ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Lydija Dronova

DVIMAČIŲ ATSTATYMO PROCESŲ ASIMPTOTIKA

Magistro darbas

Darbo vadovas
doc. Vaidotas Kanišauskas

Šiauliai, 2007

Turinys

1 ĮVADAS

Atstatymo procesai daug kur taikomi gamyboje ir įvairių sudėtingų teorinių modelių iliustraciniuose uždaviniuose. Šioje teorijoje esminė yra atstatymo funkcija, kuri tiesiogiai sunkiai apskaičiuojama, tačiau nelabai sunkiai yra surandama iš integralinės atstatymo lygties, taikant Laplaso transformacijos metodus.

Nagrinėjamas dvimatis atstatymo procesas

$$N(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1\mathrm{I}(T_n^1 \leq s) 1\mathrm{I}(T_n^2 \leq t),$$

kur $T_n^1 = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $T_n^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, $X_1, ..., X_i$ (atitinkamai $Y_1, ..., Y_i$) - nepriklausomi, teigiami, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, apibrėžti tikimybinėje erdvėje (Ω, F, P).

Mano darbo uždavinys: surasti įvairių eilių atstatymo procesų pradinių momentų funkcijas $L_k(s,t) = M(N(s,t))^k$, $k \in N_+ = \{1,2,3,4\}$ ir ištirti tų funkcijų Laplaso transformacijos, kai $\lambda, p \to 0_+$, bei dvimačių atstatymo funkcijų, kai $s,t \to \infty$ asimptotiką, kai dvimačio atstatymo proceso $N(s,t)$, $s,t \geq 0$ tarpiniai atsitiktiniai atstatymo momentai X_i ir Y_j priklauso stabilaus dėsnio traukos zonai su eksponentėmis $\alpha \in [0;1)$ ir $\beta \in [0;1)$, t.y.

$$1 - F(x) \sim x^{-\alpha} L_1(x), x \to \infty;$$

$$1 - G(y) \sim y^{-\beta} L_2(y), y \to \infty;$$

kur

$$F(x) = P(X_1 \leq x), x \geq 0;$$

$$G(y) = P(Y_1 \leq y), y \geq 0.$$

Šio uždavinio sprendimas susideda iš keturių etapų:

1. Atstatymo funkcijos $L_k(s,t)$ integralinės diferencialinės lygties radimo.

2. $L_k(s,t)$ integralinės diferencialinės lygties pavertimo algebrine lygtimi Laplaso transformacijos pagalba.

3. Atstatymo algebrinės lygties sprendimas ir jos sprendinio asimptotikos nustatymas, kai Laplaso parametrai $p, \lambda \to 0_+$.

4. Taikant Taubero teoremas gaunamos atstatymo funkcijos $L_k(at, bt)$ asimptotinės išraiškos, kai $t \to \infty$.

2 VIENMATIS ATSTATYMO PROCESAS

Turime atstatymo procesą

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1\mathrm{I}(T_n \le t),$$

kur $T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $X_1, ..., X_i$ - nepriklausomi, teigiami, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, apibrėžti tikimybinėje erdvėje (Ω, F, P).

2.1 teorema [9]. *Atstatymo proceso $N(t)$ skirstinys nusakomas formule*

$$P(N(t) = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t),$$

kur $F_n(t) = P(T_n \le t)$, $T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $F_0(t) = 1$, $t \ge 0$.

2.2 teorema. *Atstatymo proceso vidurkis $MN(t)$ apskaičiuojamas pagal formulę*

$$MN(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t),$$

kur $t \ge 0$.

▼

$$\begin{aligned} M(t) &= MN(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(N(t) = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n(F_n(t) - F_{n+1}(t)) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(F_n(t)) - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)F_n(t) = F_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty} n(F_n(t)) - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)F_n(t) = \\ &= F_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty} (n - n + 1)F_n(t) = F_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty} F_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \end{aligned}$$

▲

2.3 teorema. *(Didžiųjų skaičių dėsnis)*
Tegu atstatymo proceso vidurkis $MX_1 = a < \infty$, *tada* $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{P} \frac{1}{a}$, $t \to \infty$.

2.4 teorema. *Atstatymo proceso vidurkis* $L(t) = MN(t)$ *tenkina tokią integralinę atstatymo lygtį*

$$L(t) = L(t) * F(t) + F(t),$$

kur $L(t) * F(t) = \int\limits_0^t L(t-x)dF(x)$.

▼

$$L(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \mid *F(t),$$

$$F_n(t) * F(t) = F_{n+1}(t),$$

$$L(t) * F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n+1}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} F_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) - F(t),$$

$$L(t) * F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) - F(t),$$

$$L(t) * F(t) + F(t) = L(t).$$

▲

2.5 teorema [4]. *Atstatymo funkcija* $L_r(t) = M(N(t))^r$ *tenkina tokią integralinę atstatymo lygtį:*

$$L_r(t) = L_r(t) * F(t) + C_r^1(-1)^2 L_{r-1}(t) + C_r^2(-1)^3 L_{r-2}(t) + ... +$$

$$C_r^2(-1)^{r-1} L_2(t) + C_r^1(-1)^r L_1(t) + (-1)^{r+1} F(t),$$

kur $L(t) * F(t) = \int\limits_0^t L(t-x)dF(x)$, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

3 DVIMATIS ATSTATYMO PROCESAS

Turime atstatymo procesą

$$N(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1\mathrm{I}(T_n^1 \leq s) 1I(T_n^2 \leq t),$$

kur $T_n^1 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $T_n^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} Y_j$, $X_1, ..., X_i$ (atitinkamai $Y_1, ..., Y_j$) - nepriklausomi, teigiami, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, apibrėžti tikimybinėje erdvėje (Ω, F, P).

3.1 teorema. *Dvimačio atstatymo proceso $N(s,t)$ skirstinys nusakomas formule*

$$P(N(s,t) = n) = F_n(s)G_n(t) - F_{n+1}(s)G_{n+1}(t),$$

kur $F_n(s) = P(T_n^1 \leq s)$,$G_n(t) = P(T_n^2 \leq t)$, $T_n^1 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $T_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$, $F_0(s) = 1$, $s \geq 0$, $G_0(t) = 1$, $t \geq 0$.

3.2 teorema. *Dvimačio atstatymo proceso vidurkis $MN(t)$ apskaičiuojamas pagal formulę*

$$MN(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(s)G_n(t),$$

kur $s \geq 0$ ir $t \geq 0$.

▼

$$\begin{aligned} M(t) &= MN(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(N(s,t) = n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(F_n(s)G_n(t) - F_{n+1}(s)G_{n+1}(t)) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(F_n(s)G_n(t)) - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)F_n(s)G_n(t) = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= F_1(s)G_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty} n(F_n(s)G_n(t)) - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)F_n(s)G_n(t) = \\
&= F_1(s)G_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty}(n-n+1)F_n s)G_n(t) = \\
&= F_1(s)G_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty} F_n(s)G_n(t) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(s)G_n(t)).
\end{aligned}
$$

▲

3.3 teorema. *(Didžiųjų skaičių dėsnis) Tarkime, kad* $MX_1 = a_1 < \infty$, $MX_2 = a_2 < \infty$, *tada* $\frac{N(x_1 t, x_2 t)}{t} \xrightarrow{P} \frac{x_1}{a_1} \wedge \frac{x_2}{a_2}$, $t \to \infty$ *ir* $a \wedge b = min(a, b)$.

