

# Apie sveikųjų skaičių seką, asocijuotą su pirminiais dvyniais, apskaičiavimą

Igoris Belovas<sup>ORCID</sup>, Martynas Sabaliauskas<sup>ORCID</sup>, Paulius Mykolaitis

*Matematikos ir informatikos fakultetas, Vilniaus universitetas*

Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva

El. paštas: [Igoris.Belovas@mif.vu.lt](mailto:Igoris.Belovas@mif.vu.lt); [Martynas.Sabaliauskas@mif.vu.lt](mailto:Martynas.Sabaliauskas@mif.vu.lt)

El. paštas: [Paulius.Mykolaitis@mif.stud.vu.lt](mailto:Paulius.Mykolaitis@mif.stud.vu.lt)

Iteiktas 2023 birželio 26; publikuotas 2023 lapkričio 20

**Santrauka.** Pirminių dvynių hipotezė teigia, kad egzistuoja be galo daug pirminių skaičių porų, kurių nariai tarpusavyje skiriasi 2. Nagrinėjant šią hipotezę, buvo gauta daug svarbių rezultatų, tačiau problema taip ir liko neišspręsta. Šiame darbe pirminių dvynių problema nagrinėjama iš eksperimentinės matematikos pusės. Taikant tikimybinį Milerio-Rabino pirminio skaičiaus testą ir lygiagrečiųjų skaičiavimų technologijas, yra eksperimentiškai tiriamas pirminių dvynių bei pirminių porų pasiskirstymas intervaluose  $(2^n; 2^{n+1}]$ .

**Raktiniai žodžiai:** sveikaskaitės sekos; Hardžio-Litlvido hipotezė; pirminiai  $k$ -rinkiniai

**AMS:** 11A41, 11N05, 11Y55

## 1 Įvadas

Vienas garsiausių iš neišspręstų matematikos uždavinių (po Rymano hipotezės ir jau įrodytos Ferma teoremos) yra pirminių dvynių problema. Stebina paradoksalus kontrastas tarp elementarios formuluotės, ir giliaus, jau šimtmečius nepasiduodančio matematikų pastangoms, turinio. Pirminiai dvyniai (angl. *twin primes*) yra pirminių skaičių poros, kurių skirtumas lygus 2:

$$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), \dots$$

**1 teiginys [Pirminių dvynių problema].** *Pirminių dvynių yra be galo daug.*

Teiginys nėra įrodytas, tačiau tvirtai manoma, kad jis yra teisingas. Hardis ir Litlvidas 1923 metais iškėlė hipotezę apie pirminių porų asimptotinį tankį (pagal 1849

metų Polinjako hipotezė, tokių porų yra be galo daug). Atvejis  $d = 2$  yra pirminių dvynių problema (žr. 1 teiginys),  $d = 4$  atitinka pirminių pusbrolių problemą,  $d = 6$  yra seksualiųjų pirminių (angl. *sexy primes*) problema. Optimistiškiausia (uodegos atžvilgiu) hipotezės formuluotė yra tokia [2, 4].

**2 teiginys [Pirmoji Hardžio–Litlvudo hipotezė pirminėms poroms].** Jei  $\pi_d(x)$ , yra pirminių porų skaičiuojančioji funkcija, ir  $d = 2n$ , tai

$$\pi_d(x) = \#\{p \leq x \mid p, p + d \in \mathbb{P}\} = 2C_2R_d \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} + O(x^{1/2+\varepsilon}), \quad (1)$$

kur  $\varepsilon$  yra mažas teigiamas skaičius ir  $C_2$  yra pirminių dvynių konstanta,

$$C_2 = \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = 0.6601618158\dots, \quad (2)$$

$$R_d = \prod_{p|d, p \geq 3} \frac{p-1}{p-2} = \prod_{p|d, p \geq 3} \left(1 + \frac{1}{p-2}\right).$$

Galima pastebėti, kad  $R_d$  įgyja mažiausias reikšmes su  $d = 2^n$  ir  $R_{2^n} = 1$ . Be to,  $R_{2p} = 1 + O(1/p)$ , kai  $p \rightarrow \infty$ .

