl įtempimų būvis yra dviašis ($\sigma_z^{\rho} = 0$). Vadinasi 1.3.2.9 ir 1.3.2.10 formulės įgyja paprastesnes išraiškas:

$$\varepsilon_{\theta,1}^{\rho_1} = \frac{1}{E_1} \left[\sigma_{\theta,1}^{\rho_1} - \mu_1 \sigma_{r,1}^{\rho_1} \right] \quad (1.3.2.11)$$

$$\varepsilon_{\theta,2}^{\rho_2} = \frac{1}{E_2} \left[\sigma_{\theta,2}^{\rho_2} - \mu_2 \sigma_{r,2}^{\rho_2} \right] \quad (1.3.2.12)$$

Įtempimai bet kuriame radialiniame cilindro skerspjūvio pjūvyje randami pagal formules [17]:

$$\sigma_{r,1}^{\rho_1} = -\frac{p_k R_1^2}{R_1^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{\rho_1^2} \right) \quad (1.3.2.13)$$

$$\sigma_{\theta,1}^{\rho_1} = -\frac{p_k R_1^2}{R_1^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{\rho_1^2} \right) \quad (1.3.2.14)$$

$$\sigma_{r,2}^{\rho_2} = \frac{p_k r_1^2}{R_2^2 - r_2^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{\rho_2^2} \right) \quad (1.3.2.15)$$

$$\sigma_{\theta,2}^{\rho_2} = \frac{p_k r_1^2}{R_2^2 - r_2^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{\rho_2^2} \right) \quad (1.3.2.16)$$

Mus domina įtempimai kontakto zonoje t.y. $\rho_1 = R_1^I$ ir $\rho_2 = r_2^I$:

$$\sigma_{r,1}^{R_1^I} = -\frac{p_k R_1^2}{R_1^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{(R_1^I)^2} \right) \quad (1.3.2.17)$$

$$\sigma_{\theta,1}^{R_1^I} = -\frac{p_k R_1^2}{R_1^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{(R_1^I)^2} \right) \quad (1.3.2.18)$$

$$\sigma_{r,2}^{r_2^I} = \frac{p_k r_1^2}{R_2^2 - r_2^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{(r_2^I)^2} \right) \quad (1.3.2.19)$$

$$\sigma_{\theta,2}^{r_2^I} = \frac{p_k r_1^2}{R_2^2 - r_2^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{(r_2^I)^2} \right) \quad (1.3.2.20)$$

Matome, kad 1.3.2.17– 1.3.2.20 lygtyse atsirado papildomi du nežinomieji R_1^I ir r_2^I . Jiems eliminuoti priimsime tokią prielaidą:

Prielaida 1: kūnų deformacijos yra daug mažesnės už vieneta.

Iš čia seka:

$$R_1^I \cong R \quad (1.3.2.21)$$

$$r_2^I \cong r_2 \quad (1.3.2.22)$$

Įvedus pažymėjimus $k_1 = \frac{r_1}{R_1}$ ir $k_2 = \frac{r_2}{R_2}$ 13.1 – 16.1 formulės įgyja tokį pavidalą:

$$\sigma_{r,1}^{R_1} \cong -\frac{p_k R_1^2}{R_1^2 - r_1^2} (1 - k_1^2) \quad (1.3.2.23)$$

$$\sigma_{\theta,1}^{R_1} \cong -\frac{p_k R_1^2}{R_1^2 - r_1^2} (1 + k_1^2) \quad (1.3.2.24)$$

$$\sigma_{r,2}^{r_2} \cong \frac{p_k R_2^2}{R_2^2 - r_2^2} (k_2^2 - 1) \quad (1.3.2.25)$$

$$\sigma_{\theta,2}^{r_2} \cong \frac{p_k R_2^2}{R_2^2 - r_2^2} (k_2^2 + 1) \quad (1.3.2.26)$$

Apytikslė lygybė čia reiškia, kad argumentui pakitus nykstamai mažu dydžiu, įtempio funkcijos vertė yra artima vertei apskaičiuotai pradiniam taške. Iš tikrųjų toks teiginys yra teisingas, kadangi įtempių funkcijos yra tolydinės (nagrinėjamu atveju cilindruose nėra įtempių koncentratorių).

Sustatę išraiškas 1.3.2.23-1.3.2.26 į 1.3.2.11 ir 1.3.2.12 lygtis turime:

$$\varepsilon_{\theta,1}^{R_1} \cong \frac{1}{E_1} \left[-\frac{p_k R_1^2}{R_1^2 - r_1^2} (1 + k_1^2) - \mu_1 \left(-\frac{p_k R_1^2}{R_1^2 - r_1^2} (1 - k_1^2) \right) \right] \quad (1.3.2.27)$$

$$\varepsilon_{\theta,2}^{r_2} \cong \frac{1}{E_2} \left[\frac{p_k R_2^2}{R_2^2 - r_2^2} (k_2^2 + 1) - \mu_2 \left(\frac{p_k R_2^2}{R_2^2 - r_2^2} (k_2^2 - 1) \right) \right] \quad (1.3.2.28)$$

Atlikus elementarius pertvarkymus:

$$\varepsilon_{\theta,1}^{R_1} \cong -\frac{p_k \cdot R_1^2}{E_1 (R_1^2 - r_1^2)} \left((1 + k_1^2) - \mu_1 (1 - k_1^2) \right) \quad (1.3.2.29)$$

$$\varepsilon_{\theta,2}^{r_2} \cong \frac{p_k \cdot R_2^2}{E_2 (R_2^2 - r_2^2)} \left((1 + k_2^2) - \mu_2 (-1 + k_2^2) \right) \quad (1.3.2.30)$$

Gautas priklausomybės statome į 1.3.2.7-1.3.2.8 lygybes:

$$\Delta R_1 = R_1 \cdot \varepsilon_{\theta,1} \cong -\frac{p_k \cdot R_1^2 \cdot R_1}{E_1 (R_1^2 - r_1^2)} \left((1 + k_1^2) - \mu_1 (1 - k_1^2) \right) \quad (1.3.2.31)$$

$$\Delta r_2 = r_2 \cdot \varepsilon_{\theta,2} \cong \frac{p_k \cdot R_2^2 \cdot r_2}{E_2 (R_2^2 - r_2^2)} \left((1 + k_2^2) - \mu_2 (-1 + k_2^2) \right) \quad (1.3.2.32)$$

Dabar perrašome 1.3.2.6 lygybę:

$$\delta \cong \frac{p_k \cdot R_1^2 \cdot R_1}{E_1 (R_1^2 - r_1^2)} \left((1 + k_1^2) - \mu_1 (1 - k_1^2) \right) + \frac{p_k \cdot R_2^2 \cdot r_2}{E_2 (R_2^2 - r_2^2)} \left((1 + k_2^2) - \mu_2 (-1 + k_2^2) \right) \quad (1.3.2.33)$$

Iš pastarosios:

$$\delta \cong p_k \cdot \left[\frac{(R_1^2 \cdot R_1) \cdot (1 - k_1^2)}{E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2)} \cdot \left(\frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{(R_2^2 \cdot r_2) \cdot (1 - k_2^2)}{E_2 (R_2^2 - r_2^2)} \cdot \left(\frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} + \mu_2 \right) \right] \quad (1.3.2.34)$$

Atlikę elementariusius pertvarkymus gauname:

$$\delta \cong p_k \cdot \left[\frac{R_1}{E_1} \cdot \left(\frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{r_2}{E_2} \cdot \left(\frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} + \mu_2 \right) \right] \quad (1.3.2.35)$$

Išsprendę ją parametru p_k atžvilgiu turime:

$$p_k \cong \frac{\delta}{\frac{R_1}{E_1} \cdot \left(\frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{r_2}{E_2} \cdot \left(\frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} + \mu_2 \right)} \quad (1.3.2.36)$$

Kaip ir reikėjo tikėtis gavome formulę ekvivalentišką, literatūroje [3-102 p.] kitu būdu išvestai, formulei.

Lygybė 1.3.2.36 tampa tiksli kai vietoj pradinių matmenų į ją įstatomi deformuotų kūnų matmenys. Deja paprastai žinomi tik nedeformuotų cilindrų matmenys. Norint tokiam atvejui rasti tikslią formulę galima pasinaudoti regresijos metodu. Daroma taip: iš pradžių sudaroma nykstamai maža įvarža $\partial\delta$, kuri sukelia kontaktinį slėgį ∂p_k . Kadangi šis slėgis nedidelis, tai ir jo sukeltos deformacijos yra mažos. Žinant kontaktinį slėgį nesunku rasti deformacijas ir naujus matmenis. Deformuotas kūnas vėl apkraunamas įvaržos pokyčiu $\partial\delta$ ir randami nauji kūno matmenys. Procedūra kartojama kol įvaržų $\partial\delta$ pokyčių suma tampa lygi pradinei įvaržai δ . Tuomet jei galioja superpozicijos principas (jis galioja tiesinio tamprumo zonoje) kontaktinis slėgis p_k bus lygus slėgio pokyčių ∂p_k sumai:

$$p_k = \int_0^{\delta} \partial p_k \quad (1.3.2.37)$$

Patogiausiai šį metodą realizuoti ne analitiškai, bet skaitiniu būdu, parašius trumpą programėlę. Nesunku suprasti kad tokiu taip išsprendžiama ir geometrinio netiesiškumo problema.

1.4. Skaitiniai DS skaičiavimo metodai

Skaitiniai metodai tai grynai matematiniai metodai, skirti matematiniams modeliams spręsti panaudojant skaitinius algoritmus. Fizinį modelį galima pakeisti matematiniu, todėl šiais metodais galima spręsti ne tik matematinės, bet ir fizikinės prigimties uždavinius.

Sprendžiant deformuojamo kūno mechanikos uždavinius plačiausiai naudojamas baigtinių elementų metodas (BEM). Kiti metodai tokie kaip baigtinių skirtumų (BSM), neuroninių tinklų, iteraciniai, sutinkami gerokai rečiau ir naudojami specifiniais atvejais.

1.4.1. Baigtinių elementų metodas (BEM)

Baigtinių elementų metodas yra grynai matematinis metodas, skirtas apytiksliam diferencialinių lygčių sistemos sprendimui. Jo esmė ta, kad diferencialinių lygčių sistemos sprendimas, pakeičiamas tiesinių lygčių sistemos sprendimu. Sprendinys gautas naudojant BEM nėra tapatus tiksliai diferencialinių lygčių sistemos sprendiniui, todėl šis metodas yra apytikslis. Be minėtos metodinės paklaidos jam būdingos ir skaičiavimo paklaidos.

Galutinė sprendinio paklaida priklauso nuo:

- Realus fizikinio modelio ir pasirinkto skaičiuojamojo modelio adekvatumo.
- Baigtinio elemento tipo.
- Srities suskaidymo į tinklėlį.
- Naudojamos programinė įrangos.

Didžiausias metodo privalumas – jo universalumas, galima spręsti įvairios prigimties fizikinius uždavinius: deformuojamojo kūno mechanikos, skysčių ir dujų dinamikos, šilumos mainų, elektromagnetinės sąveikos ir t.t.. Taigi sprendžiant konkretų uždavinį galima įvertinti įvairius fizinius poveikius. To dažniausiai negalima padaryti naudojant analitinius metodus.

Pagrindiniai metodo trūkumai:

- Gaunamas konkretus skaitinis rezultatas (negalima gauti analitinės išraiškos). Dėl šios priežasties BEM labiau tinka konkrečių uždavinių sprendimui, rezultatų patikrinimui nei priežastinių ryšių, tarp dominančių parametru, nustatymui, konstrukcijų projektavimui, optimizavimui.
- Gavus uždavinio sprendinį sunku spręsti apie jo tikslumą. Sprendžiant naują uždavinį norint patikrinti sprendinį ir įvertinti tikslumą tenka tą patį uždavinį išspręsti analitiniu būdu ir palyginti gautus rezultatus. Paprastai laikoma kad tinkamai naudojamo BEM paklaida yra apie 1-3% [4]. Kai kuriais sudėtingesnio apkrovimo atvejais gaunamos 7-9 % paklaidos. Netinkamai naudojant šį metodą paklaidos gali siekti net iki 20-30%.
- Norint gauti patikimus rezultatus reikia gerai išmanyti ne tik nagrinėjamo uždavinio fizikinę pusę, bet ir BEM teoriją, turėti darbo su programine BEM įranga įgudžių. Be to profesionali programinė įranga brangiai kainuoja, naudoja daug kompiuterio resursų. Nekomercinės programėlės dažnai esti primityvios, reikalauja daug rankinio duomenų įvedimo, neturi vizualizavimo priemonių.

Taigi naudoti analitinius metodus, ar BEM priklauso nuo sprendžiamo uždavinio ir keliamų tikslų. Uždaviniai turintys tikslius analitinius sprendinius, sėkmingai sprendžiami BEM, taip patikrinant metodo patikimumą. Kita vertus ten kur nėra tikslų analitinių metodikų BEM yra vienintelis būdas gauti bent apytikslį sprendinį, ir patikrinti suprojektuotą konstrukciją. Paprastai projektuojant inžinerines konstrukcijas pakanka 5-10% tikslumo, todėl BEM sparčiai plinta, integruojamas į automatizuoto projektavimo (CAD, CAE) sistemas.

1.4.2. Kiti skaitiniai metodai

Šiai grupei priskiriami labai įvairios prigimties matematiniai metodai. Lyginant su BEM naudojami žymiai rečiau. Taikomi, kai dėl vienokių ar kitokių priežasčių negalima panaudoti BEM, arba jo panaudojimas yra apsunkintas.

Ankščiau minėtoms sustiprinto betono kolonomis skaičiuoti naudojama iteracinė schema [5-11]. Pirmiausiai priimama tam tikra sustiprinto betono irimo deformacija. Tuomet žinant konstrukciją sudarančių medžiagų mechanines charakteristikas, naudojant tam tikras priklausomybes, nustatomos deformacijos ašine ir radialine kryptimi. Iš pastarųjų randami ašiniai įtempiai, irimo deformacijos, konstrukcijos stiprumo riba. Tuomet iš energijos balanso lygties

apskaičiuojama sustiprinto betono irimo deformacija. Jei pastaroji sutampa su priimtąja, uždavinys laikomas išspręstu. Priešingu atveju keičiama pradinė sustiprinto betono irimo riba ir skaičiavimo procedūra kartojama kol priimta ir apskaičiuota irimo riba sutampa.

Panaudojus tokią iteracinę schemą galima labai greitai, pagal iš anksto parašytą programą, nustatyti sustiprinto betono kolonos stiprumą, įtempius, deformacijas. Lyginant šį metodą su BEM nereikia braižyti kolonos geometrinio modelio, spręsti elemento tipo ir dydžio parinkimo problemos, galiausiai – atsakymas gaunamas iškart. Taigi pagrindinis metodo privalumas greitis ir operatyvumas, trūkumas tai, kad šiems privalumams pasiekti reikia sukurti skaičiavimo programą.

Kitas skaitinis būdas, kurį galima panaudoti deformuojamojo kūno mechanikos uždaviniams spręsti – dirbtiniai neuroniniai tinklai (DNT) [11-13]. Jų veikimas pagrįstas tinklo gebėjimu keisti reakciją priklausomai nuo anksčiau įvestų duomenų. Sukurtas tinklas apmokomas su kontroliniais duomenimis. Iš čia seka kad norint panaudoti DNT reikia turėti pakankamai eksperimentiškai nustatytų duomenų.

DNT panašiai kaip ir BEM yra universalus ir apytikslis. Jis dažniausiai naudojamas labai sudėtingų, uždavinių (klimato reiškinių modeliavimui, socialinių grupių sąveikai, žmogaus smegenų veiklos imitavimui) sprendimui. Kitais būdais šie uždaviniai iš principo ar dėl techninių priežasčių negali būti efektyviai išspręsti.

Priešingai nei BEM, šis būdas leidžia rezultatus gauti tuoj pat, vos suvedus duomenis. Pagrindiniai trūkumai: reikia daug eksperimentinių duomenų, gaunamas apytikslis rezultatas kurio tikslumo ribos nežinomos.

Metodas atrastas praėjusio amžiaus viduryje ir kitose mokslo šakose naudojamas jau seniai. Bandymai jį pritaikyti deformuojamo kūno mechanikoje yra nauji. Prieš keletą metų japonų mokslininkai [12] jį pasiūlė naudoti sustiprinto betono kolonų skaičiavimui.

DNT perspektyvi priemonė DKE skaičiavimui, tačiau ji tikrai nepajėgi išstumti kitų plačiai naudojamų metodų. Todėl tikėtina kad ateityje ji bus integruojama į šiuos metodus kaip pagalbinė priemonė. Toks papildymas leistų automatizuoti daugelį intelektualinių, projektavimo operacijų.

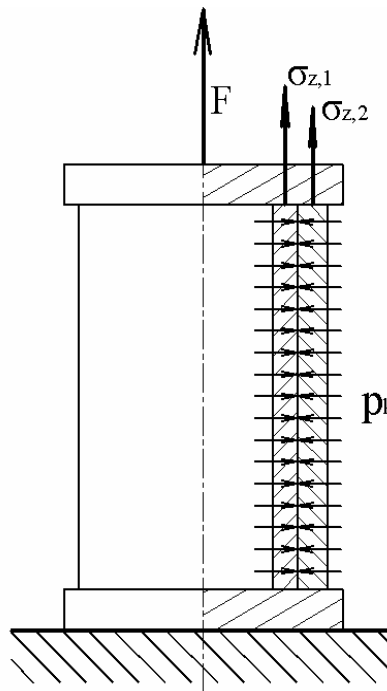
Šiame, pirmajame, skyriuje apžvelgėme DKE ypatybes, įvairias jų grupes, trūkumus, privalumus, panaudojimo galimybes. Daugiausia dėmesio skyrėme DS ir įvairių autorių pasiūlytoms, skaičiavimo metodikoms. Išnagrinėjome šių metodikų teorinius pagrindus, silpnąsias, stipriąsias puses.

Čia gautais duomenimis, formulėmis naudosimės sekančiame skyriuje, kuriame pateiksime patikslintą tempiamų-gniuždomų dvisluoksnių strypų skaičiavimo metodiką, nuoseklų jos išvedimą.

2. DVISLUOKSNIŲ TEMPIAMŲ-GNIUŽDOMŲ STRYPŲ ANALIZĖ

2.1. Tyrimo objektas, tikslas ir uždaviniai

Šio tyrimo objektas tempiamas (gniuždomas) dvisluoksnis, apskrito skerspjūvio strypas. Esminis skirtumas tarp šio tyrimo ir supaprastintos metodikos [1] yra tas, kad strypą sudarančių medžiagų Puasono koeficientų vertės yra skirtingos. Dėl minėtos aplinkybės deformuojant DS tarp sluoksnių atsiranda kontaktinis slėgis (žr. 2.1 pav). Šis slėgis ne tik paverčia vienašį įtempių būvį sluoksnyje triašiu, bet ir pakeičia ašinių įtempių vertes. Vienose sluoksniuose ašiniai įtempiai padidėja, kituose sumažėja, lyginant su konstrukcija kurioje kontaktinio slėgio nėra.



2.1. pav. Strypo schema, apkrovos

Kontaktinis slėgis tarp cilindrų gali atsirasti surinkimo metu dėl radialinės įvaržos, temperatūros pokyčio.

Darbo tikslas – sukurti DS įtempių skaičiavimo metodiką, įvertinančią medžiagų Puasono koeficientų ir mechaninio sunėrimo įvaržos įtaką.

Uždaviniai – nustatyti kaip kinta įtempių vertės, keičiantis įvairiems konstrukciniams parametrams (tamprumo moduliams, Puasono koeficientams, radialiniai įvaržai, strypo matmenims). Palyginti apytikslės ir pasiūlytos metodikos rezultatus, įvertinti apytikslės metodikos paklaidas, nustatyti šių paklaidų režius. Galiausiai pateikti rekomendacijas, kada ir kokiomis sąlygomis galima naudoti apytikslę, o kada reikia naudoti pasiūlytą metodiką.

2.2. Įtempimų skaičiavimo metodika

Pradėkime nuo atvejo, pavaizduoto 2.1 paveiksle. Kaip matyti konstrukcija sudaryta iš dviejų koncentrinėjų cilindrų, besiremiančių į plokštes. Pradiniu momentu tarp cilindrų yra nulinė įvarža. Išorinis cilindras pagamintas iš medžiagos kurios Poasono koeficientas mažesnis nei vidinio cilindro medžiagos. Nesunku suprasti kad konstrukciją apkrovus simetrine ašine jėga F_z tarp cilindrų atsiras įvarža δ' kuri sukels kontaktinį slėgį p_k .

Pirmiausia mus domina šio slėgio funkcija, ir tai kaip pakinta ašiniai bei ekvivalentiniai įtempimai lyginant su skaičiavimo metodika kurioje į kontaktinio slėgio poveikį neatsižvelgiama. Iš apkrovimo schemas matyti kad šis uždavinys panašus į Lamé uždavinį, tačiau netenkina prielaidos, kad $\sigma_z^\rho = 0$, bet kartu tenkina kitas dvi:

1 Prielaida: ašinės abiejų cilindrų deformacijos vienodos

2 Prielaida: konstrukciją veikianti ašinė jėga F_z lygi cilindrus veikiančių ašinių jėgų sumai

Iš šių prielaidų išplaukia dvi lygybės:

$$\varepsilon_{z,1} = \varepsilon_{z,2} \quad (2.2.1)$$

$$F_z = F_{z,1} + F_{z,2} \quad (2.2.2)$$

Pasinaudoję Huko dėsniumi ir įtempimų apibrėžimu šias lygybes galime perrašyti įtempimais. Laikydami kontaktinį slėgį žinomu jas galime išspręsti ašinių įtempimų atžvilgiu. Kadangi iš tikro kontaktinis slėgis nežinomas, sistemai išspręsti reikia papildomos lygties. Tokią lygtį nesunku sudaryti pasinaudojus Lamé uždavinio sprendimu (žr. 1.3.2). Tik šiuo atveju įtempimų būvis ne dviašis, o triašis. Taigi vietoj 1.3.2.11, 1.3.2.12 lygčių reikia naudotis sudėtingesnėmis 1.3.2.9, 1.3.2.10 priklausomybėmis.

Iš Huko dėsnio (cilindrinėje koordinačių sistemoje) triašiam įtempimų būviui turime:

$$\varepsilon_{z,1}^\rho = \frac{1}{E_1} \left[\sigma_{z,1}^\rho - \mu_1 (\sigma_{r,1}^\rho + \sigma_{\theta,1}^\rho) \right] \quad (2.2.3)$$

$$\varepsilon_{z,2}^\rho = \frac{1}{E_2} \left[\sigma_{z,2}^\rho - \mu_2 (\sigma_{r,2}^\rho + \sigma_{\theta,2}^\rho) \right] \quad (2.2.4)$$

Pagal 1 prielaidą ašiniai įtempimai σ_z nepriklauso nuo spindulio ρ . Nors kiti du įtempimų būvio komponentai priklauso nuo spindulio ρ , tačiau kaip matyti iš 1.3.2.23-1.3.2.26 formulių suma $(\sigma_r^\rho + \sigma_\theta^\rho) = Const$, t.y. invariantiška ρ atžvilgiu. Iš to seka:

$$\varepsilon_{z,1} = \frac{1}{E_1} \left[\sigma_{z,1} + 2\mu_1 \left(\frac{p_k R_1^2}{(R_1^2 - r_1^2)} \right) \right] \quad (2.2.5)$$

$$\varepsilon_{z,2} = \frac{1}{E_2} \left[\sigma_{z,2}^p - 2\mu_2 \left(\frac{p_k r_2^2}{(R_2^2 - r_2^2)} \right) \right] \quad (2.26)$$

Tiesiogiai iš įtempimo apibrėžimo¹ seka:

$$\sigma_{\Sigma} A_{\Sigma} = \sigma_{z,1} A_1 + \sigma_{z,2} A_2 \quad (2.2.7)$$

Įstatę išraiškas 2.2.5-2.2.7 į 2.2.1, 2.2.2 formules gauname dviejų lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \sigma_{z,1} A_1 + \sigma_{z,2} A_2 = F_{\Sigma} \\ \frac{\sigma_{z,1}}{E_1} + \frac{2\mu_1 p_k R_1^2}{E_1 (R_1^2 - r_1^2)} = \frac{\sigma_{z,2}}{E_2} - \frac{2\mu_2 p_k r_2^2}{E_2 (R_2^2 - r_2^2)} \end{cases} \quad (2.2.8)$$

$$\quad (2.2.9)$$

Išsprendę sistemą (žr. 2 priedą) kintamųjų $\sigma_{z,1}$ ir $\sigma_{z,2}$ atžvilgiu turėsime:

$$\sigma_{z,1} = \frac{F_{\Sigma} E_1}{\pi (E_1 (R_1^2 - r_1^2) + E_2 (R_2^2 - r_2^2))} - \frac{2p_k E_1 E_2 (R_2^2 - r_2^2)}{E_1 (R_1^2 - r_1^2) + E_2 (R_2^2 - r_2^2)} \left(\frac{\mu_1 R_1^2}{E_1 (R_1^2 - r_1^2)} + \frac{\mu_2 r_2^2}{E_2 (R_2^2 - r_2^2)} \right) \quad (2.2.10)$$

$$\sigma_{z,2} = \frac{F_{\Sigma} E_2}{\pi (E_1 (R_1^2 - r_1^2) + E_2 (R_2^2 - r_2^2))} + \frac{2p_k E_1 E_2 (R_1^2 - r_1^2)}{E_1 (R_1^2 - r_1^2) + E_2 (R_2^2 - r_2^2)} \left(\frac{\mu_1 R_1^2}{E_1 (R_1^2 - r_1^2)} + \frac{\mu_2 r_2^2}{E_2 (R_2^2 - r_2^2)} \right) \quad (2.2.11)$$

Įveskime tokius pažymėjimus²:

$$B_1 = \pi \cdot E_1 (R_1^2 - r_1^2) \quad (2.2.12)$$

$$B_2 = \pi \cdot E_2 (R_2^2 - r_2^2) \quad (2.2.13)$$

$$A_{1,2} = \frac{R_1^2 - r_1^2}{R_1^2 - r_1^2} \quad (2.2.14)$$

$$A_{2,1} = \frac{R_2^2 - r_2^2}{R_1^2 - r_1^2} \quad (2.2.15)$$

Tuomet 2.2.10, 2.2.11 lygtis sujungus į vieną lygčių sistemą gauname:

¹ Įtempis nykstamai mažame plotelyje yra lygus jame veikiančios jėgos ir ploto santykiui. Kai įtempis tam tikroje zonoje nekinta, tuomet jis apskaičiuojamas kaip suminės jėgos, veikiančios toje zonoje, atstojamosios ir ploto santykis.