4 TAUBERIO TEOREMOS STABILIEMS DYDŽIAMS

4.1 apibrėžimas [1]. Funkcija $L(t)$ vadinama lėtai kintanti, jei $L(t)$ apibrėžta, kai $t > 0$, teigiama ir

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(xt)}{L(t)} = 1,$$

kai $\forall x > 0$.

4.2 apibrėžimas [1]. Sakome, kad pasiskirstymo funkcija $F(t)$ priklauso stabilaus dėsnio traukos zonai su eksponente α, žymime $F(t) \in V_\alpha$, kur $\alpha \geq 0$, jei egzistuoja lėtai kintanti funkcija $L(t)$ tokia, kad $1 - F(t) \sim t^{-\alpha} L(t)$, kai $t \to \infty$.

4.1 lema [1].
1. Jei $L(t)$lėtai kintanti ir $u > 0$, tai $\frac{L(ut)}{L(t)} \to 1$, kai $t \to \infty$ tolygiai kiekviename baigtiniame intervale:

$L(t)t^\gamma \to \infty$, jei $\gamma > 0$;

$L(t)t^\gamma \to 0$, jei $\gamma < 0$.

2. Jei $L_1(t)$ ir $L_2(t)$ yra lėtai kintančios,tai $L_1(t) \cdot L_2(t)$ ir $\frac{L_1(t)}{L_2(t)}$ taip pat lėtai kintančios.

3. Jei $L_1(t)$ yra lėtai kintanti, kai $t \geq a$, tai $\int\limits_a^t \frac{1}{x} L(x)dx$ taip pat lėtai kintantis.

4.1 teorema [8]. *Tarkime, kad U - matas, kuriam apibrėžta Laplaso transformacija $w(\lambda)$, $\lambda > 0$. Tada tokie teiginiai seka vienas iš kito:*

$$\frac{w(\tau\lambda)}{w(\tau)} \to \frac{1}{\lambda^\rho}, \tau \to 0$$

ir

$$\frac{U(tx)}{U(t)} \to x^\rho, t \to \infty,$$

kartu

$$w(\tau) \sim U(t)\Gamma(\rho+1).$$

Komentaras. Jei $f(t) = t^\rho$, tai

$$f(t) \xrightarrow{L} F(p) = \frac{\rho!}{p^{\rho+1}} = \frac{\Gamma(\rho+1)}{p^{\rho+1}},$$

kai $t \to \infty$.

4.2 teorema [8]. *Jei $L(t)$ lėtai kintanti begalybėje ir $0 \leq \rho \leq \infty$, tai*

$$w(\tau) \sim \frac{1}{\tau^\rho} L(\frac{1}{\tau}), \tau \to 0$$

tada ir tik tada, kai

$$U(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} t^\rho L(t), t \to \infty.$$

4.2 lema [1]. *Jei $F(t) \in V_\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, tada*

$$\int_0^\infty e^{-st}(1 - F(t))dt \sim s^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(s^{-1}),$$

kai $s \to 0_+$.

4.3 teorema [8]. *Tarkime $0 < \rho < \infty$. Jei $U(t)$ nuo tam tikros vietos turi monotoninę išvestinę (tankį) $u(\lambda)$, tai*

$$u(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda^\rho} L(\frac{1}{\lambda}), \lambda \to 0$$

tada ir tik tada, kai

$$U(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)} x^{\rho-1} L(x), x \to \infty.$$

5 PAGRINDINIAI REZULTATAI

5.1 DVIMAČIO ATSTATYMO PROCESO INTEGRALINĖS LYGTYS IR JŲ SPRENDINIAI

5.1.1 teorema. *Dvimačio atstatymo proceso vidurkis* $L_1(s,t) = MN(s,t)$ *tenkina tokią integralinę lygtį*

$$L_1(s,t) = L_1(s,t) * F(s)G(t) + F(s)G(t),$$

kur $L_1(s,t) * F(s)G(t) = \int\limits_0^s \int\limits_0^t L_1(s-x, t-y)dF(x)dG(y).$

▼

Žinome, kad

$$L_1(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(s)G_n(t).$$

Abi lygties puses per sąsūką padauginkime iš $F(s)G(t)$:

$$L_1(s,t) * F(s)G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(s)G_n(t) * F(s)G(t).$$

Tada

$$L_1(s,t) * F(s)G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(s)G_n(t) - F(s)G(t);$$

$$L_1(s,t) * F(s)G(t) = L_1(s,t) - F(s)G(t);$$

$$L_1(s,t) = L_1(s,t) * F(s)G(t) + F(s)G(t).$$

▲

5.1.2 teorema. *Dvimačio atstatymo proceso antras momentas* $L_2(s,t) = M(N(s,t))^2$ *tenkina tokią integralinę lygtį*

$$L_2(s,t) = L_2(s,t) * F(s)G(t) + 2L_1(s,t) - F(s)G(t),$$

kur $L_1(s,t) * F(s)G(t) = \int\limits_0^s \int\limits_0^t L_1(s-x, t-y)dF(x)dG(y).$

▼

$$L_2(s,t) = M(N(s,t))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P(N(s,t) = n).$$

Žinome, kad

$$P(N(s,t) = n) = F_n(s)G_n(t) - F_{n+1}(s)G_{n+1}(t),$$

vadinasi, galime rašyti :

$$L_2(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)-1)^2 F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)^2 - 2(n+1) + 1)F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) +$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) - \sum_{n=2}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) + 2\sum_{n=2}^{\infty} nF_n(s)G_n(t) - \sum_{n=2}^{\infty} F_n(s)G_n(t) =$$

$$= F(s)G(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty} nF_n(s)G_n(t) - 2F(s)G(t) - \sum_{n=1}^{\infty} F_n(s)G_n(t) + F(s)G(t).$$

Vadinasi:

$$L_2(s,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} nF_n(s)G_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty} F_n(s)G_n(t);$$

$$L_2(s,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} nF_n(s)G_n(t) - L_1(s,t). \tag{5.1}$$

Abi lygties puses per sąsūką padauginkime iš $F(s)G(t)$:

$$L_2(s,t)*F(s)G(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} nF_{n+1}(s)G_{n+1}(t) - L_1(s,t)*F(s)G(t).$$

Tada

$$\begin{aligned}
L_2(s,t)*F(s)G(t) &= 2\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)-1)F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) - L_1(s,t)*F(s)G(t) = \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) - 2\sum_{n=1}^{\infty}F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) - \\
&-L_1(s,t)*F(s)G(t) = \\
&= 2\sum_{n=2}^{\infty} nF_n(s)G_n(t) - 2\sum_{n=2}^{\infty}F_n(s)G_n(t) - L_1(s,t)*F(s)G(t) = \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} nF_n(s)G_n(t) - 2F(s)G(t) - 2\sum_{n=1}^{\infty}F_n(s)G_n(t) + \\
&+2F(s)G(t) - L_1(s,t)*F(s)G(t) = \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} nF_n(s)G_n(t) - 2L_1(s,t) - L_1(s,t)*F(s)G(t). \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Iš (5.1) lygybės atimame (5.2) lygybę ir gauname:

$$\begin{aligned}
L_2(s,t) - L_2(s,t)*F(s)G(t) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} nF_n(s)G_n(t) - L_1(s,t) - 2\sum_{n=1}^{\infty} nF_n(s)G_n(t) + \\
&+2L_1(s,t) + L_1(s,t)*F(s)G(t) =
\end{aligned}$$

$$= L_1(s,t) + L_1(s,t) * F(s)G(t). \tag{5.3}$$

Iš (5.1.1) teoremos žinome, kad $L_1(s,t) * F(s)G(t) = L_1(s,t) - F(s)G(t)$.
Šią išraišką įstatome į (5.3) ir gauname:
$L_2(s,t) = L_2(s,t) * F(s)G(t) + 2L_1(s,t) - F(s)G(t)$.

