**ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS**

**MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS**

**MATEMATIKOS KATEDRA**

**Lina Buivydaitė**

# LAIPSNINĖS EILĖS $0 < \rho < 1$ BEGALINIO INDEKSO HOMOGENINIO KRAŠTINIO RYMANO UŽDAVINIO YPATINGASIS ATVEJIS PUSPLOKŠTUMEI

Magistro darbas

**Darbo vadovas**
**doc. P. Alekna**

**ŠIAULIAI, 2008**

# Turinys

# 1. Įvadas

Klasikinis kraštinio Rymano uždavinio formulavimas:

*Tegu duotas glodus uždaras kontūras* $L$*, kuris dalija kompleksinę plokštumą į vidinę sritį* $D^+$ *ir išorinę sritį* $D^-$*, ir dvi kontūro* $L$ *taškuose apibrėžtos funkcijos* $G(t)$*,* $g(t)$*, tenkinančios Hiolderio sąlygą,* $G(t) \neq 0$.

*Reikia rasti dvi funkcijas:* $\Phi^+(z)$ *- analizinę srityje* $D^+$ *ir* $\Phi^-(z)$ *- analizinę srityje* $D^-$*, įskaitant* $z = \infty$*, kurių kraštinės reikšmės* $\Phi^\pm(t)$ *kontūro* $L$ *taškuose tenkina tiesinę lygtį:*

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \tag{1.1}$$

Funkcija $G(t)$ vadinama Rymano uždavinio koeficientu, o funkcija $g(t)$ – laisvuoju nariu. Kai $g(t) \equiv 0$, tai turime homogeninį kraštinį Rymano uždavinį, o kai $g(t) \not\equiv 0$ – nehomogeninį kraštinį Rymano uždavinį [1].

Pirmą kartą šis uždavinys paminėtas B. Rymano darbuose. Vėliau jį nagrinėjo daugelis matematikų: Gilbertas, Plemelis, Pikaras, Privalovas, Karlemanas ir kiti [3].

Pilnas ir efektyvus kraštinio Rymano uždavinio sprendimas klasikinėje formoje buvo pateiktas F.D. Gachovo 1936 metais. Jis apibrėžė kraštinio uždavinio indekso sąvoką, kuri Rymano uždavinyje yra pagrindinė charakteristika:

$$\kappa = Ind_L G(t) = \frac{1}{2\pi}\Delta_L \arg G(t). \tag{1.2}$$

F.D. Gachovas įrodė:

1) kai $-\infty < \kappa < 0$, homogeninis uždavinys neturi aprėžtų sprendinių, išskyrus $\Phi^\pm(z) \equiv 0$;
2) kai $0 \le \kappa < +\infty$, homogeninis uždavinys turi $\kappa + 1$ tiesiškai nepriklausomus aprėžtus sprendinius:

$$\Phi_k^+(z) = z^k e^{\Gamma^+(z)},$$
$$\Phi_k^-(z) = z^{k-\kappa} e^{\Gamma^-(z)},$$

čia $k = 0,1,...,\kappa$, o $\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln[\tau^{-\kappa}G(\tau)]}{\tau - z} d\tau$.

Homogeninio uždavinio bendrasis sprendinys aprėžtų analizinių funkcijų klasėje nusakomas formule:

$$\Phi(z) = \mathrm{X}(z)P_\kappa(z), \tag{1.3}$$

čia $P_\kappa(z)$ – bet koks daugianaris, kurio laipsnis ne didesnis už $\kappa$,

$$P_\kappa(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_\kappa z^\kappa,$$

o $\mathrm{X}(z)$ – homogeninio uždavinio kanoninė funkcija:

$$\mathrm{X}(z)=\begin{cases} e^{\Gamma(z)}, z\in D^{+}, \\ z^{-\kappa}e^{\Gamma(z)}, z\in D^{-}. \end{cases}$$

3) kai $-1\le\kappa<+\infty$, nehomogeninis kraštinis Rymano uždavinys išsprendžiamas prie bet kurio laisvojo nario $g(t)$ ir jo bendrasis sprendinys nusakomas formule:

$$\Phi(z)=\frac{\mathrm{X}(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}+\mathrm{X}(z)P_{\kappa}(z) \qquad \textbf{(1.4)}$$

(kai $\kappa=-1$, tai $P_{\kappa}(z)\equiv 0$);

4) kai $-\infty<\kappa<-1$, nehomogeninis kraštinis Rymano uždavinys apskritai neišsprendžiamas. Tam, kad jis būtų išsprendžiamas, būtina ir pakankama, kad laisvasis narys $g(t)$ tenkintų $-\kappa-1$ sąlygą:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^{+}(\tau)}\tau^{k-1}d\tau=0, \qquad k=1,2,\ldots,-\kappa-1.$$

Kai tenkinamos aukščiau nurodytos sąlygos, tada vienintelis sprendinys randamas pagal (1.4) formulę, kurioje $P_{\kappa}(z)\equiv 0$.

Vėliau Rymano uždavinys buvo apibendrintas įvairiomis kryptimis [3]. L. A. Čikino darbe [6] buvo nagrinėtas ypatingasis Rymano uždavinio atvejis, kai koeficientas $G(t)$ kontūro $L$ taškuose gali būti lygus nuliui arba begalybei ([1], 51-56 p.).

Tačiau visuose apibendrinimuose kraštinio Rymano uždavinio indeksas ir tiesiškai nepriklausomų sprendinių skaičius yra baigtinis.

Pirmą kartą kraštinis Rymano uždavinys su begaliniu indeksu buvo išspręstas N.V.Govorovo [4].

**1 apibrėžimas**. *Jeigu kontūro* $L$ *vienpusėje (dvipusėje) taško* $t_0$ *aplinkoje funkcijos* $\arg G(t)$ *argumentas neaprėžtas, tai tašką* $t_0$ *vadinsime sukūrio tašku (vienpusiu arba dvipusiu).*

**2 apibrėžimas**. (1.1) *kraštinio uždavinio indeksą vadinsime begaliniu, jeigu kontūre L egzistuoja nors vienas sukūrio taškas.*

N.V. Govorovas nagrinėjo (1.1) uždavinio atvejį, kada $L$ – begalinis tolydus atviras kontūras, neinantis per koordinačių pradžią, o funkcijos $G(t)$ ir $g(t)$ tenkina sąlygas:

1) $\arg G(t)=2\pi\varphi(t)|t|^{\rho}$, **(1.5)**

čia $0<\rho<\infty$, $\varphi(t)\in H_{\mu}(L)$,

(Hiolderio su $0<\mu\le 1$ begaliniame kontūre *L*, $\varphi(\infty)=\lambda\ne 0$).

2) $\ln|G(t)|$, $g(t)\in H_{\mu}(L)$. **(1.6)**

Pagal 1 ir 2 apibrėžimus (1.1) kraštinis uždavinys su sąlygomis (1.5) ir (1.6) yra Rymano uždavinys su begaliniu indeksu, o taškas $t = \infty$ – vienpusis sukūrio taškas. Šio uždavinio sprendimas aprėžtų visoje plokštumoje analizinių funkcijų klasėje, kai $0 < \rho < \frac{1}{2}$ pateiktas [2], 1 skyriuje.

Kraštinio Rymano uždavinio su begaliniu indeksu sprendimui N.V Govorovas sukūrė naują metodiką, kuria naudojamasi tolimesniuose tyrimuose. Dabar sąlyginai galima teigti, kad atsirado trys tarpusavyje susijusios kraštinių uždavinių sprendimo su begaliniu indeksu kryptys.

Pirmai krypčiai priklauso N.V Govorovo ir jo mokinių darbai ([3], 510 – 520 p.). Šių mokslininkų darbuose Rymano uždavinys ir jo apibendrinimas sprendžiamas aprėžtų funkcijų klasėje ir kai kuriose jos poklasėse. Be to, šiuos darbus vienija sprendimo metodų artumas. Būtina paminėti M. E. Toločko tyrimus ([2], 2 ir 3 skyrius). Jie yra N.V. Govorovo gautų rezultatų apibendrinimai dvipusio sūkurio taško atveju. M. E. Toločko išsprendė begalinio indekso laisninės eilės $0 < \rho < 1$ Rymano uždavinį. Sudėtingesnį atvejį – begalinio indekso bet kokios laipsninės eilės Rymano uždavinį dvipusio sūkurio taško atveju nagrinėjo I. E. Sandrigailo [6], [7]. Jo darbuose yra gautas ne tik anksčiau aprašyto kraštinio Rymano uždavinio sprendimas, bet ir kai kurie nauji svarbūs rezultatai analizinei funkcijai pusplokštumėje.

P. G. Jurovo darbuose [8-10] teigiama, kad $\arg G(t)$ be galo nutolusio taško aplinkoje yra $\lambda \ln^{\gamma}|t|, t \to \infty, 0 < \gamma < \infty$ (taip vadinamas logaritminės eilės begalinio indekso atvejis). Be to, buvo gauta logaritminio Koši tipo integralo asimptotika ([2], 4 skyrius). Šia gauta Koši tipo integralo asimptotika pasinaudojo P. Alekna, nagrinėdamas logaritminės eilės begalinio indekso kraštinį Rymano uždavinį pusplokštumei ([2], 5 skyrius).

Šiame darbe nagrinėjamas homogeninis kraštinis Rymano uždavinys:

$$\Phi^{+}(t) = G_0(t)\frac{P(t)}{Q(t)}\Phi^{-}(t), \qquad -\infty < t < \infty, \tag{1.7}$$

kai koeficientas:

$$G(t) \equiv G_0(t)\frac{P(t)}{Q(t)} = \exp\{2\pi[\psi(t)\,|\,t\,|^{\sigma} + i\varphi(t)\,|\,t\,|^{\rho}]\}\frac{{\prod_{n=1}^{\infty}}'\left(1-\frac{t}{a_n}\right)}{{\prod_{n=-\infty}^{\infty}}'\left(1-\frac{t}{b_n}\right)}, \tag{1.8}$$

čia $0 < \sigma < 1$, $0 < \rho < 1$, o ${\prod_{n=-\infty}^{\infty}}'$ reiškia, kad sandauga imama visoms sveikosioms indekso n reikšmėms, išskyrus $n = 0$.

Funkcijos $\psi(t), \varphi(t)$ priklauso funkcijų klasei, tenkinančioms Hiolderio sąlygas kiekvieno baigtinio taško aplinkoje, kai $t \to +\infty, t \to -\infty$. Be to, realiųjų skaičių sekos $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ turi baigtinius tankius $\Delta_P^{\pm}$, $\Delta_Q^{\pm}$, o jų eilės – $\rho_P$, $\rho_Q$ ($0 < \rho_P, \rho_Q < 1$). Skaičiai $\rho, \sigma, \rho_P, \rho_Q$ skirtingi tarpusavyje. Uždavinio sprendimas nagrinėjamas klasėje B aprėžtoms funkcijoms $\Phi^{\pm}(z)$ ir klasėje $B_0(\rho)$ eksponentinės eilės funkcijoms mažėjančioms begalybėje.

Šio darbo tikslas – ištirti koeficiento $G(t)$ nulių ir polių bei $\ln|G(t)|$ augimo įtaką homogeninio kraštinio Rymano uždavinio išsprendžiamumui. Taip pat išnagrinėti priklausomybę tarp dydžių: $\rho$, $\sigma$, $\rho_P$, $\rho_Q$, $\lambda_1 = \overline{\lim_{t\to-\infty}} \varphi(t)$, $\lambda_2 = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \varphi(t)$, $\nu_1 = \overline{\lim_{t\to-\infty}} \psi(t)$, $\nu_2 = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \psi(t)$, $\Delta_P^{\pm}$, $\Delta_Q^{\pm}$ kuriems esant:

1) (1.7) – (1.8) homogeninis kraštinis Rymano uždavinys aprėžtų sprendinių neturi;

2) homogeninis kraštinis Rymano uždavinys išsprendžiamas ne tik klasėje $B$, bet ir siauresnėje klasėje $B_0(\rho)$;

3) sprendinių klasėje $B_0(\rho)$ nėra, išsprendžiamumas klasėje $B$ jau ne nusakomas uždavinio parametrais, o priklauso nuo papildomų funkcijos $G(t)$ savybių.

## 2. Darbe naudojamų funkcijų klasės

Pateiksime darbe naudojamų funkcijų klasių sąvokas.