1 lentelė.  $R_d$  reikšmės.

$d$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
$R_d$	1	1	2	1	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{6}{5}$	1	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{9}$	2	$\frac{12}{11}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{8}{3}$

Sena problema išlieka aktuali ir šiandien. Kasmet pasirodo jos, arba jos apibendrinimų, analiziniai [5, 1, 2] arba skaitiniai [6, 8] tyrimai.

2013 m. Itanas Žanas paskelbė, o 2014 m. publikavo įrodymą, kad yra be galo daug pirminių porų, besiskiriančių  $\Delta \leq 7 \cdot 10^7$  [9]. Šis svarbus rezultatas (paremtas Goldstono, Pinco ir Yldyrymo atradimais [3]) buvo intensyviai gerinamas, kol skirtumas  $\Delta$  nesumažėjo iki 246 [7].

Toliau straipsnyje kaip  $\text{Li}_m(x)$  žymėsime  $m$ -ąjį pastumtąjį logaritminį integralą,

$$\begin{aligned} \text{Li}_m(x) &= \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^m} \\ &= \frac{x}{(\log x)^m} + \frac{mx}{(\log x)^{m+1}} + \frac{m(m+1)x}{(\log x)^{m+2}} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{m+3}}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Visos ribos straipsnyje, jei nepažymėta kitaip, skaičiuojamos kai  $x \rightarrow \infty$ .

## 2 Sekos, asocijuotos su pirminėmis poromis

Apibrėžkime sveikųjų skaičių sekas  $\{b_{n,d}\}$ ,

$$b_{n,d} = \#\{2^n < p \leq 2^{n+1} \mid p, p + d \in \mathbb{P}\}, \quad n \in \mathbb{N}, d \in 2\mathbb{N}. \quad (4)$$

**2 lentelė.** Pirminių skaičių porų  $(p, p + d)$  kiekis  $b_{n,d}$  intervaluose  $(2^n, 2^{n+1}]$ .

$n$	$b_{n,2}$	$b_{n,4}$	$b_{n,6}$	$b_{n,8}$	$b_{n,10}$	$b_{n,12}$	$b_{n,14}$	$b_{n,16}$	$b_{n,18}$	$b_{n,20}$	$b_{n,22}$
1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0
2	1	1	2	1	1	2	1	1	1	0	1
3	1	1	2	1	1	1	0	1	2	1	0
4	2	1	3	2	2	4	3	1	3	2	2
5	2	2	5	2	3	4	3	2	4	4	2
6	3	6	7	3	5	6	3	3	6	3	4
7	7	4	11	5	7	12	6	7	13	6	5
8	7	11	17	9	13	19	12	8	16	15	12
9	12	15	28	15	20	25	20	15	31	18	16
10	26	23	55	25	34	52	27	22	45	36	24
11	45	44	79	46	52	83	55	41	86	51	48
12	70	64	142	72	95	140	82	69	143	91	78
13	113	131	241	121	156	239	154	114	240	162	137
14	215	197	434	208	262	419	254	204	430	287	228
15	355	359	719	382	502	703	448	389	735	475	411
16	666	658	1291	670	882	1341	787	647	1328	891	718
17	1153	1160	2319	1147	1551	2281	1434	1152	2335	1538	1283
18	2071	2071	4171	2109	2779	4199	2516	2140	4183	2817	2358
19	3785	3751	7538	3769	5017	7527	4460	3729	7519	5045	4196
20	6965	6820	13569	6852	9056	13672	8079	6783	13631	9100	7537
21	12495	12445	24824	12330	16557	24797	15000	12426	24928	16529	13736
22	22643	22561	45263	22662	30109	45448	27139	22617	45278	30183	25285
23	41608	41670	82579	41560	55589	83020	49934	41379	83092	55191	46063
24	76371	76289	152839	76478	101934	153027	91611	76904	152681	101941	84865
25	140944	141009	282165	141137	188038	282240	169200	141456	282763	187903	157508
26	261752	262183	523710	260812	348827	522980	314412	261728	523025	348381	290062
27	484968	485670	970747	485437	647404	971623	583552	485841	971779	647768	539580
28	904799	904901	1808934	905334	1206741	1808855	1085042	905817	1808858	1206858	1005968
29	1689477	1688468	3378523	1690975	2253636	3377319	2025294	1689570	3378176	2250914	1876173
30	3160113	3159596	6318344	3159014	4215979	6321921	3793446	3160751	6321042	4215989	3512489
31	5928904	5930172	11857968	5929599	7899095	11858736	7112399	5926942	11856042	7902234	6586460
32	11139071	11135222	22269858	11136585	14852185	22275517	13364689	11137700	22275957	14851828	12378407
33	20970782	20966894	41934802	20969409	27954245	41934626	25163015	20968522	41935667	27949861	23291278
34	39535081	39542451	79077648	39541095	52719119	79087959	47446416	39544059	79085803	52722123	43936070
35	74697745	74704771	149384651	74700522	99595308	149405609	89641836	74686790	149389578	99599179	83008986
36	141342490	141326344	282669548	141314246	188433913	282645250	169594460	141336646	282655523	188448283	157031848
37	267812262	267809109	535618852	267819384	357084239	535614909	321361370	267807505	535610065	357078431	297588405
38	508194094	508203585	1016436932	508203225	677584245	1016383925	609816487	508171536	1016382990	677599417	564642794