▲

5.1.3 teorema. *Dvimačio atstatymo proceso vidurkis* $L_3(s,t) = (MN(s,t))^3$ *tenkina tokią integralinę lygtį:*

$$L_3(s,t) = L_3(s,t) * F(s)G(t) + 3L_2(s,t) - 3L_1(s,t) + F(s)G(t),$$

kur $L_1(s,t) * F(s)G(t) = \int\limits_0^s \int\limits_0^t L_1(s-x, t-y)dF(x)dG(y).$

▼

$$L_3(s,t) = M(N(s,t))^3 = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 P(N(s,t) = n).$$

Žinome, kad

$$P(N(s,t) = n) = F_n(s)G_n(t) - F_{n+1}(s)G_{n+1}(t),$$

vadinasi, galime rašyti:

$$\begin{aligned} L_3(s,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^3 P(N(s,t)=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n(s)G_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)-1)^3 F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n(s)G_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)^3 - 3(n+1)^2 + 3(n+1) - 1)F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n(s)G_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^3 F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) + 3\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2 - \\ &-3\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n(s)G_n(t) - \sum_{n=2}^{\infty} n^3 F_n(s)G_n(t) + 3\sum_{n=2}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) - \\ &-3\sum_{n=2}^{\infty} nF_n(s)G_n(t) + \sum_{n=2}^{\infty} F_n(s)G_n(t) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n(s)G_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n(s)G_n(t) + F(s)G(t) + 3\sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) -$$

$$-3F(s)G(t) - 3\sum_{n=1}^{\infty} nF_n(s)G_n(t) + 3F(s)G(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(s)G_n(t) - F(s)G(t) =$$

$$= 3\sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) - 3\sum_{n=1}^{\infty} nF_n(s)G_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(s)G_n(t).$$

Kadangi

$$L_1(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(s)G_n(t)$$

ir iš (5.1) formulės

$$\sum_{n=1}^{\infty} nF_n(s)G_n(t) = \frac{1}{2}L_2(s,t) + \frac{1}{2}L_1(s,t),$$

tai

$$L_3(s,t) = 3\sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) - 3(\frac{1}{2}L_2(s,t) + \frac{1}{2}L_1(s,t)) + L_1(s,t) =$$

$$= 3\sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) - \frac{3}{2}L_2(s,t) - \frac{1}{2}L_1(s,t). \tag{5.4}$$

Abi lygties puses per sąsūką padauginkime iš $F(s)G(t)$:

$$L_3(s,t)*F(s)G(t) = 3\sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) - \frac{3}{2}L_2(s,t)*F(s)G(t) - \frac{1}{2}L_1(s,t)*F(s)G(t).$$

Kadangi

$$L_1(s,t) * F(s)G(t) = L_1(s,t) - F(s)G(t),$$

$$L_2(s,t) * F(s)G(t) = L_2(s,t) - 2L_1(s,t) + F(s)G(t)$$

ir iš

$$L_2(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_{n+1}(s)G_{n+1}(t)$$

gauname

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) - L_2(s,t),$$

tai

$$\begin{aligned} L_3(s,t) * F(s)G(t) &= 3\sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) - 3L_2(s,t) - \frac{3}{2}L_2(s,t) + 3L_1(s,t) - \\ &-\frac{3}{2}F(s)G(t) - \frac{1}{2}L_1(s,t) + \frac{1}{2}F(s)G(t) = \\ &= 3\sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) - \frac{9}{2}L_2(s,t) + \\ &+\frac{5}{2}L_1(s,t) - F(s)G(t). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Iš (5.4) lygybės atimame (5.5) lygybę ir gauname:

$$\begin{aligned} L_3(s,t) - L_3(s,t) * F(s)G(t) &= 3\sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) - \frac{3}{2}L_2(s,t) - \frac{1}{2}L_1(s,t) - \\ &-3\sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) + \frac{9}{2}L_2(s,t) - \frac{5}{2}L_1(s,t) + F(s)G(t) = \\ &= 3L_2(s,t) - 3L_1(s,t) + F(s)G(t). \end{aligned}$$

Vadinasi

$$L_3(s,t) = L_3(s,t) * F(s)G(t) + 3L_2(s,t) - 3L_1(s,t) + F(s)G(t).$$

▲

5.1.4 teorema. *Dvimačio atstatymo proceso vidurkis* $L_4(s,t) = (MN(s,t))^4$ *tenkina tokią integralinę lygtį:*

$$L_4(s,t) = L_4(s,t) * F(s)G(t) + 4L_3(s,t) - 6L_2(s,t) + 4L_1(s,t) - F(s)G(t),$$

kur $L_1(s,t) * F(s)G(t) = \int\limits_0^s \int\limits_0^t L_1(s-x, t-y)dF(x)dG(y).$

▼

$$L_4(s,t) = M(N(s,t))^4 = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 P(N(s,t) = n).$$

Žinome, kad

$$P(N(s,t) = n) = F_n(s)G_n(t) - F_{n+1}(s)G_{n+1}(t),$$

vadinasi, galime rašyti:

$$L_4(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 P(N(s,t) = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 F_n(s)G_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)-1)^4 F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^4 F_n(s)G_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)^4 - 4(n+1)^3 +$$

$$+6(n+1)^2 - 4(n+1) + 1)F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^4 F_n(s)G_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^4 F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) + 4\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^3 -$$

$$-6\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2 F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) + 4\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^4 F_n(s)G_n(t) - \sum_{n=2}^{\infty} n^4 F_n(s)G_n(t) + 4\sum_{n=2}^{\infty} n^3 F_n(s)G_n(t) -$$

$$-6\sum_{n=2}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) + 4\sum_{n=2}^{\infty} nF_n(s)G_n(t) - \sum_{n=2}^{\infty} F_n(s)G_n(t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^4 F_n(s)G_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty} n^4 F_n(s)G_n(t) + F(s)G(t) + 4\sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n(s)G_n(t) -$$

$$-4F(s)G(t) - 6\sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) + 6F(s)G(t) + 4\sum_{n=1}^{\infty} nF_n(s)G_n(t) -$$

$$-4F(s)G(t) - \sum_{n=1}^{\infty} F_n(s)G_n(t) + F(s)G(t) =$$

$$= 4\sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n(s)G_n(t) - 6\sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) + 4\sum_{n=1}^{\infty} nF_n(s)G_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty} F_n(s)G_n(t).$$

Kadangi

$$L_1(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(s)G_n(t),$$

iš (5.1) formulės

$$\sum_{n=1}^{\infty} nF_n(s)G_n(t) = \frac{1}{2}L_2(s,t) + \frac{1}{2}L_1(s,t)$$

ir iš (5.4) formulės

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_n(s)G_n(t) = \frac{1}{3}L_3(s,t) + \frac{1}{2}L_2(s,t) + \frac{1}{6}L_1(s,t),$$

tai

$$L_4(s,t) = 4\sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n(s)G_n(t) - 2L_3(s,t) -$$

$$-3L_2(s,t)) - L_1(s,t) + 2L_2(s,t) + 2L_1(s,t) - L_1(s,t) =$$

$$= 4\sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n(s)G_n(t) - 2L_3(s,t) - L_2(s,t). \qquad (5.6)$$