**3 apibrėžimas**. *Funkcija* $f(t)$, $t \in [-\infty, \infty]$, *tenkina Hiolderio sąlygą, kai* $[-\infty, \infty]$, *jeigu*

1) $|f(t_1) - f(t_2)| < A|t_1 - t_2|^{\mu}$, $0 < \mu \le 1$, $A = const > 0$, **(2.1)**

*bet kokiems* $t_1, t_2 \in [-2c, 2c]$, $c > 0$;

2) $|f(t_1) - f(t_2)| < A\left|\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right|^{\mu}$, **(2.2)**

*bet kokiems* $t_1, t_2 \in [-\infty, -c]$ *ir* $t_1, t_2 \in [c, \infty]$.

Žymėsime tai vienu iš simboliu : $f(t) = H_{\mu}[-\infty, \infty]$, $f(t) \in H_{\mu}$, $f(t) \in H$.

**4 apibrėžimas.** *Funkcija* $f(t)$, $t \in [-\infty, \infty]$ *tenkina sąlygą* $\widetilde{H}$ *:* $f(t) \in \widetilde{H}[-\infty, \infty]$, *jei tenkinamos sąlygos:*

1) *Kiekvieno taško* $t \in (-\infty, \infty)$ *aplinkoje funkcija* $f(t)$ *tenkina sąlygą* (2.1) *arba* (2.2)*, be to, konstantos* $A > 0$, $0 < \mu \le 1$, *priklauso nuo* $t$*;*

2) $\overline{\lim_{t\to-\infty}} f(t) = \lambda_1 \ne \infty$, $\overline{\lim_{t\to+\infty}} f(t) = \lambda_2 \ne \infty$; **(2.3)**

3) *Kai kuriems* $0<\rho<1$ *egzistuoja baigtinės ribos:*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\rho}{t^{\rho}}\int_0^t\frac{f(-\tau)}{\tau}\tau^{\rho}d\tau=\lambda_1\,,$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\rho}{t^{\rho}}\int_0^t\frac{f(\tau)}{\tau}\tau^{\rho}d\tau=\lambda_2\,. \qquad \textbf{(2.4)}$$

Jeigu tenkinamos tik 4 apibrėžimo 2), 3) sąlygos ir funkcija $f(t)$ aprėžta, tai šį faktą žymėsime $f\in HS[-\infty,\infty]$.

Klases $\widetilde{H}$ ir $HS$ charakterizuoja parametras $\rho$. Todėl kartais žymėsime $\widetilde{H}_{\rho}, HS_{\rho}$.

Pirmoji iš nagrinėjamų funkcijų klasių yra detaliai išnagrinėta ir sutinkama dažnai ([5], 1 skyrius). Kitos dvi čia pateikiamos pirmą kartą ir susietos su teorema, įrodyta N.V. Govorovo ir I. E.Sandrigailo darbe [10]. Išskirsime tik kai kuriuos skirtumus tarp funkcijų iš $H_{\mu}$ ir iš $\widetilde{H}$. Pirmiausiai iš (2.2) išplaukia, kad bet kokiai funkcijai $f(t)\in H_{\mu}[-\infty,\infty]$ egzistuoja $\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)\neq\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)\neq\infty$. Tai reiškia, kad tenkinamos 4 apibrėžimo sąlygos. Todėl teisinga $H_{\mu}\subseteq\widetilde{H}$.

Pateiksime funkcijos pavyzdį $f_0(t): f_0(t)\notin H_{\mu}$, $\forall\ 0<\mu\le1$, bet $f_0(t)\in\widetilde{H}$.

***1 pavyzdys.*** Tarkime

$$f_0(t)=\begin{cases}1, & jei\quad n-1\le t<n-\dfrac{1}{2^n},\quad n=1,2,...;\\ -2^{n+1}\cdot t+n2^{n+1}-1, & n-\dfrac{1}{2^n}\le t<n-\dfrac{1}{2^{n+1}};\\ 2^{n+1}\cdot t-n2^{n+1}+1, & n-\dfrac{1}{2^{n+1}}\le t<n;\\ 1, & jei\quad t<0.\end{cases}$$

$f_0\left(n-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)=0$. Todėl $\nexists\lim\limits_{t\to-\infty}f_0(t)$ ir $f_0(t)\notin H_{\mu}$.

Iš kitos pusės $\overline{\lim\limits_{t\to-\pm\infty}}f_0(t)=1$. **(2.5)**

Taip pat, bet kuriam $0<\rho<1$:

$$\int_0^t\frac{f_0(\tau)}{\tau}\tau^{\rho}\le\int_0^{[t]+1}\frac{f_0(\tau)\tau^{\rho}}{\tau}d\tau=\int_0^{[t]+1}\tau^{\rho-1}d\tau-\int_{E_{[t]+1}}[1-f_0(\tau)]\frac{\tau^{\rho}d\tau}{\tau}\equiv I_1(t)+I_2(t)\,,$$

čia $E_{[t]+1}=\{\tau>0\ \ |\tau\le[t]+1, f_0(\tau)\neq1\}$.

$$I_1(t)=\frac{1}{\rho}([t]+1)^{\rho}\,,$$

$$\left|I_2(t)\right| \le \text{mes}E_{[t]+1} \cdot \max_{0\le\tau\le[t]+1}\left\{(1-f_0(\tau))\frac{\tau^\rho}{\tau}\right\} \le 1-\frac{1}{2^{[t]+2}}.$$

Vadinasi,

$$\overline{\lim_{t\to-\infty}}\frac{\rho}{t^\rho}\int_0^t \frac{f_0(\tau)}{\tau}\tau^\rho d\tau \le 1. \qquad \textbf{(2.6)}$$

Analogiškai įrodoma, kad

$$\underline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\rho}{t^\rho}\int_0^t \frac{f_0(\tau)}{\tau}\tau^\rho d\tau \ge 1. \qquad \textbf{(2.7)}$$

Iš (2.5) – (2.7) galima teigti, kad $f_0(t)\in\widetilde{H}[-\infty,\infty]$. Bet kokiame baigtiniame intervale $[-R,R]$ funkcija $f_0(t)$ priklauso klasei $H_\mu$, kai $\mu=1$. Bet skaičius *A*, figūruojantis (2.1) nelygybėje priklauso nuo *R*, kai $R\to\infty$, $A(R)\to\infty$.

**Pastaba.** Iš (2.3), (2.4) sąlygų išplaukia, kad $\forall f(t)\in\widetilde{H}$ egzistuoja taip vadinamos „silpnos“ ribos:

$$\lim_{t\to-\infty}{}^{*} f(t) \equiv \lim_{\substack{t\to-\infty\\ t\notin E_1}} f(t) = \lambda_1,$$
$$\lim_{t\to+\infty}{}^{*} f(t) \equiv \lim_{\substack{t\to+\infty\\ t\notin E_2}} f(t) = \lambda_2, \qquad \textbf{(2.8)}$$

čia $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\text{mes}\{E_1\cap(-r,0)\}}{\text{r}} = \lim\dfrac{\text{mes}\{E_2\cap(0,r)\}}{r}=0$.

Tačiau 4 apibrėžimo (2.3), (2.4) sąlygos negali būti pakeičiamos (2.8) sąlyga, todėl, kad $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} f(t)=+\infty$.

Apibrėšime dabar dvi dalimis analizinių funkcijų klases kompleksinėje plokštumoje ([2], 53 p.).

**5 apibrėžimas.** *Dalimis analizinę funkciją* $\Phi^\pm(z)$ *(*$\Phi^+(z)$ *– analizinė pusplokštumėje* $\text{Im}\,z>0$ *ir tolydi* $\text{Im}\,z\ge 0$*,* $\Phi^-(z)$ *– analizinė* $\text{Im}\,z<0$ *ir tolydi* $\text{Im}\,z\le 0$*), aprėžtą išplėstinėje kompleksinėje plokštumoje* $\overline{C}$ *vadinsime funkcijų klase B.*

**6 apibrėžimas.** *Funkciją* $\Phi^\pm(z)\in B$*, tenkinančią asimptotinę nelygybę*

$$\left|\Phi^\pm(re^{i\theta})\right| < \exp\left\{-Ar^\rho\right\},\quad A>0,\quad 0<\rho<1, \qquad \textbf{(2.9)}$$

*vadinsime eksponentinės mažėjimo* $\rho$ *eilės funkcija ir žymėsime tokių funkcijų klasę* $B_0(\rho)$.

## 3. Laipsninės eilės $0 < \rho < 1$ begalinio indekso homogeninio kraštinio Rymano uždavinio formulavimas

Tarkime realiosios ašies taškuose apibrėžta kompleksinė funkcija $G_0(t)$ tenkina sąlygas:

1) $\arg G_0(t) = 2\pi\varphi(t)|t|^{\rho}$, $0 < \rho < 1$, **(3.1)**

$\varphi(t) \in \widetilde{H}[-\infty, \infty]$, **(3.2)**

$\overline{\lim_{t\to-\infty}}\ \varphi(t) = \lambda_1, \quad \overline{\lim_{t\to+\infty}}\ \varphi(t) = \lambda_2, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$. **(3.3)**

2) $\ln|G_0(t)| = 2\pi\psi(t)|t|^{\sigma}$, $0 < \sigma < 1$, **(3.4)**

$\psi(t) \in \widetilde{H}[-\infty, \infty]$, **(3.5)**

$\overline{\lim_{t\to-\infty}}\ \psi(t) = \nu_1, \overline{\lim_{t\to+\infty}}\ \psi(t) = \nu_2,\ \nu_1^2 + \nu_2^2 \neq 0$. **(3.6)**

Realiosios ašies taškuose apibrėžtos funkcijos $P(t)$, $Q(t)$ yra sveikųjų funkcijų $P(z)$, $Q(z)$ kontūrinės reikšmės, kurių eilės atitinkamai yra $\rho_P$, $\rho_Q$ ($0 < \rho_P, \rho_Q < 1$).
Sveikųjų funkcijų $P(z)$, $Q(z)$ visos šaknys yra realios ir jų tankiai nusakomi:

3) $\exists \lim_{t\to\pm\infty} \dfrac{n_P^*(t)}{|t|^{\rho_P}} = \Delta_P^{\pm}$, $\lim_{t\to\pm\infty} \dfrac{n_Q^*(t)}{|t|^{\rho_Q}} = \Delta_Q^{\pm}$, **(3.7)**

nulius skaičiuojanti funkcija:

$$n_P^*(t) = \begin{cases} n_2(t), & t \geq 0; \\ -n_1(-t), & t < 0. \end{cases}$$

čia $n_2(t)$ - sveikosios funkcijos $P(z)$ šaknų skaičius srityje $\{|z| < t, \quad \operatorname{Re} z \geq 0\}$,

$n_1(t)$ - sveikosios funkcijos $Q(z)$ šaknų skaičius srityje $\{|z| < t, \quad \operatorname{Re} z < 0\}$ (atitinkamai $n_Q^*(t)$),

$$P(0) \neq 0,\ Q(0) \neq 0,\ (\Delta_P^+)^2 + (\Delta_P^-)^2 \neq 0,\ (\Delta_Q^+)^2 + (\Delta_Q^-)^2 \neq 0. \quad \textbf{(3.8)}$$

Nagrinėsime kitą homogeninį Rymano uždavinį. *Kiekvienoje klasėje $B$ ir $B_0(\rho)$ - rasti dalimis analizinę funkciją $\Phi^{\pm}(z) \not\equiv 0$, kurios ribinės reikšmės $\Phi^{\pm}(t)$ realiosios ašies taškuose tenkina kraštinę sąlygą:*

$$\Phi^+(t) = G_0(t)\frac{P(t)}{Q(t)}\Phi^-(t),\ -\infty < t < \infty. \quad \textbf{(3.9)}$$

Remiantis 1 apibrėžimu, be galo nutolęs taškas yra funkcijos $G_0(t)P(t)[Q(t)]^{-1} \equiv G(t)$ sūkurio taškas. Todėl (žr. 2 apibrėžimą) uždavinio indeksas yra begalinis. Kadangi koeficientas $G(t)$ kai kuriuose realiosios ašies taškuose lygus nuliui arba begalybei, t.y. turime Rymano uždavinio ypatingąjį atvejį ([1], 50 p.). Kadangi funkcijos $G_0(t)$ indeksas yra begalinis, tai funkcijų $P(t)$ ir $Q(t)$ nulių skaičius taip pat yra begalinis, kas naudojama (3.7) sąlygoje.