² Dydis B_i vadinamas strypo i -jo sluoksnio ašiniu standumu, o $A_{j,k}$ santykiniu strypo skerspjūvio plotu.

$$\begin{cases} \sigma_{z,1} = \frac{F_{\Sigma} E_1}{B_1 + B_2} - \frac{2\pi \cdot p_k}{B_1 + B_2} (\mu_1 R_1^2 E_2 A_{2,1} + \mu_2 r_2^2 E_1) \\ \sigma_{z,2} = \frac{F_{\Sigma} E_2}{B_1 + B_2} + \frac{2\pi \cdot p_k}{B_1 + B_2} (\mu_1 R_1^2 E_2 + \mu_2 r_2^2 E_1 A_{1,2}) \end{cases} \quad (2.2.16)$$

Kai kontaktinio slėgio nėra formulės 2.2.16 sutampa su formulėmis išvestomis remiantis prielaida, kad medžiagų Puasono koeficientai vienodi [1]. Iš šių formulių matyti kad jei konstrukcija gniuždoma ir $p_k > 0$ t.y. $\mu_1 > \mu_2$ tuomet $|\sigma_{z,1}|$ padidėja, o $|\sigma_{z,2}|$ sumažėja, lyginant su apskaičiuotais pagal metodiką neįvertinančią kontaktinio slėgio poveikio.

Jei kontaktinis slėgis p_k nežinomas, tuomet rasti ašinių įtempimų pagal gautas formules negalima, nes turime dvi lygtis ir tris nežinomuosius: $\sigma_{z,1}$, $\sigma_{z,2}$, p_k . Trūkstamą lygtį gausime sudarę deformacijų lygtį, analogišką nagrinėtą ankstesniame skyriuje

Išvedimas analogiškas tam kurį atlikome ir detalai išnagrinėjome praeitame skyriuje (žr. 1.3.2) todėl čia pateikiame tik tas lygtis kurios nesutampa.

Į 1.3.2.9, 1.3.2.10 įstatę 1.3.2.13-1.3.2.16 gauname:

$$\varepsilon_{\Theta,1}^{\rho_1} = \frac{1}{E_1} \left[-\frac{p_k R_1^2}{R_1^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{\rho_1^2} \right) - \mu_1 \left(-\frac{p_k R_1^2}{R_1^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{\rho_1^2} \right) + \sigma_{z,1}^{\rho_1} \right) \right] \quad (2.2.17)$$

$$\varepsilon_{\Theta,2}^{\rho_2} = \frac{1}{E_2} \left[\frac{p_k r_1^2}{R_2^2 - r_2^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{\rho_2^2} \right) - \mu_2 \left(\frac{p_k r_1^2}{R_2^2 - r_2^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{\rho_2^2} \right) + \sigma_{z,2}^{\rho_2} \right) \right] \quad (2.2.18)$$

Atsižvelgę į tai, kad $\left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial \rho} = 0 \right)$ ir $(\varepsilon_z \ll 1)$ turime:

$$\varepsilon_{\Theta,1}^{R_1} \cong \frac{1}{E_1} \left[-\frac{p_k R_1^2}{R_1^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{R_1^2} \right) - \mu_1 \left(-\frac{p_k R_1^2}{R_1^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{R_1^2} \right) + \sigma_{z,1} \right) \right] \quad (2.2.19)$$

$$\varepsilon_{\Theta,2}^{r_2} \cong \frac{1}{E_2} \left[\frac{p_k R_2^2}{R_2^2 - r_2^2} \left(\frac{r_2^2}{R_2^2} + 1 \right) - \mu_2 \left(\frac{p_k R_2^2}{R_2^2 - r_2^2} \left(\frac{r_2^2}{R_2^2} - 1 \right) + \sigma_{z,2} \right) \right] \quad (2.2.20)$$

Suprastinę gausime:

$$\varepsilon_{\Theta,1}^{R_1} \cong \frac{1}{E_1} \left[-\frac{p_k (R_1^2 + r_1^2)}{R_1^2 - r_1^2} + \mu_1 p_k - \mu_1 \sigma_{z,1} \right] \quad (2.2.21)$$

$$\varepsilon_{\theta,2}^{r_2} \cong \frac{1}{E_2} \left[\frac{p_k (R_2^2 + r_2^2)}{R_2^2 - r_2^2} + \mu_2 p_k - \mu_2 \sigma_{z,2} \right] \quad (2.2.22)$$

Pasinaudoję ankstesnio skyriaus 1.3.2.5, 1.3.2.7 ir 1.3.2.8 formulėmis randame, kad:

$$\delta \cong \frac{R_1}{E_1} \left(\frac{p_k (R_1^2 + r_1^2)}{R_1^2 - r_1^2} - \mu_1 p_k + \mu_1 \sigma_{z,1} \right) + \frac{r_2}{E_2} \left(\frac{p_k (R_2^2 + r_2^2)}{R_2^2 - r_2^2} + \mu_2 p_k - \mu_2 \sigma_{z,2} \right) \quad (2.2.23)$$

Iš čia, kontaktinis slėgis:

$$p_k \cong \frac{\delta - \mu_1 \frac{R_1 \sigma_{z,1}}{E_1} + \mu_2 \frac{r_2 \sigma_{z,2}}{E_2}}{\frac{R_1}{E_1} \left(\frac{R_1^2 + r_1^2}{R_1^2 - r_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{r_2}{E_2} \left(\frac{R_2^2 + r_2^2}{R_2^2 - r_2^2} + \mu_2 \right)} \quad (2.2.24)$$

Kad palygintume gautą lygtį su ankščiau išvesta (t.y. su 1.3.2.36) pažymėkim³ $k_1 = \frac{r_1}{R_1}$ ir

$k_2 = \frac{r_2}{R_2}$. Tuomet atlikę elementarius pertvarkymus gausime:

$$p_k \cong \frac{\delta - \mu_1 \frac{R_1 \sigma_{z,1}}{E_1} + \mu_2 \frac{r_2 \sigma_{z,2}}{E_2}}{\frac{R_1}{E_1} \left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{r_2}{E_2} \left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right)} \quad (2.2.25)$$

Palyginę šią lygtį su 1.3.2.36, matome kad ji nuo pastarosios skiriasi tik dviem dėmenimis skaitiklyje. Nesunku pastebėti kad šie dėmenys, tai ašinės deformacijos, gaunamos esant ašiniam įtempimų būviui ir padaugintos iš atitinkamų Puasono koeficientų. Akivaizdu kad jei ašinių įtempimų nėra 2.2.25 sutampa su 1.3.2.36 lygtimi.

Apjungę 2.2.10, 2.2.11 ir 2.2.4 lygtis į vieną lygčių sistemą turėsime:

³ Ši žymėjimas yra įprastas tamprumo teorijos kursuose (žr. [3]).

$$\left\{ \begin{array}{l}
\sigma_{z,1} = \frac{F_y E_1}{\pi(E_1(R_1^2 - r_1^2) + E_2(R_2^2 - r_2^2))} - \\
- \frac{2p_k E_1 E_2 (R_2^2 - r_2^2)}{E_1(R_1^2 - r_1^2) + E_2(R_2^2 - r_2^2)} \left(\frac{\mu_1 R_1^2}{E_1(R_1^2 - r_1^2)} + \frac{\mu_2 r_2^2}{E_2(R_2^2 - r_2^2)} \right) \\
\sigma_{z,2} = \frac{F_y E_2}{\pi(E_1(R_1^2 - r_1^2) + E_2(R_2^2 - r_2^2))} + \\
+ \frac{2p_k E_1 E_2 (R_1^2 - r_1^2)}{E_1(R_1^2 - r_1^2) + E_2(R_2^2 - r_2^2)} \left(\frac{\mu_1 R_1^2}{E_1(R_1^2 - r_1^2)} + \frac{\mu_2 r_2^2}{E_2(R_2^2 - r_2^2)} \right) \\
p_k \cong \frac{\delta - \mu_1 \frac{R_1 \sigma_{z,1}}{E_1} + \mu_2 \frac{r_2 \sigma_{z,2}}{E_2}}{\frac{R_1}{E_1} \left(\frac{R_1^2 + r_1^2}{R_1^2 - r_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{r_2}{E_2} \left(\frac{R_2^2 + r_2^2}{R_2^2 - r_2^2} + \mu_2 \right)}
\end{array} \right. \quad (2.2.26)$$

Kaip matome sistema gana sudėtinga, tad tam kad sprendinys būtų kompaktiškesnis įvedame pažymėjimus:

$$a_1 = \frac{\mu_1 R_1}{E_1} \quad (2.2.27)$$

$$a_2 = \frac{\mu_2 r_2}{E_2} \quad (2.2.28)$$

$$b_1 = E_1 (R_1^2 - r_1^2) \quad (2.2.29)$$

$$b_2 = E_2 (R_2^2 - r_2^2) \quad (2.2.30)$$

$$c_1 = R_1 \left(\frac{R_1^2 + r_1^2}{b_1} - \frac{\mu_1}{E_1} \right) \quad (2.2.31)$$

$$c_2 = r_2 \left(\frac{R_2^2 + r_2^2}{b_2} + \frac{\mu_2}{E_2} \right) \quad (2.2.32)$$

$$d = \frac{\mu_1 R_1^2}{b_1} + \frac{\mu_2 r_2^2}{b_2} \quad (2.2.33)$$

Perrašę 2.2.26 turime:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{z,1} = \frac{F_{\Sigma} E_1}{\pi(b_1 + b_2)} - \frac{2p_k E_1 b_2}{b_1 + b_2} \cdot d \\ \sigma_{z,2} = \frac{F_{\Sigma} E_2}{\pi(b_1 + b_2)} + \frac{2p_k E_2 b_1}{b_1 + b_2} \cdot d \\ p_k \cong \frac{\delta - a_1 \sigma_{z,1} + a_2 \sigma_{z,2}}{c_1 + c_2} \end{array} \right. \quad (2.2.35)$$

Išsprendę sistemą $\sigma_{z,1}$, $\sigma_{z,2}$ ir p_k atžvilgiu gauname šių dydžių funkcines priklausomybes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{z,1} \cong \frac{E_1}{\pi} \cdot \frac{F_{\Sigma} [2a_2 E_2 d - (c_1 + c_2)] + 2\pi \cdot d \cdot \delta \cdot b_2}{2d(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1) - (b_1 + b_2)(c_1 + c_2)} \\ \sigma_{z,2} \cong \frac{E_2}{\pi} \cdot \frac{F_{\Sigma} [2a_1 E_1 d - (c_1 + c_2)] - 2\pi \cdot d \cdot \delta \cdot b_1}{2d(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1) - (b_1 + b_2)(c_1 + c_2)} \\ p_k \cong \frac{1}{\pi} \cdot \frac{F_{\Sigma} (E_1 a_1 - E_2 a_2) - \pi \cdot \delta \cdot (b_1 + b_2)}{2d(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1) - (b_1 + b_2)(c_1 + c_2)} \end{array} \right. \quad (2.2.36)^4$$

Tokiu būdu, gavome lygtis dvisluoksnio tempiamo-gniuždomo strypo ašiniams įtempiams ir kontaktiniam slėgiui skaičiuoti, atsižvelgiant į sluoksnių medžiagų tamprumo modulį ir Puasono koeficientų verčių skirtumą. Be to jos gali būti panaudotos įvertinant radialinės įvaržos (δ) įtaką (naudojantis supaprastinta metodika šios įtakos neįmanoma įvertinti). Kaip matome įtempiai ir kontaktinis slėgis yra išorinės apkrovos (F), tamprumo modulį (E), Puasono koeficientų (ν) bei skerspjūvio matmenų (ρ) funkcijos. Atkreipiame dėmesį į tai, kad šios lygtys galioja medžiagų tiesinio tamprumo zonoje. Plastiškų medžiagų takumo pradžia galima nustatyti panaudojus ekvivalentinius įtempius (penktoji, arba energetinė stiprumo teorija).

Kontaktinio slėgio išraišką 2.2.36 įrašę į lygtis 1.3.23 – 1.3.26 gauname lygtis žiedinių (σ_{θ}), radialinių (σ_{ρ}) įtempių, bet kuriame konstrukcinio elemento taške, vertėms apskaičiuoti.

Cilindrų kontakto zonoje radialinių ir žiedinių įtempių funkcijos įgyja tokias išraiškas:

⁴ Apytikslė lygybė čia reiškia, kad lygtys tampa tikslios jei deformacijos yra nykstamai mažos. Tamprumo ribose dafoemacijos paprastai nesiekia 0,1 %, todėl tokiais atvejais pateiktas lygtis galima laikyti tikslėmis.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{r,1} = \frac{(-\pi)^{-1} \cdot F(E_1 a_1 - E_2 a_2)}{2d(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1) - \sum_{i=1}^2 b_i \cdot \sum_{i=1}^2 c_i} \\ \sigma_{\theta,1} = \frac{k_1 \cdot (-\pi)^{-1} \cdot F(E_1 a_1 - E_2 a_2)}{2d(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1) - \sum_{i=1}^2 b_i \cdot \sum_{i=1}^2 c_i} \\ \sigma_{r,2} = \frac{(-\pi)^{-1} \cdot F(E_1 a_1 - E_2 a_2)}{2d(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1) - (b_1 + b_2)(c_1 + c_2)} \\ \sigma_{\theta,2} = \frac{k_2 \cdot (\pi)^{-1} \cdot F(E_1 a_1 - E_2 a_2)}{2d(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1) - \sum_{i=1}^2 b_i \cdot \sum_{i=1}^2 c_i} \end{array} \right. \quad (2.2.37)$$

čia:

$$k_i = \frac{(R_i^2 + r_i^2)}{(R_i^2 - r_i^2)}.$$

Galiausiai gauname svarbiausių įtempių analitines išraiškas dvisluoksnio strypo vidiniam (1) ir išoriniam (2) sluoksniams:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{z,1} = \frac{E_1}{\pi} \cdot \frac{F_{\Sigma} [2a_2 E_2 d - (c_1 + c_2)] + 2\pi \cdot d \cdot \delta \cdot b_2}{2d(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1) - (b_1 + b_2)(c_1 + c_2)} \\ \sigma_{r,1} = \frac{(-\pi)^{-1} \cdot F(E_1 a_1 - E_2 a_2)}{2d(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1) - \sum_{i=1}^2 b_i \cdot \sum_{i=1}^2 c_i} \\ \sigma_{\theta,1} = \frac{k_1 \cdot (-\pi)^{-1} \cdot F(E_1 a_1 - E_2 a_2)}{2d(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1) - \sum_{i=1}^2 b_i \cdot \sum_{i=1}^2 c_i} \end{array} \right. \quad (2.2.38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{z,2} = \frac{E_2}{\pi} \cdot \frac{F_{\Sigma} [2a_1 E_1 d - (c_1 + c_2)] - 2\pi \cdot d \cdot \delta \cdot b_1}{2d(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1) - (b_1 + b_2)(c_1 + c_2)} \\ \sigma_{r,2} = \frac{(-\pi)^{-1} \cdot F(E_1 a_1 - E_2 a_2)}{2d(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1) - (b_1 + b_2)(c_1 + c_2)} \\ \sigma_{\theta,2} = \frac{k_2 \cdot (\pi)^{-1} \cdot F(E_1 a_1 - E_2 a_2)}{2d(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1) - \sum_{i=1}^2 b_i \cdot \sum_{i=1}^2 c_i} \end{array} \right. \quad (2.2.39)$$

Gavome visų trijų, svarbiausių įtempių tempiamo-gniuždomo dvisluoksnio strypo sluoksnyje, analitines išraiškas. Iš jų galime nustatyti kaip kinta įtempių būvio komponentai, konstrukcijos stiprumas, standumas, keičiant konstrukcinių elementų matmenis, medžiagų mechanines charakteristikas, išorinę apkrovą. Išvestos lygtys labai praverčia ne tik nustatant konstrukcijos stiprumą, standumą, ribines apkrovas bet ir ieškant optimalios konstrukcijos, atitinkančios nurodytas pradines sąlygas, parenkant medžiagas.

Pagal pasiūlytą metodiką gaunami tikslesni rezultatai nei pagal [1], leidžia detaliau analizuoti ir suvokti deformuojamoje konstrukcijoje vykstančius procesus, įvertinti jų įtaką (žr. 3 šio darbo skyrių). Kartu galima sumažinti atsargos koeficientų vertes, t.y. efektyviau panaudoti medžiagas

Trečiajame skyriuje panagrinėsime kaip kinta ašiniai įtempimai ir kontaktinis slėgis, keičianti įvairius konstrukcijos parametrus. Svarbiausi iš jų: išorinė apkrova F_z , skerspjūvių plotai A_1 , A_2 , medžiagų standumo moduliai E_1 , E_2 ir Puasono koeficientai μ_1 , μ_2 .

2.3. Įtempių lygčių analizė

Čia palyginsime ankstesniame skyrelyje (žr. 2.2) išvestas įtempių lygtis su apytikslės metodikos lygtimis (žr. 1.3.1 poskyrį).

Ankščiau pateiktos lygybės 2.2.36 yra bendro pobūdžio. Šaltinyje [1] gniuždomų-tempiamų cilindrų ašiniai įtempimai skaičiuojami pagal formules⁵:

$$\begin{cases} \sigma_{z,1} = \frac{F \times E_1}{B_1 + B_2} = \frac{F \times E_1}{A_1 \cdot E_1 + A_2 \cdot E_2} \\ \sigma_{z,2} = \frac{F \times E_2}{B_1 + B_2} = \frac{F \times E_2}{A_1 \cdot E_1 + A_2 \cdot E_2} \end{cases} \quad (2.3.1)$$

čia:

B_1 , B_2 - pirmo ir antro sluoksnio standumas

Kitaip tariant lygybės 2.3.1 yra atskiras, bendresnio pobūdžio 2.2.36 lygčių atvejis. Išvedę pirmąsias iš pastarųjų atliktume dalinį metodikos patikrinimą ir kartu įrodytume, kad čia pateiktos priklausomybės neprieštarauja apytiksliai metodikai.

Tam kad palygintume 2.3.1 ir 2.2.36 lygtis, pastarąsias pertvarkome:

⁵ Ši metodika remiasi prielaida, kad skersinės elementų deformacijos yra vienodos, taigi kontaktinis slėgis nesusidaro t.y. $p_k = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{z,1} = \frac{E_1 \cdot F}{\sum_{i=1}^2 B_i} \cdot \frac{2a_2 E_2 d - \sum_{i=1}^2 c_i}{2d \frac{(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1)}{(b_1 + b_2)} - \sum_{i=1}^2 c_i} \\ \sigma_{z,2} = \frac{E_2 \cdot F}{\sum_{i=1}^2 B_i} \cdot \frac{2a_1 E_1 d - \sum_{i=1}^2 c_i}{2d \frac{(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1)}{(b_1 + b_2)} - \sum_{i=1}^2 c_i} \\ p_k = \frac{(\pi)^{-1} \cdot F(E_1 a_1 - E_2 a_2)}{2d(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1) - \sum_{i=1}^2 b_i \cdot \sum_{i=1}^2 c_i} \end{array} \right. \quad (2.3.2)$$

Lygčių sistema 2.3.2, nuo 2.3.1 skiriasi tuo kad turi papildomą lygtį, kontaktiniam slėgiui skaičiuoti, o pirmosios dvi lygtys, padaugintos iš to paties koeficiento.

Pertvarkykime koeficiento vardiklyje esantį dauginarį:

$$\frac{(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1)}{(b_1 + b_2)} = a_2 E_2 + \frac{b_2(a_1 E_1 - a_2 E_2)}{b_1 + b_2} \quad (2.3.3)$$

Panaudoję pažymėjimus 2.2.27, 2.2.28 lygybę 2.3.3 perrašome:

$$\frac{(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1)}{(b_1 + b_2)} = a_2 E_2 + \frac{b_2(v_1 R_1 - v_2 r_2)}{b_1 + b_2} \quad (2.3.4)$$

Jei $R_1 = r_2 = \rho$ tuomet turime:

$$\frac{(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1)}{(b_1 + b_2)} = a_2 E_2 + \frac{b_2 \rho (v_1 - v_2)}{b_1 + b_2} \quad (2.3.5)$$

Kai medžiagų Puasono koeficientų vertės lygios ($v_1 = v_2$):

$$\frac{(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1)}{(b_1 + b_2)} = a_2 E_2 \quad (2.3.6)$$

Nagrinęjamą dauginarį galima supaprastinti kiek kitaip:

$$\frac{(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1)}{(b_1 + b_2)} = a_1 E_1 + \frac{b_1(a_2 E_2 - a_1 E_1)}{b_1 + b_2} \quad (2.3.7)$$

Analogiškai ankstesniam atvejui:

$$\frac{(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1)}{(b_1 + b_2)} = a_1 E_1 + \frac{b_1 \rho (v_2 - v_1)}{b_1 + b_2} = a_1 E_1 \quad (2.3.8)$$

Galiausiai įstatę 2.3.6, 2.3.8 į sistemą 2.3.2 turėsime:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sigma_{z,1} = \frac{E_1 F}{\pi \cdot \sum_{i=1}^2 b_i} \cdot \frac{2a_2 E_2 d - \sum_{i=1}^2 c_i}{2da_2 E_2 - \sum_{i=1}^2 c_i} = \frac{E_1 F}{\sum_{i=1}^2 B_i} \\
 \sigma_{z,2} = \frac{E_2 F}{\pi \cdot \sum_{i=1}^2 b_i} \cdot \frac{2a_1 E_1 d - \sum_{i=1}^2 c_i}{2da_1 E_1 - \sum_{i=1}^2 c_i} = \frac{E_2 F}{\sum_{i=1}^2 B_i} \\
 p_k = \frac{\pi^{-1} \cdot F(\nu\rho - \nu\rho)}{2d(a_1 E_1 b_2 + a_2 E_2 b_1) - \sum_{i=1}^2 b_i \cdot \sum_{i=1}^2 c_i} = 0
 \end{array} \right. \quad (2.3.9)$$

Gavome, kad lygtys 2.3.9 tapatingos lygtims 2.3.1, kurios gautos darbe [1], kai $\nu_1 = \nu_2$.

Vadinasi, lygtys 2.3.1 yra lygčių 2.3.2 dalinis atvejis.

Jei Puasono koeficientų vertės skiriasi nežymiai (iki 5%), abi metodikos duoda panašius rezultatus. Didėjant skirtumui tarp Puasono koeficientų verčių ašinių įtempimų paklaida gali tapti reikšminga. Preliminarūs rezultatai parodė, kad kai $A_1 = A_2$, $E_1/E_2 = 0,1$, $\nu_1 = 0,5$, $\nu_2 = 0,1$ ašinių įtempimų santykinė paklaida gali siekti 32%. Beje paklaida priklauso ne tik nuo Puasono koeficientų, tamprumo modulių verčių, bet ir nuo to ar konstrukcija yra tuščiaavidurė ar pilnavidurė, sluoksnių išdėstymo schemos ir strypo matmenų.

3. TEMPIAMŲ-GNIUŽDOMŲ DVISLUOKSNIŲ STRYPŲ TYRIMAS

3.1. Įtempių analizė

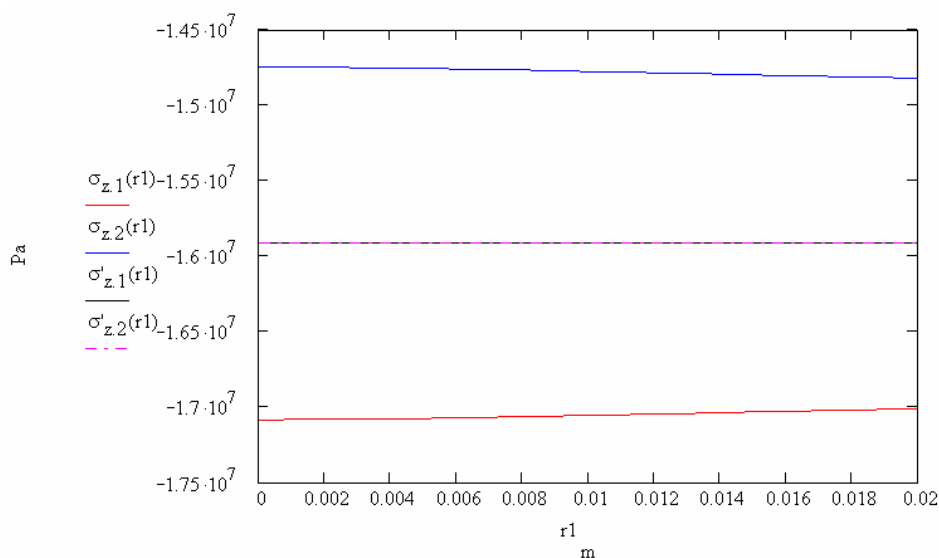
Šiame skyrelyje nagrinėsime kaip įtempių būvio komponentai priklauso nuo įvairių konstrukcinių parametru: konstrukcijos tipo, medžiagos tamprumo modulių, Puasono koeficientų. Taip pat palyginsime pasiūlytos ir apytikslės metodikos, bei BEM rezultatus.