Abi lygties puses per sąsūką padauginkime iš $F(s)G(t)$:

$$L_4(s,t)*F(s)G(t) = 4\sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) - 2L_2(s,t)*F(s)G(t) - L_2(s,t)*F(s)G(t).$$

Kadangi

$$L_2(s,t) * F(s)G(t) = L_2(s,t) - 2L_1(s,t) + F(s)G(t),$$

$$L_3(s,t) * F(s)G(t) = L_3(s,t) - 3L_2(s,t) + 3L_1(s,t) - F(s)G(t)$$

ir iš

$$L_3(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n(s)G_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_{n+1}(s)G_{n+1}(t)$$

gauname

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_{n+1}(s)G_{n+1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n(s)G_n(t) - L_3(s,t),$$

tai

$$\begin{aligned} L_4(s,t) * F(s)G(t) &= 4\sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n(s)G_n(t) - 4L_3(s,t) - 2L_3(s,t) + 6L_2(s,t) - 6L_1(s,t) + \\ &\quad +2F(s)G(t) - L_2(s,t) + 2L_1(s,t) - F(s)G(t) = \\ &= 4\sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n(s)G_n(t) - 6L_3(s,t) + \\ &\quad +5L_2(s,t) - 4L_1(s,t) + F(s)G(t). \qquad (5.7) \end{aligned}$$

Iš (5.6) lygybės atimame (5.7) lygybę ir gauname:

$$\begin{aligned} L_4(s,t) - L_4(s,t) * F(s)G(t) &= 4\sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n(s)G_n(t) - 2L_3(s,t) - L_2(s,t) - \\ &-4\sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n(s)G_n(t) + 6L_3(s,t) - 5L_2(s,t) + \\ &+4L_1(s,t) - F(s)G(t) = \\ &= 4L_3(s,t) - 6L_2(s,t) + 4L_1(s,t) - F(s)G(t). \end{aligned}$$

Vadinasi

$$L_4(s,t) = L_4(s,t) * F(s)G(t) + 4L_3(s,t) - 6L_2(s,t) + 4L_1(s,t) - F(s)G(t).$$

▲

5.2 DVIMAČIŲ ATSTATYMO FUNKCIJŲ LAPLASO TRANSFORMACIJA

5.2.1 teorema. *Atstatymo proceso pirmojo momento* $L_1(s,t)$ *tankio* $l_1(s,t) = \frac{\partial^2 L_1(s,t)}{\partial s \partial t}$ *Laplaso transformacija* $l_1(\lambda, p) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty l_1(s,t) e^{-s\lambda - tp} ds dp$ *turi pavidalą:*

$$l_1(\lambda, p) = \frac{f(\lambda)g(p)}{1 - f(\lambda)g(p)}.$$

▼

Įrodysime formulę

$$L_1(s,t) * F(s)G(t) \xrightarrow{L} l_1(\lambda, p) \cdot f(\lambda)g(p):$$

$$L_1(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(s)G_n(t);$$

$$L_1(s,t) \xrightarrow{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x} f_n(x) dx \int\limits_0^\infty e^{-px} g_n(y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\lambda) g_n(p) = l_1(\lambda, p) = \sum_{n=1}^{\infty} (f(\lambda))^n (g(p))^n;$$

$$L_1(s,t) * F(s)G(t) \quad \xrightarrow{L} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_{n+1}(\lambda) g_{n+1}(p) = \sum_{n=1}^{\infty} (f(\lambda))^{n+1} (g(p))^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (f(\lambda))^n (g(p))^n \cdot f(\lambda)g(p) = f(\lambda)g(p) \sum_{n=1}^{\infty} (f(\lambda))^n (g(p))^n =$$

$$= f(\lambda)g(p) l_1(\lambda, p).$$

Turime atstatymo lygtį

$$L_1(s,t) = L_1(s,t) * F(s)G(t) + F(s)G(t).$$

Vadinasi, jos Laplaso transformacija:

$$l_1(\lambda, p) = l_1(\lambda, p) \cdot f(\lambda)g(p) + f(\lambda)g(p).$$

Išreiškiame $l_1(\lambda, p)$ ir gauname:

$$l_1(\lambda, p)(1 - f(\lambda)g(p)) = f(\lambda)g(p);$$

$$l_1(\lambda, p) = \frac{f(\lambda)g(p)}{1 - f(\lambda)g(p)}.$$

▲

5.2.2 teorema. *Atstatymo proceso antrojo momento* $L_2(s,t)$ *tankio* $l_2(s,t) = \frac{\partial^2 L_1(s,t)}{\partial s \partial t}$ *Laplaso transformacija* $l_2(\lambda,p) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty l_2(s,t)e^{-s\lambda - tp} dsdp$ *turi pavidalą*

$$l_2(\lambda,p) = \frac{f(\lambda)g(p)}{(1-f(\lambda)g(p))^2} + \left(\frac{f(\lambda)g(p)}{1-f(\lambda)g(p)}\right)^2.$$

▼

Turime atstatymo lygtį

$$L_2(s,t) = L_2(s,t) * F(s)G(t) + 2L_1(s,t) - F(s)G(t).$$

Analogiškai (5.2.1) teoremos įrodymui jos Laplaso transformacija

$$l_2(\lambda,p) = l_2(\lambda,p) \cdot f(\lambda)g(p) + 2l_1(\lambda,p) - f(\lambda)g(p).$$

Žinodami iš (5.2.1) teoremos, kad

$$l_1(\lambda,p) = \frac{f(\lambda)g(p)}{1-f(\lambda)g(p)}$$

išreiškiame $l_2(\lambda,p)$ ir gauname:

$$l_2(\lambda,p)(1-f(\lambda)g(p)) = 2\frac{f(\lambda)g(p)}{1-f(\lambda)g(p)} - f(\lambda)g(p);$$

$$l_2(\lambda,p)(1-f(\lambda)g(p)) = \frac{2f(\lambda)g(p) - f(\lambda)g(p) + (f(\lambda)g(p))^2}{1-f(\lambda)g(p)};$$

$$l_2(\lambda,p)(1-f(\lambda)g(p)) = \frac{f(\lambda)g(p) + (f(\lambda)g(p))^2}{1-f(\lambda)g(p)};$$

$$l_2(\lambda,p) = \frac{f(\lambda)g(p)}{(1-f(\lambda)g(p))^2} + \left(\frac{f(\lambda)g(p)}{1-f(\lambda)g(p)}\right)^2.$$

▲

5.2.3 teorema. *Atstatymo proceso trečiojo momento* $L_3(s,t)$ *tankio* $l_3(s,t) = \frac{\partial^2 L_3(s,t)}{\partial s \partial t}$ *Laplaso transformacija* $l_3(\lambda, p) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty l_3(s,t) e^{-s\lambda - tp} ds dp$ *turi pavidalą*

$$l_3(\lambda, p) = \frac{f(\lambda)g(p)}{(1 - f(\lambda)g(p))^3} + 4\frac{(f(\lambda)g(p))^2}{(1 - f(\lambda)g(p))^3} + \left(\frac{f(\lambda)g(p)}{1 - f(\lambda)g(p)}\right)^3.$$

▼

Turime atstatymo lygtį

$$L_3(s,t) = L_3(s,t) * F(s)G(t) + 3L_2(s,t) - 3L_1(s,t) + F(s)G(t).$$

Analogiškai (5.2.1) teoremos įrodymui jos Laplaso transformacija

$$l_3(\lambda, p) = l_3(\lambda, p) \cdot f(\lambda)g(p) + 3l_2(\lambda, p) - 3l_1(\lambda, p) + f(\lambda)g(p).$$