Be to, uždavinys nagrinėjamas pusplokštumei, t.y. ieškomos funkcijos $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ yra analizinės viršutinėje ($\operatorname{Im} z > 0$) ir apatinėje ($\operatorname{Im} z < 0$) pusplokštumėse. Visa tai ir nusako nagrinėjamo uždavinio pavadinimą.

## 4. Analizinių kampo viduje funcijų teorijos kai kurie teiginiai

**7 apibrėžimas**. *Tarkime* $f(z) \not\equiv 0$ *- funkcija, analizinė kampo viduje* $[\alpha;\beta]$ *ir tolydi jo kraštinėse. Tada tikslus apatinis rėžis* $\rho_f$*, skaičiui* $\nu > 0$*, kuriems tolygiai* $\theta$ *atžvilgiu*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ r^{-\nu} \ln\left|f(re^{i\theta})\right| \equiv 0, \qquad \theta \in [\alpha;\beta],\ z = re^{i\theta},$$

*vadinamas* $f(z)$ *eile kampe* $[\alpha;\beta]$.

**8 apibrėžimas.** *Baigtinės eilės* $\rho$ *analizinės kampo* $[\alpha;\beta]$ *viduje funkcijos* $f(z)$ *kitimą kiekvienos pustiesės* $\arg z = \theta$ *taškuose, kai* $z \to \infty$*, nusako funkcija:*

$$h_f(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\ r^{-\rho_f} \ln\left|f(re^{i\theta})\right|,\ \theta \in [\alpha;\beta], \qquad \textbf{(4.1)}$$

*kuri vadinama funkcijos* $f(z)$ *indikatoriumi.*

**9 apibrėžimas.** *Jeigu funkcijos* $f(z)$*, analizinės kampo* $[\alpha;\beta]$ *viduje, eilė lygi* $\rho_f$*, tai bet koks skaičius* $\gamma \geq \rho_f$ *vadinamas šios funkcijos formaliąja eile kampe* $[\alpha;\beta]$.

Funkcija $h_f^{(\gamma)}(\theta)$ $\big(h_f^{(\gamma)}(\theta) \equiv h_f(\theta)$, kai $\gamma = \rho_f$, $\theta \in [\alpha;\beta]$ ir $h_f^{(\gamma)}(\theta) \equiv 0$,kai $\gamma > \rho_f$, $\theta \in [\alpha;\beta]\big)$ žymi funkcijos $f(z)$ taip vadinamą formalųjį indikatorių, esant formaliajai eilei $\gamma$. ([4], 43 p.)

Indikatorius (vadinasi, ir bet koks formalusis indikatorius) analizinės kampo viduje funkcijos $f(z)$ pasižymi trigonometrinio iškylumo savybe ([2], 17 – 18 p.). Būtent, jeigu $f(z)$ analizinė kampo viduje $[\alpha;\beta]$, jos eilė $\rho_f < \pi(\beta-\alpha)^{-1}$, o indikatoriui $h_f(\theta)$ teisingos nelygybės:

$$h_f(\alpha) \leq h_1, h_f(\beta) \leq h_2 \ \ (h_1, h_2 \text{ - baigtiniai skaičiai}),$$

tada

$$h_f(\theta) \leq \frac{h_1 \sin \rho_f(\beta-\theta) + h_2 \sin \rho_f(\theta-\alpha)}{\sin \rho_f(\beta-\alpha)},\ \alpha \leq \theta \leq \beta. \qquad \textbf{(4.2)}$$

Iš šios indikatoriaus savybės betarpiškai išplaukia dvi lemos.

**1 lema.** *Sakykime, kad iš kiekvienos iš funkcijų* $\Phi^{\pm}(z)$ *eilė neviršija* $\omega \in (0;\ 1)$. *Tuomet* $\Phi^{\pm}(z) \in B_0(\omega)$ *tada ir tik tada, kai*

$$h_{\Phi^+}^{(\omega)}(0) < 0,\ \ h_{\Phi^+}^{(\omega)}(\pi) < 0, \quad \textbf{(4.3)}$$

$$h_{\Phi^-}^{(\omega)}(\pi) < 0,\ \ h_{\Phi^-}^{(\omega)}(2\pi) < 0. \quad \textbf{(4.4)}$$

**2 lema.** *Jeigu* $\Phi^{\pm}(z) \in B$, $\Phi^{\pm}(z)$ *eilė nedidesnė kaip* $\omega \in (0;\ 1)$, *tai*

$$h_{\Phi^+}^{(\omega)}(0) \le 0,\ h_{\Phi^+}^{(\omega)}(\pi) \le 0, \quad \textbf{(4.5)}$$

$$h_{\Phi^-}^{(\omega)}(\pi) \le 0,\ \ h_{\Phi^-}^{(\omega)}(2\pi) \le 0. \quad \textbf{(4.6)}$$

Jeigu pirmojoje lemoje yra būtina ir pakankama sąlyga $\Phi^{\pm}(z)$ priklausyti klasei $B_0(\omega)$, tai antrojoje lemoje yra tiktai būtina sąlyga $\Phi^{\pm}(z)$ priklausyti klasei $B$ ([2], 61 p.). Norint gauti būtiną ir pakankamą sąlygą tam, kad $\Phi^{\pm}(z) \in B$, pasinaudosime viena Fragmeno ir Lindeliofo teorema kampui ([2], 18 p.).

*Tarkime* $f(z)$ *– analizinė funkcija kampo* $[\alpha;\beta]$ *viduje ir tolydi ant šio kampo kraštinių. Su kai kuriais* $A > 0$ *ir* $0 < \sigma < \pi(\beta-\alpha)^{-1}$ *galioja įvertis:*

$$|f(z)| < Ae^{|z|^{\sigma}},\ \ \alpha < \arg z < \beta,$$

*o ant kampo kraštinių:*

$$|f(z)| \le M,\ M = const > 0. \quad \textbf{(4.7)}$$

*Tada (4.7) nelygybė teisinga visame kampe* $[\alpha;\beta]$.

Vadinasi, 2 lema duoda ir pakankamą sąlygą $\Phi^{\pm}(z) \in B$.

Pateiksime dar kai kurių žinių iš sveikųjų funkcijų teorijos.

**10 apibrėžimas.** *Sveikoji funkcija* $f(z)$,*turinti baigtinę teigiamą eilę* $\rho_f$ *ir aprėžtą indikatorių* $h_f(\theta)$ *vadinama visiškai reguliariaus augimo funkcija, jeigu galima nurodyti tokią aibę* $E^0$, *sudarytą iš teigiamų skaičių ir turinčią nulinį santykinį matą*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\mathrm{mes}\{\mathrm{E}^0 \cap (0,r)\}}{r} = 0,$$

*čia* $r \to \infty$, $r \notin E^0$ *funkcija:*

$$h_{f,r}(\theta) = \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho_f}},$$

*tolygiai* $\theta \in [0;2\pi]$ *atžvilgiu artėja į* $h_f(\theta)$ ([7], 182 p.).

Išvardinsime visiškai reguliariaus augimo funkcijų savybes ([7], 208 p.).

1) *Bet kuri baigtinės eilės* $\rho_f > 0$ *sveikoji funkcija* $f(z)$ *yra bet kokios formaliosios eilės* $\gamma > \rho_f$ *visiškai reguliariaus augimo funkcija su indikatoriumi* $h_f^{(\gamma)}(\theta) \equiv 0$.

2) *Tarkime* $f(z)$ *ir* $g(z)$ *- sveikosios funkcijos, kurių eilės* $\rho_f \le \sigma$, $\rho_g \le \sigma$ $(0 < \sigma < \infty)$*, ir bent viena iš šių funkcijų yra visiškai reguliariaus augimo funkcija su* $\sigma$ *eile. Tada sandaugos* $f(z)\cdot g(z)$ *formalusis indikatorius atžvilgiu* $\sigma$ *eilės lygus atitinkamų funkcijos indikatorių sumai:*

$$h_{f\cdot g}^{(\sigma)}(\theta) = h_f^{(\sigma)}(\theta) + h_g^{(\sigma)}(\theta). \qquad \textbf{(4.8)}$$

Jeigu $f$ ir $g$ nėra visiškai reguliariaus augimo funkcijos, tai (4.8) lygybėje, apskritai lygybės ženklas keičiamas ženklu „$\le$„ .

Analogiški rezultatai teisingi ir visiškai reguliariaus augimo analizinėms funkcijoms kampo viduje [4].

## 5. „Įvedimo“ uždavinio kanoninės funkcijos savybės ir sveikosios funkcijos $P(z)$, $Q(z)$

Analogiškai baigtinio indekso atvejui, kartu su (3.9) uždaviniu nagrinėsime taip vadinamą „įvedimo“ uždavinį:

$$\Psi^+(t) = G_0(t)\Psi^-(t), \quad -\infty < t < \infty, \qquad \textbf{(5.1)}$$

čia $G_0(t) = \exp\{2\pi[\psi(t) + i\varphi(t)\,|\,t\,|^\rho]\}$, $\psi(t), \varphi(t) \in H$.

Lygindami (3.9) ir (5.1) uždavinių išsprendžiamumo sąlygas, nustatysime, kokią įtaką (3.9) uždavinio išsprendžiamumui turi šio uždavinio koeficiento $G(t)$ nuliai ir poliai. Apibrėšime „įvedimo“ uždavinio kanoninę funkciją.

**11 apibrėžimas**. *Dalimis analizinę funkciją*

$$X^\pm(z) = \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G_0(x)dx}{x(x-z)}\right\} = \begin{cases} X^+(z), & \operatorname{Im} z > 0; \\ X^-(z), & \operatorname{Im} z < 0; \end{cases} \qquad \textbf{(5.2)}$$

*vadinsime (5.1) „įvedimo“ uždavinio kanonine funkcija* ([1], 38 p.).

Ištirsime $X^\pm(z)$ savybes.

**3 Lema.** *Esant (3.1) – (3.6) sąlygoms funkcija*

$$X_a^{\pm}(z) = \exp\left\{\frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G_0(x)}{x(x-z)}dx\right\} \qquad \textbf{(5.3)}$$

*yra analizinė ir* $\rho$ *eilės atvirose pusplokštumėse* $\operatorname{Im} z > 0$ *ir* $\operatorname{Im} z < 0$, *o jų indikatoriai:*

$$h_{X_a^\pm}(\theta)=\lim_{r\to\infty}\frac{\ln\left|X_a^\pm(re^{i\theta})\right|}{r^\rho}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{\sin\rho\pi}[\lambda_1\cos\rho\theta-\lambda_2\cos\rho(\theta-\pi)], & 0<\theta<\pi;\\ \dfrac{\pi}{\sin\rho\pi}[\lambda_1\cos\rho(\theta-2\pi)-\lambda_2\cos\rho(\theta-\pi)], & \pi<\theta<2\pi.\end{cases}\tag{5.4}$$

*Be to, perėjimas prie ribos yra tolygus $\theta\in(0;\pi)$ ir $\theta\in(\pi;2\pi)$ atžvilgiu.*

Įrodymas. Pirmas teiginys išplaukė iš Koši integralo bendrų savybių ir (3.1), (3.2) sąlygų. Antrojo teiginio įrodymui nagrinėsime integralą

$$I_2(z)=z\int_0^\infty\frac{\varphi(x)x^{\rho-1}}{x-z}dx.\tag{5.5}$$

Iš (2.4) sąlygos išplaukia, kad funkcija :

$$p(t)=\int_0^t\frac{\varphi(\tau)\tau^\rho}{\tau}d\tau.$$

Išreiškiame taip:

$$p(t)=\frac{1}{\rho}\lambda_2t^\rho+p_0(t)t^\rho,\tag{5.6}$$

čia $\lim\limits_{t\to\infty}p_0(t)=0$. **(5.7)**

Integruodami dalimis, išsiaiškinsime integralo $I_2(z)$ asimptotiką;

$$I_2(z)=z\int_0^\infty\frac{1}{x-z}d\left(\int_0^x\frac{\varphi(\tau)\tau^\rho}{\tau}d\tau\right)=\left[\frac{z}{x-z}\int_0^x\frac{\varphi(\tau)\tau^\rho}{\tau}d\tau\right]_{x=0}^{x=\infty}+z\int_0^\infty\frac{dx}{(x-z)^2}\int_0^x\frac{\varphi(\tau)\tau^\rho}{\tau}d\tau.$$

