Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
64 tomas, 2023, 16–22
https://doi.org/10.15388/LMR.2023.33577

Trikampių masyvų klasės skaičių problemos

Igoris Belovas

Vilniaus universitetas, Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas
Akademijos g. 4, LT-08412 Vilnius, Lietuva
El. paštas: Igoris.Belovas@mif.vu.lt

Įteiktas 2023 balandžio 21; publikuotas 2023 lapkričio 20

Santrauka. Trikampių masyvų klasės skaičiai, apibrėžiami pirmosios eilės tiesine dviejų kintamųjų skirtumine lygtimi su tiesiniais koeficientais, apima platų kombinatorinių skaičių šeimų spektrą: binominius koeficientus, Morgano skaičius, Stirlingo pirmosios ir antrosios rūšių skaičius, necentrinius Stirlingo skaičius, Eulerio skaičius, Laho skaičius, ir jų apibendrinimus. Darbe yra išvedama trikampių masyvų klasės skaičių bendroji analizinė išraiška, bei siūlomos problemos (kaip lavinančios atitinkamą įrodymų techniką ir matematinį aparatą, taip ir dar neišspręstos) studijuojantiems matematikos ir informatikos krypčių studijų programose esančius tikimybių teorijos ir analizinės kombinatorikos dalykus bakalaurams. Kai kurie dar neišspręsti uždaviniai gali būti panaudoti ir kaip baigiamųjų darbų pagrindai.

Raktiniai žodžiai: kombinatoriniai skaičiai; ribinės teoremos; asimptotinis normalumas

AMS: 05A15, 60F05, 39A14

1 Įvadas

Nagrinėsime skaičius $a_{n,k}$, susijusius su trikampių masyvų klase. Šie skaičiai tenkina tiesinę dviejų kintamųjų skirtuminę lygtį su tiesiniais koeficientais.

1 apibrėžimas. Skaičiai $a_{n,k}$ yra generuoti nenulinės realios matricos $\varPsi$,

$$\varPsi = \begin{pmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,2} & \psi_{1,3} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & \psi_{2,3} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

jei tenkina pirmos eilės tiesinę skirtuminę lygtį

$$a_{n,k} = (\psi_{1,1}n + \psi_{1,2}k + \psi_{1,3})a_{n-1,k-1} + (\psi_{2,1}n + \psi_{2,2}k + \psi_{2,3})a_{n-1,k}, \tag{2}$$

su $a_{0,0} = 1$ ir $a_{n,k} = 0$, kai $\min(n-k, n, k) < 0$.

Ši klasė apima tokius kombinatorinius skaičius kaip binominiai koeficientai, Morgano skaičiai, Stirlingo pirmosios ir antrosios rūšių skaičiai, necentriniai Stirlingo skaičiai, Eulerio skaičiai, Laho skaičiai, bei jų apibendrinimai (žr. [2, 4]).

Darbuose [1, 2, 3] yra nagrinėjamos $a_{n,k}$ skaičių analizinės išraiškos bei ribinės teoremos, nurodomas konvergavimo į ribinį dėsnį greitis. Tokio tipo problemų sprendimas yra naudingas studijuojantiems matematikos ir informatikos krypčių studijų programose esančius tikimybių teorijos ir analizinės kombinatorikos dalykus bakalaurams, nes padėtų studentams įvaldyti atitinkamą įrodymų techniką ir matematinį aparatą. Kai kurie neišspręsti uždaviniai (pvz., 4 ir 5 uždaviniai) gali būti pasiūlyti kaip baigiamieji darbai.

Didžioji pasiūlytų problemų dalis yra susiję su skaičiais, generuotais matricos

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Pagal 1 apibrėžimą, šie skaičiai (žr. 1 lentelę) tenkina skirtuminę lygtį,

$$a_{n,k} = n a_{n-1,k-1} + k a_{n-1,k}, \tag{4}$$

su kraštinėmis sąlygomis $a_{n,n} = n!$, kai $n \geqslant 0$ ir $a_{n,0} = 0$, kai $n > 0$.

1 lentelė. Skaičiai $a_{n,k}$ (2), generuoti matricos Ψ_0.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1	0	0	0	0	0	...
1	0	1	0	0	0	0	...
2	0	1	2	0	0	0	...
3	0	1	7	6	0	0	...
4	0	1	18	46	24	0	...
5	0	1	41	228	326	120	...
...	...	...	...	...	...	...	...