Žinodami iš (5.2.1) ir (5.2.2) teoremų, kad

$$l_1(\lambda, p) = \frac{f(\lambda)g(p)}{1 - f(\lambda)g(p)}$$

ir

$$l_2(\lambda, p) = \frac{f(\lambda)g(p)}{(1 - f(\lambda)g(p))^2} + \left(\frac{f(\lambda)g(p)}{1 - f(\lambda)g(p)}\right)^2,$$

išreiškiame $l_3(\lambda, p)$ ir gauname:

$$l_3(\lambda, p)(1 - f(\lambda)g(p)) \quad = 3\left[\frac{f(\lambda)g(p)}{(1 - f(\lambda)g(p))^2} + \left(\frac{f(\lambda)g(p)}{1 - f(\lambda)g(p)}\right)^2\right] - 3\frac{f(\lambda)g(p)}{1 - f(\lambda)g(p)} + f(\lambda)g(p);$$

$$l_3(\lambda, p)(1 - f(\lambda)g(p)) =$$

$$= \frac{3f(\lambda)g(p) + 3(f(\lambda)g(p))^2 - 3f(\lambda)g(p)(1 - f(\lambda)g(p)) + f(\lambda)g(p)(1 - f(\lambda)g(p))^2}{(1 - f(\lambda)g(p))^2};$$

$$l_3(\lambda, p)(1 - f(\lambda)g(p)) = \frac{f(\lambda)g(p) + 4(f(\lambda)g(p))^2 + (f(\lambda)g(p))^3}{(1 - f(\lambda)g(p))^2};$$

$$l_3(\lambda, p) = \frac{f(\lambda)g(p)}{(1 - f(\lambda)g(p))^3} + 4\frac{(f(\lambda)g(p))^2}{(1 - f(\lambda)g(p))^3} + \left(\frac{f(\lambda)g(p)}{1 - f(\lambda)g(p)}\right)^3.$$

▲

5.2.4 teorema. *Atstatymo proceso ketvirtojo momento* $L_4(s,t)$ *tankio* $l_4(s,t) = \frac{\partial^2 L_4(s,t)}{\partial s \partial t}$ *Laplaso transformacija* $l_4(\lambda,p) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty l_4(s,t)e^{-s\lambda - tp}dsdp$ *turi pavidalą*

$$l_4(\lambda,p) = \frac{f(\lambda)g(p)}{(1-f(\lambda)g(p))^4} + 11\frac{(f(\lambda)g(p))^2}{(1-f(\lambda)g(p))^4} + 11\frac{(f(\lambda)g(p))^3}{(1-f(\lambda)g(p))^4} + \left(\frac{f(\lambda)g(p)}{1-f(\lambda)g(p)}\right)^4.$$

▼

Turime atstatymo lygtį

$$L_4(s,t) = L_4(s,t) * F(s)G(t) + 4L_3(s,t) - 6L_2(s,t) + 4L_1(s,t) - F(s)G(t).$$

Analogiškai (5.2.1) teoremos įrodymui jos Laplaso transformacija

$$l_4(\lambda,p) = l_4(\lambda,p) \cdot f(\lambda)g(p) + 4l_3(\lambda,p) - 6l_2(\lambda,p) + 4l_1(\lambda,p) - f(\lambda)g(p).$$

Žinodami iš (5.2.1), (5.2.2) ir (5.2.3) teoremų, kad

$$l_1(\lambda,p) = \frac{f(\lambda)g(p)}{1-f(\lambda)g(p)},$$

$$l_2(\lambda,p) = \frac{f(\lambda)g(p)}{(1-f(\lambda)g(p))^2} + (\frac{f(\lambda)g(p)}{1-f(\lambda)g(p)})^2$$

ir

$$l_3(\lambda,p) = \frac{f(\lambda)g(p)}{(1-f(\lambda)g(p))^3} + 4\frac{(f(\lambda)g(p))^2}{(1-f(\lambda)g(p))^3} + (\frac{f(\lambda)g(p)}{1-f(\lambda)g(p)})^3,$$

išreiškiame $l_4(\lambda,p)$ ir gauname:

$$\begin{aligned} l_4(\lambda,p)(1-f(\lambda)g(p)) \quad = \quad & 4\left[\frac{f(\lambda)g(p)}{(1-f(\lambda)g(p))^3} + 4\frac{(f(\lambda)g(p))^2}{(1-f(\lambda)g(p))^3} + (\frac{f(\lambda)g(p)}{1-f(\lambda)g(p)})^3\right] - \\ & -6\left[\frac{f(\lambda)g(p)}{(1-f(\lambda)g(p))^2} + (\frac{f(\lambda)g(p)}{1-f(\lambda)g(p)})^2\right] + \\ & +4\frac{f(\lambda)g(p)}{1-f(\lambda)g(p)} - f(\lambda)g(p); \end{aligned}$$

$$l_4(\lambda,p)(1-f(\lambda)g(p)) =$$

$$= \frac{4f(\lambda)g(p)+16(f(\lambda)g(p))^2+4(f(\lambda)g(p))^3-6f(\lambda)g(p)(1-f(\lambda)g(p))}{(1-f(\lambda)g(p))^3} -$$

$$-\frac{6(f(\lambda)g(p))^2(1-f(\lambda)g(p))+4f(\lambda)g(p)(1-f(\lambda)g(p))^2-f(\lambda)g(p)(1-f(\lambda)g(p))^3}{(1-f(\lambda)g(p))^3};$$

$$l_4(\lambda,p)(1-f(\lambda)g(p)) \;=\; \frac{2f(\lambda)g(p)+8(f(\lambda)g(p))^2+14(f(\lambda)g(p))^3-f(\lambda)g(p)}{(1-f(\lambda)g(p))^3} +$$

$$+\frac{3(f(\lambda)g(p))^2-3(f(\lambda)g(p))^3+()^4 f(\lambda)g(p)}{(1-f(\lambda)g(p))^3};$$

$$l_4(\lambda,p)(1-f(\lambda)g(p)) = \frac{f(\lambda)g(p)+11(f(\lambda)g(p))^2+11(f(\lambda)g(p))^3+(f(\lambda)g(p))^4}{(1-f(\lambda)g(p))^3};$$

$$l_4(\lambda,p) = \frac{f(\lambda)g(p)}{(1-f(\lambda)g(p))^4} + 11\frac{(f(\lambda)g(p))^2}{(1-f(\lambda)g(p))^4} + 11\frac{(f(\lambda)g(p))^3}{(1-f(\lambda)g(p))^4} + \left(\frac{f(\lambda)g(p)}{1-f(\lambda)g(p)}\right)^4.$$

▲

5.3 LAPLASO ALGEBRINŲ IŠRAIŠKŲ ASIMPTOTIKA

5.3.1 teorema. *Atstatymo funkcijos $l_1(s,t)$ Laplaso transformacijai $l_1(\lambda,p)$ teisinga tokia asimptotinė formulė:*

$$l_1(\lambda,p) \sim \frac{1}{p^\alpha\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p}) + \lambda^\beta\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}) - p^\alpha\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})\cdot\lambda^\beta\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})},$$

kai $\lambda, p \to 0_+$.