Iš (2.4) sąlygos gauname, kad pirmas dėmuo lygus nuliui. Antrojo dėmens įvertinimui pasinaudosime (5.6) formule:

$$I_2(z)=z\int_0^\infty\frac{\frac{1}{\rho}\lambda_2x^\rho}{(x-z)^2}dx+z\int_0^\infty\frac{p_0(x)x^\rho}{(x-z)^2}dx\equiv I_{21}(z)+I_{22}(z).$$

Integralas $I_{21}(z)$ betarpiškai suskaičiuojamas (rezidiumų teorijos pagalba) kiekvienam poliui $z$, nesančiam ant realiosios ašies teigiamos pusašės:

$$I_{21}(z)=-\frac{\pi\lambda_2}{\sin\rho\pi}e^{-i\rho\pi}\cdot z^\rho.\tag{5.8}$$

Parinksime $\varepsilon>0$. Iš (5.7) ribos išplaukia, kad su $t\ge R(\varepsilon)$

$$\max_{t\ge R(\varepsilon)}\left|p_0(t)\right|<\varepsilon.\tag{5.9}$$

Tarkime $\theta=\arg z\in[\eta;2\pi-\eta]$, tada tolygiai $\theta$ atžvilgiu

$$\left|t-z\right|^2\ge\frac{1}{N_\eta}\left|t-re^{i\eta}\right|^2,\ z=re^{i\theta},\ N_\eta=const>0.\tag{5.10}$$

Vadinasi,

$$\left|I_{22}(re^{i\theta})\right| \le r \max_{0\le t\le R(\varepsilon)} |p_0(t)| \cdot N_\eta \cdot \int_0^{R(\varepsilon)} \frac{x^\rho}{\left|x - re^{i\eta}\right|^2} dx + r \max_{t\ge R(\varepsilon)} |p_0(t)| \cdot N_\eta \cdot \int_{R(\varepsilon)}^{\infty} \frac{x^\rho}{\left|x - re^{i\eta}\right|^2} dx \le$$

$$\le K_{\varepsilon,\eta} \cdot \frac{1}{r} + r\varepsilon N_\eta \int_{\frac{R(\varepsilon)}{r}}^{\infty} \frac{r^{-1+\rho} u^\rho}{\left|u - e^{i\eta}\right|^2} du \le K_{\varepsilon,\eta} \cdot \frac{1}{r} + \varepsilon r^\rho N_\eta \int_0^\infty \frac{u^\rho}{\left|u - e^{i\eta}\right|^2} du \le L_{\varepsilon,\eta} \varepsilon r^\rho$$

su $r \ge R(\varepsilon)$, $L_{\varepsilon,\eta} = const > 0$, t.y. tolygiai pagal $\theta \in [\eta; 2\pi - \eta]$ egzistuoja

$$\lim_{r\to\infty} \frac{I_{22}(z)}{r^\rho} = 0. \qquad \textbf{(5.11)}$$

Tokiu būdu gaunama (5.5) integralo išraiška:

$$I_2(z) = -\frac{\pi\lambda_2}{\sin\rho\pi} e^{-i\rho\pi} z^\rho + I_2(z) z^\rho \ , \qquad \textbf{(5.12)}$$

čia plokštumoje su pjūviu pagal teigiamą spindulį analizinei funkcijai $I_2(z)$ tolygiai pagal $\theta \in [0; 2\pi]$ teisinga:

$$\lim_{r\to\infty} I_2(re^{i\theta}) = 0, \ 0 < \theta < 2\pi. \qquad \textbf{(5.13)}$$

Imdami keitinį $\zeta = -z$, analogiška išraiška gaunama ir integralui

$$I_1(z) = z \int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi(x)|x|^\rho}{x(x-z)} dx, \qquad \textbf{(5.14)}$$

būtent

$$I_1(z) = \begin{cases} \dfrac{\pi\lambda_1}{\sin\rho\pi} z^\rho + I_1(z) z^\rho, & 0 \le \theta < \pi; \\ \dfrac{\pi\lambda_1}{\sin\rho\pi} e^{-i2\pi\rho} z^\rho + I_1(z) z^\rho, & \pi < \theta \le 2\pi. \end{cases} \qquad \textbf{(5.15)}$$

Čia funkcijai $I_1(z)$ teisinga (5.13) riba tolygiai pagal $\theta \in [0; \pi)$ ir $\theta \in (\pi; 2\pi]$. Iš (5.12) ir (5.15) išraiškų ir gauname lemos tvirtinimą. Lema įrodyta.

**4 lema.** *Funkcijų $X_a^+(z)$, $X_a^-(z)$ indikatoriai yra tolydūs iki realiosios tiesės, t. y.*

$$\begin{cases} h_{X_a^+}(+0) = h_{X_a^+}(0), & h_{X_a^+}(\pi - 0) = h_{X_a^+}(\pi); \\ h_{X_a^-}(\pi + 0) = h_{X_a^-}(\pi), & h_{X_a^-}(2\pi - 0) = h_{X_a^-}(2\pi). \end{cases} \qquad \textbf{(5.16)}$$

Įrodymas. Nagrinėkime (5.5) integralą, t.y., kai $z = t > 0$,

$$I_2(t) = t\int_0^\infty \frac{\varphi(\tau)\tau^\rho}{\tau(\tau-t)} d\tau = t\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\varphi(\tau)\tau^\rho}{\tau(\tau-t)} d\tau + t\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \frac{\varphi(\tau)\tau^\rho}{\tau(\tau-t)} d\tau + t\int_{\frac{3t}{2}}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)\tau^\rho}{\tau(\tau-t)} d\tau = \psi_1(t) + \psi_2(t) + \psi_3(t).$$

Parinkime $\varepsilon > 0$. Rasime skaičių $\mathrm{T} > 0$:

$$\begin{cases} \varphi(t) < \varepsilon, & \forall t \ge \mathrm{T}; \\ \left| \dfrac{\rho}{t^\rho} \displaystyle\int_0^t \frac{\varphi(\tau)\tau^\rho}{\tau} d\tau \right| < \varepsilon, & \forall t \ge \mathrm{T}. \end{cases} \qquad \textbf{(5.17)}$$

t.y. pasinaudojant (2.3), (2.4), laikysime, kad $\lambda_2 \neq 0$. Ši sąlyga nekenkia bendram atvejui, todėl integralas

$$t\int_0^\infty \frac{\lambda_2 \tau^\rho}{\tau(\tau - t)} d\tau$$

gali būti betarpiškai suskaičiuojamas.

Imsime dabar $t > 2\mathrm{T}$ ir nagrinėsime $\psi_2(t)$. Funkcija $\varphi(\tau)$ tenkina Hiolderio sąlygą visame intervale $\left(\frac{t}{2}, \frac{3t}{2}\right)$, t. y. $\forall t_1, t_2 \in \left(\frac{t}{2}, \frac{3t}{2}\right)$ teisinga nelygybė:

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq A\left|\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right|^\mu. \qquad \textbf{(5.18)}$$

Tai išplaukia iš 4 apibrėžimo 1 sąlygos. Iš tikrųjų, atkarpa $\left(\frac{t}{2}, \frac{3t}{2}\right)$ galima padengti baigtiniu skaičiumi intervalų, kiekviename iš kurių $\varphi(t)$ tenkina Hiolderio sąlygą (šio teiginio įrodymas gaunamas iš priešingos 4 apibrėžimo 1 sąlygos). Tada parinkdami didžiausiąją konstantą iš baigtinio skaičiaus konstantų, o iš baigtinio skaičiaus konstantų $\mu$ – mažiausiąją, gauname (5.18) nelygybę intervale $\left(\frac{t}{2}, \frac{3t}{2}\right)$. Tuomet

$$\psi_2(t) = -\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \frac{\varphi(\tau)\tau^\rho}{\tau} d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{(\tau - t)} \tau^\rho d\tau + \varphi(t)\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \frac{\tau^\rho - t^\rho}{\tau - t} d\tau + \varphi(t)t^\rho \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \frac{d\tau}{\tau - t} \equiv$$

$$\equiv \psi_{20}(t) + \psi_{21}(t) + \psi_{22}(t) + \psi_{23}(t).$$

Iš (5.18) išraiškos gauname

$$|\psi_{21}(t)| \leq A\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \frac{\left|\frac{1}{\tau} - \frac{1}{t}\right|^\mu}{|\tau - t|} \tau^\rho d\tau = At^{-\mu}\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} |\tau - t|^{\mu-1} \tau^{\rho-\mu} d\tau = At^{-\mu+\mu-1+\rho-\mu+1}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |1-u|^{\mu-1} u^{\rho-\mu} du = A_1 t^{\rho-\mu}. \qquad \textbf{(5.19)}$$

Pasinaudoję nelygybėmis:

$$\left|x^\rho - t^\rho\right| \leq x^{\rho-1}|x - t|, \quad \left|x^\rho - t^\rho\right| \leq t^{\rho-1}|x - t|, \qquad \textbf{(5.20)}$$

kurios teisingos $\forall t, x > 0$, $0 < \rho < 1$, įvertinsime integralą

$$\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \frac{\tau^\rho - t^\rho}{\tau - t} d\tau \leq \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \tau^{\rho-1} d\tau = t^\rho \frac{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^\rho - \left(\frac{1}{2}\right)^\rho\right]}{\rho}.$$

Kadangi iš (5.17) nelygybių seka, kad $\varphi(t) < \varepsilon \quad \forall \tau \in \left[\frac{t}{2}, \frac{3t}{2}\right]$, todėl $\psi_{22}(t) \le A_2 \cdot \varepsilon \cdot t^{\rho}$ . **(5.21)**

Įvertiname

$$\left|\psi_{20}(t)\right| = \left|\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \frac{\varphi(\tau)\tau^{\rho}}{\tau} d\tau\right| \le \frac{\varepsilon}{\rho} t^{\rho} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\rho} = A_3 \cdot \varepsilon \cdot t^{\rho}. \quad \textbf{(5.22)}$$

Pagaliau $\psi_{23}(t) = 0$. **(5.23)**

Nagrinėsime integralą

$$\psi_1(t) = t\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\varphi(\tau)\tau^{\rho}}{\tau(\tau - t)} d\tau = t\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{1}{\tau - t} d\left(\int_0^{\tau} \frac{\varphi(x)x^{\rho}}{x} dx\right) = \left[\frac{t}{\tau - t}\int_0^{\tau} \frac{\varphi(x)x^{\rho}}{x} dx\right]\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=\frac{1}{2}} + t\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{d\tau}{(\tau - t)^2}\int_0^{\tau} \frac{\varphi(x)x^{\rho}}{x} dx =$$

$$= -2\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\varphi(x)x^{\rho}}{x} dx + t\int_0^{\mathrm{T}} \frac{d\tau}{(\tau - t)^2}\int_0^{\tau} \frac{\varphi(x)x^{\rho}}{x} dx + t\int_{\mathrm{T}}^{\frac{t}{2}} \frac{d\tau}{(\tau - t)^2}\int_0^{\tau} \frac{\varphi(x)x^{\rho}}{x} dx \le A_4 \cdot \varepsilon \cdot t^{\rho}. \quad \textbf{(5.24)}$$

Pirmojo integralo įvertis išplaukia iš (5.17). Antrasis integralas yra analizinė skritulio $|t| < \frac{3\mathrm{T}}{2}$ išorėje funkcija. Vadinasi, jis yra aprėžtas už šio skritulio. Trečiojo integralo įvertis gaunamas tiesiogiai iš (5.17) ir sąlygos $t > 2\mathrm{T}$.