2 Kombinatorinių skaičių $a_{n,k}$ analizinė išraiška

2.1 Transformacijų metodas

Metodo idėja yra išreikšti $a_{n,k}$ per kitą kombinatorinių skaičių klasę: apibendrintuosius Laho skaičius $L_{n,k}$ [7], tenkinančius skirtuminę lygtį

$$L_{n,k} = L_{n-1,k-1} + \mu_{n,k} L_{n-1,k}, \tag{5}$$

su kraštinėmis sąlygomis $L_{n,n} = 1$, kai $n \geqslant 0$, ir $L_{n,0} = \prod_{j=1}^{n} \mu_{j,0}$, kai $n > 1$.

1 teorema. *Jei*

$$\xi_{n,k} = \prod_{j=1}^{k}(\psi_{1,1}(n-j+1)+\psi_{1,2}(k-j+1)+\psi_{1,3}),$$
$$\mu_{n,k} = (\psi_{2,1}n+\psi_{2,2}k+\psi_{2,3})\prod_{j=1}^{k}\frac{\psi_{1,1}(n-j)+\psi_{1,2}(k-j+1)+\psi_{1,3}}{\psi_{1,1}(n-j+1)+\psi_{1,2}(k-j+1)+\psi_{1,3}}, \tag{6}$$

tai kombinatorinių skaičių $a_{n,k}$ *išraiškos* (2), (7) *ir* (8) *yra ekvivalenčios*

$$a_{n,k} = \xi_{n,k}L_{n,k}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= \xi_{n,k}\sum_{j_1=0}^{k}\mu_{j_1+n-k,j_1}\sum_{j_2=0}^{j_1}\mu_{j_2+n-k-1,j_2}\cdots\sum_{j_{n-k}=0}^{j_{n-k-1}}\mu_{j_{n-k}+1,j_{n-k}} \\ &= \xi_{n,k}\sum_{j_1=0}^{k}\sum_{j_2=0}^{j_1}\cdots\sum_{j_{n-k}=0}^{j_{n-k-1}}\prod_{r=1}^{n-k}\mu_{j_r+n-k-r+1,j_r}. \end{aligned} \tag{8}$$

Įrodymas. Pastebėję (žr. (6)), kad

$$\xi_{n,k} = (\psi_{1,1}n+\psi_{1,2}k+\psi_{1,3})\xi_{n-1,k-1},$$
$$\xi_{n,k}\mu_{n,k} = (\psi_{2,1}n+\psi_{2,2}k+\psi_{2,3})\xi_{n-1,k},$$

gauname (žr. (2) ir (5))

$$\begin{aligned} \xi_{n,k}L_{n,k} &= (\psi_{1,1}n+\psi_{1,2}k+\psi_{1,3})\underbrace{\xi_{n-1,k-1}L_{n-1,k-1}}_{=a_{n-1,k-1}} \\ &\quad+(\psi_{2,1}n+\psi_{2,2}k+\psi_{2,3})\underbrace{\xi_{n-1,k}L_{n-1,k}}_{a_{n-1,k}} = a_{n,k}. \end{aligned}$$

Toliau, iš (5) išplaukia, kad

$$L_{n,k} = \sum_{j=0}^{k}\mu_{n-j,k-j}L_{n-j-1,k-j}.$$

Taigi,

$$L_{n,n-k} = \sum_{j_1=0}^{n-k}\mu_{j_1+k,j_1}\sum_{j_2=0}^{j_1}\mu_{j_2+k-1,j_2}\cdots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}}\mu_{j_k+1,j_k},$$

ir galiausiai

$$L_{n,k} = \sum_{j_1=0}^{k}\mu_{j_1+n-k,j_1}\sum_{j_2=0}^{j_1}\mu_{j_2+n-k-1,j_2}\cdots\sum_{j_{n-k}=0}^{j_{n-k-1}}\mu_{j_{n-k}+1,j_{n-k}},$$

kas kartu su (7) duoda mums teoremos teiginį. □

1 pastaba. Rezultatas (7) gali būti apibendrintas. Jei skaičiai $b_{n,k}$ tenkina skirtuminę lygtį $b_{n,k} = \rho_{n,k} b_{n-1,k-1} + \tau_{n,k} b_{n-1,k}$, tai $b_{n,k} = \xi_{n,k} L_{n,k}$ su $\xi_{n,k} = \prod_{j=1}^{k} \rho_{n-j+1,k-j+1}$ ir $\mu_{n,k} = \tau_{n,k}\xi_{n-1,k}/\xi_{n,k}$.