▼

Tarkime,kad turime Laplaso transformaciją

$$l_1(\lambda,p) = \frac{f(\lambda)g(p)}{1-f(\lambda)g(p)}.$$

Apskaičiuojame tankius $f(\lambda)$, $g(p)$ ir jų sandaugą:

$$\begin{aligned}
f(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} f(s)ds &= \int_0^\infty e^{-\lambda s}dF(s) = -\int_0^\infty e^{-\lambda s}d(1-F(s)) = \\
&= -e^{-\lambda s}(1-F(s))\Big|_0^\infty + \int_0^\infty (1-F(s))de^{-\lambda s} = \\
&= 1 + \int_0^\infty (1-F(s))(e^{-\lambda s})'_s ds = \\
&= 1 - \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda;s}(1-F(s))ds; \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(p) = \int_0^\infty e^{-pt} g(t)ds &= \int_0^\infty e^{-pt}dG(t) = -\int_0^\infty e^{-pt}d(1-G(t)) = \\
&= -e^{-pt}(1-G(t))\Big|_0^\infty + \int_0^\infty (1-G(t))de^{-pt} =
\end{aligned}$$

$$= 1 + \int_0^\infty (1 - G(t))(e^{-pt})'_t dt =$$

$$= 1 - p \int_0^\infty e^{-pt}(1 - G(t))dt; \qquad (5.9)$$

$$\begin{aligned} f(\lambda)g(p) &= (1 - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s}(1 - F(s))ds)(1 - p \int_0^\infty e^{-pt}(1 - G(t))dt) = \\ &= 1 - p \int_0^\infty e^{-pt}(1 - G(t))dt - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s}(1 - F(s))ds + \\ &+ p \int_0^\infty e^{-pt}(1 - G(t))dt \cdot \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s}(1 - F(s))ds. \end{aligned} \qquad (5.10)$$

Tada

$$l_1(\lambda, p) =$$

$$= \frac{1 - p \int_0^\infty e^{-pt}(1 - G(t))dt - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s}(1 - F(s))ds + p \int_0^\infty e^{-pt}(1 - G(t))dt \cdot \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s}(1 - F(s))ds}{1 - (1 - p \int_0^\infty e^{-pt}(1 - G(t))dt - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s}(1 - F(s))ds + p \int_0^\infty e^{-pt}(1 - G(t))dt \cdot \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s}(1 - F(s))ds)} =$$

$$= \frac{1 - p \int_0^\infty e^{-pt}(1 - G(t))dt - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s}(1 - F(s))ds + p \int_0^\infty e^{-pt}(1 - G(t))dt \cdot \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s}(1 - F(s))ds}{p \int_0^\infty e^{-pt}(1 - G(t))dt + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s}(1 - F(s))ds - p\lambda \int_0^\infty e^{-pt}(1 - G(t))dt \int_0^\infty e^{-\lambda s}(1 - F(s))ds}.$$

Remdamiesi (4.2) lema, gauname:

$$l_1(\lambda, p) \sim$$

$$\sim \frac{1}{p \cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p}) + \lambda \cdot \lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}) - p \cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})\lambda \cdot \lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})}.$$

Vadinasi

$$l_1(\lambda, p) \sim$$

$$\sim \frac{1}{p^\alpha \Gamma(1-\alpha) L(\frac{1}{p}) + \lambda^\beta \Gamma(1-\beta) L(\frac{1}{\lambda}) - p^\alpha \Gamma(1-\alpha) L(\frac{1}{p}) \cdot \lambda^\beta \Gamma(1-\beta) L(\frac{1}{\lambda})}.$$

▲

5.3.2 teorema. *Atstatymo funkcijos* $l_2(s,t)$ *Laplaso transformacijai* $l_2(\lambda,p)$ *teisinga tokia asimptotinė formulė:*

$$l_2(\lambda,p) \sim \frac{2}{(p^\alpha\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p}) + \lambda^\beta\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}) - p^\alpha\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p}).\lambda^\beta\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^2},$$

kai $\lambda, p \to 0_+$.

▼

Tarkime, kad turime Laplaso transformaciją

$$l_2(\lambda,p) = \frac{f(\lambda)g(p)}{(1-f(\lambda)g(p))^2} + \left(\frac{f(\lambda)g(p)}{1-f(\lambda)g(p)}\right)^2.$$

Tada iš (5.8), (5.9) ir (5.10) formulių gauname:

$$l_2(\lambda,p) =$$

$$= \frac{1 - p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt \cdot \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds}{(1-(1-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt \cdot \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds))^2} +$$

$$+ \left(\frac{1 - p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt \cdot \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds}{1-(1-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt \cdot \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds)}\right)^2 =$$

$$= \frac{1 - p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt \cdot \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds}{(p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt + \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds - p\lambda\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds)^2} +$$

$$+ \left(\frac{1 - p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt \cdot \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds}{p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt + \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds - p\lambda\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds}\right)^2.$$

Remdamiesi (4.2) lema, gauname:

$$l_2(\lambda,p) \sim$$

$$\sim \frac{1}{(p\cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})+\lambda\cdot\lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})-p\cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})\lambda\cdot\lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^2}+$$

$$+\left(\frac{1}{p\cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})+\lambda\cdot\lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})-p\cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})\lambda\cdot\lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})}\right)^2.$$

Vadinasi,

$$l_2(\lambda,p)\sim \frac{2}{(p^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})+\lambda^{\beta}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})-p^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p}).\lambda^{\beta}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^2}.$$

▲

5.3.3 teorema. *Atstatymo funkcijos* $l_3(s,t)$ *Laplaso transformacijai* $l_3(\lambda,p)$ *teisinga tokia asimptotinė formulė:*

$$l_3(\lambda,p) \sim \frac{6}{(p^\alpha\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p}) + \lambda^\beta\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}) - p^\alpha\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})\lambda^\beta\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^3},$$

kai $\lambda, p \to 0_+$.

▼

Tarkime, kad turime Laplaso transformaciją

$$l_3(\lambda,p) = \frac{f(\lambda)g(p)}{(1-f(\lambda)g(p))^3} + 4\frac{(f(\lambda)g(p))^2}{(1-f(\lambda)g(p))^3} + \left(\frac{f(\lambda)g(p)}{(1-f(\lambda)g(p)}\right)^3.$$

Tada iš (5.8),(5.9) ir (5.10) formulių gauname:

$$l_3(\lambda,p) =$$

$$= \frac{1-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds}{(1-(1-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds))^3}+$$

$$+4\frac{(1-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds)^2}{(1-(1-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds))^3}+$$

$$+\left(\frac{1-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds}{1-(1-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds)}\right)^3 =$$

$$= \frac{1-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds}{(p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt + \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds - p\lambda\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds)^3}+$$

$$+4\frac{(1-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds)^2}{(p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt + \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds - p\lambda\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds)^3}+$$

$$+\left(\frac{1-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt-\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds+p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds}{p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt+\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds-p\lambda\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds}\right)^3.$$

Remdamiesi (4.2) lema, gauname:

$$l_3(\lambda,p)\sim$$

$$\sim\frac{1}{(p\cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})+\lambda\cdot\lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})-p\cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})\lambda\cdot\lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^3}+$$

$$+\frac{4}{(p\cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})+\lambda\cdot\lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})-p\cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})\lambda\cdot\lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^3}+$$

$$+\left(\frac{1}{p\cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})+\lambda\cdot\lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})-p\cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})\lambda\cdot\lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})}\right)^3.$$

Vadinasi,

$$l_3(\lambda,p)\sim\frac{6}{(p^\alpha\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})+\lambda^\beta\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})-p^\alpha\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})\lambda^\beta\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^3}.$$

▲

5.3.4 teorema. *Atstatymo funkcijos $l_4(s,t)$ Laplaso transformacijai $l_4(\lambda,p)$ teisinga tokia asimptotinė formulė:*

$$l_4(\lambda,p) \sim \frac{24}{(p^\alpha\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p}) + \lambda^\beta\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}) - p^\alpha\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})\lambda^\beta\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^4},$$

kai $\lambda, p \to 0_+$.