Taip pat iš (5.17) gauname įvertį

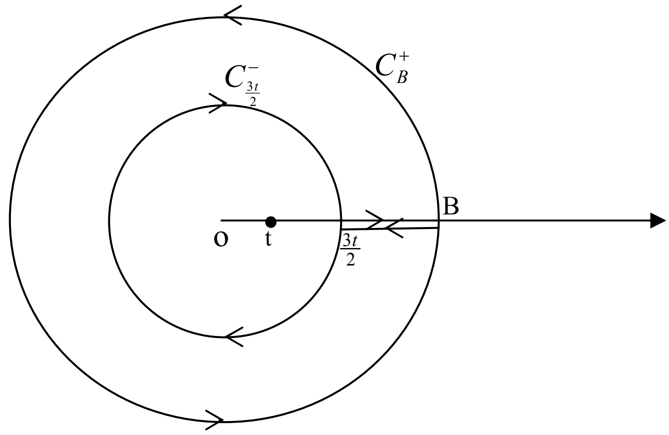
$$\psi_3(t) \le \varepsilon \cdot t\int_{\frac{3t}{2}}^{\infty} \frac{\tau^{\rho} d\tau}{\tau(\tau - t)}.$$

Apskaičiuosime integralą

$$I(t) = \int_{\frac{3t}{2}}^{\infty} \frac{\tau^{\rho}}{\tau(\tau - t)} d\tau.$$

Tam tikslui nagrinėjame integralą pagal sudėtinį kontūrą $C$:

$$C = C_B^{+} \cup \left[B, \tfrac{3t}{2}\right] \cup C_{\frac{3t}{2}}^{-} \cup \left[\tfrac{3t}{2}, B\right] \text{ (1 brėžinys)}$$




**1 brėžinys**

$$I(z)\equiv\int_C\frac{\tau^\rho}{\tau(\tau-z)}d\tau\equiv\int_{C_B^+}+\int_B^{\frac{3t}{2}}+\int_{C_{\frac{3t}{2}}^-}+\int_{\frac{3t}{2}}^B=\left[1-e^{-2\pi\rho i}\right]\int_{\frac{3t}{2}}^B+\int_{C_B^+}+\int_{C_{\frac{3t}{2}}^-}=0\quad\forall|z|<\frac{3t}{2}.$$

$$\left|\int_{C_B^+}\frac{\tau^\rho d\tau}{\tau(\tau-t)}\right|\le 2\pi B\cdot B^{\rho-1}\frac{1}{B-t}\xrightarrow[B\to\infty]{}0.$$

Vadinasi,

$$|I(t)|=\left|\frac{1}{1-e^{-2\pi\rho i}}\int_{C_{\frac{3t}{2}}^+}\frac{\tau^\rho d\tau}{\tau(\tau-t)}\right|\le\frac{2\pi}{\left|1-e^{-2\pi\rho i}\right|}\frac{2}{t}\left(\frac{3t}{2}\right)^\rho\le A_6t^{\rho-1}. \qquad \textbf{(5.25)}$$

Apjungdami įverčius (5.19), (5.21) – (5.25) gauname

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{I_2(t)}{t^\rho}\le 0. \qquad \textbf{(5.26)}$$

Panaudodami analizinės kampo viduje funkcijos indikatoriaus trigonometrinio iškilumo savybę, J.V. Sochotskio formules gauname lemos tvirtinimą. Lema įrodyta.

**5 lema.** *Dalimis analizinė funkcija*

$$X_l^\pm(z)=\exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|G_0(\tau)|}{\tau(\tau-z)}d\tau\right\} \qquad \textbf{(5.27)}$$

*yra $\sigma$ eilės uždarose pusplokštumėse* $\operatorname{Im}z\ge 0$ *ir* $\operatorname{Im}z\le 0$ *su indikatoriumi:*

$$h_{X_l^\pm}(\theta)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\left|X_l^\pm(re^{i\theta})\right|}{r^\sigma}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{\sin\sigma\pi}\left[\nu_1\sin\sigma\theta-\nu_2\sin\sigma(\theta-\pi)\right],0\le\theta\le\pi;\\ \dfrac{\pi}{\sin\sigma\pi}\left[\nu_1\sin\sigma(\theta-2\pi)-\nu_2\sin\sigma(\theta-\pi)\right],\pi\le\theta\le 2\pi;\end{cases} \qquad \textbf{(5.28)}$$

*arba*

$$h_{X_l^\pm}(\theta)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{\sin\sigma\pi}\left[\alpha_1\cos\sigma\theta-\alpha_2\cos\sigma(\theta-\pi)\right],0\le\theta\le\pi;\\ \dfrac{\pi}{\sin\sigma\pi}\left[\alpha_1\cos\sigma(\theta-2\pi)-\alpha_2\cos\sigma(\theta-\pi)\right],\pi\le\theta\le 2\pi.\end{cases} \qquad \textbf{(5.29)}$$

*Čia*

$$\alpha_1=\frac{-\nu_1\cos\sigma\pi+\nu_2}{\sin\sigma\pi},\quad \alpha_2=\frac{-\nu_1+\nu_2\cos\sigma\pi}{\sin\sigma\pi}.$$

(5.28) lygybėje viršutinę ribą galima pakeisti tikslia riba, kai $0<\theta<\pi$, $\pi<\theta<2\pi$, todėl šiuo atveju ribinis perėjimas yra tolygus $\theta$ atžvilgiu.

Ši lema išplaukia iš 3-4 lemų, atitinkamai dauginant gautas išraiškas iš $(-\tau)$.

**Pastaba**. *Jeigu* $f(t)=\widetilde{H}$ *, tai kaip įrodėme, dalimis analizinė funkcija*

$$X_f^{\pm}(z)=\exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)|x|^{\rho}}{x(x-z)}dx\right\} \tag{5.30}$$

*yra visiškai reguliaraus augimo* $\rho$ *eilės funkcija uždarose pusplokštumėse* $\operatorname{Im} z\geq 0$ *ir* $\operatorname{Im} z\leq 0$.

Iš [10] išplaukia, kad teisinga tam tikra prasme atvirkštinis teiginys, t.y. jei funkcija $X_f^{\pm}(z)$ turi visiškai reguliarų augimą,tai išpildomos (2.3), (2.4) sąlygos.

Dabar nagrinėsime kai kurias sveikųjų funkcijų $P(z)$, $Q(z)$ savybes.

**6 lema**. *Funkcijos* $P(z)$*,* $Q(z)$ *yra sveikosios* $\rho_P$*,* $\rho_Q$ *eilės visiškai reguliaraus augimo funkcijos su atitinkamais indikatoriais*

$$h_P(\theta)=\lim_{r\to\infty}{}^{*}\frac{\ln\left|P(re^{i\theta})\right|}{r^{\rho_P}}\equiv\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\notin E_P}}\frac{\ln\left|P(re^{i\theta})\right|}{r^{\rho_P}}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{\sin\rho_P\pi}\left[-\Delta_P^{-}\cos\rho_P\theta+\Delta_P^{+}\cos\rho_P(\theta-\pi)\right], 0\leq\theta\leq\pi;\\ \dfrac{\pi}{\sin\rho_P\pi}\left[-\Delta_P^{-}\cos\rho_P(\theta-2\pi)+\Delta_P^{+}\cos\rho_P(\theta-\pi)\right], \pi\leq\theta\leq 2\pi.\end{cases} \tag{5.31}$$

$$h_Q(\theta)=\lim_{r\to\infty}{}^{*}\frac{\ln\left|Q(re^{i\theta})\right|}{r^{\rho_Q}}\equiv\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\notin E_Q}}\frac{\ln\left|Q(re^{i\theta})\right|}{r^{\rho_Q}}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{\sin\rho_Q\pi}\left[-\Delta_Q^{-}\cos\rho_Q\theta+\Delta_Q^{+}\cos\rho_Q(\theta-\pi)\right], 0\leq\theta\leq\pi;\\ \dfrac{\pi}{\sin\rho_Q\pi}\left[-\Delta_Q^{-}\cos\rho_Q(\theta-2\pi)+\Delta_Q^{+}\cos\rho_Q(\theta-\pi)\right], \pi\leq\theta\leq 2\pi.\end{cases} \tag{5.32}$$

*čia*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{mes\{E_P\cap(0,r)\}}{r}=\lim_{r\to\infty}\frac{mes\{E_Q\cap(0,r)\}}{r}=0\,.$$

Įrodymas. Funkcijų $P(z)$, $Q(z)$ indikatorių formulės išplaukia iš ([7] p. 129), o jų visiškai reguliarus augimas iš svarbiausios teoremos apie sveikąsias visiškai reguliaraus augimo funkcijas ([7], p. 205). Pastebėsime, kad atvirose pusplokštumėse, t. y., kai $\theta\in(0,\pi)$, $\theta\in(\pi,2\pi)$ (5.31), (5.32) lygybėse ribas $\lim^{*}$ (taip vadinamąją „silpną„ ribą ) galima pakeisti paprastąja riba.

## 6. Laipsninės eilės $0<\rho<1$ begalinio indekso homogeninio uždavinio sprendimas $\rho=\sigma=\rho_P=\rho_Q$ atveju

Kaip jau buvo įrodyta, funkcijų $X_a^{\pm}(z)$, $X_l^{\pm}(z)$, $P(z)$, $Q(z)$ augimo eilės yra skirtingos. Čia smulkiai nagrinėsime tą atvejį, kai jų augimo eilės sutampa.

**7 lema.** *Bet kuris homogeninio uždavinio (3.1) – (3.9) sprendinys nusakomas išraiška*

$$\begin{cases}\Phi^+(z)=X_0^+(z)P(z)F(z);\\ \Phi^-(z)=X_0^-(z)Q(z)F(z);\end{cases} \tag{6.1}$$

*čia* $F(z)$ *-* $\rho_F\le\rho$ *eilės sveikoji funkcija.*

Lemos įrodymas išplaukia iš kraštinės sąlygos (3.9) išraiškos

$$\frac{\Phi^+(t)}{X_0^+(t)P(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X_0^-(t)Q(t)}\ ,\ -\infty<t<\infty \tag{6.2}$$

ir teoremos apie analizinį tęsinį ir apibendrintos Liuvilio teoremos ([1], p. 33-34).

Greta su uždaviniu (3.1) – (3.9), nagrinėsime du pagalbinius uždavinius:

$$\Psi_1^+(t)=D_P(t)\Psi_1^-(t)\,,\ -\infty<t<\infty\,, \tag{6.3}$$

$$\Psi_2^+(t)=D_Q(t)\Psi_2^-(t)\,,\ -\infty<t<\infty\,, \tag{6.4}$$

čia tolydūs koeficientai $D_P(t)$, $D_Q(t)$ išreiškiami:

$$D_{P,Q}(t)=\exp\left\{2\pi i d_{P,Q}(t)|t|^{\rho}\right\}, \tag{6.5}$$

$d_P(t), d_Q(t)\in H_\mu[-\infty,\infty]$, be to,

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to-\infty}d_P(t)=\lambda_1+\alpha_1-\Delta_P^-=\beta_1,\ \ \lim\limits_{t\to+\infty}d_P(t)=\lambda_2+\alpha_2-\Delta_P^+=\beta_2,\\ \lim\limits_{t\to-\infty}d_Q(t)=\lambda_1-\alpha_1-\Delta_Q^-=\gamma_1,\ \ \lim\limits_{t\to+\infty}d_Q(t)=\lambda_2-\alpha_2-\Delta_Q^-=\gamma_2.\end{cases} \tag{6.6}$$

Uždaviniams (6.3), (6.4) apibrėžiame kanonines funkcijas

$$Y_{P,Q}^{\pm}(z)=\exp\left\{z\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d_{P,Q}(x)|x|^{\rho}}{x(x-z)}dx\right\}. \tag{6.7}$$

**1 teorema.** *Tam, kad uždavinys (3.1) – (3.9) būtų išsprendžiamas klasėje* $B_0(\rho)$*, būtina ir pakankama, kad pagalbiniai uždaviniai (6.3), (6.4) turėtų šioje klasėje sprendinius:*

$$\Psi_1^{\pm}(z)=Y_P^{\pm}(z)F(z)\,, \tag{6.8}$$

$$\Psi_2^{\pm}(z)=Y_Q^{\pm}(z)F(z)\,, \tag{6.9}$$

*čia* $F(z)$ *-* $\rho_F\le\rho$ *eilės sveikoji funkcija.*

Įrodymas. Iš (6.5) sąlygos bei kanoninių funkcijų (6.7) išraiškos gauname

$$\begin{cases} h_{X_0^+}(\theta) + h_P(\theta) \equiv h_{Y_P^+}(\theta), & 0 \le \theta \le \pi, \\ h_{X_0^-}(\theta) + h_Q(\theta) \equiv h_{Y_Q^-}(\theta), & \pi \le \theta \le 2\pi. \end{cases} \qquad \textbf{(6.10)}$$

Kita vertus, iš 3-6 lemų išplaukia, kad

$$h_{X_0^+P}(\theta) \equiv h_{X_0^+}(\theta) + h_P(\theta),$$

$$h_{X_0^-Q}(\theta) \equiv h_{X_0^-}(\theta) + h_Q(\theta).$$

Todėl, jeigu (6.8), (6.9) yra uždavinių (6.3), (6.4) sprendiniai, tai

$$h_{Y_P^+}(0) + h_F^{(\rho)}(0) < 0, \; h_{Y_P^+}(\pi) + h_F^{(\rho)}(\pi) < 0,$$

$$h_{Y_Q^-}(\pi) + h_F^{(\rho)}(\pi) < 0, \; h_{Y_Q^-}(2\pi) + h_F^{(\rho)}(2\pi) < 0.$$

Bet tada tai pačiai sveikajai funkcijai gauname

$$h_{\Phi^+}(0) < 0, \; h_{\Phi^+}(\pi) < 0,$$
$$h_{\Phi^-}(\pi) < 0, h_{\Phi^-}(2\pi) < 0.$$

t.y. (žr. 1 lemą) $\Phi^{\pm}(z) \in B_0(\rho)$.