2 lentelėje pateiktas pirminių porų  $(p, p + d)$  kiekis  $b_{n,d}$  intervaluose  $(2^n, 2^{n+1}]$ , kai  $n \leq 38$  ir  $d \leq 22$ . Jei pirmoji Hardžio-Litlvido hipotezė yra teisinga, tai pirminių porų kiekių atitinkamuose intervaluose santykiai  $b_{n,d}/b_{n,2} \sim R_d$ . Rezultatai, pateikti 3 lentelėje, eksperimentiškai patvirtina hipotezę.

Nagrinėsim sveikųjų skaičių sekų  $\{b_{n,d}\}$  gretimų elementų santykį.

**1 teorema.** *Jei pirmoji Hardžio-Litlvido hipotezė (1) yra teisinga, tai*

$$\rho_n := \frac{b_{n+1,d}}{b_{n,d}} = 2 - \frac{4}{n} + \left(14 - \frac{4}{\log 2}\right) \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{5}$$

*Įrodymas.* Iš (1) ir (3), turime

$$\pi_d(x) = 2C_2 R_d \sum_{j=1}^3 \frac{j!x}{(\log x)^{j+1}} + O\left(\frac{x}{\log^5 x}\right).$$

Pažymėkime  $\theta = 1/\log 2$  ir nagrinėkime santykį

$$\begin{aligned} r_n &:= \frac{\pi_d(2^{n+1})}{\pi_d(2^n)} = \frac{2 \sum_{j=1}^3 j!(n+1)^{-(j+1)}\theta^{j+1} + O(n^{-5})}{\sum_{j=1}^3 j!n^{-(j+1)}\theta^{j+1} + O(n^{-5})} \\ &= 2 \frac{(1+n^{-1})^{-2} + 2\theta n^{-1}(1+n^{-1})^{-3} + 6\theta^2 n^{-2}(1+n^{-1})^{-4} + O(n^{-3})}{1 + 2\theta n^{-1} + 6\theta^2 n^{-2} + O(n^{-3})} \end{aligned}$$

3 lentelė. Pirminių skaičių porų  $(p, p + d)$  kiekių intervaluose  $(2^n, 2^{n+1}]$  santykiai.