1 išvada. *Jei skaičiai $a_{n,k}$ yra generuoti matricos Ψ_0, tai*

$$a_{n,k} = n! \sum_{j_1=1}^{k} \sum_{j_2=1}^{j_1} \cdots \sum_{j_{n-k}=1}^{j_{n-k-1}} \prod_{r=1}^{n-k} \left(1 + \frac{n-k-r+1}{j_r}\right)^{-1}. \tag{9}$$

Įrodymas. Išvada tiesiogiai išplaukia iš Teoremos 1, jei pastebėsime kad

$$\xi_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}, \qquad \mu_{n,k} = \frac{k(n-k)}{n}. \qquad \square$$

Skaičių $a_{n,k}$, generuotų matricos Ψ_0, išraiškų pavyzdžiai yra pateikti 2 lentelėje.

2 lentelė. Skaičių $a_{n,k}$, generuotų matricos Ψ_0, išraiškos. $H_{n:m}$ yra m-osios eilės apibendrintieji harmoniniai skaičiai, $H_{n:m} = \sum_{j=1}^{n} j^{-m}$, $n > 0$.

k	$a_{n,k}$
0	0
1	1
2	$\frac{3}{2}2^n - (n+2)$
3	$\frac{29}{12}3^n - \frac{3}{2}(n+3)2^n + \frac{1}{2}\left(n^2 + 4n + \frac{9}{2}\right)$
4	$\frac{289}{72}4^n - \frac{29}{12}(n+4)3^n + \frac{3}{4}(n^2+6n+10)2^n - \frac{1}{6}\left(n^3 + 6n^2 + \frac{27}{2}n + \frac{34}{3}\right)$
...	...
$n-2$	$n!((n^2-3n)/2 + (2-n)H_{n:1} + H_{n:1}^2 - H_{n:2})$
$n-1$	$n!(n - H_{n:1})$
n	$n!$

2.2 Generuojančių funkcijų metodas

Skyriuje 2.1 išvestos analizinės išraiškos (pl. (8) ir (9)) nėra patogios kombinatorinių skaičių tyrimams ir skaičiavimams. Alternatyvios formulės gali būti gautos, taikant skaičių $a_{n,k}$ pusiau eksponentines generuojančias funkcijas,

$$F(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\frac{x^n}{n!}y^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{x^n}{n!}y^k. \tag{10}$$

Pusiau eksponentinė generuojanti funkcija duoda mums pirmos eilės charakteristinę diferencialinę lygtį (žr. 1 lentelę C priede [2] ir 3 teoremą [3]), tuo metu kai paprastoji ir eksponentinė generuojančios funkcijos tenkina antros eilės dalinių išvestinių charakteristinę diferencialinę lygtį.

2 teorema. *Skaičių $a_{n,k}$, generuotų matricos Ψ_0, generuojanti funkcija tenkina pirmosios eilės dalinių išvestinių charakteristines diferencialines lygtis*:

$$(1-xy)F_x - yF_y = yF, \qquad F(0,y) = 1, \tag{11}$$

$$\Lambda_\xi = (\log\eta)\Lambda_\eta, \qquad \Lambda(0,\eta) = 1/\eta, \qquad \Lambda(\xi,\eta) = F(x,y)e^y. \tag{12}$$

Įrodymas. Lygtį (11) tiesiogiai gauname iš 2.1 teoremos [2]. Tiesinė nehomogeninė dalinių išvestinių diferencialinė lygtis (11) gali būti suvesta į homogeninę, taikant keitinį $F(x,y) = \Lambda(\xi,\eta)e^{-y}$, $\xi = xe^{-y}$, $\eta = e^{-y}$. $\square$