Iš kitos pusės, jeigu $\Phi^{\pm}(z) \in B_0(\rho)$, tai

$$h_{Y_P^+}(0) + h_F^{(\rho)}(0) < 0, \; h_{Y_P^+}(\pi) + h_F^{(\rho)}(\pi) < 0. \qquad \textbf{(6.11)}$$

Dėl funkcijos $Y_P^{\pm}(z)$ indikatoriaus tolydumo ir $2\pi$- periodiškumo ir sveikosios funkcijos $F(z)$ savybių bei (6.11) nelygybių išplaukia, kad

$$h_{Y_P^-}(\pi) + h_F^{(\rho)}(\pi) < 0, \; h_{Y_P^-}(2\pi) + h_F^{(\rho)}(2\pi) < 0.$$

Šios nelygybės rodo, kad $\Psi_1^{\pm}(z) \in B_0(\rho)$. Analogiškai įrodoma, kad $\Psi_2^{\pm}(z) \in B_0(\rho)$.

Iš M.E. Toločko [14] gautų rezultatų, kurie teisingi pagalbiniams uždaviniams (6.3), (6.4), ir iš tik ką įrodytos 1 teoremos išplaukia teorema:

**2 teorema.** *Laipsninės eilės* $0 < \rho < 1$ *begalinio indekso homogeninio kraštinio Rymano uždavinio (3.1) - (3.9) išsprendžiamumui ypatinguoju atveju klasėje* $B_0(\rho)$ *būtina ir pakankama, kad dydžiai* $\rho = \sigma = \rho_P = \rho_Q$, $\beta_k, \gamma_k$ *(* $k = 1,2$ *) tenkintų vieną iš sąryšių:*

$$\begin{aligned}
&1)\ 0 < \rho < \frac{1}{2}; \quad \beta_1 \le 0, \beta_2 \ge 0; \quad \gamma_1 \le 0, \gamma_2 \ge 0; \\
&2)\ 0 < \rho < \frac{1}{2}; \quad \beta_1 \le 0, \beta_2 \ge 0; \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0, \quad (\gamma_1\gamma_2^{-1})^{\operatorname{sgn}\gamma_k} < \cos\rho\pi; \\
&3)\ 0 < \rho < \frac{1}{2}; \quad \beta_1, \beta_2 > 0, \quad (\beta_1\beta_2^{-1})^{\operatorname{sgn}\beta_k} < \cos\rho\pi; \quad \gamma_1 \le 0, \gamma_2 \ge 0; \\
&4)\ 0 < \rho < \frac{1}{2}; \quad \beta_1, \beta_2 > 0, \quad (\beta_1\beta_2^{-1})^{\operatorname{sgn}\beta_k} < \cos\rho\pi; \quad \gamma_1 \le 0, \quad \gamma_2 \ge 0; \\
&5)\ \frac{1}{2} < \rho < 1; \quad \max\{\beta_1, \gamma_1\} < 0, \quad \min\{\beta_2, \gamma_2\} > 0.
\end{aligned} \qquad \textbf{(6.12)}$$

**3 teorema.** *Esant išpildytai vienai iš (6.12) sąlygų, homogeninis uždavinys (3.1) – (3.9) turi begalinę aibę sprendinių* $\Phi^{\pm}(z) \in B_0(\rho)$, *apibrėžiamų (6.1) formule, čia* $F(z)$ *- sveikoji neaukštesnės* $\rho$ *eilės funkcija, kurios formalusis indikatorius* $h_F^{(\rho)}(\theta)$ *su eile* $\rho$ *tenkina sąlygas:*

$$\begin{cases} h_F^{(\rho)}(0) < \dfrac{\pi}{\sin \rho\pi} \cdot \min\{\beta_2 \cos \rho\pi - \beta_1, \gamma_2 \cos \rho\pi - \gamma_1\}, \\ h_F^{(\rho)}(\pi) < \dfrac{\pi}{\sin \rho\pi} \cdot \min\{\beta_2 - \beta_1 \cos \rho\pi, \gamma_2 - \gamma_1 \cos \rho\pi\}. \end{cases} \tag{6.13}$$

Pažymėsime, kad begalinis skaičius sprendinių išplaukia iš galimybės sudaryti tiesiškai nepriklausomą sprendinių sistemą, aprašomą

$$\Phi_k^{\pm}(z) = \begin{cases} z^k X_0^+(z) P(z) \widetilde{F}_0(z); \\ z^k X_0^-(z) Q(z) \widetilde{F}_0(z). \end{cases} \tag{6.14}$$

čia $\widetilde{F}_0(z) \equiv 1$, kai $0 < \rho \le \dfrac{1}{2}$ ir $\widetilde{F}_0(z) \equiv F_0(z)$, kai $\dfrac{1}{2} < \rho < 1$, $F_0(z)$- sveikoji funkcija, kurios šaknys išdėstytos viename spindulyje. Tačiau (6.14) funkcijų sistema nebūtinai vienintelė uždavinio (3.1) - (3.9) tiesiškai - nepriklausomų sprendinių sistema klasėje $B_0(\rho)$. Tokios sistemos pavyzdžiu galima laikyti $\Phi_{kf}^{\pm}(z) = \Phi_k^{\pm}(z) \cdot f(z)$, čia $f(z)$- $\rho_f < \rho$ eilės bet kuri sveikoji funkcija.

Jeigu tenkinamos 2 teoremos sąlygos, t.y. uždavinys (3.1) - (3.9) išsprendžiamas klasėje $B_0(\rho)$, tai jis išsprendžiamas, ir platesnėje plokštumoje aprėžtų funkcijų klasėje $B$. Bendras sprendinys, remiantis 6 lema, nusakomas (6.1) formule, čia sveikoji funkcija $F(z)$ jau tenkina silpnesnes negu (6.13) sąlygas.

**4 teorema.** *Kai tenkinamos (6.12) sąlygos bendrasis homogeninio kraštinio Rymano uždavinio (3.1) – (3.2) su* $0 < \rho < 1$ *laipsninės eilės begaliniu indeksu sprendinys ypatinguoju atveju nusakomas (6.1), čia* $F(z)$ - $\rho_F \le \rho$ *eilės sveikoji funkcija, tenkinanti realioje ašyje nelygybę:*

$$\ln|F(t)| < -\frac{|\ln|G_0(t)||}{2} - \frac{t}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arg G_0(x)}{x(x-t)} dx - \max\{\ln|P(t)|, \ln|Q(t)|\} + C_F, \tag{6.15}$$

*čia* $C_F = const, C_F > 0$.

Įrodymas. Iš tikrųjų, jeigu $\Phi^{\pm}(z) \in B$, tai iš 6 lemos išplaukia $\rho_F \le \rho$ realiosios ašies taškuose

$$\ln|\Phi^+(t)| \equiv \ln|X_0^+(t)| + \ln|P(t)| + \ln|F(t)| < C_F,$$

$$\ln|\Phi^-(t)| \equiv \ln|X_0^-(t)| + \ln|Q(t)| + \ln|F(t)| < C_F.$$

Iš 4 apibrėžimo 1 sąlygos gauname, kad funkcijos $X_0^{\pm}(z)$ ribinės reikšmės egzistuoja kiekvienam realiam $t$, $-\infty < t < \infty$. Panaudodami J.V. Sochotskio formules, gauname (6.15) nelygybę.

Sakykime atvirkščiai, jog sveikosios funkcijos $F(z)$ eilė $\rho_F \le \rho$ ir tenkina (6.15) nelygybę. Tuomet funkcijos $\Phi^+(z) = X_0^+(z)P(z)F(z)$ eilė kampe $[0, \pi]$ ir $\Phi^-(z) = X_0^-(z)Q(z)F(z)$ kampe $[\pi, 2\pi]$ neviršija $\rho < 1$. Visiems realiosios ašies taškams teisinga $\left|\Phi^{\pm}(t)\right| < M$, remiantis Fragmeno ir Lindeliofo teorema $\left|\Phi^{\pm}(t)\right| < M$. 4 teorema įrodyta.

Galima įrodyti, kad santykiui tarp dydžių $\rho, \beta_k, \gamma_k$ ($k = 1,2$), netenkinančių nė vienos iš (6.12) sąlygų, teisinga.

**5 teorema.** *Homogeninis kraštinis Rymano uždavinys (3.1)-(3.9) neturi aprėžtų sprendinių, jei duoti dydžiai $\rho, \beta_k, \gamma_k$ ($k = 1,2$) tenkina vieną iš sąlygų:*

$$
\begin{aligned}
&1)\ 0 < \rho < 1;\ \ \beta_1 \ge,\ \ \beta_2 \le 0;\\
&2)\ 0 < \rho < \frac{1}{2};\ \ \beta_1, \beta_2 > 0,\ \ (\beta_1\beta_2^{-1})^{\operatorname{sgn}\beta_k} > \cos\rho\pi;\\
&3)\ \frac{1}{2} \le \rho < 1;\ \ \beta_1, \beta_2 > 0;\\
&4)\ 0 < \rho < 1;\ \ \gamma_1 \ge 0,\ \ \gamma_2 \le 0;\\
&5)\ 0 < \rho < \frac{1}{2};\ \ \gamma_1, \gamma_2 > 0,\ \ (\gamma_1\gamma_2^{-1})^{\operatorname{sgn}\gamma_k} > \cos\rho\pi;\\
&6)\ \frac{1}{2} \le \rho < 1;\ \ \gamma_1, \gamma_2 > 0.
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

Įrodymas. Tarkime, jog išpildyta viena iš (6.16) santykių ir sakykime, priešingai,kad šiuo atveju egzistuoja uždavinio (3.1) - (3.9) aprėžtas sprendinys $\Phi^{\pm}(z) \not\equiv 0$. Tada egzistuoja sveikoji ne aukštesnės nei $\rho$ eilės funkcija $\widetilde{F}(z)$ tokia, kad

$$h_{\Phi^+}(\theta) \equiv h_{X_0^+}(\theta) + h_P(\theta) + h_{\widetilde{F}}^{(\rho)}(\theta) \le 0\,,\ \ 0 \le \theta \le \pi\,,$$

$$h_{\Phi^-}(\theta) \equiv h_{X_0^-}(\theta) + h_Q(\theta) + h_{\widetilde{F}}^{(\rho)}(\theta) \le 0\,,\ \ \pi \le \theta \le 2\pi\,.$$

Nagrinėkime dabar (kaip ir 1 teoremos įrodyme) du pagalbinius uždavinius (6.3), (6.4) su tolydžiais koeficientais $D_P(t)$, $D_Q(t)$. Iš (6.10) tapatybių ir priimto teiginio, kad egzistuoja aprėžtas sprendinys, išplaukia, kad funkcijoms $\Psi_1^+(z) \equiv Y_P^+(z)\widetilde{F}(z)$ ir $\Psi_2^-(z) \equiv Y_Q^+(z)\widetilde{F}(z)$ teisingos nelygybės:

$$h_{\Psi_1^+}(\theta) = h_{Y_P^+}(\theta) + h_{\widetilde{F}}^{(\rho)}(\theta) \le 0\,,\ 0 \le \theta \le \pi\,,$$

$$h_{\Psi_2^-}(\theta) = h_{Y_Q^-}(\theta) + h_{\widetilde{F}}^{(\rho)}(\theta) \le 0\,,\ \pi \le \theta \le 2\pi\,.$$

Iš šių nelygybių bei funkcijų $\Psi_1^{\pm}(z)$, $\Psi_2^{\pm}(z)$ indikatoriaus tolydaus iškilumo gauname

$$h_{\widetilde{F}}^{(\rho)} \le -\max\left\{h_{Y_P^{\pm}}(\theta), h_{Y_Q^{\pm}}(\theta)\right\}. \qquad \textbf{(6.17)}$$

Tačiau [4] darbe įrodyta, kad, jeigu išpildoma viena iš (6.16) sąlygų, neegzistuoja sveikoji funkcija, kuri tenkintų (6.17 )nelygybę.