$n$	$b_{n,4}/b_{n,2}$	$b_{n,6}/b_{n,2}$	$b_{n,8}/b_{n,2}$	$b_{n,10}/b_{n,2}$	$b_{n,12}/b_{n,2}$	$b_{n,14}/b_{n,2}$	$b_{n,16}/b_{n,2}$	$b_{n,18}/b_{n,2}$	$b_{n,20}/b_{n,2}$	$b_{n,22}/b_{n,2}$
1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0
2	1	2	1	1	2	1	1	1	0	1
3	1	2	1	1	1	0	1	2	1	0
4	0,5	1,5	1	1	2	1,5	0,5	1,5	1	1
5	1	2,5	1	1,5	2	1,5	1	2	2	1
6	2	2,333333	1	1,666667	2	1	1	2	1	1,333333
7	0,571429	1,571429	0,714286	1	1,714286	0,857143	1	1,857143	0,857143	0,714286
8	1,571429	2,428571	1,285714	1,857143	2,714286	1,714286	1,142857	2,285714	2,142857	1,714286
9	1,25	2,333333	1,25	1,666667	2,083333	1,666667	1,25	2,583333	1,5	1,333333
10	0,884615	2,115385	0,961538	1,307692	2	1,038462	0,846154	1,730769	1,384615	0,923077
11	0,977778	1,755556	1,022222	1,155556	1,844444	1,222222	0,911111	1,911111	1,133333	1,066667
12	0,914286	2,028571	1,028571	1,357143	2	1,171429	0,985714	2,042857	1,3	1,114286
13	1,159292	2,132743	1,070796	1,380531	2,115044	1,362832	1,008850	2,123894	1,433628	1,212389
14	0,916279	2,018605	0,967442	1,218605	1,948837	1,181395	0,948837	2	1,334884	1,060465
15	1,011268	2,025352	1,076056	1,414085	1,980282	1,261972	1,095775	2,070423	1,338028	1,157746
16	0,987988	1,938438	1,006006	1,324324	2,013514	1,181682	0,971471	1,993994	1,337838	1,078078
17	1,006071	2,011275	0,994796	1,345186	1,978317	1,243712	0,999137	2,025152	1,333912	1,112749
18	1	2,014003	1,018349	1,341864	2,027523	1,214872	1,033317	2,019797	1,360212	1,138580
19	0,991017	1,991546	0,995773	1,325495	1,988639	1,178336	0,985205	1,986526	1,332893	1,108587
20	0,979182	1,948169	0,983776	1,300215	1,962958	1,159943	0,973869	1,957071	1,306533	1,082125
21	0,995998	1,986715	0,986795	1,325090	1,984554	1,200480	0,994478	1,995038	1,322849	1,099320
22	0,996379	1,998984	1,000839	1,329727	2,007155	1,198560	0,998852	1,999647	1,332995	1,116681
23	1,001490	1,984690	0,998846	1,336017	1,995289	1,200106	0,994496	1,997020	1,326452	1,107071
24	0,998926	2,001270	1,001401	1,334721	2,003732	1,199552	1,006979	1,999201	1,334813	1,111220
25	1,000461	2,001965	1,001369	1,334133	2,002497	1,200477	1,003633	2,006208	1,333175	1,117522
26	1,001647	2,000787	0,996409	1,332662	1,997998	1,201183	0,999908	1,998170	1,330958	1,108156
27	1,001448	2,001672	1,000967	1,334942	2,003479	1,203279	1,001800	2,003800	1,335692	1,112609
28	1,000113	1,999266	1,000591	1,333712	1,999179	1,199208	1,001125	1,999182	1,333841	1,111814
29	0,999403	1,999745	1,000887	1,333925	1,999032	1,198770	1,000055	1,999540	1,332314	1,110505
30	0,999836	1,999404	0,999652	1,334123	2,000536	1,200415	1,000202	2,000258	1,334126	1,111507
31	1,000214	2,000027	1,000117	1,332303	2,000157	1,199614	0,999669	1,999702	1,332832	1,110907
32	0,999654	1,999256	0,999777	1,333341	1,999764	1,199803	0,999877	1,999804	1,333309	1,111260
33	0,999815	1,999678	0,999935	1,333009	1,999669	1,199908	0,999892	1,999719	1,332800	1,110654
34	1,000186	2,000189	1,000152	1,333477	2,000450	1,200109	1,000227	2,000396	1,333553	1,111319
35	1,000094	1,999855	1,000037	1,333311	2,000135	1,200061	0,999853	1,999921	1,333363	1,111265
36	0,999886	1,999891	0,999800	1,333172	1,999719	1,199883	0,999959	1,999792	1,333274	1,111002
37	0,999988	1,999979	1,000027	1,333338	1,999964	1,199950	0,999982	1,999946	1,333316	1,111183
38	1,000019	2,000096	1,000018	1,333318	1,999992	1,199968	0,999956	1,999990	1,333348	1,111077