3.1.1. Įtempių priklausomybė nuo konstrukcijos tipo

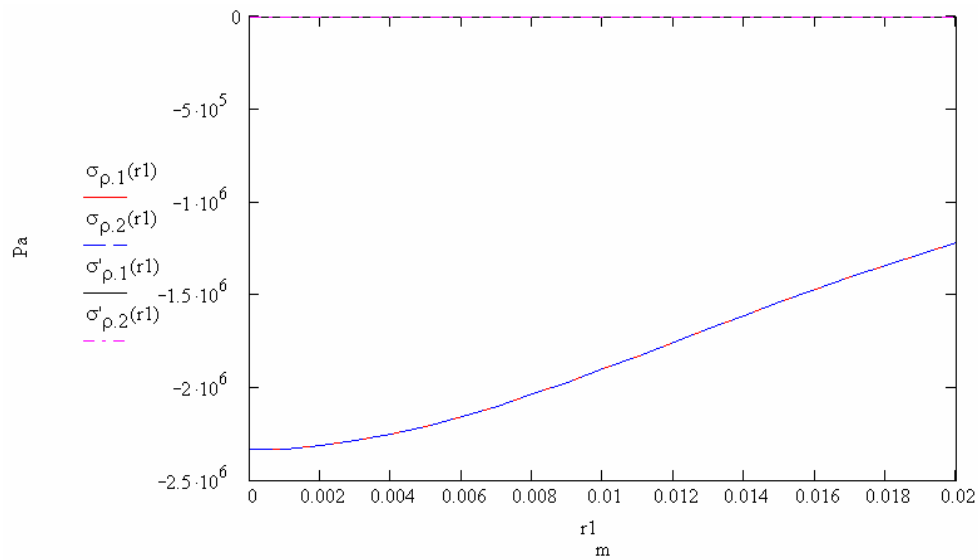
Pagal sluoksnių struktūrą DS skirstomi į tuščiavidurius ir pilnavidurius. Panagrinėkime kaip kinta įtempių būvio komponentai ($\sigma_z, \sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_e$) keičiant vidinio cilindro vidinį spindulį r_1 . Kai $r_1 = 0$ turime pilnavidurę, kai $r_1 > 0$ tuščiavidurę konstrukciją. Kad kitimo pobūdžio neįtakotų kiti parametrai, priimame: $A_1 = A_2$, $E_1 = E_2$, $R_1 = r_2$. Ašinė apkrova konstrukciją gniuždo, o jos modulis: $F = -50$ kN.

Antrame skyriuje buvo įrodyta jog kai sluoksnių medžiagų Puasono koeficientai vienodi patikslintos ir apytikslės metodikos rezultatai sutampa. Vadinasi kuo labiau skiriasi Puasono koeficientai tuo didesnis skirtumas tarp šių metodikų. Todėl pasirenkame: $\nu_1 = 0,49$, $\nu_2 = 0,01$.

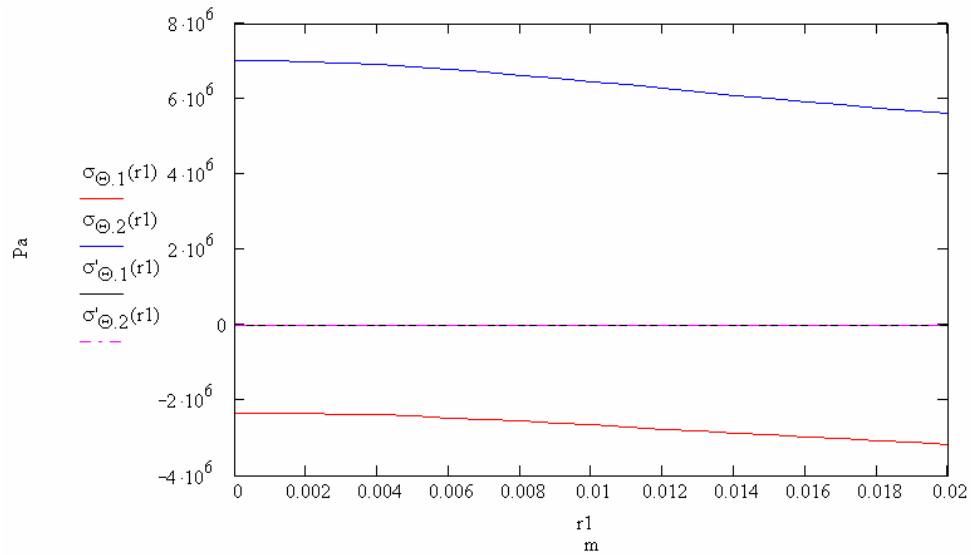
Pasinaudoję 2.2 skyrelyje išvestomis lygtimis gauname tokius grafikus (žr. 3.1-3.4 pav.).



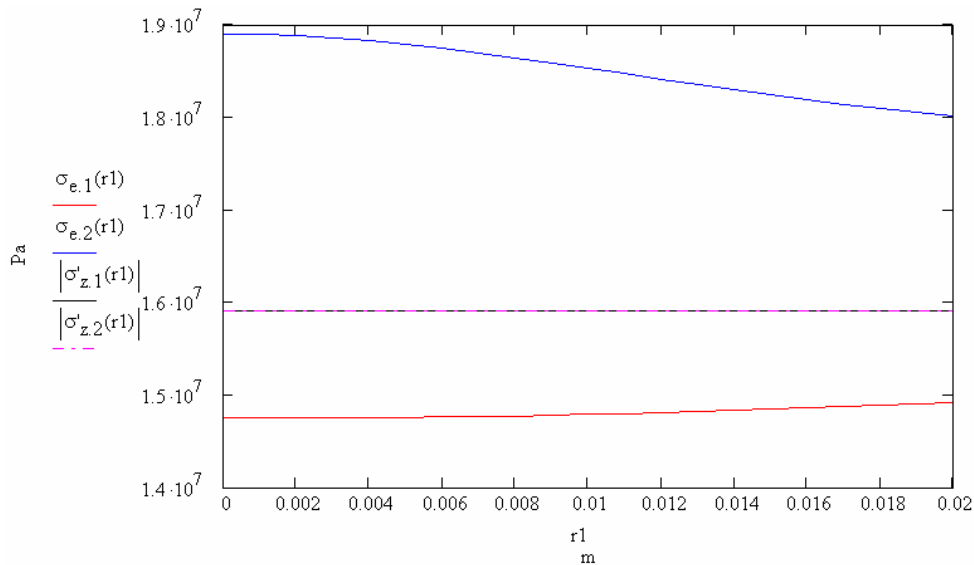
3.1. pav. Tiesioginio tipo konstrukcijos ašinių įtempių priklausomybė nuo parametro r_1



3.2. pav. Tiesioginio tipo konstrukcijos radialinių įtempių priklausomybė nuo parametro r_1



3.3. pav. Tiesioginio tipo konstrukcijos žiedinių įtempių priklausomybė nuo parametro r_1



3.4. pav. Tiesioginio tipo konstrukcijos ekvivalentinių įtempių priklausomybė nuo parametro r_1

Iš šių grafikų galima daryti tokias išvadas:

1. Ašinių įtempių vertės keičiantis parametrai r_1 kinta labai nežymiai (santykiniais vienetais). Didėjant spinduliui r_1 $\sigma_{z,1}$ mažėja, o $\sigma_{z,2}$ didėja.
2. Radialiniai įtempiai yra lygūs (statinės pusiausvyros sąlyga). Kol r_1 vertės artimos nuliui įtempiai kinta labai nežymiai, vertėms didėjant kitimo greitis didėja. Pavaizduotame spindulio kitimo intervale radialinių įtempių pokytis sudaro apie 6 % nuo ašinių įtempių.
3. Žiediniai įtempiai skiriasi tiek savo moduliui, tiek ženklu. Panašiai kaip ir žiediniai pradžioje kinta lėtai, vėliau – greičiau. Santykinai labiau kinta vidinio cilindro įtempiai, nors absoliutiniai pokyčiai panašūs. Pokyčio intervalas sudaro 5-6 % nuo ašinių įtempių.
4. Ekvivalentiniai įtempiai kinta skirtingai. Vidiniame cilindre didėja (apie 2 %), išoriniame mažėja (5 %). Spartesnę kitimo greitį esant didesnėms spindulio vertėms sąlygoja sienutės plonėjimas t.y. storasienis cilindras tampa plonasieniu (primename, kad skerspjūvio plotai nekinta).

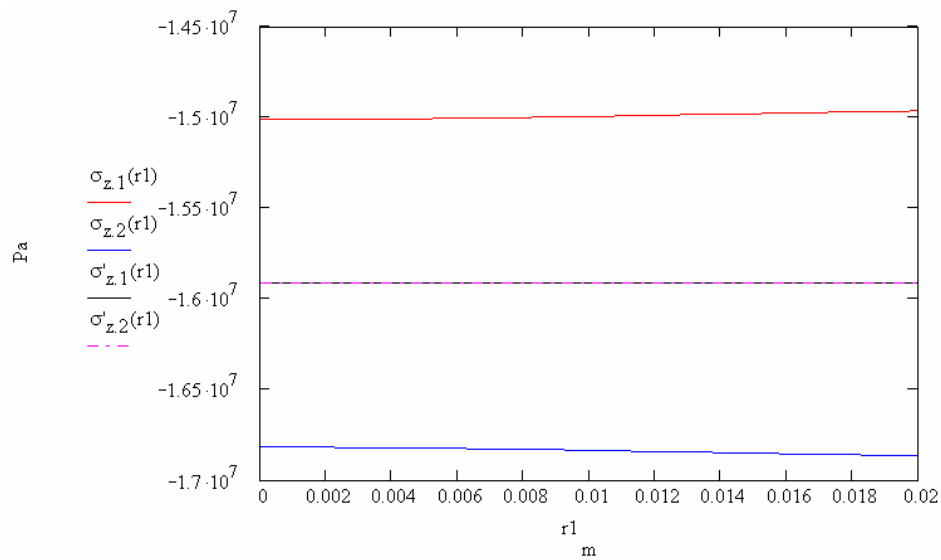
Konstruktijas taip pat, pagal medžiagų išdėstymą, galima skirstyti į tiesioginio ir atvirkštinio tipo. Apytikslėje DS skaičiavimo metodikoje tiesiogine vadinama tokia konstrukcija kurios išorinių sluoksnių medžiagos standumo moduliai didesni už vidinių. Atvirkštinėje konstrukcijoje priešingai, vidinių sluoksnių medžiagos standumas didesnis už išorinių.

Mūsų nagrinėjamu atveju (žr. 2 skyrių) įtempių reikšmėms svarbu ne tik tamprumo modulio bet ir Puasono koeficientų vertės. Todėl tiesiogine konstrukcija vadinsime tokia DS kuriame kontakto zonoje atsiradusių įtempių ženklas sutampa su ašinės jėgos ženklu. Pavyzdžiui jei vidinio cilindro Puasono koeficiento vertė didesnė už išorinio cilindro, tai gniuždant tokį strypą kontakto zonoje atsiranda gniuždymo įtempiai. Tempiant, susidaro tempimo įtempiai. Jei vidinio cilindro Puasono koeficiento vertė didesnė už išorinio cilindro, tuomet gniuždant kontakte susidaro tempimo įtempiai, o tempiant – gniuždymo. Pagal pateiktą apibrėžimą pirmoji konstrukcija yra tiesioginio, antroji atvirkštinio tipo.

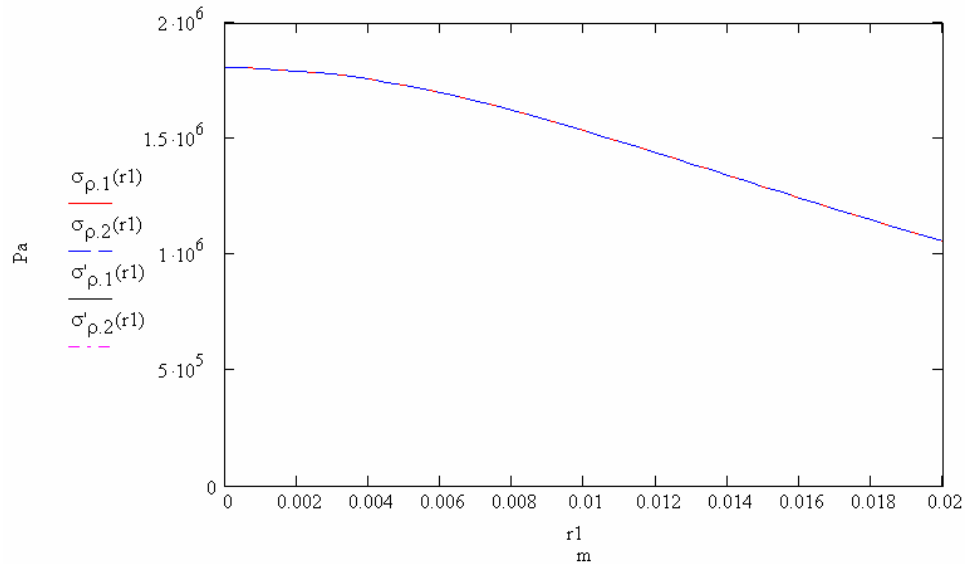
Tiesioginio tipo konstrukcijos (TTK) įtempių priklausomybę nuo konstrukcinio parametro r_1 pateikėme 3.1-3.4 pav. Dabar panagrinėsime kaip kinta įtempių būvio komponentai atvirkštinio tipo konstrukcijoje (ATK) (žr. 3.5-3.8 pav.).

Lyginant su TTK ekvivalentiniai įtempių kitimo pobūdis panašus, tik ne toks intensyvus: $\sigma_{e,1}$ didėja 0,6 %, $\sigma_{e,2}$ mažėja 2 %. Kiti įtempių būvio komponentai irgi kinta mažiau nei TTK.

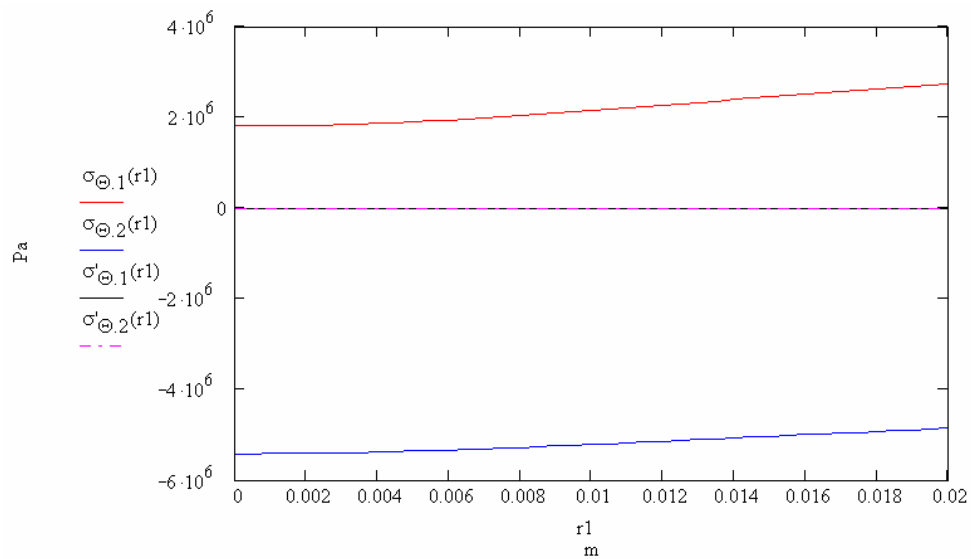
Ašiniai įtempiai praktiškai nekinta (pokytis nesiekia 0,5 %), radialiniai mažėja (4 % nuo ašinių). Žiediniai didėja (apie 2 % nuo ašinių).



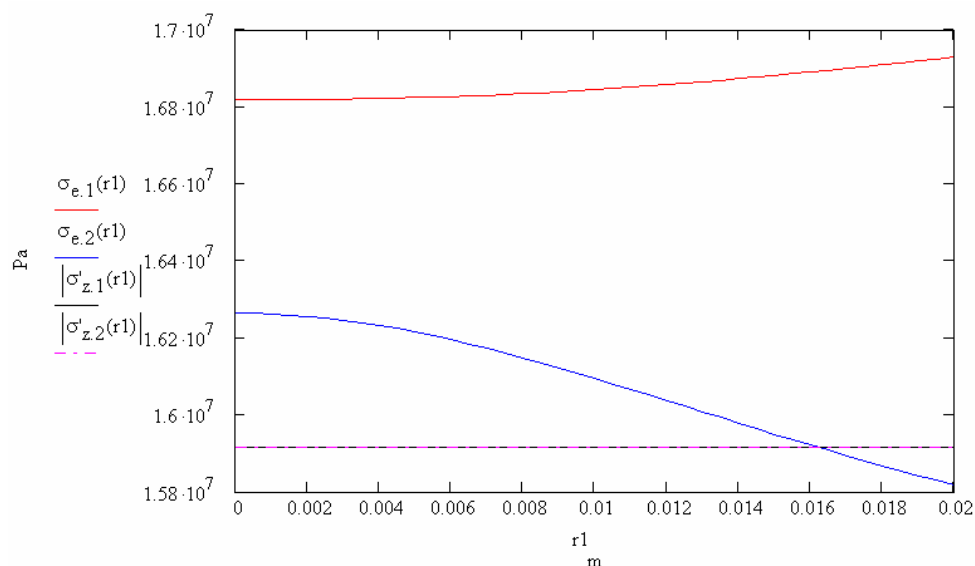
3.5. pav. Atvirkštinio tipo konstrukcijos ašinių įtempių priklausomybė nuo parametro r_1



3.6. pav. Atvirkštinio tipo konstrukcijos radialinių įtempių priklausomybė nuo parametro r_1



3.7. pav. Atvirkštinio tipo konstrukcijos žiedinių įtempių priklausomybė nuo parametro r_1



3.8. pav. Atvirkštinio tipo konstrukcijos ekvivalentinių įtempių priklausomybė nuo parametro r_1

Sugretinę 3.1-3.4 ir 3.5-3.8 paveikslus, akivaizdžiai matome, kad kitimo pobūdis nesutampa. Tai reiškia kad, kitaip nei teigia apytikslė metodika, įtempių reikšmės, ženklas, skaitinė vertė priklauso nuo sluoksnių išsidėstymo t.y. konstrukcijos tipo. Iš tiesų jei tarp sluoksnių nėra kontaktinio slėgio tai keičiant jų išdėstymą konstrukcijoje, taip kad skerspjūvio plotai nepakistų, tiek įtempių ženklai tiek jų vertės išlieka pastovios. Jei įvertiname tarp sluoksnių veikiančią kontaktinį slėgį, tai sukeitus sluoksnius vietomis pasikeičia jų apkrovimas. Gniuždant TTK vidinis sluoksnis visomis kryptimis yra gniuždomas, išorinis – ašine (oz) gniuždomas, kitomis (op, oΘ) tempiamas. Tuo tarpu gniuždant ATK vidinis cilindras ašine kryptimi gniuždomas, kitomis tempiamas, išorinis visomis kryptimis – gniuždomas.

Palyginkime skaitines įtempių reikšmes ir skirtumus tarp apytikslės ir pasiūlytos metodikų. Tam įtempių vertes surašome į lentelę.

Paklaidos žiediniams ir radialiniams įtempiams buvo apskaičiuotos kaip procentinė jų dalis nuo atitinkamų ašinių įtempių. Nors radialiniai įtempiai pirmoje ir antroje medžiagoje lygūs, tačiau žiediniai gerokai skiriasi. Taip yra todėl, kad kontaktinis slėgis vienu atveju veikia išorinį cilindro paviršių kitu – vidinį. Kai skerspjūvio konstrukcija pilnavidurė, o plotai vienodi $\frac{\sigma_{z,2}}{\sigma_{z,1}} = 3$.

Iš lentelės 3.1.1.1 seka išvada, jog sukeitus sluoksnius, pakintą jų įtempių vertės, t.y. gaunama konstrukcija pasižyminti naujomis kokybinėmis savybėmis. Įtempių komponentai σ_z ir σ_e labiau skiriasi nuo apytikslės metodikos TTK nei ATK. Be to pilnavidurėje konstrukcijoje šis skirtumas didesnis nei tuščiaavidurėje.

Pasiūlytos metodikos įtempių komponentų vertės, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametrai r_1

Įtempių būvio komponentai	Pilnavidurė konstrukcija		Tuščiavidurė konstrukcija	
	Tiesioginio tipo	Atvirkštinio tipo	Tiesioginio tipo	Atvirkštinio tipo
$\sigma_{z,1}$	-1,7084E+7*Pa; 7,34 %	-1,5012E+7*Pa; 5,67 %	-1,7012E+7*Pa; 6,89 %	-1,4965E+7*Pa; 5,98 %
$\sigma_{z,2}$	-1,4747E+7*Pa; 7,34 %	-1,6819E+7*Pa; 5,67 %	-1,4819E+7*Pa; 6,89 %	-1,6866E+7*Pa; 5,98 %
$\sigma_{p,1}$	2,3362E+6*Pa; -14,68 %	1,8060E+6*Pa; 11,35 %	-1,2184E+6*Pa; 7,66 %	1,0566E+6*Pa; 6,64 %
$\sigma_{p,2}$	-2,3362E+6*Pa; 14,68 %	1,8060E+6*Pa; 11,35 %	-1,2184E+6*Pa; 7,66 %	1,0566E+6*Pa; 6,64 %
$\sigma_{\theta,1}$	-2,3362E+6*Pa; 14,68 %	1,8060E+6*Pa; 11,35 %	-3,1679E+6*Pa; 19,9 %	2,7472E+6*Pa; 17,26 %
$\sigma_{\theta,2}$	7,0087E+6*Pa; 44,04 %	-5,4180E+6*Pa; 34,04 %	5,6047E+6*Pa; 35,22 %	-4,8605E+6*Pa; 30,54 %
$\sigma_{e,1}$	1,4747E+7*Pa; 7,34 %	1,6819E+7*Pa; 5,67 %	1,4915E+7*Pa; 6,29 %	1,693E+7*Pa; 6,37 %
$\sigma_{e,2}$	1,8904E+7*Pa; 18,77 %	1,6264E+7*Pa; 2,19 %	1,8009E+7*Pa; 13,15 %	1,5818E+7*Pa; 0,62 %

Atkreipsime dėmesį, kad ATK kontakto zona yra tempiama, tad jei tarp sluoksnių yra prastas sukibimas (adhezija) tokiai konstrukcijai reikia patikrinti ir sluoksnių sukibimo stiprumo sąlygą. TTK šios sąlygos tikrinti nereikia nes kontaktas tarp sluoksnių išlieka ir net ir nesant jokio sukibimo.

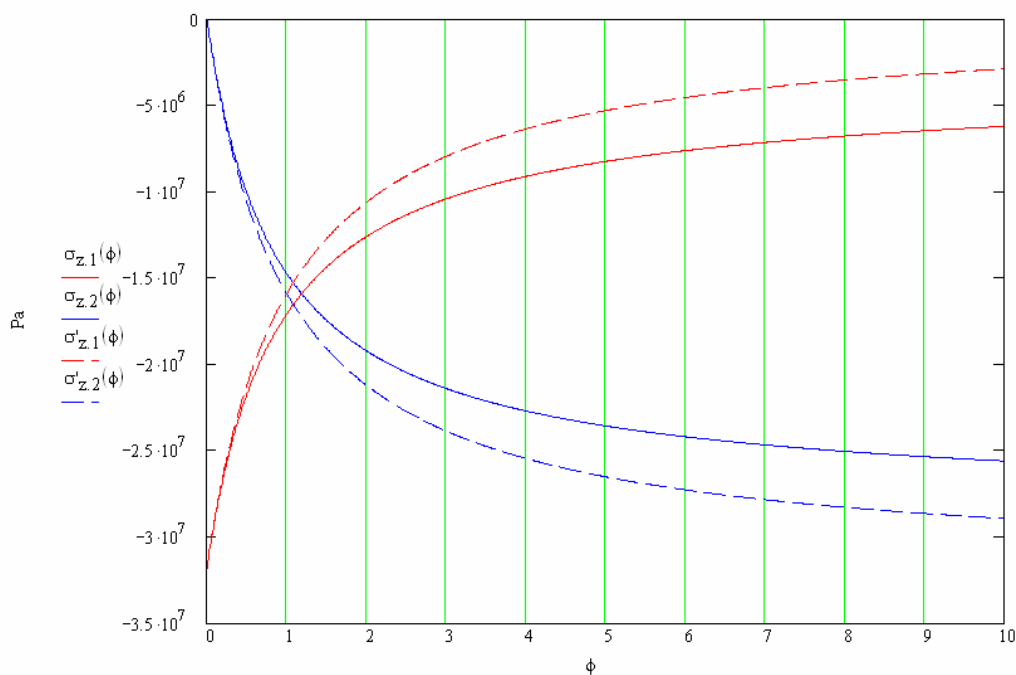
3.1.2. Įtempių priklausomybė nuo tamprumo modulių santykio ϕ

Kaip matėme ankstesniame poskyryje, įtempių vertės priklauso nuo spindulio r_1 t.y. nuo to ar konstrukcija yra tuščiavidurė ar pilnavidurė, tiesioginio ar atvirkštinio tipo. Taigi galimos dvi konstrukcinės schemas: tuščiavidurė ir pilnavidurė. Kiekviena šių schemų gali būti tiesioginio arba

atvirkštinio tipo, vadinasi iš viso turime keturis konstrukcinius variantus, kuriuos reikia išnagrinėti. Kiekvienam variantas apibūdinamas trimis įtempių komponentais, o stiprumas įvertinamas pagal ekvivalentinius įtempius, taigi iš viso reikėtų nagrinėti $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ grafikų. Tai žymiai padidintų darbo apimtį, todėl pateiksime tik tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos įtempių komponentų grafikus, kitų konstrukcijų įtempių vertes sudėsime į 3.1.2.1 – 3.1.2.4 lenteles.

Kad gautume maksimalų skirtumą imkime: $|\nu_1 - \nu_2| = 0,48$. Tamprumo modulių santykis $\phi = E_2/E_1$. Tarkime vidinio cilindro tamprumo modulis nekinta ($E_1 = 1 \times 10^9$ Pa), o išorinio kinta intervale: $E_2 \in (0 \text{ Pa} \quad 1 \times 10^{10} \text{ Pa})$. Tuomet tamprumo modulių santykis kinta ribose nuo nulio iki dešimties t.y. ($\phi \in (0 \quad 10)$). Skerspjūvio plotai irgi vienodi: $A_1 = A_2 = 1570,80 \text{ mm}^2$. Ašinė gniuždymo jėga: $F = -50 \text{ kN}$.

Pradžioje panagrinėkime pilnavidurę tiesioginio tipo konstrukciją.