Tegu dabar $\rho, \beta_k$ tenkina iš (6.16) pirmąją sąlygą ( $0 < \rho < 1;\ \ \beta_1 \ge,\ \ \beta_2 \le 0$ ) . Tada, kai $0 < \rho < \dfrac{1}{2}$ arba $h_{Y_P^+}(0) > 0$, arba $h_{Y_P^+}(\pi) > 0$. Vadinasi, funkcijos $\widetilde{F}(z)$ eilė lygi $\rho$ ir iš (6.17) nelygybės matyti, kad funkcija $\widetilde{F}(z)$ turi mažėti spindulyje. Tai prieštarauja sveikosios funkcijos savybei $\widetilde{F}(z) \not\equiv 0$. Jeigu $\dfrac{1}{2} \le \rho < 1$, tai egzistuoja $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2\rho} \in [0;\pi]$ toks, kad $\cos\rho\theta_0 = 0$. Tada $h_{Y_P^+}(\theta_0) = -\pi\beta_2 \sin\rho\theta_0$, $h_{Y_P^-}(\theta_0 + \pi) = \pi\beta_1 \sin\rho\theta_0$ ir iš $\beta_k$ ženklo išplaukia, kad $\widetilde{F}(z)$ mažėja spindulyje $\arg z = \theta_0$. O tai prieštarauja sveikosios $\rho_{\widetilde{F}} < 1$ eilės funkcijos savybėms.

Teoremos patvirtinimui įrodėme 1 atveją iš (6.16). Analogiškas teoremos įrodymas ir likusiais 4 atvejais iš (6.16).

**Pastaba.** (6.12), (6.16) atvejai neapima visų galimų $\rho, \beta_k, \gamma_k$ ( $k = 1,2$ ) santykių. Ten neįeina atvejai:

a) $0 < \rho < \dfrac{1}{2};\ \ \beta_1, \beta_2 > 0,\ \ (\beta_1\beta_2^{-1})^{\operatorname{sgn}\beta_k} = \cos\rho\pi;$

b) $\dfrac{1}{2} \le \rho < 1;\ \ \beta_1, \beta_2 > 0$ arba $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0;$

c) $0 < \rho < \dfrac{1}{2};\ \ \gamma_1, \gamma_2 > 0,\ \ (\gamma_1\gamma_2^{-1})^{\operatorname{sgn}\gamma_k} = \cos\rho\pi;$ **(6.18)**

d) $\dfrac{1}{2} \le \rho < 1;\ \ \gamma_1 < 0,\ \ \gamma_2 = 0$ arba $\gamma_1 = 0,\ \ \gamma_2 = 0.$

Kaip ir uždavinio su tolydžiais koeficientais (14) tyrime, galima pasakyti, kad (3.1) - (3.9) uždavinio išsprendžiamumas šiuo atveju jau nenusakomas tiktai dydžiais $\rho, \beta_k, \gamma_k$, o priklauso taip pat nuo papildomų $\arg G_0(t)$, $\ln|G_0(t)|$, $P(t)$, $Q(t)$ savybių. Pailiustruosime tai pavyzdžiu.

***2 pavyzdys.*** Tegu $G_0(t)$, $P(t)$, $Q(t)$ tenkina tokias sąlygas:

a) $G_0(t) = \exp\left\{2\pi i\lambda \operatorname{sgn} t \cdot |t|^{\rho}\right\}$, $0 < \rho < \dfrac{1}{2}, \lambda > 0$;

b) $Q(t) \equiv 1$;

c) visos $P(z)$ šaknys išsidėsčiusios spindulyje $\arg z = \pi$, todėl

$$n_P^*(t) = -\left[\lambda(1 + \cos\rho\pi)(-t)^{\rho} + a(-t)^{\frac{\rho}{2}} + \frac{1}{2}\right],\ \ a = const < 0.$$

Tada atvejis a) iš (6.18) sąlygų. Iš (5.4), (5.28) išplaukia, kad

$$h_{X_0^+P}(\theta)<0\,,\ \theta\in(0;\pi]\,,\ h_{X_0^-Q}(\theta)<0\,,\ \theta\in(\pi;2\pi]\,,\ h_{X_0^+P}(0)=0\,. \tag{6.19}$$

Nagrinėkime funkcijos $X_0^+(t)P(t)$ kitimą realiosios ašies teigiamame spindulyje. Kai $\operatorname{Im} z>0$, tolesnė išraiška:

$$\ln X_0^+(z)P(z)=z\int_0^\infty\frac{\lambda x^\rho}{x(x-z)}dx+z\int_{-\infty}^0\frac{-\lambda(-x)^\rho}{x(x-z)}dx-z\int_{-\infty}^0\frac{n_P^*(x)}{x(x-z)}dx=z\int_0^\infty\frac{\lambda x^\rho}{x(x-z)}dx+z\int_{-\infty}^0\frac{-\lambda(-x)^\rho}{x(x-z)}dx-$$

$$-z\int_{-\infty}^0\frac{n_P^*(x)+\lambda(1+\cos\rho\pi)(-x)^\rho+a(-x)^{\frac{\rho}{2}}}{x(x-z)}dx+z\int_{-\infty}^0\frac{\lambda(1+\cos\rho\pi)(-x)^\rho+a(-x)^{\frac{\rho}{2}}}{x(x-z)}dx\equiv$$

$$\equiv I_1(z)+I_2(z)+I_3(z)+I_4(z)\,.$$

N.V. Govorovo darbe ([4], 126 p.) įrodyta, kad $I_3^+(t)\le const$, kai $t\to+\infty$.

$$I_1(z)=z\int_0^1\frac{\lambda x^\rho}{x(x-z)}dx+z\int_1^\infty\frac{\lambda x^\rho}{x(x-z)}dx=I_{11}(z)+I_{12}(z).$$

$\left|I_{11}^+(t)\right|<const$, kai $t\to\infty$.

Integralui $I_{12}(z)$ ([5], 58 p.) su pagalba keitinio $\left(z=\frac{1}{\zeta}\,,x=\frac{1}{\upsilon}\right)$ gauname

$$I_{12}(\tfrac{1}{\zeta})=-\frac{\pi\lambda e^{i\rho\pi}}{\sin\rho\pi}\zeta^{-\rho}+O(1)\,,\ \zeta\to0\,.$$

Pereinant prie ankstesnio kintamojo turime

$$I_{12}(z)=-\frac{\pi\lambda r^\rho}{\sin\rho\pi}\cos\rho(\theta-\pi)+i\operatorname{Im}I_{12}(z)+O(1)\,,\ z=re^{i\theta}\to\infty\,,$$

$$I_{12}^+(t)=-\pi\lambda t^\rho\operatorname{ctg}\rho\pi+i\operatorname{Im}I_{12}^+(t)+O(1)\,,\ \ t\to+\infty\,.$$

Toliau

$$I_2(z)+I_4(z)=\int_{-\infty}^0\frac{\lambda\cos\rho\pi(-x)^\rho}{x(x-z)}dx+z\int_{-\infty}^0\frac{a(-x)^{\frac{\rho}{2}}}{x(x-z)}dx\equiv I_{2,4}^{(1)}(z)+I_{2,4}^{(2)}(z)\,.$$

Integralams $I_{2,4}^{(1)}(t)$, $I_{2,4}^{(2)}(t)$ teisinga tokia išraiška:

$$I_{2,4}^{(1)}=\frac{\pi\lambda\cos\rho\pi}{\sin\rho\pi}t^\rho\,,\ 0\le t<\infty\,,$$

$$I_{2,4}^{(2)}=\frac{\pi a}{\sin\frac{\rho\pi}{2}}t^{\frac{\rho}{2}}\,,\ 0\le t<\infty\,.$$

Sujungus gautus rezultatus, turime

$$\ln X_0^+(t)P(t)\le\frac{\pi a}{\sin\frac{\rho\pi}{2}}t^{\frac{\rho}{2}}+i\operatorname{Im}I_1^+(t)+O(1)\,,\ t\to+\infty\,. \tag{6.20}$$

Analogišką rezultatą turime ir kai $t\to-\infty$. T.y.

$$\left|X_0^+(t)P(t)\right| < const\,,\; -\infty < t < \infty\,.$$

Vadinasi,

$$\Phi^+(z) \equiv X_0^+(z)P(z)\,,\; \Phi^-(z) \equiv X_0^-(z) \in B\,.$$

## 7. Laipsninės eilės $0 < \rho < 1$ begalinio indekso homogeninio uždavinio su kitomis priklausomybėmis tarp $\rho, \sigma, \rho_P, \rho_Q$ sprendimas

Panagrinėkime atskirai du atvejus:

1) tarkime $\rho \geq \max\{\sigma, \rho_P, \rho_Q\}$. Iš 3 – 6 lemų gauname, kad funkcijos $X_0^+(z)P(z)$ ir $X_0^-(z)Q(z)$ yra visiškai reguliaraus augimo funkcijos pusplokštumėse $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\operatorname{Im} z \leq 0$ atitinkamai, todėl jų eilė neviršija $\rho$.

Tada šių funkcijų formalusis indikatorius su eile $\rho$ gali būti aprašytas. Su jų pagalba analogiškai taip, kaip tai darėme 1 teoremos įrodyme, šį atvejį pakeisime jau nagrinėtu atveju.

**6 teorema.** *Uždavinių (3.1) – (3.9) išsprendžiamumas klasėse* $B$ *ir* $B_0(\rho)$, *kai* $\rho \geq \max\{\sigma, \rho_P, \rho_Q\}$ *aprašytas 2,4,5 teoremose ir 5 teoremos pastaboje. Dydžiai* $\beta_K, \gamma_k$ *sąlygose (6.12), (6.16), (6.18) toliau pakeičiami taip:*

1) $\lambda_k, \lambda_k$, *kai* $\rho > \max\{\sigma, \rho_P, \rho_Q\}$;

2) $\lambda_k + \alpha_k, \lambda_k - \alpha_k$, *kai* $\rho = \sigma > \max\{\rho_P, \rho_Q\}$;

3) $\lambda_k - \Delta_p^{\pm}, \lambda_k$, *kai* $\rho = \rho_P > \max\{\sigma, \rho_Q\}$;

4) $\lambda_k, \lambda_k - \Delta_Q^{\pm}$ , *kai* $\rho = \rho_Q > \max\{\sigma, \rho_P\}$;

5) $\lambda_k + \alpha_k - \Delta_P^{\pm}, \lambda_k - \alpha_k$ , *kai* $\rho = \sigma = \rho_P > \rho_Q$;

6) $\lambda_k + \alpha_k, \lambda_k - \alpha_k - \Delta_P^{\pm}$, *kai* $\rho = \sigma = \rho_Q > \rho_P$;

7) $\lambda_k - \Delta_P^{\pm}, \lambda_k - \Delta_Q^{\pm}$, *kai* $\rho = \rho_P = \rho_Q > \sigma$.

**Išvada.** Uždavinio (3.1) - (3.9) išsprendžiamumo sritis, kai $\rho \geq \max\{\sigma, \rho_P, \rho_Q\}$ ne platesnė nei išsprendžiamumo sritis uždavinio

$$\Psi_0^+(t) = e^{i \arg G_0(t)} \Psi_0^-(t)\,,\; -\infty < t < \infty \qquad \textbf{(7.1)}$$

Išvada gaunama lyginant uždavinių (3.1) - (3.9) ir (7.1) rezultatus.

2) Tarkime $\rho < \max\{\sigma, \rho_P, \rho_Q\}$.

**7 teorema.** *Homogeninis kraštinis Rymano uždavinys (3.1) - (3.9), kai* $\rho < \max\{\sigma, \rho_P, \rho_Q\}$ *neturi aprėžtų sprendinių.*

Šios teoremos įrodymas skirstomas į kelis atvejus:

a) tarkime, pavyzdžiui $\sigma > \max\{\rho, \rho_P, \rho_Q\}$.