2 išvada. *Jei* $E_1(x)$ *ir* $\mathrm{li(x)}$ *yra eksponentinis ir logaritminis integralai,*

$$E_1(x) = \int_x^\infty e^{-t}t^{-1}dt = \int_1^\infty e^{-tx}t^{-1}dt, \quad x > 0,$$
$$\mathrm{li(x)} = \int_0^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{dt}}{\log \mathrm{t}}, \quad 0 < \mathrm{x} < 1,$$

atitinkamai, ir skaičiai $a_{n,k}$ *yra generuoti matricos* Ψ_0*, tai*

$$\begin{gathered} F(x,y) = \exp\left(E_1^{-1}\left(E_1(y) - xe^{-y}\right) - y\right) = \frac{e^{-y}}{\mathrm{li}^{-1}(\mathrm{li}(\mathrm{e}^{-\mathrm{y}}) + \mathrm{xe}^{-\mathrm{y}})}, \\ \Lambda(\xi,\eta) = \frac{1}{\mathrm{li}^{-1}(\mathrm{li}(\eta) + \xi)}. \end{gathered} \tag{13}$$

Įrodymas. Pirmoji formulė išplaukia iš 1 išvados [3]. Sprendžiant (12) lygtį, gauname (žr. 2.5.1.2 [8]) pagrindinį integralą $\Xi = \xi + \mathrm{li}(\eta)$. Išsprendus tiesinės homogeninės dviejų nepriklausomų kintamųjų pirmosios eilės dalinių išvestinių diferencialinės lygties Koši uždavinį (12), gauname antrąją formulę. $\square$

Žinomos funkcijos $F(x,y)$ diferencijavimas taške $(0,0)$ leidžia mums rasti skaičių $a_{n,k}$ analizinę išraišką (pl. (10)),

$$a_{nk} = \frac{1}{k!}\frac{\partial^{n+k}}{\partial x^n \partial y^k}F(x,y)\bigg|_{(0,0)}. \tag{14}$$

2.3 Uždaviniai studentams

1 uždavinys. Tegu $\psi_{1,2}, \psi_{2,1}, \psi_{2,2} \neq 0$ ir skaičiai $a_{n,k}$ yra generuoti matricos

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & \psi_{1,2} & \psi_{1,3} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & \psi_{2,3} \end{pmatrix}.$$

Parodykite, kad generuojančių funkcijų metodu gauta analizinė išraiška (žr. 2.4 teoremą [2]),

$$a_{n,k} = \frac{\prod_{j=1}^k(\psi_{1,2}j + \psi_{1,3})}{k!(\psi_{2,2})^k}\sum_{m=0}^k(-1)^m C_k^m \prod_{s=1}^n(\psi_{2,2}(k-m) + \psi_{2,1}s + \psi_{2,3}),$$

yra ekvivalenti tranformacijų metodu gautai išraiškai (8) (žr. 1 teoremą).

2 uždavinys. Tegu skaičiai $a_{n,k}$ yra generuoti matricos Ψ_0. Raskite skaičių analizinę išraišką, diferencijuojant charakteristinę funkciją $F(x,y)$ arba $\Lambda(\xi,\eta)$ (žr. (13) ir (14)). Uždavinys susiveda į funkcijų, atvirkštinių $E_1(x)$ arba $\mathrm{li}(x)$, aukštesnių eilių išvestinių skaičiavimą (skleidimą Teiloro eilute), kas savaime yra netriviali problema.

3 Ribinių teoremų $a_{n,k}$ skaičiams problemos

3.1 Asimptotinis normalumas

Tegu Ω_n yra sveikaskaitis atsitiktinis dydis su tikimybėmis, nusakomomis formule

$$\underbrace{P(\Omega_n = k)}_{\hat{p}:=p_{n,k}} = \frac{a_{n,k}}{\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}}, \quad k = 0, \ldots, n. \tag{15}$$

2 apibrėžimas. Skaičiai $a_{n,k}$ yra asimptotiškai normalūs su vidurkiu μ_n ir dispersija σ_n^2, jei

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x \left| \sum_{k<\mu_n + x\sigma_n} p_{n,k} - \Phi(x) \right| = 0, \tag{16}$$

kur $\Phi(x)$ yra standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.