$\blacktriangledown$

Tarkime, kad turime Laplaso transformaciją

$$l_4(\lambda,p) = \frac{f(\lambda)g(p)}{(1-f(\lambda)g(p))^4} + 11\frac{(f(\lambda)g(p))^2}{(1-f(\lambda)g(p))^4} + 11\frac{(f(\lambda)g(p))^3}{(1-f(\lambda)g(p))^4} + \left(\frac{f(\lambda)g(p)}{(1-f(\lambda)g(p)}\right)^4.$$

Tada iš (5.8),(5.9) ir (5.10) formulių gauname:

$$l_4(\lambda,p) =$$

$$= \frac{1 - p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds}{(1-(1-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds))^4} +$$

$$+11\frac{(1 - p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds)^2}{(1-(1-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds))^4} +$$

$$+11\frac{(1 - p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds)^3}{(1-(1-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds))^4} +$$

$$+\left(\frac{1 - p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds}{1-(1-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds)}\right)^4 =$$

$$= \frac{1 - p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt - \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds}{(p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt + \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds - p\lambda\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds)^4} +$$

$$+11\frac{(1-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt-\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds+p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds)^2}{(p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt+\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds-p\lambda\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds)^4}+$$

$$+11\frac{(1-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt-\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds+p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds)^3}{(p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt+\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds-p\lambda\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds)^4}+$$

$$+\left(\frac{1-p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt-\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds+p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\cdot\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds}{p\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt+\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds-p\lambda\int\limits_0^\infty e^{-pt}(1-G(t))dt\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}(1-F(s))ds}\right)^4.$$

Remdamiesi (4.2) lema, gauname:

$l_4(\lambda,p)\sim$

$$\sim\frac{1}{(p\cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})+\lambda\cdot\lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})-p\cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})\lambda\cdot\lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^4}+$$

$$+\frac{11}{(p\cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})+\lambda\cdot\lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})-p\cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})\lambda\cdot\lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^4}+$$

$$+\frac{11}{(p\cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})+\lambda\cdot\lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})-p\cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})\lambda\cdot\lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^4}+$$

$$+\left(\frac{1}{p\cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})+\lambda\cdot\lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})-p\cdot p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})\lambda\cdot\lambda^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})}\right)^4.$$

Vadinasi:

$$l_4(\lambda,p)\sim\frac{24}{(p^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})+\lambda^{\beta}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})-p^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})\lambda^{\beta}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^4}.$$

▲

5.4 DVIMAČIŲ ATSTATYMO FUNKCIJŲ ASIMPTOTIKA

Tegul $F(t)$: $1 - F(t) \sim t^{\alpha}L(t)$, $L(t)$ - lėtai kintanti funkcija, žymėsime $V(\alpha)$.

Tada, jei $F(s)$, $G(t) \in V(\beta)$, $\beta \in [0;1)$, tai

$$1 - F(s) \sim t^{\alpha}L_1(s),$$

$$1 - G(t) \sim t^{\alpha}L_2(t).$$

5.4.1 teorema. *Jei tarpinių momentų pasiskirstymo funkcija $L_1(at, bt)$ yra lėtai kintanti ir jos Laplaso transformacijos asimptotika yra*

$$l_1(a\lambda, b\lambda) \sim \frac{1}{(a+b)\lambda^{\beta}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})},$$

kur $\lambda \to 0_+$ ir $a, b = const$, tai atstatymo funkcijos asimptotika yra tokia:

$$L_1(at, bt) \sim \frac{1}{a+b} \cdot \frac{t^{\beta}sin(\pi\beta)}{L(t) \cdot \pi\beta},$$

kur $t \to \infty$, $\frac{sin(\pi\beta)}{\pi\beta} = \frac{1}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1-\beta)}$.

▼

(5.3.1) teoremoje imdami $\lambda = p$ gauname:

$$l_1(a\lambda, bp) \sim \frac{1}{a\lambda^{\beta}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}) + b\lambda^{\beta}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}) - a\lambda^{\beta}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}) \cdot b\lambda^{\beta}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})},$$

$$l_1(a\lambda, bp) \sim \frac{1}{\lambda^{\beta}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})(a+b-ab\lambda^{\beta}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))},$$

$$l_1(a\lambda, bp) \sim \frac{1}{(a+b)\lambda^{\beta}\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})}.$$

Pagal (4.2) teoremą:

$$L_1(at, bt) \sim \frac{1}{a+b} \cdot \frac{t^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1-\beta)} \cdot \frac{1}{L(t)} = \frac{1}{a+b} \cdot \frac{t^{\beta}sin(\pi\beta)}{L(t) \cdot \pi\beta}.$$

▲

5.4.2 teorema. *Jei tarpinių momentų pasiskirstymo funkcija* $L_2(at, bt)$ *yra lėtai kintanti ir jos Laplaso transformacijos asimptotika yra*

$$l_2(a\lambda, b\lambda) \sim \frac{2}{((a+b)\lambda^\beta \Gamma(1-\beta) L(\frac{1}{\lambda}))^2},$$

kur $\lambda \to 0_+$ *ir* $a, b = const$, *tai atstatymo funkcijos asimptotika yra tokia:*

$$L_2(at, bt) \sim \frac{2}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{t^\beta sin(\pi\beta)}{L(t) \cdot \pi\beta} \right)^2,$$

kur $t \to \infty$, $\frac{sin(\pi\beta)}{\pi\beta} = \frac{1}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1-\beta)}$.

▼

(5.3.2) teoremoje imdami $\lambda = p$ gauname:

$$l_2(a\lambda, bp) \sim \frac{2}{(a\lambda^\beta\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}) + b\lambda^\beta\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}) - a\lambda^\beta\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}) \cdot b\lambda^\beta\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^2},$$

$$l_2(a\lambda, bp) \sim \frac{2}{(\lambda^\beta\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})(a+b-ab\lambda^\beta\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})))^2},$$

$$l_2(a\lambda, bp) \sim \frac{2}{(a+b)^2(\lambda^\beta\Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^2}.$$

Pagal (4.2) teoremą:

$$L_2(at, bt) \sim \frac{2}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{t^\beta}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1-\beta)} \cdot \frac{1}{L(t)} \right)^2 = \frac{2}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{t^\beta sin(\pi\beta)}{L(t) \cdot \pi\beta} \right)^2.$$

▲

5.4.3 teorema. *Jei tarpinių momentų pasiskirstymo funkcija* $L_3(at, bt)$ *yra lėtai kintanti ir jos Laplaso transformacijos asimptotika yra*

$$l_3(a\lambda, b\lambda) \sim \frac{6}{((a+b)\lambda^\beta \Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^3},$$

kur $\lambda \to 0_+$ *ir* $a, b = const$*, tai atstatymo funkcijos asimptotika yra tokia:*

$$L_3(at, bt) \sim \frac{6}{(a+b)^3} \cdot \left(\frac{t^\beta sin(\pi\beta)}{L(t) \cdot \pi\beta}\right)^3,$$

kur $t \to \infty$, $\frac{sin(\pi\beta)}{\pi\beta} = \frac{1}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1-\beta)}$.