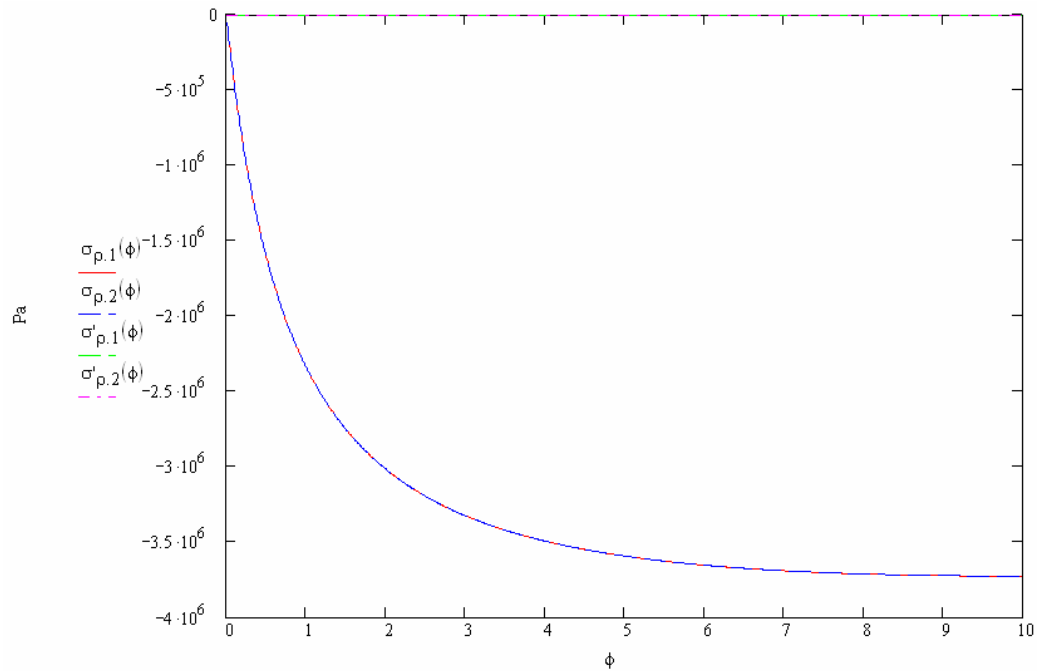


3.9. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos ašinių įtempių priklausomybė nuo parametro ϕ

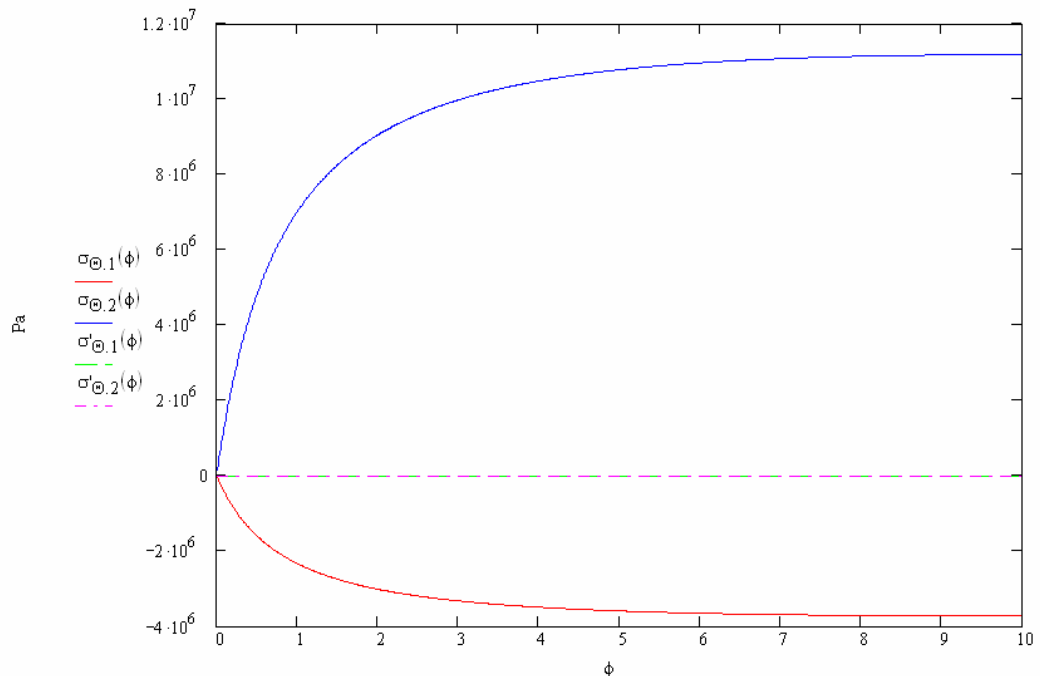
Iš 3.9-3.12 pav. matyti kad patikslintos ir apytikslės metodikų, visų įtempių komponentų vertės sutampa kai $\phi \rightarrow 0$. Tai reiškia kad išorinio cilindro tamprumo modulis neapreštai mažėja, ir visa apkrova tenka vidiniam cilindriui (turime homogeninį gniuždomą strypą). Panašiai nutinka ir tuomet kai $\phi \rightarrow \infty$. Tuomet įtempiai vidiniame cilindre artėja prie nulio, visa apkrova tenka išoriniam cilindriui.

Iš 3.12 pav. matom, kad keičiantis santykiui ϕ , ekvivalentiniai įtempiai vidiniame cilindre gaunami panašūs, tiek naudojant patikslintą, tiek apytikslę metodiką. Išoriniame cilindre priešingai

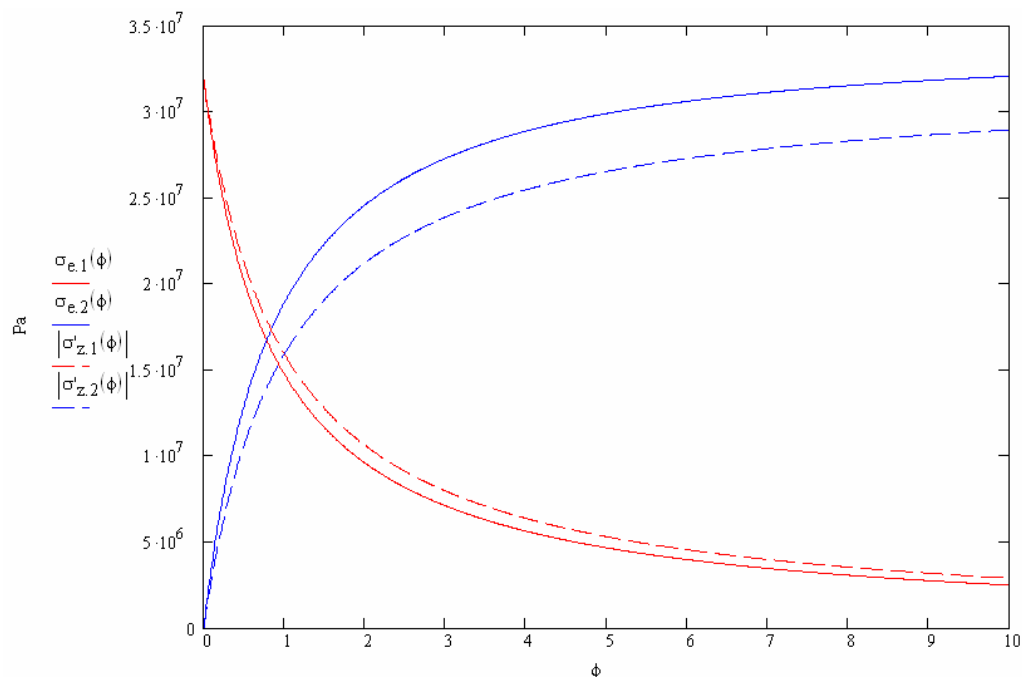
skirumai tarp metodikų gana žymūs, ir didėja didėjant santykiui ϕ . Augant šiam santykiui išorinis cilindras tampa vis standesnis, todėl ir įtempiai skiriasi daugiau.



3.10. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos radialinių įtempių priklausomybė nuo parametro ϕ



3.11. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos žiedinių įtempių priklausomybė nuo parametro ϕ



3.12. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos įtempių intensyvumo priklausomybė nuo parametro ϕ

Ašiniai, radialiniai ir žiediniai įtempiai, didėjant santykiui ϕ , pradžioje didėja (išskyrus $\sigma_{z,1}$, kurie mažėja) sparčiai, vėliau jų vertės stabilizuojasi, ir beveik nekinta.

Lentelėje 3.1.2.1 ašinių įtempių paklaidos tokios delės ($\phi = 10$), iš esmės dėl to kad vidinis cilindras yra hidrostatinio gniuždymo būsenoje. Kadangi jo Puasono koeficientas artimas 0,5 (tuo pačiu tūrinis tamprumo modulis neaprėštai didelis), medžiaga neturi kur pasislinkti (konstrukcija pilnavidurė), todėl susidaro didelis kontaktinis slėgis kuris pakeičia ašinių įtempių vertes.

Kai $\phi = 1,0$, žiedinių įtempių vertė, išoriniame kūne gaunama tokia didelė dėl to kad esant pasirinktiems matmenims $|\sigma_{\theta,2}/\sigma_{\theta,1}| = 3$. Šio santykio vertė išplaukia iš lygčių 1.3.2.24, 1.3.2.26.

Kai $\phi = 0,1$, didelė žiedinių įtempių paklaida gaunama išoriniame cilindre dėl to, kad ašinių įtempių vertė tokiomis sąlygomis yra maža, atitinkamai žiedinio įtempio santykis su ašiniu – gana didelis.

Lentelė 3.1.2.2 nuo 3.1.2.1 skiriasi tuo, kad paklaidų vertės yra mažesnės. Pagrindinė priežastis – nė vienas cilindras negali būti artimai hidrostatiniam gniuždymui būsenoje. Ekvivalentinių įtempių paklaida siekia net 32 %, nes tamprumo modulių santykis tokio tipo konstrukcijai, paklaidas veikia tarsi pastovus daugiklis.

Tuščiaavidurės konstrukcijos įtempių komponentų vertės panašios į pilnavidurės, tik šiek tiek mažesnės.

Pasiūlytos metodikos tiesioginio tipo, pilnavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametru ϕ

Įtempių būvio komponentai	$\phi = 0.1$	$\phi = 1.0$	$\phi = 10.0$
$\sigma_{z,1}$	-2,8986E+7*Pa; 0,17 %	-1,7084E+7*Pa; 7,34 %	-6,221E+6*Pa; 114,98%
$\sigma_{z,2}$	-2,8449E+6*Pa; 1,93 %	-1,4747E+7*Pa; 7,34 %	-2,561E+7*Pa; 11,50 %
$\sigma_{\rho,1}$	-4,5471E+5*Pa; 1,57 %	-2,3362E+6*Pa; 14,68 %	-3,7271E+6*Pa; 128,80%
$\sigma_{\rho,2}$	-4,5471E+5*Pa; 15,71 %	-2,3362E+6*Pa; 14,68 %	-3,7271E+6*Pa; 12,88%
$\sigma_{\theta,1}$	-4,5471E+5*Pa; 1,57 %	-2,3362E+6*Pa; 14,68 %	-3,7271E+6*Pa; 70,03%
$\sigma_{\theta,2}$	1,3641E+6*Pa; 47,14%	7,0087E+6*Pa; 44,04 %	1,1181E+7*Pa; 38,64%
$\sigma_{e,1}$	2,8531E+7*Pa; 1,40 %	1,4747E+7*Pa; 7,34 %	2,4939E+6*Pa; 13,82%
$\sigma_{e,2}$	3,6563E+6*Pa; 26,35 %	1,8904E+7*Pa; 18,77 %	3,2052E+7*Pa; 10,77%

3.1.2.2 lent.

Pasiūlytos metodikos atvirkštinio tipo, pilnavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametru ϕ

Įtempių būvio komponentai	$\phi = 0.1$	$\phi = 1.0$	$\phi = 10.0$
$\sigma_{z,1}$	-2,8544E+7*Pa; 1,36 %	-1,5012E+7*Pa; 5,67 %	-2,7819E+6*Pa; 3,86 %
$\sigma_{z,2}$	-3,2873E+6*Pa; 1,93 %	-1,6819E+7*Pa; 5,67 %	-2,9049E+7*Pa; 0,39 %
$\sigma_{\rho,1}$	4,4085E+5*Pa; 1,52 %	1,8060E+6*Pa; 11,35 %	1,0423E+6*Pa; 36,02 %
$\sigma_{\rho,2}$	4,4085E+5*Pa; 15,23 %	1,8060E+6*Pa; 11,35 %	1,0423E+6*Pa; 3,60 %
$\sigma_{\theta,1}$	4,4085E+5*Pa; 1,52 %	1,8060E+6*Pa; 11,35 %	1,0423E+6*Pa; 70,03 %
$\sigma_{\theta,2}$	-1,3226E+6*Pa; 45,7 %	-5,4180E+6*Pa; 34,04 %	-3,1268E+6*Pa; 10,81 %
$\sigma_{e,1}$	2,8985E+7*Pa; 0,16 %	1,6819E+7*Pa; 5,67 %	3,8242E+6*Pa; 32,15 %
$\sigma_{e,2}$	3,2302E+6*Pa; 11,63 %	1,6264E+7*Pa; 2,19 %	2,8239E+7*Pa; 2,41 %

⁶ Lentelėse radialinių ir žiedinių įtempių paklaida pateikiama kaip jų santykis su ašiniais įtempiais (pagal apytiksle metodiką, jų vertės lygios nuliui, todėl paklaidų šiems komponentams negalime apskaičiuoti).

Apibendrinami galime teigti kad:

1. Ašinių, radialinių ir žiedinių įtempių didžiausi skirtumai tarp metodikų gaunami pilnavidurėje TTK, kai $\phi = 10$. Tokiais atvejais skirtumai siekia šimtus procentų, nors ekvivalentiniai įtempiai skiriasi koletą dešimčių procentų.

2. Didžiausia ekvivalentinių įtempių paklaida gaunama pilnavidurėje ATK, kai $\phi = 10$ (apie $1/3 \sigma_z$). Ašiniai įtempiai skiriasi keliais procentais, o radialiniai ir žiediniai keliomis dešimtimis procentų.

3. Ekvivalentiniai įtempių paklaidos gaunamos didžiausios kai tamprumo modulių vertės gerokai skiriasi.

4. Jei vienas įtempių intensyvumo komponentas turi didelį nuokrypį, tai kito nuokrypis gerokai mažesnis. Mažiausios įtempių intensyvumo vertės gaunamos tuščiavidurėje TTK, kai $E_1 \gg E_2$, ir pilnavidurėje ATK kai $E_1 \approx E_2$. Minėtais atvejais didžiausia paklaida yra apie 6 %, todėl jei nereikia didelio tikslumo galima naudotis paprastesne, apytiksle metodika, net jei medžiagų Puasono koeficientai labai skirtingi.

3.1.2.3 lent.

Pasiūlytos metodikos tiesioginio tipo, tuščiavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametru ϕ

Įtempių būvio komponentai	$\phi = 0.1$	$\phi = 1.0$	$\phi = 10.0$
$\sigma_{z,1}$	-2,8993E+7*Pa; 0,19 %	-1,7012E+7*Pa; 6,89 %	-4,1462E+6*Pa; 43,28 %
$\sigma_{z,2}$	-2,838E+6*Pa; 1,93 %	-1,4819E+7*Pa; 6,89 %	-2,7685E+7*Pa; 4,33 %
$\sigma_{p,1}$	-2,8879E+5*Pa; 1,00 %	-1,2184E+6*Pa; 7,66 %	-7,7945E+5*Pa; 26,94 %
$\sigma_{p,2}$	-2,8879E+5*Pa; 9,98 %	-1,2184E+6*Pa; 7,66 %	-7,7945E+5*Pa; 2,69 %
$\sigma_{\theta,1}$	-7,5087E+5*Pa; 2,59 %	-3,1679E+6*Pa; 19,9 %	-2,0266E+6*Pa; 70,03 %
$\sigma_{\theta,2}$	1,3285E+6*Pa; 45,91 %	5,6047E+6*Pa; 35,22 %	3,5855E+6*Pa; 12,39 %
$\sigma_{e,1}$	2,8476E+7*Pa; 1,59 %	1,4915E+7*Pa; 6,29 %	2,9482E+6*Pa; 1,88 %
$\sigma_{e,2}$	3,6382E+6*Pa; 25,73 %	1,8009E+7*Pa; 13,15 %	2,9332E+7*Pa; 1,37 %

Pasiūlytos metodikos atvirkštinio tipo, tuščiavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametrai ϕ

Įtempių būvio komponentai	$\phi = 0.1$	$\phi = 1.0$	$\phi = 10.0$
$\sigma_{z,1}$	-2,8448E+7*Pa; 1,69 %	-1,4965E+7*Pa; 5,98 %	-2,8069E+6*Pa; 3,00 %
$\sigma_{z,2}$	-3,3832E+6*Pa; 1,93 %	-1,6866E+7*Pa; 5,98 %	-2,9024E+7*Pa; 0,30 %
$\sigma_{\rho,1}$	3,046E+5*Pa; 1,05 %	1,0566E+6*Pa; 6,64 %	4,4986E+5*Pa; 15,55 %
$\sigma_{\rho,2}$	3,046E+5*Pa; 10,53 %	1,0566E+6*Pa; 6,64 %	4,4986E+5*Pa; 1,55 %
$\sigma_{\theta,1}$	7,9197E+5*Pa; 2,74 %	2,7472E+6*Pa; 17,26 %	1,1696E+6*Pa; 70,03 %
$\sigma_{\theta,2}$	-1,4012E+6*Pa; 48,42 %	-4,8605E+6*Pa; 30,54 %	-2,0694E+6*Pa; 7,15 %
$\sigma_{e,1}$	2,8999E+7*Pa; 0,21 %	1,6930E+7*Pa; 6,37 %	3,6699E+6*Pa; 26,82 %
$\sigma_{e,2}$	3,1967E+6*Pa; 10,47 %	1,5818E+7*Pa; 0,62 %	2,8299E+7*Pa; 2,21 %

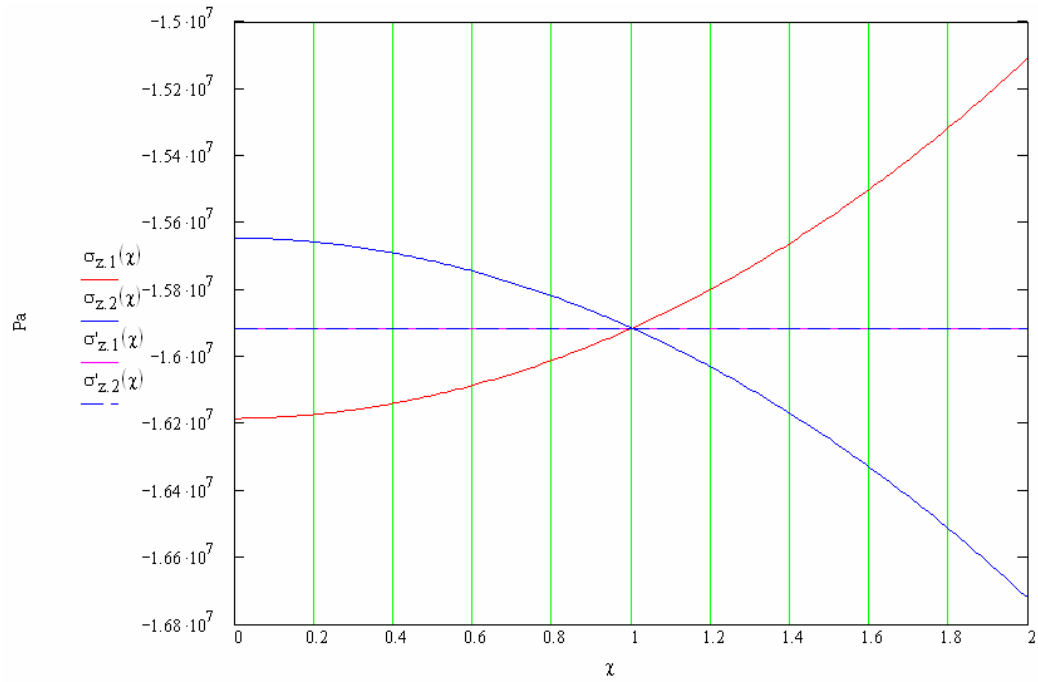
3.1.3. Įtempių priklausomybė nuo Puasono koeficientų santykio χ

Panagrinėkime kokią įtaką daro įtempų vertėms Puasono koeficientų santykis. Laikysime kad medžiagų tamprumo moduliai ir sluoksnio skerspjūvio plotai yra lygūs. Vidinio sluoksnio Puasono koeficientą laikysime pastoviu ($\nu_1 = 0,25$), o išorinio kintamu ($\nu_2 \in (0 \quad 0,5)$). Tokiu būdu kai santykis $0 \leq \chi < 1$ turime tiesioginę, kai $1 < \chi \leq 2$ atvirkštinę konstrukciją. Pateikiame įtempių pasiskirstymo grafikus pilnavidurėje konstrukcijoje (žr. 3.13-3.16 pav.). Kiti konstrukciniai parametrai tokie pat kaip ir 3.1.2 poskyryje.

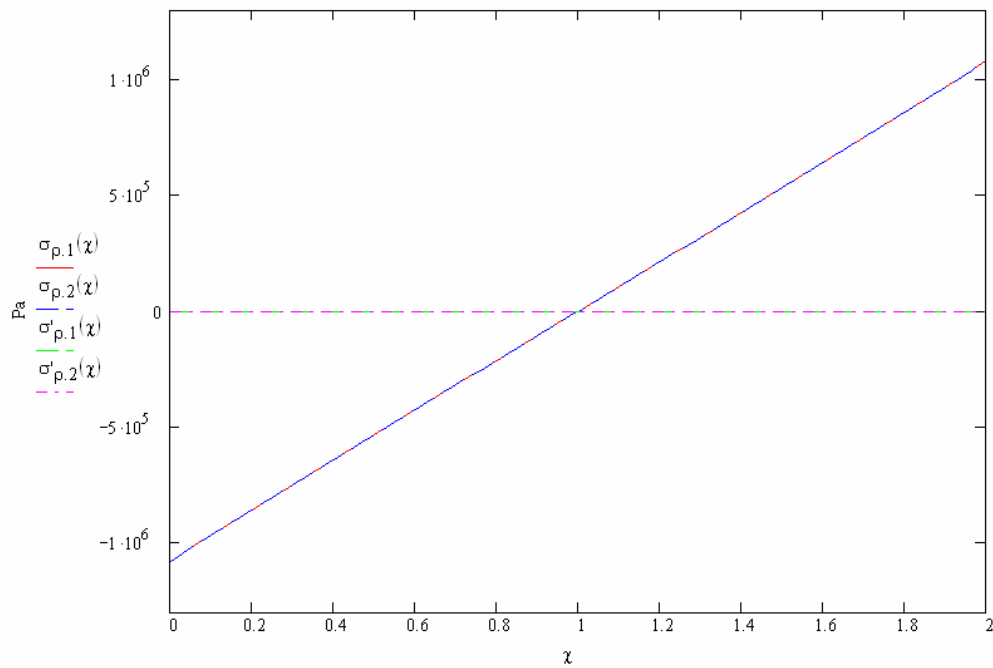
Dabar pažiūrėkime kaip kinta įtempiai konstrukcijose kai Puasono koeficientai skiriasi maksimaliai t.y. $|\nu_1 - \nu_2| = 0,5$.

Žiedinių įtempių vertės pirmame ir antrame kūne skiriasi dėl konstrukcijos ypatybių (žr. Priedą Nr.3).

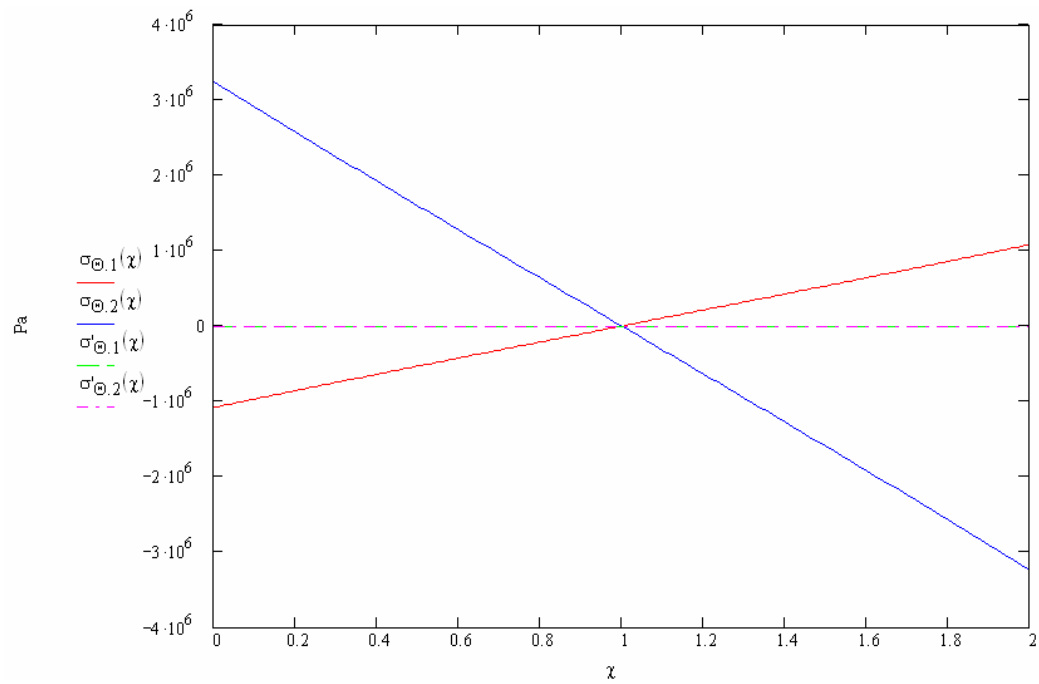
Iš 3.1.3.1-3.1.3.2 lentelėse pateiktų rezultatų matyti: kai medžiagos tamprumo moduliai vienodi, tai maksimalus skirtumas tarp apytikslės ir patikslintos metodikų įtempių intensyvumų yra 20 %, ir gaunamas TTK. Mažiausias skirtumas yra 6 %, ir gaunamas atvirkštinio tipo pilnavidurėje konstrukcijoje. Ašinių įtempių vertės skiriasi nuo 6 iki 8 %. Radialiniai įtempiai sudaro iki 7-15 %, nuo ašinių įtempių. Analogiškai žiediniai – 12-46 % ašinių įtempių verčių.