Funkcijų $X_0^+(z)P(z)$ ir $X_0^-(z)Q(z)$ eilė atitinkamai $\operatorname{Im} z \geq 0$ ir $\operatorname{Im} z \leq 0$ lygi šiuo atveju $\sigma$, o jų indikatoriai apskaičiuojami pagal (5.28) formulę , t.y. sutampa su funkcijos $X_l^{\pm}(z)$ indikatoriumi. Bet tada

$$\begin{cases} h_{X_0^+P}(0) = -h_{X_0^-Q}(2\pi), \\ h_{X_0^+P}(\pi) = -h_{X_0^-Q}(\pi). \end{cases} \tag{7.2}$$

Tarkime, kad egzistuoja sveikoji funkcija $F(z)$, nusakanti uždavinio (3.1)-(3.9) sprendinio (6.1) formulę. Iš sąlygos (3.3) ir (7.2) lygybės išplaukia, kad

$$\text{arba } h_F^{(\sigma)}(0) < 0,\ h_F^{(\sigma)}(\pi) \leq 0,$$

$$\text{arba } h_F^{(\sigma)}(0) \leq 0,\ h_F^{(\sigma)}(\pi) < 0.$$

Iš čia pagal indikatoriaus trigonometrinio iškilumo savybę pusplokštumei gauname $h_F^{(\sigma)}(\theta) < 0$ visiems $\theta \in [0, 2\pi]$, tačiau išskirsime arba $\theta = \pi$, arba $\theta = 0$. Tada sveikosios funkcijos $F(z)$ eilė $\rho_F = \sigma < 1$ ir $F(z)$ mažėja bet kokia tiese skirtinga nuo realiosios ašies. O tai prieštarauja sveikosios funkcijos, kurios eilė $\rho_F < 1$ savybei.

b) Tarkime dabar $\rho_P > \max\{\rho, \sigma, \rho_Q\}$. Šiuo atveju funkcijos $X_0^+(z)P(z)$ eilė $\operatorname{Im} z \geq 0$ lygi $\rho_P$, o jo indikatorius apskaičiuojamas pagal formulę (5.31), t.y. kampe $[0, \pi]$ sutampa su sveikosios funkcijos $P(z)$ indikatoriumi.Iš funkcijos $n_P^*(t)$ (3.7) apibrėžimo išplaukia, kad $\Delta_P^+ > 0$, $\Delta_P^- < 0$. Vadinasi, indikatorius $X_0^+(z)P(z)$ sutampa su (7.1) uždavinio kanoninės funkcijos indikatoriumi, kada (7.1) uždavinio indeksas yra minus begalybė. (7.1) uždavinys su minus begaliniu indeksu neturi aprėžtų sprendinių ([4], 36 p.). O tada pagal 6 teoremos išvadą neturi aprėžtų sprendinių ir (3.1) – (3.9) uždavinys.

Kadangi funkcijos $P(z)$ įtaka yra tiktai sprendinio pliusiniam komponentui $\Phi^+(z)$,o įtaka $Q(z)$ - tiktai minusiniam komponentui $\Phi^-(z)$, tai analogiškas b) atvejui rezultatas bus teisingas, kai $\rho_Q > \max\{\rho, \sigma, \rho_P\}$, ir kai $\rho_P = \rho_Q > \max\{\rho, \sigma\}$.

c) Tarkime, kad $\sigma = \rho_P > \max\{\rho, \rho_Q\}$. Pagal 5,6 lemas indikatorius sandaugos $X_0^+(z)P(z)$ lygus funkcijų $X_l^+(z)$, $P(z)$ indikatorių sumai. Vadinasi, jeigu egzistuoja sveikoji funkcija $F(z)$, nusakanti (6.1) formule uždavinio (3.1) - (3.9) aprėžtą sprendinį, tai jo formalusis indikatorius su eile $\sigma$ tenkina nelygybes:

$$\begin{cases} h_F^{(\sigma)}(\theta) \le (\alpha_2 - \Delta_P^+)\cos\sigma(\theta-\pi) - (\alpha_1 - \Delta_P^-)\cos\sigma\pi, & 0 \le \theta \le \pi; \\ h_F^{(\sigma)}(\theta) \le -\alpha_2 \cos\sigma(\theta-\pi) + \alpha_1 \cos\sigma(\theta - 2\pi), & \pi \le \theta \le 2\pi. \end{cases} \quad \textbf{(7.3)}$$

Pasinaudojus (4.2) nelygybe dėl $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, $\theta_3 = 2\pi$, kai $\sigma \le \frac{1}{2}$ iš (7.3) gauname

$$h_F^{(\sigma)}(\pi) \le \frac{-\Delta_P^+ \cos\sigma\pi + \Delta_P^-}{2\cos\sigma\pi} < 0.$$

Paskutinė nelygybė prieštarauja sveikosios funkcijos, kurios eilė $\rho_F < 1$ savybei.

Jeigu $\sigma > \frac{1}{2}$, tai iš 2,5 teoremų išplaukia, kad (7.3) nelygybės antroji nelygybė išpildoma tiktai, kai $\alpha_1 \ge 0$, $\alpha_2 \le 0$. Bet šiuo atveju (7.3) nelygybės pirmoji nelygybė reikalauja uždavinio (7.1) su minus begaliniu indeksu išsprendžiamumo. (7.1) uždavinys su minus begaliniu indeksu neišsprendžiamas klasėje $B$. Vadinasi, c) atveju neišsprendžiamas klasėje $B$ ir uždavinys (3.1) - (3.9).

Akivaizdu, kad analogiškas rezultatas gaunamas ir kai $\rho_Q = \sigma > \max\{\rho, \rho_P\}$. Jeigu $\rho_P = \rho_Q = \sigma > \rho$, tai sveikoji funkcija $F(z)$ (6.1) tenkins nelygybes:

$$\begin{cases} h_F^{(\sigma)}(\theta) \le (\alpha_2 - \Delta_P^+)\cos\sigma(\theta-\pi) - (\alpha_1 - \Delta_P^-)\cos\sigma\theta, & 0 \le \theta \le \pi; \\ h_F^{(\sigma)}(\theta) \le -(\alpha_2 + \Delta_Q^+)\cos\sigma(\theta-\pi) + (\alpha_1 + \Delta_Q^-)\cos\sigma(\theta - 2\pi), & \pi \le \theta \le 2\pi. \end{cases} \quad \textbf{(7.4)}$$

Tada, kai $\sigma \le \frac{1}{2}$ analogiškai samprotaujama c atvejui. Iš 2,5 teoremų išplaukia, kai $\sigma > \frac{1}{2}$ (7.4) nelygybėse būtina pareikalauti, jog

$$\begin{cases} \alpha_1 - \Delta_P^-, -\alpha_1 - \Delta_Q^- \le 0; \\ \alpha_2 - \Delta_P^+, -\alpha_2 - \Delta_Q^+ \ge 0. \end{cases}$$

Iš pirmųjų nelygybių gauname $\min\{\Delta_P^-, \Delta_Q^-\} \ge |\alpha_1|$, o iš antrųjų nelygybių $\max\{\Delta_P^+, \Delta_Q^+\} \le -|\alpha_2|$. Šios nelygybės kartu galimos tiktai tuo atveju, kai $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, o tai priešgyniauja uždavinio sąlygai. Teorema įrodyta.

# 8. Išvados

Šiame darbe atliktas tyrimas begalinio indekso homogeninio kraštinio Rymano uždavinio ypatingu atveju pusplokštumei, kai laipsninė eilė yra $0 < \rho < 1$. Kiekvienoje iš klasių $B$ ir $B_0(\rho)$ sudarytas bendrasis sprendinys – dalimis analizinė funkcija $\Phi^{\pm}(z) \not\equiv 0$, kai jos ribinės reikšmės $\Phi^{\pm}(t)$ realiosios ašies taškuose tenkina kraštinę sąlygą: $\Phi^{+}(t) = G_0(t)\dfrac{P(t)}{Q(t)}\Phi^{-}(t)$, $-\infty < t < \infty$. Taip pat ištirta koeficiento $G(t)$ nulių ir polių bei $\ln|G(t)|$ augimo įtaka homogeninio kraštinio Rymano uždavinio išsprendžiamumui.

Laipsninės eilės $0 < \rho < 1$ begalinio indekso homogeninio kraštinio Rymano uždavinio išsprendžiamumas priklauso nuo parametrų: $\rho$, $\sigma$, $\rho_P$, $\rho_Q$, $\lambda_1 = \overline{\lim_{t\to-\infty}}\, \varphi(t)$, $\lambda_2 = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, \varphi(t)$, $\nu_1 = \overline{\lim_{t\to-\infty}}\, \psi(t)$, $\nu_2 = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, \psi(t)$, $\Delta_P^{\pm}$, $\Delta_Q^{\pm}$.

Galima teigti, jog, kai $\rho < \max\{\sigma, \rho_P, \rho_Q\}$, homogeninis kraštinis Rymano uždavinys neišsprendžiamas klasėje B.

Kada $\rho \geq \max\{\sigma, \rho_P, \rho_Q\}$, išskiriami tokie santykiai tarp parametrų, kuriems esant:

1) homogeninis kraštinis Rymano uždavinys aprėžtų sprendinių neturi;

2) homogeninis kraštinis Rymano uždavinys išsprendžiamas ne tik klasėje $B$, bet ir siauresnėje klasėje $B_0(\rho)$;

3) sprendinių klasėje $B_0(\rho)$ nėra, išsprendžiamumas klasėje $B$ nusakomas ne parametrais, o priklauso nuo papildomų funkcijos $G(t)$ savybių.

## Literatūra


1. Alekna P., Analizinių funkcijų kraštiniai uždaviniai. – ŠU, 2003.
2. Alekna P., Begalinio indekso kraštinis Rymano uždavinys. – ŠUL, 2004.
3. Гахов Ф. Д., Краевые задачи – М.: Наука, 1977.
4. Говоров Н. В., Кревая задача Римана с бесконечным индексом.– М.: Наука, 1986.
5. Мусхелищвили Н. И., Сингулярные интегралные управления, Физматгиз, 1968.
6. Чикин Л. А., Особые случай краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений, Учёные зап. Казанского ун – та, Т. 115, 1952.
7. Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, Гостехиздат, 1956
8. Сандрыгайло И. Е., О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости, Доклады АН БССР 19т. № 10, 1975, 872 – 875.
9. Сандрыгайло И. Е., О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости в классе функций вполне регулярного роста, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 1. 1976, 21-24.
10. Говоров Н. В., Сандрыгайло И. Е., О полной регулярности роста особого интеграла типа Коши с контуром на положительном луче, Тезицы конференции математиков Белоруссии, Минск, 1975, часть 2., 96.
11. Юров П. Г., Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом, Изв. вузов, Математика, № 2, 1966, 158-163.
12. Юров П. Г., Интегралы типа Коши и уравнения в конечных разностях, Изв. АН БССР, сер. Физ.- матем. наук, № 3, 1967, 67-74.
13. Юров П. Г. Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка $\alpha \geq 1$, Материалы всесоюзн. конфер. по краевым задачам, Казань, 1970, 279 – 284.
14. Толочко М. Э., Об однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом для полуплоскости, Изв. АН БССР сер. физ.- матем. наук, № 5, 1972, 34-41.

**Thema. Homogeneous boundary-value problem of Riemann with the infinite index and the gradual order $0 < \rho < 1$ in special the case for the half-plane: Master‘s work in mathematics / supervisor dr. P. Alekna; Department of mathematics, Faculty of mathematics and informatics, University of Siauliai. – Siauliai, 2008. – 29 p.**


## SUMMARY

This paper analyses homogeneous boundary-value problem of Riemann with the infinite index, when gradual order is $0 < \rho < 1$. In every class - $B$ and $B_0(\rho)$ - the solution is partial analitic function $\Phi^{\pm}(z) \not\equiv 0$, when its limit values $\Phi^{\pm}(t)$ meet the marginal condition $\Phi^{+}(t) = G_0(t)\dfrac{P(t)}{Q(t)}\Phi^{-}(t)$, $-\infty < t < \infty$ in the points of real axis.

The paper also discusses solvability of the problem in the special case for the half – plane. Moreover, functions $\Phi^{+}(z)$ and $\Phi^{-}(z)$ are examinated, of which analytic upside $\operatorname{Im} z > 0$ and underside $\operatorname{Im} z < 0$ half-plane. The coefficient‘s $G(t)$ noughts and piles, and growth of $\ln|G(t)|$ are analyzed as possible influential factors for the problem’s solvalibility. The paper examines dependence between given variables $\rho, \sigma, \rho_P, \rho_Q, \lambda_1,$ $\lambda_2, \nu_1, \nu_2, \Delta_P^{\pm}, \Delta_Q^{\pm}$, for which boundary-value problem of Riemann does not have limited solutions.

The paper made analysis of homogeneous boundary-value problem of Riemann with the infinite index special the case for the half-plane, when $0 < \rho < 1$ in every class of $B$ and $B_0(\rho)$. Furthermore, general solution is presented, excluding cases when the problem is unsolvable in these classes.