▼

(5.3.3) teoremoje imdami $\lambda = p$ gauname:

$$l_3(a\lambda, bp) \sim \frac{6}{(a\lambda^\beta \Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}) + b\lambda^\beta \Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}) - a\lambda^\beta \Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}) \cdot b\lambda^\beta \Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^3},$$

$$l_3(a\lambda, bp) \sim \frac{6}{(\lambda^\beta \Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})(a+b-ab\lambda^\beta \Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda})))^3},$$

$$l_3(a\lambda, bp) \sim \frac{6}{(a+b)^3(\lambda^\beta \Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^3}.$$

Pagal (4.2) teoremą:

$$L_3(at, bt) \sim \frac{6}{(a+b)^3} \cdot \left(\frac{t^\beta}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1-\beta)} \cdot \frac{1}{L(t)}\right)^3 = \frac{6}{(a+b)^3} \cdot \left(\frac{t^\beta sin(\pi\beta)}{L(t) \cdot \pi\beta}\right)^3.$$

▲

5.4.4 teorema. *Jei tarpinių momentų pasiskirstymo funkcija* $L_4(at, bt)$ *yra lėtai kintanti ir jos Laplaso transformacijos asimptotika yra*

$$l_4(a\lambda, b\lambda) \sim \frac{24}{((a+b)\lambda^\beta \Gamma(1-\beta) L(\frac{1}{\lambda}))^4},$$

kur $\lambda \to 0_+$ *ir* $a, b = const$, *tai atstatymo funkcijos asimptotika yra tokia:*

$$L_4(at, bt) \sim \frac{24}{(a+b)^4} \cdot \left(\frac{t^\beta sin(\pi\beta)}{L(t) \cdot \pi\beta} \right)^4,$$

kur $t \to \infty$, $\frac{sin(\pi\beta)}{\pi\beta} = \frac{1}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1-\beta)}$.

▼

(5.3.4) teoremoje imdami $\lambda = p$ gauname:

$$l_4(a\lambda, bp) \sim \frac{24}{(a\lambda^\beta \Gamma(1-\beta) L(\frac{1}{\lambda}) + b\lambda^\beta \Gamma(1-\beta) L(\frac{1}{\lambda}) - a\lambda^\beta \Gamma(1-\beta) L(\frac{1}{\lambda}) \cdot b\lambda^\beta \Gamma(1-\beta) L(\frac{1}{\lambda}))^4},$$

$$l_4(a\lambda, bp) \sim \frac{24}{(\lambda^\beta \Gamma(1-\beta) L(\frac{1}{\lambda})(a+b-ab\lambda^\beta \Gamma(1-\beta) L(\frac{1}{\lambda})))^4},$$

$$l_4(a\lambda, bp) \sim \frac{24}{(a+b)^4 (\lambda^\beta \Gamma(1-\beta) L(\frac{1}{\lambda}))^4}.$$

Pagal (4.2) teoremą:

$$L_4(at, bt) \sim \frac{24}{(a+b)^4} \cdot \left(\frac{t^\beta}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1-\beta)} \cdot \frac{1}{L(t)} \right)^4 = \frac{24}{(a+b)^4} \cdot \left(\frac{t^\beta sin(\pi\beta)}{L(t) \cdot \pi\beta} \right)^4.$$

▲

6 IŠVADOS

1. Nustatytos dvimačių atstatymo funkcijų $L_k(s,t) = M(N(s,t))^k$, kai $k \in N_+ = \{1, 2, ...\}$, integralinės lygtys.

2. Gauti dvimačių atstatymo funkcijų Laplaso transformacijos pavidalai, kai $k \in N_+ = \{1, 2, 3, 4\}$.

3. Taikydami atstatymo funkcijų asimptotinę teoriją, gavome nagrinėjamų dvimačių atstatymo funkcijų asimptotines formules:

3.1 Galime teigti, kad atstatymo funkcijos $l_k(s,t)$ Laplaso transformacijai $l_k(\lambda, p)$ teisinga tokia asimptotinė formulė:

$$l_k(\lambda, p) \sim \frac{k!}{(p^\alpha \Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p}) + \lambda^\beta \Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}) - p^\alpha \Gamma(1-\alpha)L(\frac{1}{p})\lambda^\beta \Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^k},$$

kai $\lambda, p \to 0_+$ ir $k \in N_+ = \{1, 2, ...\}$.

3.2 Jei tarpinių momentų pasiskirstymo funkcija $L_k(at, bt)$ yra lėtai kintanti ir jos Laplaso transformacijos asimptotika yra

$$l_k(a\lambda, b\lambda) \sim \frac{k!}{((a+b)\lambda^\beta \Gamma(1-\beta)L(\frac{1}{\lambda}))^k},$$

kur $\lambda \to 0_+$ ir $a, b = const$, tai atstatymo funkcijos asimptotika yra tokia:

$$L_k(at, bt) \sim \frac{k!}{(a+b)^k} \cdot \left(\frac{t^\beta sin(\pi\beta)}{L(t) \cdot \pi\beta} \right)^k,$$

kur $t \to \infty$, $\frac{sin(\pi\beta)}{\pi\beta} = \frac{1}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1-\beta)}$ ir $k \in N_+ = \{1, 2, ...\}$.

7 SUMMARY

In graduate research a two-dimensional renewal process

$$N(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1\mathrm{I}(T_n^1 \leq s) 1\mathrm{I}(T_n^2 \leq t),$$

where $T_n^1 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $T_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$, $X_1, ..., X_i$ and $Y_1, ..., Y_i$ - independent, positive with same distribution, definable on probability space (Ω, F, P) random values, is obtained.

The integral differential equation of renewal function $L_k(s,t)$, its Laplase transform and asymptotic's by Teugels theorems was found.

8 LITERATŪRA

1. V.Bagdonavičius, *Matematinės statistikos metodai patikimumo teorijoje*, Mokomoji priemonė, Vilnius, 1986, LTSR aukštojo ir spec. vidurinio mokslo ministerijos leidybinė redakcinė taryba.

2. B.V.Gnedenko, J.K.Beniajev, A.D.Solovjov, *Matematičeskije metodi v teorii nadiožnosti*, Moskva. "Nauka", 1965, 120 psl. (Rusų kalba)

3. A.N.Širiajev, *Verojatnost*, Moskva, "Nauka", 1989. (Rusų kalba)

4. V.Kanišauskas, *Asimptotičeskij vid momentov procesa vostanovlenija*, Liet. matem. rinkinys, spec. nr. 44, 2004, 817-820 psl. (Rusų kalba)

5. I.A.Ibragimov, R.Z.Hasminskij, *Asimptotičeskaja teorija ocenivanija*, Moskva, "Nauka", 1979, 528 psl. (Rusų kalba)

6. J.A.Kutojanc, *Ocenivanije parametrov slučajnih procesov*, Izdatelstvo A.N.Arm SSR, Erevan, 1978. (Rusų kalba)

7. J.N.Linkov, *Asimptotičeskije metodi statistiki slučajnih procesov*, Kijev, 1993. (Rusų kalba)

8. N.R.Mohan, *Teugels renewal theorem and stable laws*, The Annals of Probability 1976, Vol. 4, No. 5, 863-868.

9. V.Kanišauskas, *Tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pagrindai*, ŠU, Šiauliai, 2000.

10. V.Čekanavičius, G.Murauskas, *Statistika ir jos taikymai*, 1 d., TEV, Vilnius, 2000.

11. F.Mišeikis, *Statistika ir ekonometrija*, "Technika", Vilnius, 1997.

12. J.Kruopis, *Matematinė statistika*, Mokslo ir enciklopedijų leidykla, Vilnius, 1993.