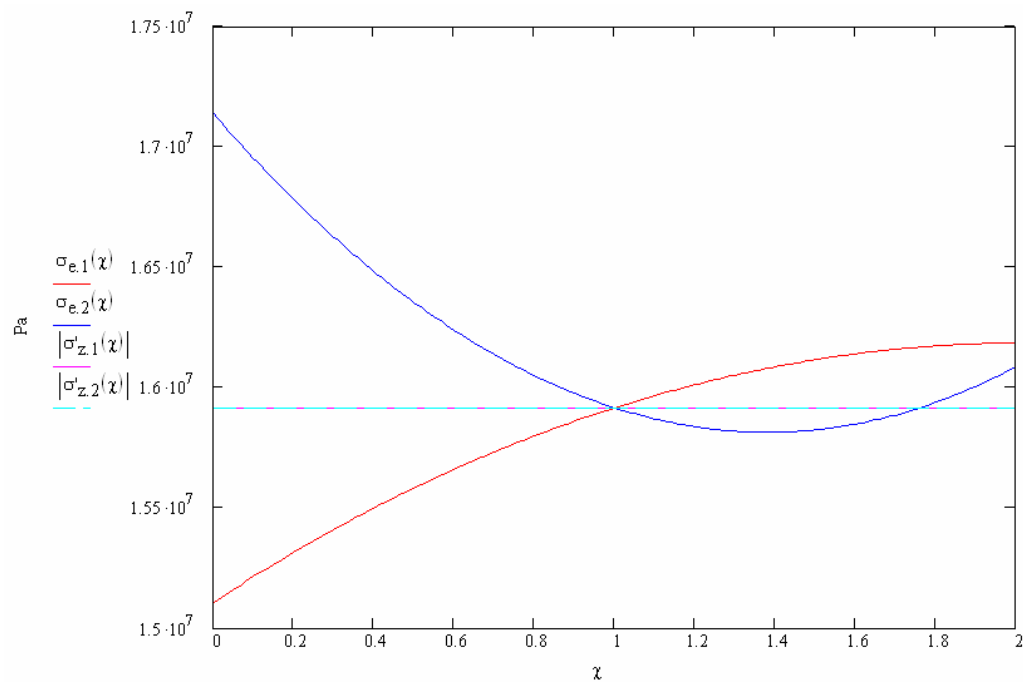
3.13. pav. Pilnavidurės konstrukcijos ašinių įtempių priklausomybė nuo parametro χ



3.14. pav. Pilnavidurės konstrukcijos radialinių įtempių priklausomybė nuo parametro χ



3.15. pav. Pilnavidurės konstrukcijos žiedinių įtempių priklausomybė nuo parametro χ



3.16. pav. Pilnavidurės konstrukcijos įtempių intensyvumo priklausomybė nuo parametro χ

Pasiūlytos metodikos, pilnavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametru χ

Įtempių būvio komponentai	Tiesioginio tipo konstrukcija	Atvirkštinio tipo konstrukcija
	$\chi \rightarrow \infty$	$\chi \rightarrow 0$
$\sigma_{z,1}$	-1,714E+7*Pa; -7,69 %	-1,4979E+7*Pa; -5,88%
$\sigma_{z,2}$	-1,4691E+7*Pa; -7,69 %	-1,6852E+7*Pa; -5,88 %
$\sigma_{p,1}$	-2,4436E+6*Pa; -15,35 %	1,8724E+6*Pa; -11,76 %
$\sigma_{p,2}$	-2,4436E+6*Pa; -15,35 %	1,8724E+6*Pa; -11,76 %
$\sigma_{\theta,1}$	-2,4436E+6*Pa; -15,35 %	1,8724E+6*Pa; -11,76 %
$\sigma_{\theta,2}$	7,3309E+6*Pa; -46,06 %	-5,6172E+6*Pa; -35,29 %
$\sigma_{e,1}$	1,4696E+7*Pa; -7,66 %	1,6852E+7*Pa; -5,88 %
$\sigma_{e,2}$	1,9112E+7*Pa; -20,08 %	1,6323E+7*Pa; -2,56 %

Pasiūlytos metodikos, tuščiavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametru χ

Įtempių būvio komponentai	Tiesioginio tipo konstrukcija	Atvirkštinio tipo konstrukcija
	$\chi \rightarrow \infty$	$\chi \rightarrow 0$
$\sigma_{z,1}$	-1,7062E+7*Pa; -7,20%	-1,4928E+7*Pa; -6,21 %
$\sigma_{z,2}$	-1,4769E+7*Pa; -7,20 %	-1,6903E+7*Pa; -6,21 %
$\sigma_{p,1}$	-1,2709E+6*Pa; -7,99 %	1,0976E+6*Pa; -6,90 %
$\sigma_{p,2}$	-1,2709E+6*Pa; -7,99 %	1,0976E+6*Pa; -6,90 %
$\sigma_{\theta,1}$	-3,3042E+6*Pa; -20,76 %	2,8538E+6*Pa; -17,93 %
$\sigma_{\theta,2}$	5,8459E+6*Pa; -36,73 %	-5,0491E+6*Pa; -31,72 %
$\sigma_{e,1}$	1,4879E+7*Pa; -6,52 %	1,6972E+7*Pa; -6,64 %
$\sigma_{e,2}$	1,8136E+7*Pa; -13,95 %	1,5848E+7*Pa; -0,42 %

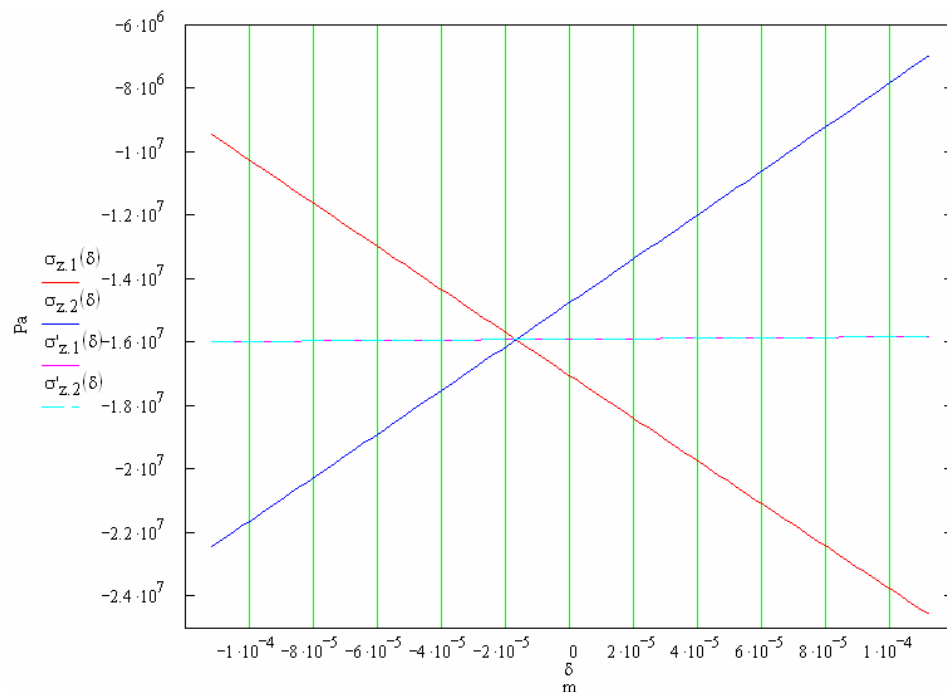
3.1.4. Įtempių priklausomybė nuo radialinės įvaržos δ

Jei DS surenkamas mechaniškai, tai dėl gamybos paklaidų po surinkimo tarp sluoksnių gali atsirasti kontaktinis slėgis. Kaip jau buvo minėta radialinė įvarža gali susidaryti ir dėl temperatūros pokyčio (kai medžiagų terminio plėtimosi koeficientai skiriasi).

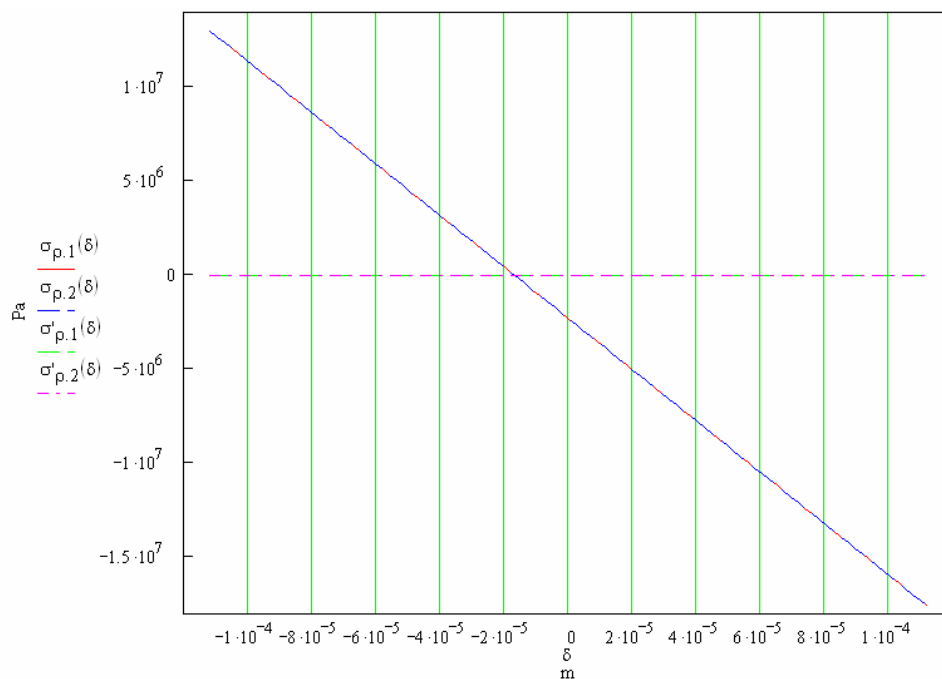
Kontaktinis slėgis dėl matmenų nesutapimo gali susidaryti tik tuomet kai įvarža teigiama. Kita vertus keičiantis temperatūrai galima gauti ir neigiamas įvaržos vertes (laikoma kad sluoksniai tokiu atveju yra sukibę). Todėl parametą δ keisime simetriškai nuo neigiamų iki teigiamų verčių.

Jei maksimalią įvaržos vertę pasirinktume pastovia, tai keičiant konstrukcijos matmenis jos santykinis dydis irgi kistų. Kad taip nenutiktų, maksimalią įvaržos vertę prilyginame pastoviai procentinei spindulio R_1 daliai n . Tarkime ši dalis yra: $n = 0,5\% = 0,005$. Tuomet ribinė įvarža bus: $\delta_r = 0,005 \times R_1$.

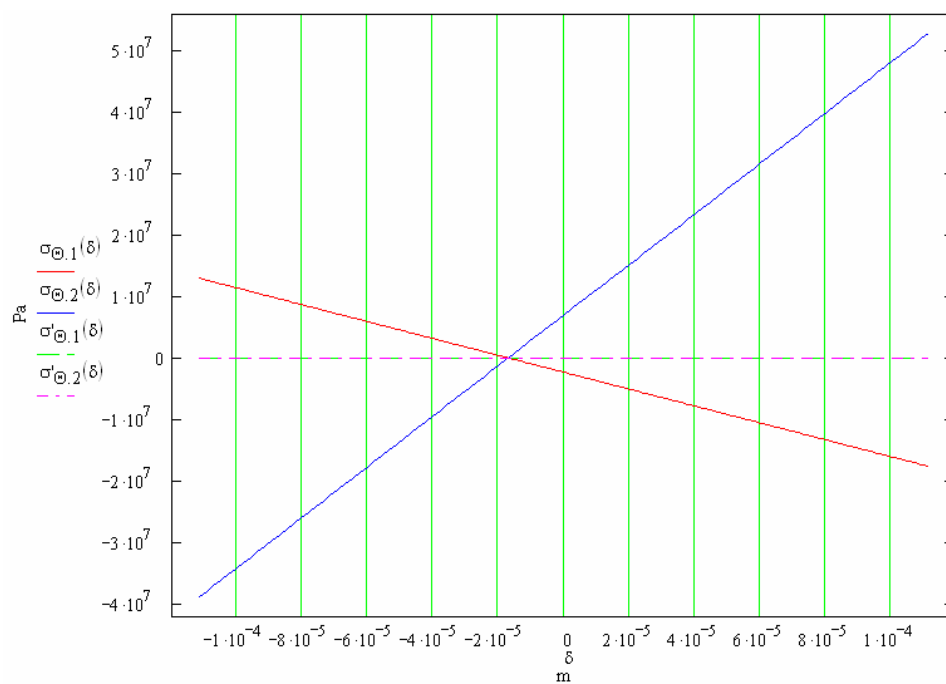
Toliau pateikiame grafikus, rodančius kaip kintą įtempių būvio komponentai, keičiant radialinę įvaržą.



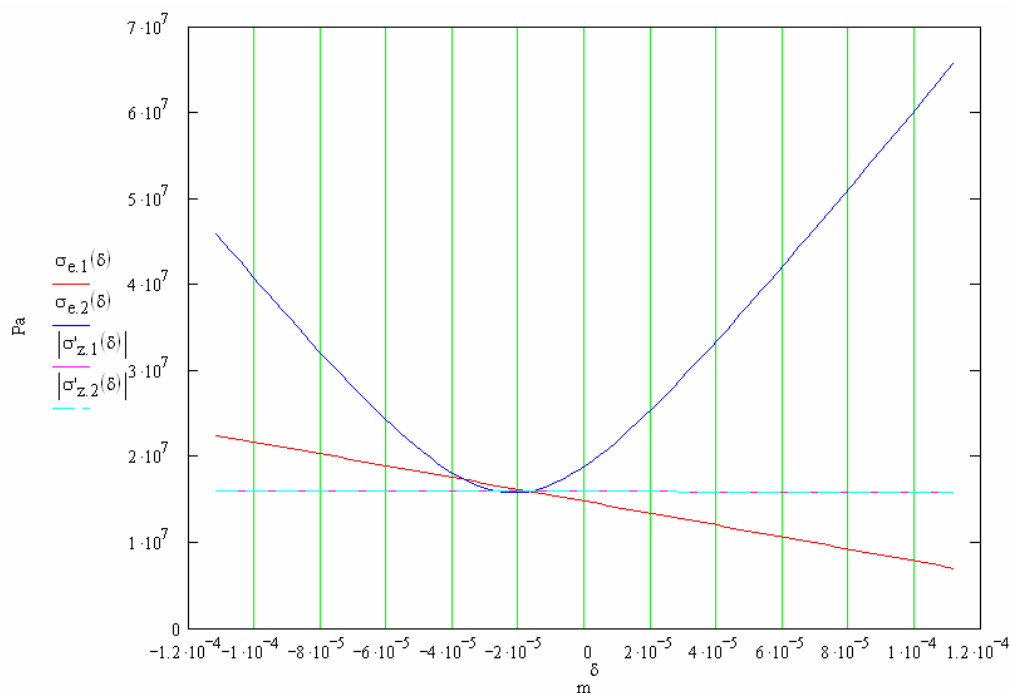
3.17. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos ašinių įtempių priklausomybė nuo parametro δ



3.18. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos radialinių įtempių priklausomybė nuo parametro δ



3.19. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos žiedinių įtempių priklausomybė nuo parametro δ



3.20. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos įtempių intensyvumo priklausomybė nuo parametro δ

3.1.4.1 lent.

Pasiūlytos metodikos tiesioginio tipo, pilnavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametru δ

Įtempių būvio komponentai	$\delta = 1.0956733E-4*m$	$\delta = 0*m$	$\delta = -1.0956733E-4*m$
$\sigma_{z,1}$	-2,4449E+7*Pa; 54,37 %	-1,7084E+7*Pa; 7,34 %	-9,6334E+6*Pa; 39,77 %
$\sigma_{z,2}$	-7,14139E+6*Pa; 54,91 %	-1,47474E+7*Pa; 7,34 %	-2,22917E+7*Pa; 39,38 %
$\sigma_{\rho,1}$	-1,7308E+7*Pa; 109,28 %	-2,33622E+6*Pa; 14,68 %	1,26583E+7*Pa; 79,15 %
$\sigma_{\rho,2}$	-1,7308E+7*Pa; 109,28 %	-2,33622E+6*Pa; 14,68 %	1,26583E+7*Pa; 79,15 %
$\sigma_{\theta,1}$	-1,7308E+7*Pa; 109,28 %	-2,33622E+6*Pa; 14,68 %	1,26583E+7*Pa; 79,15 %
$\sigma_{\theta,2}$	5,19241E+7*Pa; 327,85 %	7,00866E+6*Pa; 44,04 %	-3,7975E+7*Pa; 237,44 %
$\sigma_{e,1}$	7,14139E+6*Pa; 54,91 %	1,47474E+7*Pa; 7,34 %	2,22917E+7*Pa; 39,38 %
$\sigma_{e,2}$	6,47502E+7*Pa; 308,84 %	1,89036E+7*Pa; 18,77 %	4,48954E+7*Pa; 180,71 %

Pasiūlytos metodikos atvirkštinio tipo, pilnavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametrai δ

Įtempių būvio komponentai	$\delta = 1.0956733E-4 \cdot m$	$\delta = 0 \cdot m$	$\delta = -1.0956733E-4 \cdot m$
$\sigma_{z,1}$	-2,0703E+7*Pa; 30,72 %	-1,5012E+7*Pa; 5,67 %	-9,2555E+6*Pa; 42,13 %
$\sigma_{z,2}$	-1,09246E+7*Pa; 31,02 %	-1,68185E+7*Pa; 5,67 %	-2,2666E+7*Pa; 41,72 %
$\sigma_{\rho,1}$	-9,77848E+6*Pa; 61,74 %	1,80601E+6*Pa; 11,35 %	1,34106E+7*Pa; 83,85 %
$\sigma_{\rho,2}$	-9,77848E+6*Pa; 61,74 %	1,80601E+6*Pa; 11,35 %	1,34106E+7*Pa; 83,85 %
$\sigma_{\theta,1}$	-9,77848E+6*Pa; 61,74 %	1,80601E+6*Pa; 11,35 %	1,34106E+7*Pa; 83,85 %
$\sigma_{\theta,2}$	2,93354E+7*Pa; 185,23 %	-5,41804E+6*Pa; 34,04 %	-4,02317E+7*Pa; 251,55 %
$\sigma_{e,1}$	1,09246E+7*Pa; 31,02 %	1,68185E+7*Pa; 5,67 %	2,2666E+7*Pa; 41,72 %
$\sigma_{e,2}$	3,96994E+7*Pa; 150,66 %	1,62639E+7*Pa; 2,19 %	4,73686E+7*Pa; 196,17 %

Pasiūlytos metodikos tiesioginio tipo, tuščiavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametrai δ

Įtempių būvio komponentai	$\delta = 1.0956733E-4 \cdot m$	$\delta = 0 \cdot m$	$\delta = -1.0956733E-4 \cdot m$
$\sigma_{z,1}$	-2,208E+7*Pa; 39,64 %	-1,7012E+7*Pa; 6,89 %	-1,1833E+7*Pa; 26,14 %
$\sigma_{z,2}$	-9,46058E+6*Pa; 40,17 %	-1,4819E+7*Pa; 6,89 %	-2,01535E+7*Pa; 25,8 %
$\sigma_{\rho,1}$	-7,05048E+6*Pa; 44,59 %	-1,2184E+6*Pa; 7,66 %	4,59599E+6*Pa; 28,69 %
$\sigma_{\rho,2}$	-7,05048E+6*Pa; 44,59 %	-1,2184E+6*Pa; 7,66 %	4,59599E+6*Pa; 28,69 %
$\sigma_{\theta,1}$	-7,05048E+6*Pa; 44,59 %	-1,2184E+6*Pa; 7,66 %	1,2047E+7*Pa; 75,2 %
$\sigma_{\theta,2}$	3,24322E+7*Pa; 205,12 %	5,6047E+6*Pa; 35,22 %	-2,11416E+7*Pa; 131,96 %
$\sigma_{e,1}$	1,35095E+7*Pa; 14,56 %	1,4915E+7*Pa; 6,29 %	2,11623E+7*Pa; 32,09 %
$\sigma_{e,2}$	4,07412E+7*Pa; 157,67 %	1,8009E+7*Pa; 13,15 %	2,5258E+7*Pa; 57,66 %

Kaip ir ankstesniuose poskyriuose pateikiame įtempių komponentų skaitines vertes įvairiuose konstrukcijose, ir esant skirtingoms įvaržos reikšmėms. Medžiagų tamprumo moduliai yra vienodi:

$$E_1 = E_2 = 1 \times 10^{10} \text{ Pa}^7.$$

3.1.4.4 lent.

Pasiūlytos metodikos atvirkštinio tipo, tuščiavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametru δ

Įtempių būvio komponentai	$\delta = 1.0956733E-4 \text{ m}$	$\delta = 0 \text{ m}$	$\delta = -1.0956733E-4 \text{ m}$
$\sigma_{z,1}$	-1,9396E+7*Pa; 22,67 %	-1,4965E+7*Pa; 5,98 %	-1,0491E+7*Pa; 34,52 %
$\sigma_{z,2}$	-1,21794E+7*Pa; 22,97 %	-1,6866E+7*Pa; 5,98 %	-2,14776E+7*Pa; 34,06 %
$\sigma_{p,1}$	-4,00977E+6*Pa; 25,36 %	1,0566E+6*Pa; 6,64 %	6,1029E+6*Pa; 38,09 %
$\sigma_{p,2}$	-4,00977E+6*Pa; 25,36 %	1,0566E+6*Pa; 6,64 %	6,1029E+6*Pa; 38,09 %
$\sigma_{\theta,1}$	-1,0342E+7*Pa; 65,41 %	2,7472E+6*Pa; 17,26 %	1,5997E+7*Pa; 99,86 %
$\sigma_{\theta,2}$	1,84449E+7*Pa; 116,66 %	-4,8605E+6*Pa; 30,54 %	-2,80733E+7*Pa; 175,23 %
$\sigma_{e,1}$	1,33943E+7*Pa; 15,29 %	1,693E+7*Pa; 6,37 %	2,3183E+7*Pa; 44,71 %
$\sigma_{e,2}$	2,74664E+7*Pa; 73,71 %	1,5818E+7*Pa; 0,62 %	3,14023E+7*Pa; 96,01 %

Iš 3.1.4.1-3.1.4.1 lentelių matoma, kad tiek ašinių, tiek ekvivalentinių įtempių paklaidos, nuo radialinės įvaržos, yra didelės (atitinkamai iki 42, 308 %). Vadinasi naudotis apytiksle metodika, jei tarp cilindrų susidaro, net ir nedidelė, radialinė įvarža (nuo temperatūros, ar matmenų nesutapimo) negalima. Tokiais atvejais patartina naudotis pasiūlyta DS skaičiavimo metodika.

3.1.5. Įtempių priklausomybė nuo skerspjūvio plotų santykio ψ

Ankstesniuose poskyriuose nagrinėjome dvisluoksnių strypo konstrukcijas, kuriose sluoksnio skerspjūvio plotai buvo vienodi. Dabar panagrinėsime įtempių komponentų grafikus, gaunamus keičiant skerspjūvio plotų santykį ψ . Čia $\psi = \frac{A_2}{A_1}$.

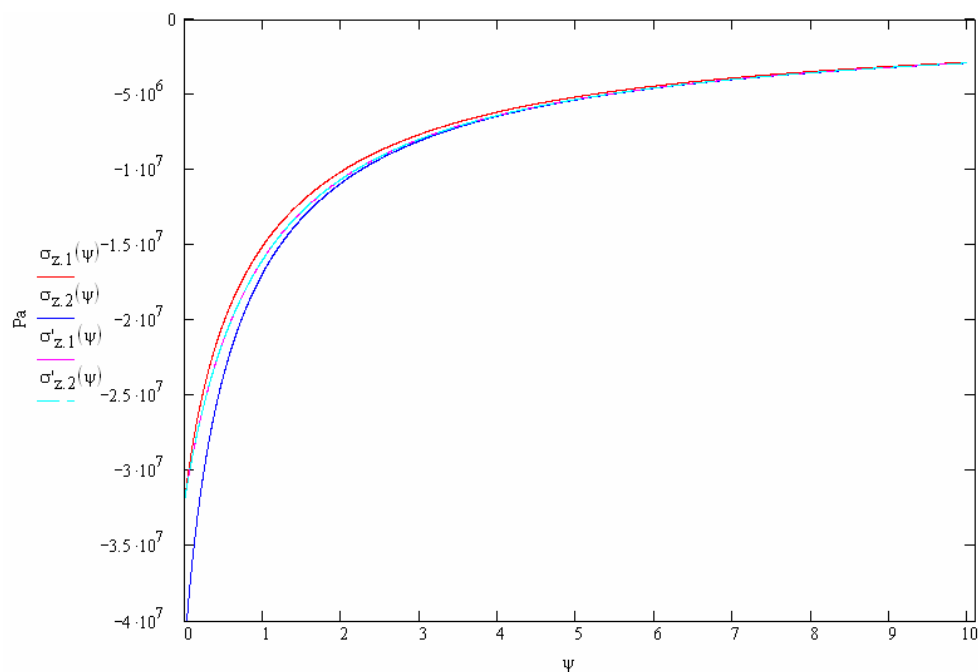
Atvejai kai $\psi \rightarrow 0$ ir $\psi \rightarrow \infty$ mūsų nedomina, nes konstrukcija tampa vienalyte (sudaryta iš vienos medžiagos), todėl nagrinėsime atvejus kai $\psi = 0,5$ ir $\psi = 2,0$.

⁷ Įtempių komponentų skaitinės vertės labai priklauso nuo tamprumo modulio dydžio. Kuo didesnis tamprumo modulis tuo didesni įtempimai ir skirtumai tarp apytikslės ir patikslintos metodikų.