$$\begin{aligned}
&= 2 \left( 1 + \frac{2\theta - 2}{n} + \frac{3 - 6\theta + 6\theta^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\
&\quad \times \left( 1 - \frac{2\theta}{n} - \frac{2\theta^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = 2 - \frac{4}{n} + \frac{6 - 4\theta}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Grįžtant prie sekos  $\{b_{n,d}\}$  gretimų elementų santykio  $\rho_n$ , gauname

$$\begin{aligned}
\rho_n &= \frac{\pi_d(2^{n+2}) - \pi_d(2^{n+1})}{\pi_d(2^{n+1}) - \pi_d(2^n)} = \frac{r_{n+1} - 1}{1 - r_n^{-1}} \\
&= \frac{1 - 4(n+1)^{-1} + (6 - 4\theta)(n+1)^{-2} + O(n^{-3})}{1 - 1/2(1 - 2n^{-1} + (3 - 2\theta)n^{-2} + O(n^{-3}))^{-1}} \\
&= \frac{2 - 8n^{-1}(1 - n^{-1}) + (12 - 8\theta)n^{-2} + O(n^{-3})}{1 - (2n^{-1} + (1 + 2\theta)n^{-2} + O(n^{-3}))}
\end{aligned}$$

$$= \left( 2 - \frac{8}{n} + \frac{20 - 8\theta}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \times \left( 1 + \frac{2}{n} + \frac{5 + 2\theta}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = 2 - \frac{4}{n} + \frac{14 - 4\theta}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

ką ir tvirtina teorema.  $\square$

*1 pastaba.* Skaitiniai eksperimentai patvirtina šį rezultatą. 4 lentelėje yra pateikti sekos, asocijuotos su pirminiais dvyniais  $\{b_{n,2}\}$ , elementai ir jų santykiai  $\rho_n$ ,  $n \leq 42$ . Sekos elementai buvo apskaičiuoti naudojant lygiagrečiuosius skaičiavimus ir taikant Milerio-Rabino tikimybinį testą (iki 10 kartų) kiekvienai potencialiai pirminių dvynių porai. Šiems skaičiavimams atlikti buvo naudojami 24 procesoriaus AMD Ryzen 9 5950x procesai ir C++ OpenMP technologija. Buvo patikrinta apie pusantro kvadrilijono potencialių pirminių dvynių porų  $(6k \pm 1)$  ir nustatyta, kad iš jų daugiau nei 14 milijardų yra pirminių dvynių poros. Skaičiavimai užtruko 33 valandas.