3.2 Uždaviniai studentams

3 uždavinys. Taikant darbe [4] pademonstruotą techniką, parodykite, kad skaičiai, generuoti matricos Ψ_0 (žr. 1 teoremą ir 1 išvadą), yra asimptotiškai normalūs su vidurkiu μ_n ir dispersija σ_n^2,

$$\mu_n \sim (n+1)\frac{1 - eE_1(1)}{eE_1(1)}, \qquad \sigma_n^2 \sim (n+1)\frac{1 - eE_1(1) - e^2E_1^2(1)}{e^2E_1^2(1)}. \tag{17}$$

4 uždavinys. Darbe [4] yra teigiama, kad kombinatoriniai skaičiai, susiję su trikampių masyvų klase (t.y., visi, generuoti matricos Ψ (1)), yra asimptotiškai normalūs (žr. 2.1 teoremą ir 2.1 išvadą [4]). Tačiau darbe [2] buvo parodyta (žr. 4.3 teoremą [2]), kad kai $\psi_{1,2}\psi_{2,3} > 0$, tai skaičiai, generuoti matricų

$$\begin{pmatrix} 0 & \psi_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{2,3} \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \psi_{2,3} \\ \psi_{1,2} & -\psi_{1,2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

yra asimptotiškai puasoniniai. Nurodykite klaidą (netikslumą) 2.1 teoremos iš [4] įrodyme. Nurodykite kitų kontrpavyzdžių, be paminėtų 4.3 teoremoje iš [2]. Atsakykite, ar trikampių masyvų kombinatorinių skaičių ribiniai dėsniai gali būti tik gausiniai ir puasoniniai?

5 uždavinys. Išnagrinėkite, naudojant darbų [5, 6] techniką, kombinatorinių skaičių $a_{n,k}$, generuotų matricos Ψ_0, didelių nuokrypių asimptotiką, kai $k = n - n^\alpha$, $1/2 < \alpha < 1$.

Literatūra

[1] I. Belovas. Centrinė ribinė teorema trikampių masyvų klasės skaičiams, asocijuotiems su Ermito daugianariais. *Liet. matem. rink., LMD darbai, ser. B*, **61**:1–7, 2020. https://doi.org/10.15388/LMR.2020.22466.

[2] I. Belovas. Limit theorems for numbers satisfying a class of triangular arrays. *Glas. Mat.*, **56**(2):195–223, 2021. https://doi.org/10.3336/gm.56.2.01.

[3] I. Belovas. Central limit theorems for combinatorial numbers associated with Laguerre polynomials. *Mathematics*, **10**(6:865):1–18, 2022. https://doi.org/10.3390/math10060865.

[4] A. Kyriakoussis. A central limit theorem for numbers satisfying a class of triangular arrays. *Discrete Math.*, **51**:41–46, 1984. https://doi.org/10.1016/0012-365X(84)90022-0.

[5] G. Louchard. Asymptotics of the Stirling numbers of the first kind revisited: a saddle point approach. *Discret. Math. Theor. Comput. Sci.*, **12**(2):167–184, 2010.

[6] G. Louchard. Asymptotics of the Stirling numbers of the second kind revisited. *Appl. Anal. Discret. Math.*, **7**(2):193–210, 2013. http://www.jstor.org/stable/43660710.

[7] M.L. Platonov. *Combinatorial Numbers of Mapping Class and Their Applications*. Science, Moscow, 1979.

[8] A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev, A. Moussiaux. *Handbook of first-order partial differential equations*. CRC Press, London, 2002.

SUMMARY

Problems for combinatorial numbers satisfying a class of triangular arrays

I. Belovas

Numbers satisfying a class of triangular arrays, defined by a bivariate first-order linear difference equation with linear coefficients, include a wide range of combinatorial numbers: binomial coefficients, Morgan numbers, Stirling numbers of the first and the second types, non-central Stirling numbers, Eulerian numbers, Lah numbers, and their generalizations. In this work, we derive the general analytic expression of the numbers satisfying a class of triangular arrays and propose problems (both teaching and unsolved ones) for undergraduates studying probability theory and analytical combinatorics subjects in the study programs of the fields of mathematics and computer science. Some of the unsolved challenges can also be used as the basis for a thesis.

Keywords: combinatorial numbers; limit theorems; asymptotic normality