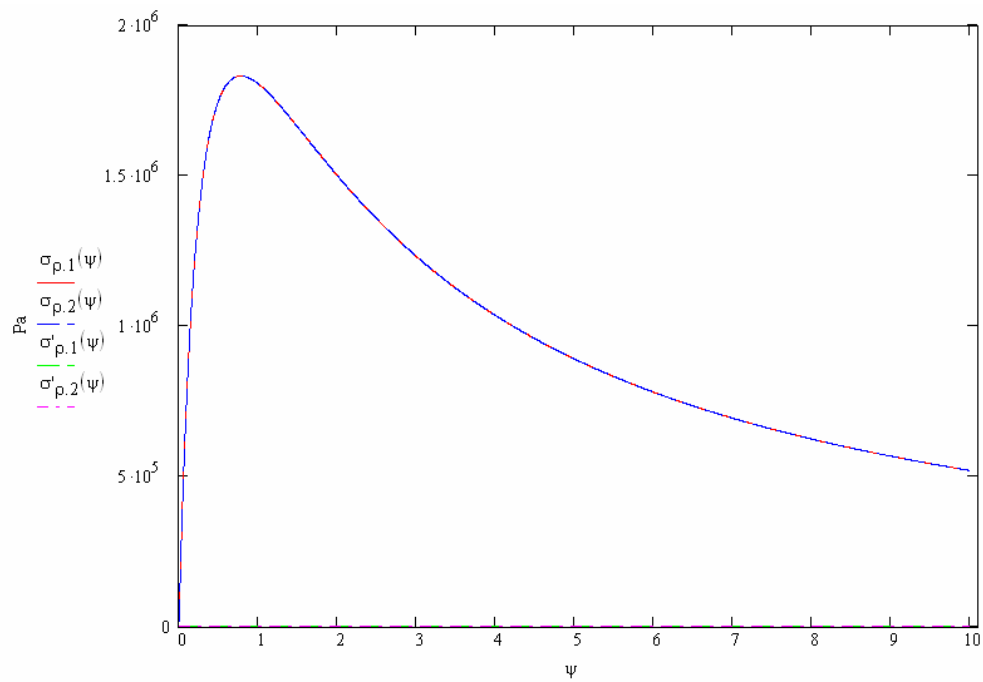
Pasiūlytos metodikos pilnavidurės konstrukcijos įtempiai, jų palyginimas su apytiksle metodika, kintant parametru ψ

Įtempių būvio komponentai	Tiesioginio tipo konstrukcija		Atvirkštinio tipo konstrukcija	
	$\psi = 0.50$	$\psi = 2.00$	$\psi = 0.50$	$\psi = 2.00$
$\sigma_{z,1}$	-2,1868E+7*Pa; 3,05 %	-1,2143E+7*Pa; 14,44 %	-2,0067E+7*Pa; 5,44 %	-1,0100E+7*Pa; 4,81 %
$\sigma_{z,2}$	-1,9925E+7*Pa; 6,10 %	-9,8441E+6*Pa; 7,22 %	-2,3528E+7*Pa; 10,87 %	-1,0865E+7*Pa; 2,40 %
$\sigma_{\rho,1}$	-1,90512E+6*Pa; 8,98 %	-2,3221E+6*Pa; 21,88 %	1,74817E+6*Pa; 8,24 %	1,5009E+6*Pa; 14,15 %
$\sigma_{\rho,2}$	-1,9051E+6*Pa; 8,98 %	-2,3221E+6*Pa; 21,88 %	1,74817E+6*Pa; 8,24 %	1,5009E+6*Pa; 14,15 %
$\sigma_{\theta,1}$	-1,9051E+6*Pa; 8,98 %	-2,3221E+6*Pa; 21,88 %	1,74817E+6*Pa; 8,24 %	1,5009E+6*Pa; 14,15 %
$\sigma_{\theta,2}$	9,5256E+6*Pa; 44,89 %	4,6441E+6*Pa; 43,77 %	-8,74087E+6*Pa; 41,19 %	-3,0018E+6*Pa; 28,29 %
$\sigma_{e,1}$	1,99633E+7*Pa; 5,93 %	9,8208E+6*Pa; 7,44 %	2,1815E+7*Pa; 2,80 %	1,1601E+7*Pa; 9,34 %
$\sigma_{e,2}$	2,5717E+7*Pa; 21,19 %	1,255E+7*Pa; 18,28 %	2,19953E+7*Pa; 3,65 %	1,0841E+7*Pa; 2,17 %

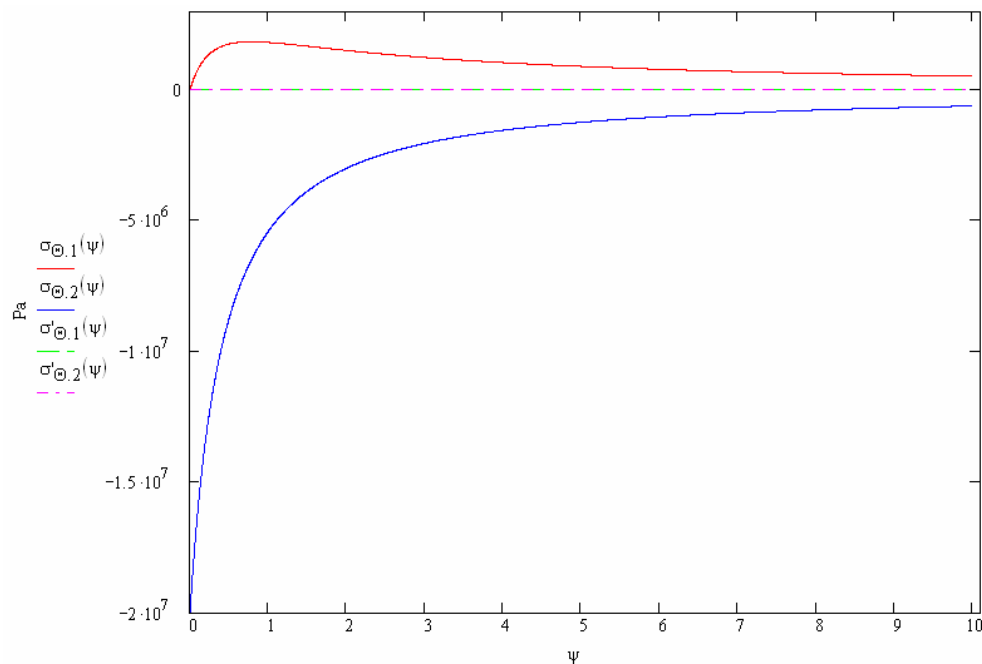
Tuščiaidurėje konstrukcijoje įtempių būvio komponentai kinta panašiai, tik maksimalūs nukrypimai mažesni. Dėl šių priežasčių skaitinių įtempių reikšmių tuščiaidurėje konstrukcijoje nepateikiame, norintys jas gali nesunkiai apskaičiuoti naudodamiesi antro skyriaus lygtimis.



3.21. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos ašinių įtempių priklausomybė nuo parametro ψ

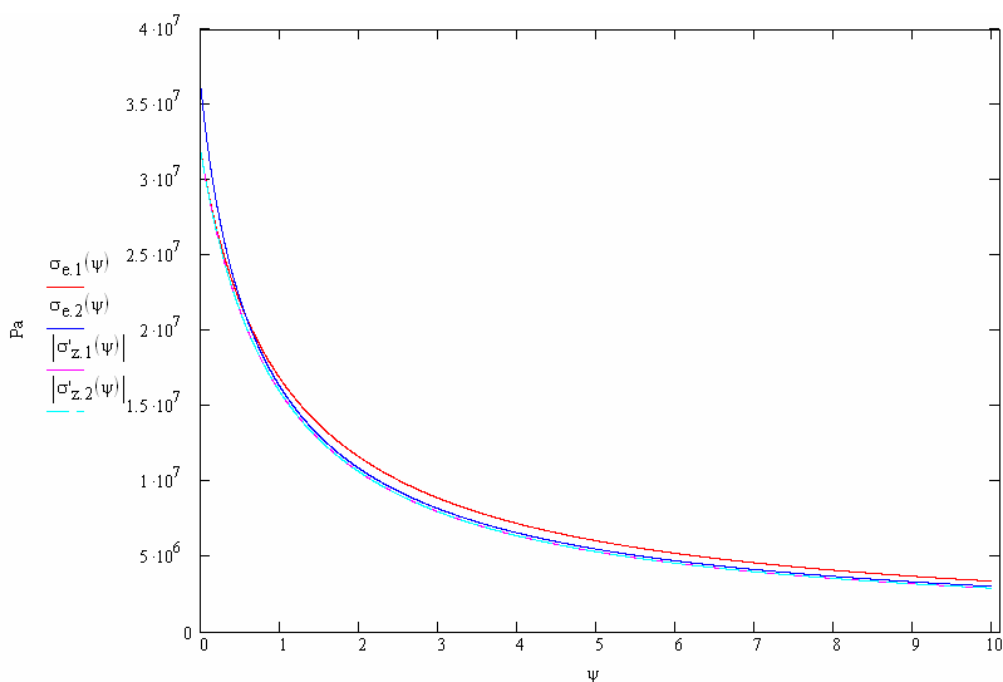


3.22. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos radialinių įtempių priklausomybė nuo parametro ψ



3.23. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos žiedinių įtempių priklausomybė nuo parametro ψ

Iš lentelės 3.1.5.1 matyti, kad keičiantis santykiui ϕ įtempių komponentų vertės kinta nedaug. Gautas paklaidas iš esmės sąlygoja Puasono koeficientų skirtumas (plg. 3.1.5.1 ir 3.1.4.1-3.1.4.4 kur $\delta = 0$). Taigi galima daryti išvadą, jog skerspjūvio plotų santykio įtaka DS įtampiams yra mažareikšmė.



3.24. pav. Tiesioginio tipo pilnavidurės konstrukcijos įtempių intensyvumo priklausomybė nuo parametro ψ

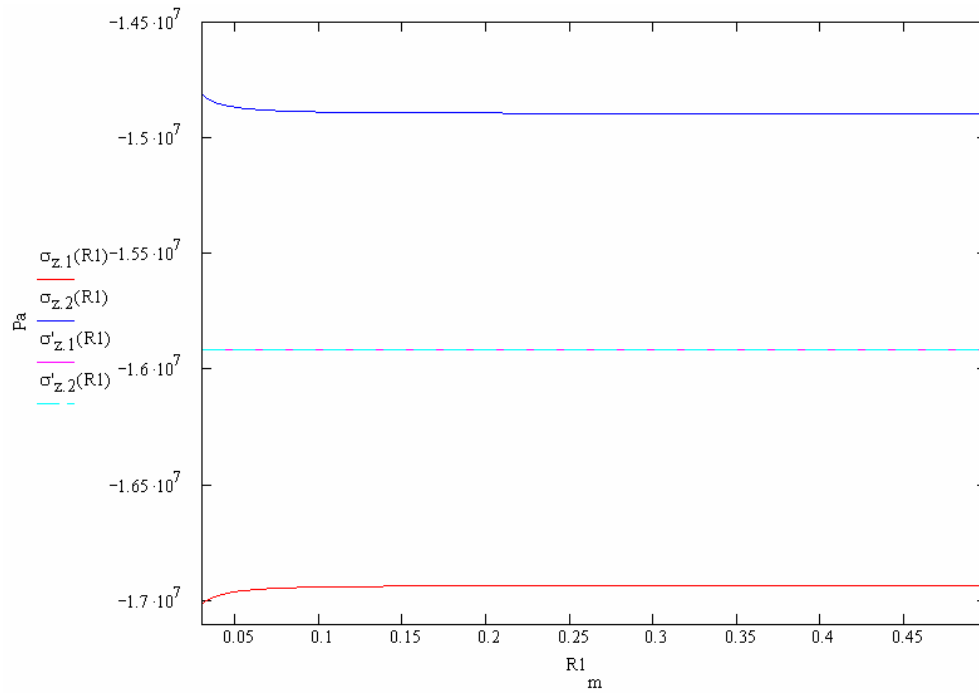
Kaip matome iš 3.1.5.1 lentelės ir 3.21-3.24 paveikslų, skirtumai tarp apytikslės ir patikslintos metodikų (ašiniams įtempiams ir įtempių intensyvumui) kintant parametrai ψ , yra nežymūs. Tad galima teigti jog skerspjūvio plotų santykio įtaka apytikslės metodikos paklaidai nežymi. Lentelėje 3.1.5.1 gautos paklaidos labiausiai sąlygotos Puasono koeficientų skirtumo, o ne skerspjūvio plotų santykio.

3.1.6. Įtempių priklausomybė nuo sujungimo spindulio R_1

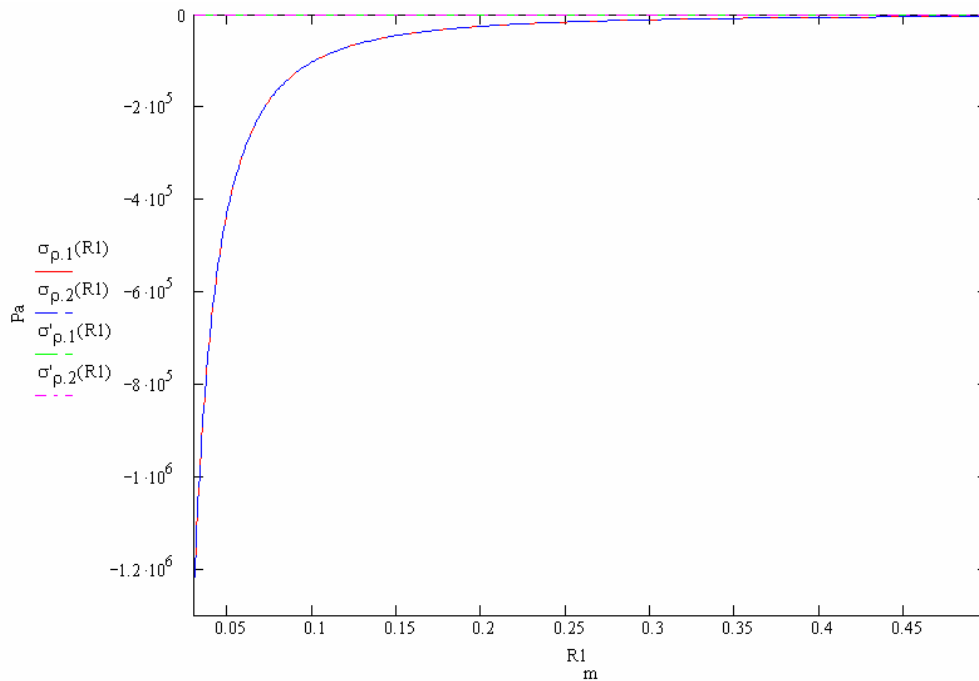
Dabar panagrinėkime kaip kinta įtempiai priklausomai nuo sujungimo spindulio R_1 . Laikykime, kad DS skerspjūvio plotai vienodi ($A_1 = A_2$), o tamprumo moduliai lygūs ($E_1 = E_2$). Medžiagų Puasono koeficientai skirtingi ($|\nu_1 - \nu_2| = 0,48$).

Akivaizdu kad sujungimo spindulio įtaka įtempių vertėms iš pradžių yra didesnė, vėliau šios vertės stabilizuojasi ir nuo spindulio nebeprislauso. Staigesnį kitimą, esant mažoms R_1 vertėms, galima paaiškinti tuo, kad pilnaviduris strypas tampa cilindru, o vėliau storasienis cilindras palaipsniui tampa plonasieniu.

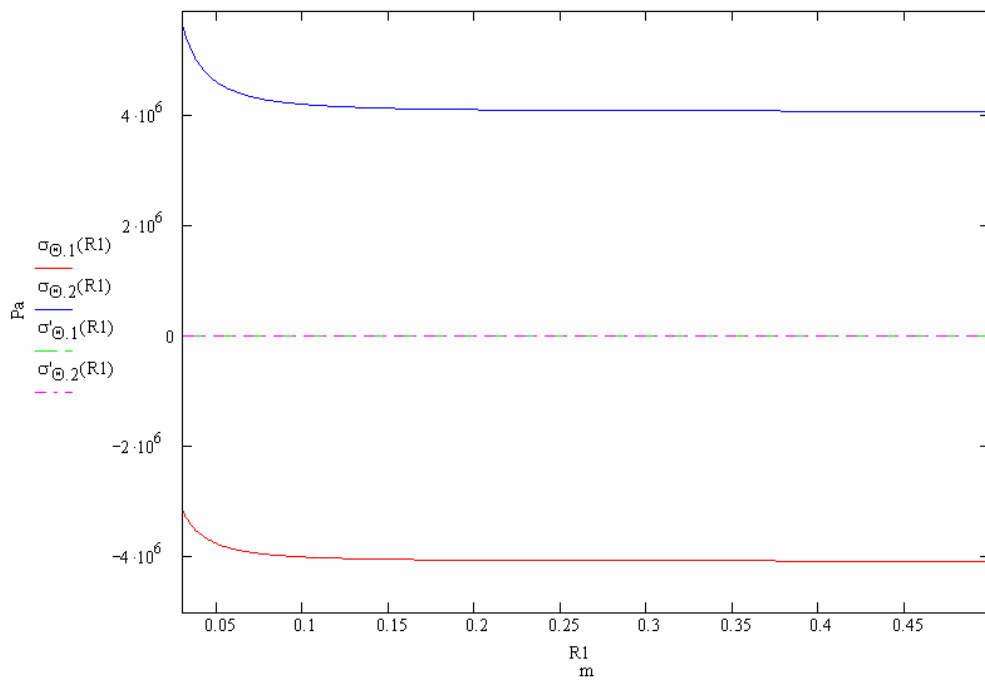
Įdomu tai kad radialiniai įtempiai (žr. 3.26 pav.) artėja prie nulio, o žiediniai asimptotiškai artėja prie tam tikrų nenulinių verčių. Kontaktinio slėgio mažėjimą galima paaiškinti kontaktinio paviršiaus ploto didėjimu augant sujungimo spinduliu. Žiediniai įtempiai artėja prie nenulinių verčių, nes ploteliai kauruose jie veikia (žiedinis skerspjūvis) mažai priklauso nuo spindulio R_1 .



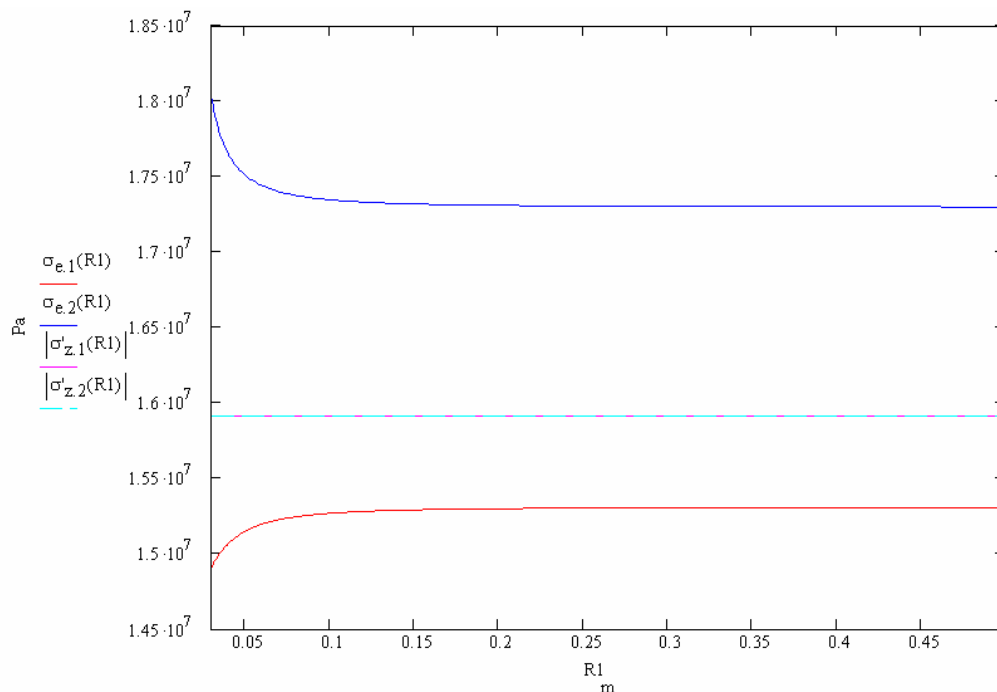
3.25. pav. Tiesioginio tipo tuščiaidurės konstrukcijos ašinių įtempių priklausomybė nuo parametro R_1



3.26. pav. Tiesioginio tipo tuščiaidurės konstrukcijos radialinių įtempių priklausomybė nuo parametro R_1



3.27. pav. Tiesioginio tipo tuščiaavidurės konstrukcijos žiedinių įtempių priklausomybė nuo parametro R_1



3.28. pav. Tiesioginio tipo tuščiaavidurės konstrukcijos įtempių intensyvumo priklausomybė nuo parametro R_1

Kitaip nei kituose poskyriuose, šiame nepateikiame įtempių skaitinių verčių, nes keičiant spindulį R_1 šie pokyčiai yra nežymūs ir nedaro didesnės įtakos tikslumui.

Baigiant galima konstatuoti jog parametro R_1 kitimas didesnę įtaką daro kai pereinama iš pilnavidurio strypo į storasienį, bei iš storasienio į plonasienį cilindrą. Plonasieniams cilindrams jo įtaka labai maža todėl gali būti atmesta kaip mažareikšmė ir iš viso nevertinama.

3.2. Įtempčių būvio tyrimas baigtinių elementų metodu

Minėjome (žr. 1.4.1 poskyrį) kad BEM labai universalus metodas, tad juo galima išspręsti beveik bet kurį deformuojamojo kūno mechanikos uždavinį. Vis dėl to jis netinka kai reikia nustatyti funkcines priklausomybes tarp įtempčių (deformacijų) ir konstrukcijos geometrijos, medžiagų mechaninių savybių, išorinių apkrovų. Šiam tikslui antrame skyriuje pateikėme dvisluoksnių strypų skaičiavimo metodiką. Čia tą patį uždavinį išspręsime baigtinių elementų metodu (BEM). Gautus rezultatus palyginsime.

Tokiu būdu patikrinsime pateiktą metodiką, jos išvedimo teisingumą, priimtų prielaidų pagrįstumą. Žinoma, jog BEM – apytikslis, o pasiūlyta metodika – tiksli, tad nereikia tikėtis idealaus rezultatų sutapimo. Skirtumas tarp rezultatų (tiksliau BEM paklaida) sąlygotas pastarojo metodinių ir skaičiavimo paklaidų. Metodinės paklaidos mažėja smulkinant tinklėlį, o skaičiavimo priklauso nuo programinės įrangos ypatybių.

Pirmiausia pasirinksimė programinę įrangą kuria bus sprendžiamas uždavinys, tuomet ją testuosime su uždaviniu kurio analitinis sprendinys – žinomas ir patikrintas. Skirtumas tarp analitinio ir BEM sprendinių nustatys paklaidos režį, kurio galima tikėtis sprendžiant gniuždomo tempiamo DS uždavinį.

Jei palyginę rezultatus gausime kad skirtumai tarp pasiūlytos analitinės metodikos ir BEM yra testavimo metu nustatytos eilės, arba mažesni, galėsime daryti pagrystą išvadą – pateikta analitinė metodika dvisluoksniams strypams skaičiuoti yra teisinga.

3.2.1. Programinės įrangos pasirinkimas

Be skaičiavimo technikos (kompiuterio) nebūtų įmanoma realizuoti BEM'o privalumų, o tam reikia sukurti programą kuri suformuotų standumo matricą ir apskaičiuotų poslinkius, deformacijas, įtempčius.

Programinės įrangos pasirinkimas – pirmas žingsnis į problemos sprendimą panaudojant BEM. Jis didele dalimi nulemia tolesnę sprendimo specifiką.

Visą BEM programinę įrangą galima suskirstyti į atvirojo ir uždarojo kodo. Uždarojo kodo (komercinė) daugiau, mažiau universali, pasižymi didele automatizacija, kokybiška kompiuterine grafika, patogia vartotojo sąsaja. Atvirojo kodo (nekomercinė) paprastai skirta specialiam uždaviniui, ar jų grupei spręsti. Platinama tiriamaisiais arba mokomaisiais tikslais. Norint ją panaudoti reikia ne tik labai gerai žinoti matematinės BEM, bet ir programinės kalbos, kuria ji parašyta, subtilybes. Dėl primityvumo, ribotumo ir nepatikimumo naudojamos gana retai.

Uždarojo kodo programinę įrangą, galima suskirstyti į profesionalią ir integruotą. Integruota yra skirta automatizuoto projektavimo sistemomis (AutoCAD, Inventor, Solid Works) sukurtų

modelių skaičiavimams. Panaudojimui pakanka elementarių teorinių BEM žinių, tačiau tai labai apriboja sprendžiamus uždavinius.

Specializuota programinė įranga (Ansys, Algor, Abaqus) suteikia žymiai platesnes galimybes. Galima ne tik skaičiuoti bet kokias fizikines terpes (dujas, skysčius, kietus kūnus), jų sąveiką, bet ir pasirinkti baigtinių elementų tipą, srities suskaidymą į baigtinius elementus būdą ir t.t..

Sprendami klausimą, kuria programa naudotis, rinkomės iš Solid Works, Algor ir Ansys. Pirmąją teko iš kart atmesti dėl modulio Cosmos works ribotumo (negalima panaudoti cilindrinės koordinatinių sistemos). Programa Algor pasižymi labai patogiu, paprastu valdymu, uždavinio parengimu sprendimui (preprocesorius). Tačiau gana ribotos baigtinių elementų pasirinkimo, srities diskretizavimo galimybės. Visi šie trūkumai nebudingi programai Ansys. Tai galinga, universali priemonė, kurios galimybės beveik neišsemiamos. Šiame darbe buvo naudota Ansys Multiphysics v 10.0.

Iš nekomercinių verta dėmesio autorių [16] sukurta programa AXYSYM, skirta ašiai simetriškų kūnų, veikiamų simetrinių apkrovų, skaičiavimui. Pagrindinis jos privalumas – tas, kad galima kontroliuoti daugelį uždavinio sprendimo etapų. Didžiausi trūkumai: nėra grafinio sprendinio vizualizavimo priemonių, reikia daug rankinio duomenų suvedimo (tai ypač, nepatogu sprendžiant didesnės apimties uždavinius, naudojant smulkesnį tinklėlį).

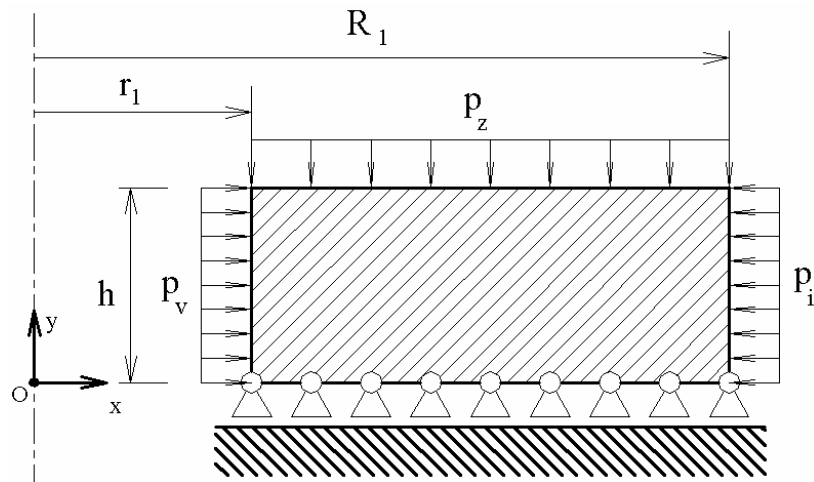
3.2.2. Programos testavimas

Prieš pradėdant spręsti uždavinį turime nustatyti kokias paklaidas gali duoti BEM. Tam tikslui išspręsimė uždavinį, kurio analitinis sprendinys žinomas iš tamprumo teorijos.