**4 lentelė.** Sekos, asocijuotos su pirminiais dvyniais, elementai ir jų santykiai.

$n$	$b_{n,2}$	$\rho_n$	$n$	$b_{n,2}$	$\rho_n$	$n$	$b_{n,2}$	$\rho_n$
1	1	1	15	355	1,876056	29	1689477	1,870468
2	1	1	16	666	1,731231	30	3160113	1,876168
3	1	2	17	1153	1,796184	31	5928904	1,878774
4	2	1	18	2071	1,827620	32	11139071	1,882633
5	2	1,5	19	3785	1,840159	33	20970782	1,885246
6	3	2,333333	20	6965	1,793970	34	39535081	1,889404
7	7	1	21	12495	1,812165	35	74697745	1,892192
8	7	1,714286	22	22643	1,837566	36	141342490	1,894775
9	12	2,166667	23	41608	1,835488	37	267812262	1,897576
10	26	1,730769	24	76371	1,845517	38	508194094	1,900107
11	45	1,555556	25	140944	1,857135	39	965623233	1,902551
12	70	1,614286	26	261752	1,852777	40	1837147717	1,904978
13	113	1,902655	27	484968	1,865688	41	3499726481	1,907078
14	215	1,651163	28	904799	1,867240	42	6674251373	

### 3 Sekos, asocijuotos su pirminiais $k$ -rinkiniais

Tegu  $\{h_j\}$ , yra monotoniškai didėjanti teigiamų lyginių skaičių seka, kai  $1 \leq j \leq k$ , ir  $h_0 = 0$ . Jei  $p + h_j \in \mathbb{P}$ ,  $0 \leq j \leq k$ , tai seka  $H = \{p + h_j\}$  yra pirminis  $k$ -rinkinys ir  $\#H = k + 1$ . Jei seka  $H$  nesudaro pilnos liekanų klasės pirminio skaičiaus atžvilgiu, t.y.,  $\#\{H \bmod p\} < p$ , visiems  $p \in \mathbb{P}$ , tai pirminis  $k$ -rinkinys yra vadinamas leistiniu. Hardis ir Litlvdudas iškėle hipotezę apie leistinių pirminių  $k$ -rinkinių asimptotinį tankį [2, 8].

**3 teiginys [Pirmoji Hardžio-Litlvdudo hipotezė pirminiems  $k$ -rinkiniams].** Jei  $\pi_H(x)$ , yra leistinių pirminių  $k$ -rinkinių skaičiuojančioji funkcija, tai

$$\pi_H(x) = \#\{p \leq x \mid p + h_j \in \mathbb{P}; j \in [1, k]\} = C_H Li_{k+1}(x) + O(x^{1/2+\varepsilon}), \quad (6)$$

kur  $\varepsilon$  yra mažas teigiamas skaičius ir  $C_H$  yra pirminių  $k$ -rinkinių konstanta,

$$C_H = 2^k \prod_{p \geq 3} \left( 1 - \frac{\#\{H \bmod p\}}{p} \right) \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^{-(k+1)}. \quad (7)$$

Nagrinėsime sveikųjų skaičių seką  $\{a_{n,H}\}$ , asocijuotą su pirminiais  $k$ -rinkiniais,

$$a_{n,H} = \#\{s^n < p \leq s^{n+1} \mid p + h_j \in \mathbb{P}; j \in [1, k]\}, \quad n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{R}, s \geq 2. \quad (8)$$

Galima suformuluoti rezultatą apie sekos  $\{a_{n,H}\}$  gretimų elementų santykį.

**2 teorema.** *Jei pirmoji Hardžio-Litlvudo hipotezė (6) yra teisinga, tai*

$$\hat{\rho}_n = \frac{a_{n+1,H}}{a_{n,H}} = s - \frac{s(k+1)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (9)$$

*Įrodymas.* Iš (6) ir asimptotikos (3) turime

$$\pi_H(x) = C_H x((\log x)^{-(k+1)} + (k+1)(\log x)^{-(k+2)} + O((\log x)^{-(k+3)})).$$