Tai slėgio veikiamas cilindras. Įtempių vertės cilindre nustatomos naudojantis storasienių cilindro skaičiavimo teorija. (žr. 1.3.2 poskyrį)

Uždavinys – ašiai simetriškas (simetriški tiek kūnai, tiek ir apkrovos), tad vietoj erdviųjų naudosime plokščius elementus. Iš tikrųjų kai tik galima reikia stengtis naudoti kuo paprastesnės formos elementus. Pavyzdžiui jei strypinę konstrukciją bandytume spręsti ne vienmačiais, bet trimačiais elementais, tai sprendimas užtruktų tūkstančius kartų ilgiau, o rezultatai būtų netgi mažiau tikslūs.

Kita vertus normalinių įtempių, kryptimi oy , gradientas lygus nuliui, vadinasi baigtinių elementų (BE)skaičius šia kryptimi, neturi įtakos rezultatų tikslumui. Todėl kryptimi oy pakanka vienos arba kelių BE eilių. Jei šia kryptimi (t.y. oy) bandytume tinklėlį smulkinti, tai dėl BEM ypatybių pereinant nuo vieno, prie kito mazgo, vertikalios kryptimi, įtempių vertės šiek tiek skirtųsi. Vadinasi tikslumas, dėl tinklelio stambumo oy kryptimi nesumažėja.



3.29. pav. Storasienio cilindro skaičiavimo schema

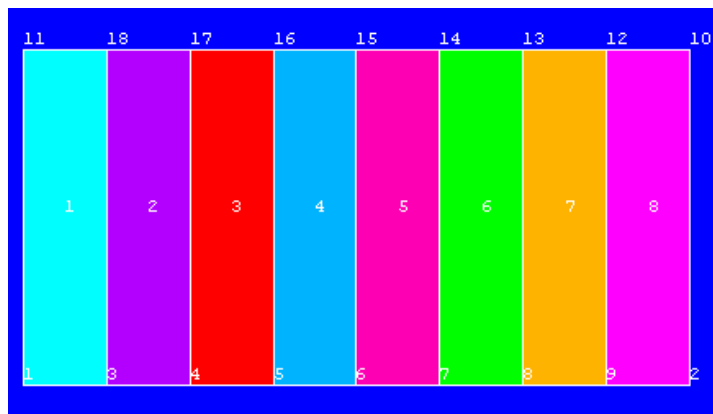
Skaičiavimo schema pateikta 3.1 paveiksle, o duomenys 3.2.2.1 lentelėje.

3.2.2.1 lent.

Duomenys programos testavimui

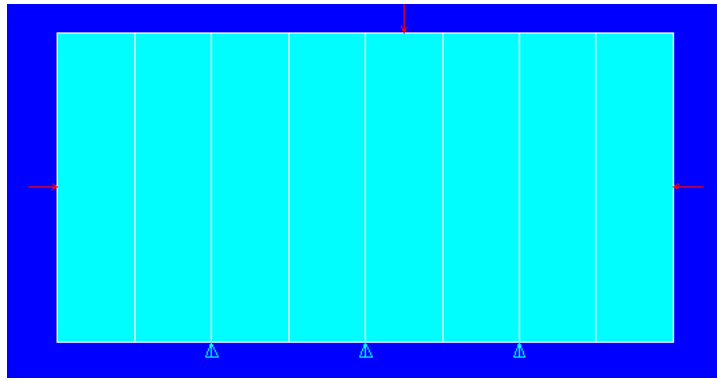
h, mm	R, mm	r, mm	p_v , Pa	p_i , Pa	p_z , Pa	E, Pa	ν
10	30	10	1×10^6	$2,0 \times 10^6$	$2,1 \times 10^{11}$	$1,0 \times 10^7$	0,3

Pirmiausia pasirenkame BE tipą: keturkampis, keturių mazgų (Quad 4 Node 42). Tuomet nurodome medžiagos mechanines charakteristikas ir nubraižome kontūrą. Sugeneruojame tinklą. Elementų ir mazgų numeriai parodyti paveiksle.



3.30. pav. Plokščios srities suskaidymas į BE, jų numeracija

Galiausiai priskiriame kraštines sąlygas (apkrovas ir įtvirtinimus) ir išsprendžiame uždavinį.



3.31. pav. Kontūrą veikiančios apkrovos ir atramos

Analitiškai įtempiai cilindre randami naudojantis tokiomis lygtimis:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r(\rho) = \frac{(p_i - p_v) \times r^2 \cdot R^2}{\rho \times (R^2 - r^2)} + \frac{p_v \cdot r^2 - p_i \cdot R^2}{R^2 - r^2} \\ \sigma_\theta(\rho) = -\frac{(p_i - p_v) \times r^2 \cdot R^2}{\rho \times (R^2 - r^2)} + \frac{p_v \cdot r^2 - p_i \cdot R^2}{R^2 - r^2} \end{array} \right. \quad (3.2.2.1)$$

Skaičiavimų rezultatus surašome į lentelę:

3.2.2.2 lent.

Storasienio cilindro analitinės skaičiavimo metodikos ir baigtinių elementų metodo rezultatai, jų palyginimas

Mazgai				Įtempių būvio komponentai											
				σ_z			σ_r			σ_θ			σ_e		
Nr.	ρ 10^{-4} m	Θ 10^{-4} m	z 10^{-4} m	B 10^2 Pa	A 10^2 Pa	Δ %	B 10^2 Pa	A 10^2 Pa	Δ %	B 10^2 Pa	A 10^2 Pa	Δ %	B 10^2 Pa	A 10^2 Pa	Δ %
1	100	0	0	-100170	-100000	-0.17	-10262	-10000	-2.55	-33131	-32500	-1.90	80937	81125	0.23
2	300	0	0	-96871	-100000	-3.23	-19564	-20000	-2.23	-20668	-22500	-8.86	77127	78780	2.14
3	125	0	0	-100300	-100000	-0.30	-14303	-14050	-1.77	-29031	-28450	-2.00	79663	79731	0.09
4	150	0	0	-100580	-100000	-0.58	-16301	-16250	-0.31	-26818	-26250	-2.12	79543	79225	0.40
5	175	0	0	-101080	-100000	-1.07	-17135	-17577	-2.58	-25389	-24923	-1.83	80141	79007	1.42
6	200	0	0	-101720	-100000	-1.69	-17590	-18438	-4.82	-23740	-24063	-1.36	81379	78901	3.05
7	225	0	0	-100570	-100000	-0.57	-18128	-19028	-4.96	-22249	-23472	-5.50	80974	78844	2.63

8	250	0	0	-99890	-100000	-0,11	-18638	-19450	-4,36	-21815	-23050	-5,66	80093	78812	1,60
9	275	0	0	-98871	-100000	-1,14	-19156	-19762	-3,17	-21335	-22738	-6,57	79004	78792	0,27
10	300	100	0	-96868	-100000	-3,23	-20450	-20000	-2,20	-21634	-22500	-4,00	76029	78780	3,62
11	100	100	0	-100160	-100000	-0,16	-10254	-10000	-2,48	-32920	-32500	-1,28	80985	81125	0,17
12	275	100	0	-98884	-100000	-1,13	-20583	-19762	-3,99	-22479	-22738	-1,15	77627	78792	1,50
13	250	100	0	-99894	-100000	-0,11	-20638	-19450	-5,76	-23044	-23050	-0,03	78467	78812	0,44
14	225	100	0	-100580	-100000	-0,58	-20480	-19028	-7,09	-23469	-23472	-0,01	79118	78844	0,35
15	200	100	0	-101720	-100000	-1,69	-20069	-18438	-8,13	-24776	-24063	-2,88	79594	78901	0,87
16	175	100	0	-101060	-100000	-1,05	-18699	-17577	-6,00	-25890	-24923	-3,73	79034	79007	0,03
17	150	100	0	-100570	-100000	-0,57	-16814	-16250	-3,35	-26880	-26250	-2,34	79209	79225	0,02
18	125	100	0	-100300	-100000	-0,30	-14405	-14050	-2,46	-28910	-28450	-1,59	79640	79731	0,11
Max	–	–	–	–	–	-3,23	–	–	-8,13	–	–	-8,86	–	–	3,62

Iš lentelės matome, kad maksimali ašinių įtempių ir ekvivalentinių įtempių BEM paklaida yra 3-4 %, o žiedinių ir radialinių 8-9 %. Didesnę paklaidą gautą žiediniams ir radialiniams įtempiams galima paaiškinti dviem faktoriais. Pirmasis – šoniniuose cilindro paviršiuose veikia gerokai mažesni slėgiai, atitinkamai mažesni poslinkiai, deformacijos. Įtempiai apskaičiuojami iš deformacijų, todėl metodo paklaida yra santykinai didesnė (tenka mažesniai dydžiui). Antra priežastis – gana stambus tinklelis (žingsnis lygus 2,5 mm). Ašine (oz) kryptimi įtempių gradientas lygus nuliui, o radialine (or) gaunamas žymus įtempių kitimas.

Programos Ansys aprašymuose teigiama kad optimaliomis sąlygomis rezultatų paklaida siekia 2-3 %, nors sudėtingesniais atvejais gaunamos paklaidos iki 9 %. Mūsų sprendime uždavinyje, gautos didesnės, tačiau panašios paklaidos. Todėl šiame etape tinklelio nesmulkinsime, o smulkinimo įtaką rezultatams panagrinėsime kitame poskyryje, tikrindami pasiūlytą metodiką.

Iš atlikto programos Ansys multiphysics v10 testavimo seka tokios išvados:

- BEM ašinių ir ekvivalentinių įtempių paklaidos viršutinis režis yra ± 4 %
- Atitinkamas radialinių ir žiedinių įtempių paklaidos režis yra ± 9 %
- Siekiant tikslesnių rezultatų reikia smulkinti tinklelio skaidymą radialine kryptimi

Šios išvados padarytos remiantis spęstu uždaviniu, tačiau galima tikėtis kad esant panašioms apkrovimo sąlygoms, tinkleliui ir matmenims BEM paklaidos bus panašios. Jei skirtumai tarp

pasiūlytos metodikos ir BEM rezultatų bus mažesni, tokie pat ar nežymiai didesni, galėsime tai laikyti analitinės metodikos teisingumo patvirtinimu.

3.2.3. Uždavinio sprendimas

Ankstesniame poskyryje nustatėme paklaidų dydžius kurių reikėtų tikėtis išsprendus tempiamo-gniuždomo dvisluoksnių strypo uždavinį, kai medžiagų Puasono koeficientai skiriasi. Dabar šį uždavinį išspręsimė BEM ir pasiūlyta metodika, o gautus rezultatus palyginsime.

Norint patikrinti pasiūlytą metodiką reikia gauti kuo tikslesnius rezultatus. Naudojant BEM tai galima padaryti smulkinant tinklę. Tačiau tinklės smulkinimas padidina elementų skaičių, ir skaičiavimų apimtis, apkrauna kompiuterį o svarbiausia ilgai užtrunka.

Šiam tikslui programoje Ansys yra sukurta substruktūravimo (ang. substructuring) procedūra. Jos esmė: grupė baigtinių elementų sujungiama į vieną *super-elementą* (SE). Tai leidžia ne tik sutrumpinti skaičiavimo laiką, bet ir išspręsti net labai didelius uždavinius.

Substruktūravimas skiriasi nuo įprastos uždavinio sprendimo BEM eigos. Jis atliekamas trimis etapais:

1. Super-elemento sukūrimas. BE grupė sujungiama į vieną SE. Pasirenkama kurios laisvius (DOF) išsaugoti, o kuriuos pašalinti.
2. Super-elemento panaudojimas. Sukuriamas pilnas modelis, nurodomos apkrovos. Gautą sprendinį sudaro supaprastintas sprendinys SE ir pilnas sprendinys visiems kitiems BE.
3. Rezultatų išplėtimas. Redukuotas sprendinys išplečiamas tam, kad gauti rezultatus visiems laisviams SE.

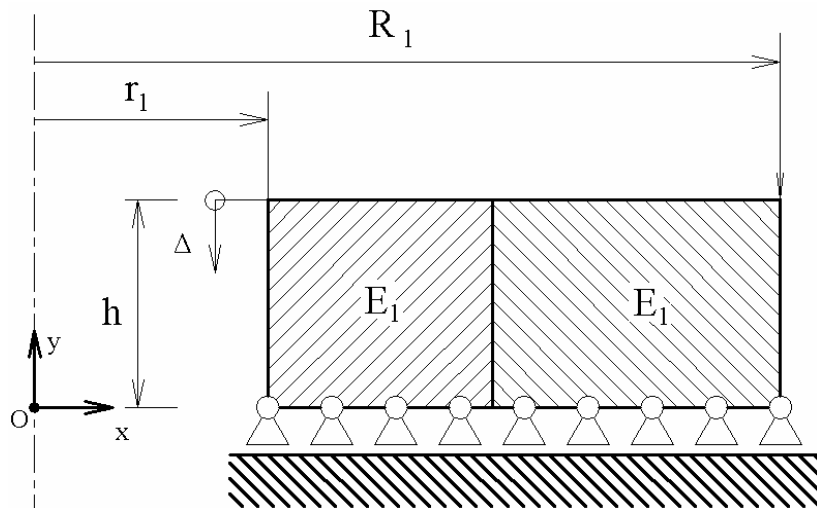
Poskyryje 3.1.3 matėme, jog didžiausios paklaidos tarp apytikslės ir pasiūlytos metodikos gaunamos tiesioginio tipo pilnavidurėje konstrukcijoje (žr.3.1.3.1 lent.). Kuo labiau patikslinta metodika skiriasi nuo apytikslės tuo didesnė skirtingų medžiagos Puasono koeficientų įtaka. Todėl pasirenkame tiesioginio tipo pilnavidurę konstrukciją kurios Puasono koeficientai skiriasi maksimaliai: $\nu_1 = 0,49$, $\nu_2 = 0,1$. Ribinių reikšmių $\nu_1 = 0,50$, $\nu_2 = 0,00$ negalime imti nes sprendžiant tokį uždavinį BEM gaunama dalyba iš nulio.

Iš tikro jei spręstume uždavinį, kai $\nu_1 = \nu_2$, tuomet tikrintume apytikslę metodiką (abiejų metodikų rezultatai šiuo atveju sutampa), bet ši metodika jau patikrinta ir jos teisingumas nekelia abejonių.

Pradėkime nuo uždavinio schemos (žr. 3.30 pav.).

Duomenys daugiasluksnio strypo uždavinio sprendimui

i	h, mm	R, mm	r, mm	E, Pa	Δ , μm	ν
1	5	22,36068	0	25×10^9	-2,959	0,49
2	5	31,62278	22,36068	25×10^9	-2,959	0,01



3.32. pav. Dvisluksnio strypo skaičiavimo schema

Sukurkime SE:

1. Nubraižome stačiakampį

(WP X) = 0 mm ; (WP Y) = 0 mm; Width = 22,36068 mm; Height = 5 mm.

2. Pasirenkame BE tipą:

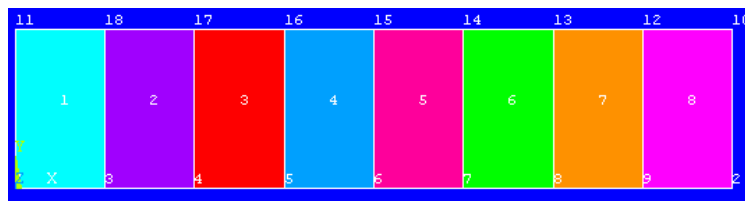
Quad 4node 42 (K3 – Axisymmetric).

3. Nurodome medžiagos mechanines charakteristikas:

Structural -> Linear -> Elastic -> Isotropic, EX = 25e9 Pa, PRXY = 0.49.

4. Sugeneruojame tinklą:

Kad gautume tikslesnius rezultatus pasirenkame 8 skilčių radialine ir 1 skilties ašine kryptimi tinklą.

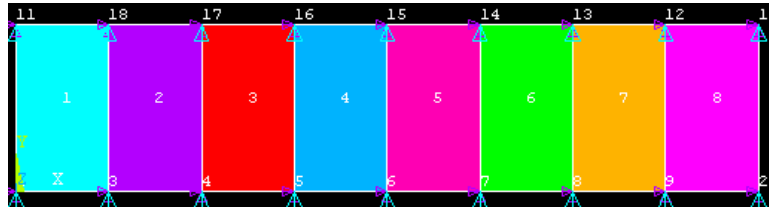


3.33. pav. Vidinio cilindro BE, mazgai, jų numeracija

5. Parenkame analizės tipą:

ANTYPE,SUBST

6. Pažymine SE laisvius (Master DOF's), kraštines sąlygas (viršutinės kraštinės poslinkis oy kryptimi lygus $-0,0029588217$ mm, o apatinė nejudama oy kryptimi).



3.34. pav. Vidinio cilindro kraštinės sąlygos

7. Išsprendžiame uždavinį;

SOLVE

Atlikę žingsnius 1-7 sugeneravome SE (pirmasis uždavinio sprendimo etapas). Dabar panaudosime šį SE uždavinio sprendimui.

8. Sukurkime naują bylą.

9. Pasirenkame SE tipą:

Superelement 50 (MATRIX 50)

10. Nubraižome išorinio cilindro kontūrą:

(WP X) = 22,36068 mm ; (WP Y) = 0 mm; Width = 9,2621 mm; Height = 5 mm.

11. Nurodomas kitų BE tipas, medžiagos mechaninės savybės, Sugeneruojamas tinklelis:

Quad 4node 42 (K3 – Axisymmetric).

Structural -> Linear -> Elastic -> Isotropic, EX = 25e9 Pa, PRXY = 0.01



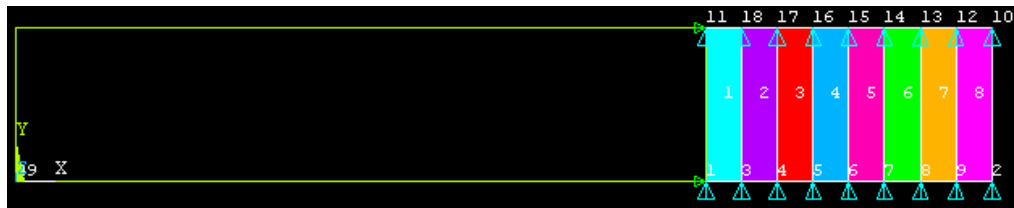
3.35. pav. Išorinio cilindro BE, mazgai, jų numeracija

12. Sutampančių mazgų numeracija:

Kadangi ką tik gauto BE masyvas ir SE sukurti atskirai, tai jų mazgų numeriai gali sutapti. Kad to nebūtų reikia pernumeruoti mazgus. Smulkiau kaip tai atlikti galima rasti programos aprašymuose.

13. Mazgų tarp SE ir kitų BE sujungimas

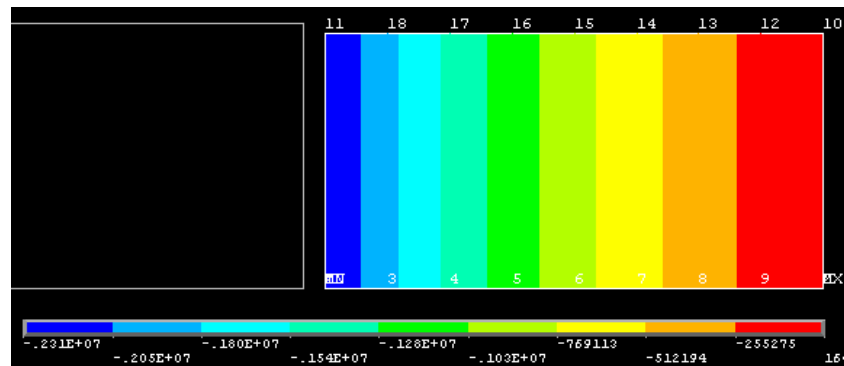
Pažymimi mazgai kuriais SE prisijungia prie likusio masyvo ir sujungiami (Coupling), nurodomos kraštinės sąlygos(kraštinių poslinkiai, SE apkrovos).



3.36. pav. Pilna dvisluoksnių strypo skaičiavimo BEM schema

14. Išsprendžiamas suformuluotas uždavinys:

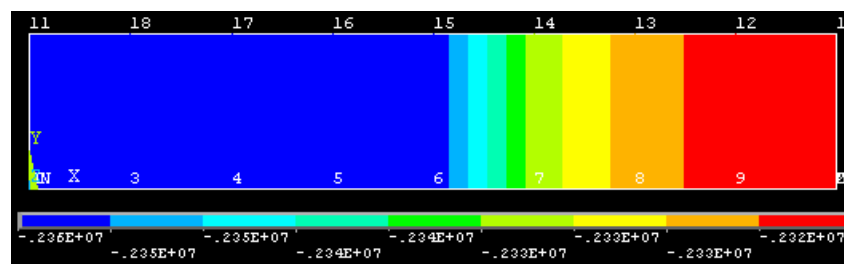
Išsprendus gaunami įtempių rezultatai išoriniame konstrukcijos cilindre. Pavyzdžiui radialiniai įtempiai pasiskirstymas parodytas sekančiame paveiksle



3.37. pav. Radialinių įtempių pasiskirstymas išoriniame cilindre

15. Galiausiai apskaičiuoti rezultatai išplečiami į SE:

Kaip tai padaryti galima rasti programos aprašyme (Expansion Pass). Taip randame radialinių įtempių pasiskirstymą vidiniame cilindre.



3.38. pav. Radialinių įtempių pasiskirstymas vidiniame cilindre

Mus domina ne grafinis vaizdas, o konkrečios įtempių vertės, taigi toliau nagrinėsime skaitinius rezultatus gautus išsprendus uždavinį. Įtempių skaitines vertes surašome į 3.2.3.1 ir 3.2.3.2 lenteles.

Dvisluoksnių strypo, vidinio cilindro analitinės skaičiavimo metodikos ir baigtinių
elementų metodo rezultatai, jų palyginimas

Mazgai				Įtempių būvio komponentai											
				σ_z			σ_r			σ_θ			σ_e		
Nr.	ρ 10^{-4} m	Θ 10^{-4} m	z 10^{-4} m	B 10^3 Pa	A 10^3 Pa	Δ %	B 10^2 Pa	A 10^2 Pa	Δ %	B 10^2 Pa	A 10^2 Pa	Δ %	B 10^3 Pa	A 10^3 Pa	Δ %
1	0.000	0	0	-17104	-17083,6	-0,12	-23567	#DIV/0!	#DIV/0!	-23567	#DIV/0!	#DIV/0!	14747	#DIV/0!	#DIV/0!
2	223,61	0	0	-17057	-17083,6	-0,16	-23163	-23362	-0,86	-23020	-23362	-1,49	14756	14747,4	0,06
3	27,951	0	0	-17104	-17083,6	-0,12	-23567	-23362	-0,87	-23567	-23362	-0,87	14747	14747,4	0,00
4	55,902	0	0	-17104	-17083,6	-0,12	-23567	-23362	-0,87	-23567	-23362	-0,87	14747	14747,4	0,00
5	83,853	0	0	-17104	-17083,6	-0,12	-23567	-23362	-0,87	-23567	-23362	-0,87	14747	14747,4	0,00
6	111,80	0	0	-17072	-17083,6	-0,07	-23559	-23362	-0,84	-22923	-23362	-1,92	14753	14747,4	0,04
7	139,75	0	0	-17044	-17083,6	-0,23	-23324	-23362	-0,16	-22596	-23362	-3,39	14765	14747,4	0,12
8	167,71	0	0	-17051	-17083,6	-0,19	-23229	-23362	-0,57	-22833	-23362	-2,32	14760	14747,4	0,09
9	195,66	0	0	-17055	-17083,6	-0,17	-23185	-23362	-0,76	-22964	-23362	-1,73	14757	14747,4	0,07
10	223,61	50	0	-17057	-17083,6	-0,16	-23163	-23362	-0,86	-23020	-23362	-1,49	14756	14747,4	0,06
11	0.000	50	0	-17104	-17083,6	-0,12	-23567	#DIV/0!	#DIV/0!	-23567	#DIV/0!	#DIV/0!	14747	#DIV/0!	#DIV/0!
12	195,66	50	0	-17055	-17083,6	-0,17	-23185	-23362	-0,76	-22964	-23362	-1,73	14757	14747,4	0,07
13	167,71	50	0	-17051	-17083,6	-0,19	-23229	-23362	-0,57	-22833	-23362	-2,32	14760	14747,4	0,09
14	139,75	50	0	-17044	-17083,6	-0,23	-23324	-23362	-0,16	-22596	-23362	-3,39	14765	14747,4	0,12
15	111,80	50	0	-17072	-17083,6	-0,07	-23559	-23362	-0,84	-22923	-23362	-1,92	14753	14747,4	0,04
16	83,853	50	0	-17104	-17083,6	-0,12	-23567	-23362	-0,87	-23567	-23362	-0,87	14747	14747,4	0,00
17	55,902	50	0	-17104	-17083,6	-0,12	-23567	-23362	-0,87	-23567	-23362	-0,87	14747	14747,4	0,00
18	27,951	50	0	-17104	-17083,6	-0,12	-23567	-23362	-0,87	-23567	-23362	-0,87	14747	14747,4	0,00
Max	—	—	—	—	—	-0,23	—	—	-0,87	—	—	-3,39	—	—	0,12

Dvisluksnių strypo, išorinio cilindro analitinės skaičiavimo metodikos ir baigtinių
elementų metodo rezultatai, jų palyginimas

Mazgai				Įtempių būvio komponentai											
				σ_z			σ_r			σ_θ			σ_e		
Nr.	ρ 10^{-4} m	Θ 10^{-4} m	z 10^{-4} m	B 10^3 Pa	A 10^3 Pa	Δ %	B 10^2 Pa	A 10^2 Pa	Δ %	B 10^2 Pa	A 10^2 Pa	Δ %	B 10^3 Pa	A 10^3 Pa	Δ %
1	223,61	0	0	-14748	-14747,4	-0,004	-23106	-23361	-1,10	69292	70085	1,14	18883	18903,5	0,11
2	316,23	0	0	-14748	-14747,4	-0,004	16,44,5	0	98,02	46395	46724	0,71	17547	17556,3	0,05
3	235,18	0	0	-14748	-14747,4	-0,004	-18671	-18877	-1,10	64884	65601	1,11	18569	18584,2	0,08
4	246,76	0	0	-14748	-14747,4	-0,004	-14845	-15005	-1,08	61108	61730	1,02	18317	18330,6	0,07
5	258,34	0	0	-14748	-14747,4	-0,004	-11520	-11643	-1,07	57823	58367	0,94	18115	18127,6	0,07
6	269,92	0	0	-14748	-14747,4	-0,004	-8611,5	-8704	-1,07	54947	55428	0,88	17952	17963,8	0,07
7	281,49	0	0	-14748	-14747,4	-0,004	-6052,8	-6122	-1,14	52415	52846	0,82	17820	17830,6	0,06
8	293,07	0	0	-14748	-14747,4	-0,004	-3789,9	-3838	-1,27	50174	50562	0,77	17711	17721,3	0,06
9	304,65	0	0	-14748	-14747,4	-0,004	-1779,2	-1809	-1,70	48182	48534	0,73	17621	17631,2	0,06
10	316,23	50	0	-14748	-14747,4	-0,004	-16,445	0	98,02	46395	46724	0,71	17547	17556,3	0,05
11	223,61	50	0	-14748	-14747,4	-0,004	-23106	-23361	-1,10	69292	70085	1,14	18883	18903,5	0,11
12	304,65	50	0	-14748	-14747,4	-0,004	-1779,2	-1809	-1,70	48182	48534	0,73	17621	17631,2	0,06
13	293,07	50	0	-14748	-14747,4	-0,004	-3789,9	-3838	-1,27	50174	50562	0,77	17711	17721,3	0,06
14	281,49	50	0	-14748	-14747,4	-0,004	-6052,8	-6122	-1,14	52415	52846	0,82	17820	17830,6	0,06
15	269,92	50	0	-14748	-14747,4	-0,004	-8611,5	-8704	-1,07	54947	55428	0,88	17952	17963,8	0,07
16	258,34	50	0	-14748	-14747,4	-0,004	-11520	-11643	-1,07	57823	58367	0,94	17952	18127,6	0,98
17	246,76	50	0	-14748	-14747,4	-0,004	-14845	-15005	-1,08	61108	61730	1,02	18317	18330,6	0,07
18	235,18	50	0	-14748	-14747,4	-0,004	-18671	-18877	-1,10	64884	65601	1,11	18569	18584,2	0,08
Max	—	—	—	—	—	-0,004	—	—	-1,70	—	—	1,11	—	—	0,98

Iš šių lentelių matome kad didžiausios paklaidos ašiniams įtempiams siekia dvi dešimtąsias procento, radialiniams – 2 %, žiediniams - 3,5 %. Įtempių intensyvumo paklaida siekia 1 %.