Pažymėkime  $\theta_s = 1/\log s$  ir nagrinėkime santykį  $\hat{r}_n$ ,

$$\begin{aligned} \hat{r}_n &= \frac{\pi_H(s^{n+1})}{\pi_H(s^n)} \\ &= s \frac{(n+1)^{-(k+1)}\theta_s^{k+1} + (k+1)(n+1)^{-(k+2)}\theta_s^{k+2} + O(n^{-(k+3)})}{n^{-(k+1)}\theta_s^{k+1} + (k+1)n^{-(k+2)}\theta_s^{k+2} + O(n^{-(k+3)})} \\ &= s \frac{(1+n^{-1})^{-(k+1)} + (k+1)\theta_s n^{-1}(1+n^{-1})^{-(k+2)} + O(n^{-2})}{1 + (k+1)\theta_s n^{-1} + O(n^{-2})} \\ &= s \left( 1 + \frac{(k+1)(\theta_s - 1)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \left( 1 - \frac{(k+1)\theta_s}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= s - \frac{s(k+1)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Grįžtant prie sekos  $\{a_{n,H}\}$  gretimų elementų santykio  $\rho_n$ , gauname

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_n &= \frac{\pi_H(s^{n+2}) - \pi_H(s^{n+1})}{\pi_H(s^{n+1}) - \pi_H(s^n)} \\ &= \frac{\hat{r}_{n+1} - 1}{1 - \hat{r}_n^{-1}} = \frac{s - 1 - s(k+1)(n+1)^{-1} + O(n^{-2})}{1 - 1/s(1 - (k+1)b^{-1} + O(b^{-2}))^{-1}} \\ &= \frac{s - s^2(k+1)/((s-1)n) + O(n^{-2})}{1 - (k+1)/((s-1)n) + O(n^{-2})} = \left( s - \frac{s^2(k+1)}{(s-1)n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &\quad \times \left( 1 + \frac{k+1}{(s-1)n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = s - \frac{s(k+1)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

ką ir tvirtina teorema.  $\square$

## Literatūra

- [1] S. L. Aletheia-Zomlefer, L. Fukshansky, S. R. Garcia. The Bateman-Horn conjecture: heuristic, history, and applications. *Expo. Math.*, **38**:430–479, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.exmath.2019.04.005>.
- [2] W. Banks, K. Ford, T. Tao. Large prime gaps and probabilistic models, 2023. <https://arxiv.org/abs/1908.08613>. arXiv:1908.08613.
- [3] D. Goldston, J. Pintz, C. Yıldırım. Primes in tuples. I. *Ann. Math.*, **170**(2):819–862, 2009. <https://doi.org/10.4007/annals.2009.170.819>.
- [4] J. Korevaar. The prime-pair conjectures of Hardy and Littlewood. *Indag. Math.*, **23**(3):269–299, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.indag.2011.12.001>.
- [5] J. Maynard. The twin prime conjecture. *Japan. J. Math.*, **14**:175–206, 2019. <https://doi.org/10.1007/s11537-019-1837-z>.
- [6] G. Di Pietro. Numerical analysis approach to twin primes conjecture. *Notes Number Theory Discrete Math.*, **27**(3):175–183, 2021. <https://doi.org/10.7546/nntdm.2021.27.3.175-183>.
- [7] D.H.J. Polymath. Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes. *Math. Sci.*, **1**(12), 2014. <https://doi.org/10.1186/s40687-014-0012-7>.
- [8] L. Tóth. On the asymptotic density of prime  $k$ -tuples and a conjecture of Hardy and Littlewood. *CMST*, **25**(3):143–148, 2019. <https://doi.org/10.12921/cmst.2019.0000033>.
- [9] Y. Zhang. Bounded gaps between primes. *Ann. Math.*, **179**(3):1121–1174, 2014. <https://doi.org/10.4007/annals.2014.179.3.7>.

## SUMMARY

### On the calculation of integer sequences, associated with twin primes

*I. Belovas, M. Sabaliauskas, P. Mykolaitis*

The twin primes conjecture states that there are infinitely many twin primes. While studying this hypothesis, many important results were obtained, but the problem remains unsolved. In this work, the problem is studied from the side of experimental mathematics. Using the probabilistic Miller-Rabin primality test and parallel computing technologies, the distribution of prime pairs in the intervals  $(2^n; 2^{n+1}]$  is studied experimentally.

*Keywords:* integer sequences; Hardy-Littlewood conjecture; prime  $k$ -tuples