Palyginę šias paklaidas su programos testavimo metu nustatytais paklaidomis (žr. 3.2.2 poskyrį) galime daryti tokias išvadas:

1. Pasiūlytos metodikos ir BEM rezultatų skirtumai maždaug du kartus mažesni už programos testavimo metu nustatytus paklaidų režius.

2. Testavimo metu gautos paklaidos didesnės daugiausia dėl sudėtingesnio apkrovimo (slėgiai veikia abiejose cilindro šoniniuose paviršiuose).

3. Skirtumai tarp pasiūlytos metodikos ir BEM rezultatų mažesni už testavimo metu nustatytus paklaidų režius, todėl galima pagrįstai teigti kad pasiūlyta metodika yra teisinga.

4. Ašinių ir ekvivalentinių įtempių vertės labai gerai sutampa (paklaida nesiekia 1 %).

5. Kontaktinio slėgio maksimali paklaida siekia apie 1 %, o žiedinių įtempių 3 %. Tai pakankamai geras sutapimas. Šias paklaidas galima sumažinti maždaug du kartus smulkinant tinklėlį radialine kryptimi, keičiant BE tipą. Didesnį sutapimą pasiekti labai sunku, nes kaip buvo minėta BEM'as yra apytikslis metodas.

Vadinasi metodika patikrinimą BEM išlaikė, ir išvedimo metu nebuvo padaryta nei principinių, nei techninių klaidų.

4. REZULTATAI IR IŠVADOS

Šiame darbe išsamiai išnagrinėjome daugiasluoksnių konstrukcinių elementų ypatybes, panaudojimą, teikiamą naudą. Apžvelgėme jų tipus, skaičiavimams naudojamas metodikas, išryškindami stipriąsias ir silpnąsias puses.

Pagrindinis tyrimo tikslas - sukurti analitinę daugiasluoksnių strypų įtempių skaičiavimo metodiką, atsižvelgiant į medžiagų Puasono koeficientų, radialinės įvaržos įtaką (jos išvedimas pateiktas 2 skyriuje).

Metodika sudaryta laikantis prielaidų, kad prieš deformaciją konstrukcijoje nėra tarpų (įvaržų), išilginės sluoksnių deformacijos lygios, o sienutės storis nėra žymiai mažesnis už kitus matmenis. Pasiūlyta metodika leidžia apskaičiuoti visas tris įtempių būvio komponentes ir nustatyti, kaip jos keičiasi, kintant medžiagų mechaninėms charakteristikoms, konstrukcijos matmenims.

Pateikta metodika yra nauja ir originali. Iki šiol tempiamiems-gniuždomiems daugiasluoksniams strypams skaičiuoti buvo naudojama supaprastinta metodika [1], paremta prielaidomis, kad medžiagų Puasono koeficientai lygūs, ir nei prieš deformavimą, nei deformavus strypą, tarp sluoksnių nesusidaro kontaktinis slėgis.

Iš tikrųjų, DS gaminami iš skirtingų medžiagų porų: metalas-polimeras, metalas-keramika, polimeras-kompozitas ir t.t.. Jų Puasono koeficientai yra skirtingi, pavyzdžiui, metalams $\nu \approx 0,3$, polimerams $\nu \approx 0,4 - 0,5$, keramikai $\nu \approx 0,1 - 0,2$. Vadinasi supaprastintos metodikos rezultatai tokiais atvejais yra apytiksliai.

Kyla klausimas, kokios eilės paklaidos gaunamos, kai naudojama supaprastinta metodika. Šiam tikslui trečiame skyriuje detalai išnagrinėjome kaip kinta svarbiausieji ir ekvivalentiniai įtempiai, jų paklaidos, keičiant įvairius konstrukcinius parametrus: Puasono koeficientų, tamprumo modulių santykį, konstrukcijos tipą, matmenis, skerspjūvio plotus, radialinę įvaržą.

Apibendrinami gautus rezultatus galime padaryti tokias išvadas:

1. Didžiausią įtaką įtempių paklaidoms daro radialinė įvarža, Puasono koeficientų ir tamprumo modulių santykis. Kiti konstrukciniai parametrai turi gerokai mažesnę įtaką paklaidų dydžiui.
2. Ašiniai įtempių paklaida didžiausia pilnavidurėje TTK. Ji gali siekti šimtą, ar net daugiau, procentų, tai priklauso nuo tamprumo modulių santykio.
3. Žiedinių ir radialinių įtempių vertės gali siekti nuo 5 iki 70 % ašinių įtempių vertės.
4. Didžiausia ekvivalentinių įtempių paklaida sudaro apie 1/3 ašinių įtempių verčių.
5. Kai medžiagų Puasono koeficientų vertės artimos (skirtumas nesiekia 5 %), abi metodikos duoda labai panašius rezultatus. Kitais atvejais galima nurodyti tokius maksimalių

paklaidų režius: Jei $|v_1 - v_2| = 0,1$ tuomet $\Delta_{\max} \approx 4\%$ ($\phi = 0,1$); $\Delta_{\max} \approx 3\%$ ($\phi = 1$); $\Delta_{\max} \approx 9\%$ ($\phi = 10$). Jei $|v_1 - v_2| = 0,2$ tuomet $\Delta_{\max} \approx 8\%$ ($\phi = 0,1$); $\Delta_{\max} \approx 6\%$ ($\phi = 1$); $\Delta_{\max} \approx 16\%$ ($\phi = 10$).

6. Pasiūlyta metodika reikia naudoti visais atvejais, kai netenkina apytikslis rezultatas ir tuomet, kai tarp cilindrų yra radialinė įvarža.
7. Supaprastintą metodiką galima naudoti jei Puasono koeficientai yra vienodi, arba skiriasi labai nedaug. Iš gautų įtempių lygčių analizės seka išvada, kad paklaidos gaunamos nedidelės TTK, jei $\phi \gg 1$, bei ATK, jei $\phi \approx 1$. Šiais atvejais, taip pat galima naudotis supaprastinta metodika.

Trečiajame skyriuje, gautas įtempių analitines išraiškas, patikrinome naudodami BEM. Tam pirmiausia atlikome programos testavimą, su uždaviniu kurio analinis sprendinys yra žinomas iš tamprumo teorijos. Tuomet DS deformavimo uždavinį išsprendėme programa Ansys multiphysic v10. Gautus rezultatus palyginome su pasiūlytos metodikos rezultatais. Nustatėme, kad nesutapimai yra mažesni už testavimo metu nustatytus paklaidų režius (didžiausias nesutapimas siekė 2-3 %). Tai savo ruožtu, patvirtino pasiūlytos metodikos teisingumą ir pagrįstumą.

LITERATŪROS SĄRAŠAS

1. J.Bareišis. Design and Stress State of Tensions in Multilayer Bars. Journal of COMPOSITE MATERIAL, Vol.38, No.5/2004. ISSN 0021-9983. p. 389-397.
2. Mechanical Engineering Handbook, Ed. Frank Kreith. Boca Raton: CRC Press LLC, 1999.
3. A.Bražėnas. "Tamprumo ir plastiškumo teorijų pagrindai". Šiauliai 2003.
4. Release 10.0 Documentation for ANSYS / Verification Test Case Descriptions.
5. Mander, J. B.; Priestly, M. J. N.; and Park, R.; "Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete", Journal of Structural Division ASCE, Vol. 114, No. 8, Aug. 1988, 1804-1826 pp.
6. Mirmiran, A., and Shahawy, M., Behaviour of Concrete Columns Confined by Fiber Composites; Journal of Structural Engineering; May 1997; pp. 583-590.
7. Razvi, S., and Saatcioglu, M., Confinement Model for High-Strength Concrete; Journal of Structural Engineering, March 1999; pp. 281-289.
8. Kudzys, A., and Kvedaras, A. K., Research on structural resistance and safety of tubular composite members; ISSN 1392 – 1207. Mechanika. 2006. Nr.5 (61), 5-10 pp.
9. Kotsovos, M. D., and Newman, J. B., Generalized Stress-Strain Relations for Concrete; ASCE Proceedings Aug 1978; pp. 845-856.
10. Mander, J. B., Priestley, M., and Park, R., Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete. J. Struct. Eng., ASCE, 1 14(8), 1988, pp.
11. Parent S., and Labossiere, P., Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Columns Confined with Composite Materials; M. Sc. thesis; Universite de Sherbrook.
12. Purba, B. K., and Mufti, A. A., Reinforcement of Circular Concrete Columns with Carbon Fiber Reinforced Polymer Jackets; Nova Scotia CAD/CAM Centre
13. Ongpeng, J.M.C. and Oreta, A.W.C.O. (2005). "Confinement Effect of Steel Ties and/or Carbon FRP in Circular RC Columns using Neural Network". 1st International Conference on Advances in Experimental Structural Engineering AESE 2005, July 19-21, 2005, Nagoya, Japan
14. Ongpeng, J.M.C. and Oreta, A.W.C.O. (2005). "Predicting the Compressive Strength of Circular Concrete Columns Confined with Steel and/or CFRP using Neural Networks". Proceedings of the 11th ASEP International Convention, May 20-21, 2005, Manila, Philippines
15. Oreta, A.W.C. and Kawashima K. (2003). "Neural Network Modeling of Confined Compressive Strength and Strain of Circular Concrete Columns". Journal of Structural Engineering, ASCE, 129(4), 554-561
16. T.R. Chandrupatla and A.D. Belegundu. „Introduction to Finite Elements in Engineering“. Prentice Hall, NJ 1997.
17. Hearn, E. J Mechanics of materials 1: an introduction to the mechanics of elastic and plastic deformation of solids and structural components/E. J. Hearn. - 3rd ed. Butterworth-Heinemann Linacre House, Jordan Hill, Oxford, 2000.

PRIEDAI

Lygybių 1.3.2.7, 1.3.2.8 įrodymas

Įrodysime lygybę 1.3.2.7. Iš to kad kūną veikia simetrinės apkrovos seka jog cilindras prieš deformavimą išlieka cilindru ir po deformavimo (žinoma su pakitusiais matmenimis).

Panagrinėkime šio cilindro skerspjuvį-žiedą. Jei prieš deformavimą šio žiedo ribose nubrėšime apskritimą, tai pridėjus apkrovas turėsime taisyklingą geometrinę kreivę – apskritimą. Šitai užrašoma lygybe:

$$\frac{l}{2 \times \rho} = \pi = Const \quad (a)$$

čia:

l - apskritimo lanko ilgis;

ρ - apskritimo spindulys.

Kita vertus deformuoto apskritimo lanko ilgis nustatomas pagal tokią formulę:

$$l' = l^0 + (l' - l^0) \Rightarrow l' = l^0 + \Delta l \quad (b)$$

čia:

l^0 ir l' - atitinkamai pradinio ir deformuoto apskritimo lanko ilgiai;

Δl - deformuoto lanko ilgio pokytis.

Pritaikę lygybę (a) 1 kūno (vidinis cilindras) išoriniam paviršiui ($\rho = R_1'$) turime:

$$\frac{l_1'}{2 \times R_1'} = \pi \quad (a')$$

Analogiškai lygtis (b) perrašoma taip:

$$l_1' = l_1 + \Delta l_1 \quad (b')$$

Įstatę (b') į (a') gauname:

$$\frac{l_1 + \Delta l_1}{2 \times R_1'} = \pi \quad (c)$$

Nagrinėjamas elementas yra kreivė, todėl jos storis nulinis. Nulinio storio elemento deformacijos (storio kryptimi) lygios nuliui. Jei storis padidėtų baigtiniu dydžiu Δ tuomet deformacija - $\varepsilon_\rho = \Delta/0 \rightarrow \infty$. Vadinasi bet koks elemento storio pokytis reikštų kad deformacija (šia kryptimi) yra begalinė. Begalybė neturi fizikinės prasmės todėl deformacija nagrinėjama kryptimi lygi nuliui. Iš tikrųjų jei storis nekinta tai $t_1 = t_2 = Const = t$, iš ribų teorijos žinoma kad

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(t - \frac{t}{t} \right) = 0^8$. Tuomet iš deformacijos apibrėžimo seka jog $\varepsilon_\rho = 0$. Galiausiai turime kad lanko ilgio pokytis priklauso tik nuo deformacijos žiedine kryptimi:

$$\varepsilon_\Theta = \frac{\Delta l_1}{l_1} \Rightarrow \Delta l_1 = \varepsilon_{\Theta,1} \times l_1 \quad (d)$$

I (c) įstatę (d) gauname:

$$\frac{l_1 + \varepsilon_{\Theta,1} \times l_1}{2 \times R_1'} = \pi \Rightarrow \frac{l_1 \times (\varepsilon_{\Theta,1} + 1)}{2 \times R_1'} = \pi \quad (e)$$

Prisiminę kad $R_1' = R_1 + \Delta R_1$, lygtį (e) perrašome tokiu pavidalu:

$$l_1 \times (1 + \varepsilon_{\Theta,1}) = 2\pi \times (R_1 + \Delta R_1) \Rightarrow l_1 \times (1 + \varepsilon_{\Theta,1}) - 2\pi R_1 = 2\pi \Delta R_1 \quad (e')$$

Iš (a) ir (e') tiesiogiai seka:

$$(2\pi R_1) \times (1 + \varepsilon_{\Theta,1}) - 2\pi R_1 = 2\pi \Delta R_1 \Rightarrow 2\pi R_1 \times \varepsilon_{\Theta,1} = 2\pi \Delta R_1 \Rightarrow \Delta R_1 = R_1 \times \varepsilon_{\Theta,1} \quad (f)$$

Iš sąlygų užrašytų lygtimis (a), (b) ir (d) išvedėme lygybę $\Delta R_1 = R_1 \times \varepsilon_{\Theta,1}$, kurią ir reikėjo įrodyti. Panagrinėsime kiekvienos šių lygčių prasmę. Lygybė (a) reiškia formos išlaikymą deformavimo metu, ji teisinga kai apkrovos veikiančios cilindrinį kūną yra simetrinės. Lygybė (b) tiesiogiai seka iš refleksyvumo (tapatingumo) dėsnio $x \equiv x$, taigi yra akivaizdi ir nereikalauja įrodymo. Lygybė (d) seka iš geometrinės kreivės ir tamprus kūno deformacijų apibrėžimų, vadinasi irgi yra teisinga. Analogiškai įrodoma ir antroji lygybė $\Delta r_2 = r_2 \times \varepsilon_{\Theta,2}$.

Iš logikos žinoma kad jei naudojant teisingus teiginius (argumentus), laikantis logikos taisyklių išvedamas teiginys (tezė) tai pastarasis teiginys yra teisingas. Šis reikalavimas yra būtinas ir kartu pakankamas tezės verifikavimo (įrodymo, teisingumo nustatymo) pagrindas. Mūsų atveju tai reiškia jog darbe naudojamos lygybės 1.3.2.7, 1.3.2.8, įrodymo metu pateiktame kontekste, yra teisingos. Iškeltų hipotezių (lygybių 1.3.2.7, 1.3.2.8) teisingumas pagrįstas, taigi įrodymas baigtas.

⁸ Čia riba yra iš dešinės (vietoj šio dar naudojamas terminas iš viršaus), nes neigiamas storis t neturi geometrinės prasmės.

Lygčių 2.2.8, 2.2.9 sistemos sprendimas

Sprendami lygčių 2.2.8-2.2.9 sistema, jos sprendinius 2.2.10, 2.2.11 pateikėme be išvedimo, dabar pademonstruosime, kaip šios lygtys buvo gautos.

Dar kartą užrašome 2.2.8-2.2.9 lygtis:

$$\begin{cases} \sigma_{z,1}A_1 + \sigma_{z,1}A_2 = F_{\Sigma} & (2.2.8) \\ \frac{\sigma_{z,1}}{E_1} + \frac{2\mu_1 p_k R_1^2}{E_1(R_1^2 - r_1^2)} = \frac{\sigma_{z,2}}{E_2} - \frac{2\mu_2 p_k r_2^2}{E_2(R_2^2 - r_2^2)} & (2.2.9) \end{cases}$$

Normaliniai įtempiai, oz kryptimi, yra vienodi ir pastovūs visame sluoksnio skerspjūvyje, todėl, lygtį 2.2.8 galima perrašyti:

$$\sigma_{z,2} = \frac{F - \sigma_{z,1} \cdot A_1}{A_2} \quad (a)$$

Įstatę išraišką a į lygtį 2.2.9 turėsime:

$$\frac{\sigma_{z,1}}{E_1} + 2 \cdot p_k \frac{\nu_1 \cdot R_1^2}{E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2)} = \frac{F - \sigma_{z,1} \cdot A_1}{\pi \cdot E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2)} - 2 \cdot p_k \frac{\nu_2 \cdot r_2^2}{E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2)} \quad (b)$$

Pertvarkę b, gauname:

$$\sigma_{z,1} \cdot \left(\frac{E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2) + E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2)}{E_1 \cdot E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2)} \right) = \frac{F}{\pi \cdot E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2)} - 2 \cdot p_k \cdot \left(\frac{\nu_1 \cdot R_1}{E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2)} + \frac{\nu_2 \cdot r_2}{E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2)} \right) \quad (c)$$

Iš c išreiškime $\sigma_{z,1}$:

$$\sigma_{z,1} = \frac{\frac{F}{\pi \cdot E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2)} - 2 \cdot p_k \cdot \left(\frac{\nu_1 \cdot R_1}{E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2)} + \frac{\nu_2 \cdot r_2}{E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2)} \right)}{\left(\frac{E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2) + E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2)}{E_1 \cdot E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2)} \right)} \quad (d)$$

Atlikę elementarius išraiškos d pertvarkymus, gauname:

$$\sigma_{z,1} = \frac{F \cdot E_1}{\pi \cdot (E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2) + E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2))} - \frac{2 \cdot p_k \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2)}{E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2) + E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2)} \cdot \left(\frac{\nu_1 \cdot R_1}{E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2)} + \frac{\nu_2 \cdot r_2}{E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2)} \right) \quad (e)$$

Įstatę e į a išraišką turime:

$$\sigma_{z,2} = \frac{F}{\pi \cdot (R_2^2 - r_2^2)} - \frac{F \cdot E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2)}{\pi \cdot (R_2^2 - r_2^2) \cdot (E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2) + E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2))} +$$

$$+ \frac{2 \cdot p_k \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot (R_1^2 - r_1^2)}{E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2) + E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2)} \cdot \left(\frac{\nu_1 \cdot R_1^2}{E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2)} + \frac{\nu_2 \cdot r_2^2}{E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2)} \right) \quad (f)$$

Pirmuosius, du lygybės dešinės pusės, narius galima suprastinti šitaip:

$$\frac{F}{\pi \cdot (R_2^2 - r_2^2)} - \frac{F \cdot E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2)}{\pi \cdot (R_2^2 - r_2^2) \cdot (E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2) + E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2))} = \frac{F \cdot E_2}{\pi \cdot (E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2) + E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2))} \quad (g)$$

Įstatę g į f išraišką, galiausiai gauname:

$$\sigma_{z,2} = \frac{F \cdot E_2}{\pi \cdot (E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2) + E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2))} + \frac{2 \cdot p_k \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot (R_1^2 - r_1^2)}{E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2) + E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2)} \cdot \left(\frac{\nu_1 \cdot R_1^2}{E_1 \cdot (R_1^2 - r_1^2)} + \frac{\nu_2 \cdot r_2^2}{E_2 \cdot (R_2^2 - r_2^2)} \right) \quad (h)$$

Palyginę lygtis 2.2.10, 2.2.11 atirinkamai su e ir h, matome, kad jos sutampa. Taigi parodėme, kad iš 2.2.10, 2.2.11 lygtys seka iš 2.2.8, 2.2.9 lygybių, vadinasi įrodymas baigtas.

$$\text{Lygybės } \left| \frac{\sigma_{\theta,2}}{\sigma_{\theta,1}} \right| = 3 \text{ įrodymas}$$

Iš tamprumo teorijos žinoma, kad žiedinius įtempius su cilindro spinduliais ir šoniniuose paviršiuose veikiančiais slėgiais sieja Lamé lygtys [17]:

$$\sigma_{\theta}^{\rho} = A + B \cdot \frac{1}{\rho^2} \quad (a)$$

čia:

A, B - Lamé konstantos, bendru atveju, yra⁹:

$$A = \frac{p_v \cdot r^2 - p_i \cdot R^2}{(R^2 - r^2)} \quad (b)$$

$$B = \frac{(p_v - p_i) \cdot r^2 \cdot R^2}{(R^2 - r^2)} \quad (c)$$

Pritaikę lygtį a DS, tarp kurio kontaktinių paviršių veikia slėgis p_k , Turime:

$$\sigma_{\theta,1}^{\rho} = -\frac{p_k \cdot r_1^2 \cdot R_1^2}{\rho^2 \cdot (R_1^2 - r_1^2)} - \frac{p_k \cdot R_1^2}{R_1^2 - r_1^2} \quad (d)$$

$$\sigma_{\theta,2}^{\rho} = -\frac{p_k \cdot r_2^2 \cdot R_2^2}{\rho^2 \cdot (R_2^2 - r_2^2)} - \frac{p_k \cdot r_2^2}{R_2^2 - r_2^2} \quad (e)$$

Užrašę d ir e, lygtis cilindrų kontakto zonoje gausime:

$$\sigma_{\theta,1} = -p_k \cdot \frac{R_1^2 + r_1^2}{R_1^2 - r_1^2} \quad (f)$$

$$\sigma_{\theta,2} = p_k \cdot \frac{R_2^2 + r_2^2}{R_2^2 - r_2^2} \quad (g)$$

Iš čia santykis k yra lygus:

$$k = \left| \frac{\sigma_{\theta,2}}{\sigma_{\theta,1}} \right| = \frac{R_2^2 + r_2^2}{R_1^2 + r_1^2} \cdot \frac{R_1^2 - r_1^2}{R_2^2 - r_2^2} \quad (h)$$

Santykį k, galima užrašyti, ne tik spinduliais, bet ir skerspjūvio plotais:

$$k = \left| \frac{\sigma_{\theta,2}}{\sigma_{\theta,1}} \right| = \frac{\pi}{\pi} \cdot \left(\frac{R_2^2 + r_2^2}{R_1^2 + r_1^2} \cdot \frac{R_1^2 - r_1^2}{R_2^2 - r_2^2} \right) = \frac{A'_{R2} + A'_{r2}}{A'_{R1} + A'_{r1}} \cdot \frac{A_1}{A_2} \quad (i)$$

⁹ Slėgis laikomas teigiamu kai jis nukreiptas į paviršių ir neigiamas kai nukreiptas nuo paviršiaus.

čia:

A_1 ir A_2 - atitinkamai pirmojo, ir antrojo, cilindro skerspjūvio plotai,

A'_{XY} - skritulio kurio spindulys X_Y , plotas.

Kai skerspjūvio plotai vienodi (t.y. $A_1 = A_2$):

$$k = \frac{A'_{R2} + A'_{r2}}{A'_{R1} + A'_{r1}} \quad (j)$$

Pilnaviduriai konstrukcijai iš j gauname:

$$k = \frac{A'_{R2} + A'_{r2}}{A'_{R1}} \quad (k)$$

Galiausiai iš čia gauname, kad:

$$k = \frac{(A_1 + A_1) + A_1}{A_1} = \frac{3 \cdot A_1}{A_1} = 3 \quad (l)$$

Vadinasi kai DS pilnaviduris, ir jo skerspjūvio plotai vienodi, $k = \left| \frac{\sigma_{\theta,2}}{\sigma_{\theta,1}} \right| = 3$.