ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Eugenijus Buivydas

Matematikos studijų programos M-6 grupės studentas

Sankirtų grafų viršūnių laipsnių asimptotika

MAGISTRO DARBAS

Darbo vadovas:
Prof. habil. dr. M. Bloznelis

Šiauliai, 2008

Turinys

Įvadas

Pirmasis grafų teorijos uždavinys, nagrinėtas 1736 m., buvo uždavinys apie Karaliaučiaus tiltus. Maždaug 100 metų laikotarpyje šio uždavinio sprendinys buvo vienintelis grafų teorijos rezultatas.

Grafų teorijos raidai žymų impulsą suteikė 1852 m. A. De Morgano iškelta keturių spalvų hipotezė. Ši hipotezė grafų teorijos vystymesi suvaidino analogišką vaidmenį, kaip didžioji Ferma teorema skaičių teorijoje.

Visi sutaria, kad grafų teorijos, kaip savarankiškos matematikos šakos, gimimas yra 1936 m. , kai matematikas D. Kionigas išleido monografiją "Baigtinių ir begalinių grafų teorija". Jis pirmasis vietoje įvairiuose moksluose naudojamų skirtingų schemų pavadinimų: sociogramos (psichologija), simpleksai (topologija), grandinės (fizika), diagramos (ekonomika), ryšių tinklai, vandentiekio tinklai, geneologiniai medžiai ir t. t., pasiūlė naudoti vieną terminą "grafas". Taigi grafai yra įvairiausios fizinės prigimties reiškinių matematiniai modeliai. Tai ir lemia grafų teorijos, kaip savarankiškos matematikos šakos, audringą vystymąsi ir plačias taikymo galimybes.

Darbo tikslas – ištirti sankirtų grafų viršūnių laipsnių pasiskirstymą.

Darbo uždaviniai – rasti tikimybes, kad gretimos sankirtų grafo viršūnės turi du ar daugiau bendrų objektų aibių sankirtoje.

1. Grafai, atsitiktiniai grafai G(n,p)

Grafų teorija – matematikos sritis, nagrinėjanti grafus.

Formaliai grafą galima apibrėžti dviem būdais:

<u>1 būdas</u>. Sakoma, kad grafas žinomas, jeigu:

1) duota netuščia aibė $V(V \neq \varnothing)$,

2) duotas aibės *V* atvaizdis *Γ* į aibę *V*.

Grafas žymimas simboliu $G = (V, \Gamma)$.

<u>2 būdas</u>. Tarkime *V* – netuščioji aibė. Jos elementus vadinsime viršūnėmis ir žymėsime $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_i, \ldots$. Aibė *E* yra aibės *V* visų galimų dvielemenčių poaibių aibė, t. y. $E = \{\{x, y\} : x, y \in V \wedge x \neq y\}$. Tada grafas yra pora (*V*,*U*), čia $U \subseteq E$. Žymime $G = (V, U)$.

Aibė *V* vadinama grafo viršūnių aibe. Aibės *V* elementų skaičius yra lygus grafo viršūnių skaičiui ir dažnai vadinamas grafo eile.

Bendru atveju *U* yra sąjunga dviejų rinkinių: $U = B \cup L$. Rinkinio *B* porose (v_i, v_j) viršūnių surašymo tvarka nesvarbi: $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$. Tokios poros vadinamos briaunomis, jungiančiomis viršūnes v_i, v_j. Rinkinio *L* poros (v_i, v_j) vadinamos lankais, išeinančiais iš viršūnės v_i ir įeinančios į viršūnę v_j. Čia $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$.

Kai $L = \varnothing$ (rinkinyje *U* nėra lankų), grafas $G = (V, U = B)$ vadinamas neorientuotu.

Kai $B = \varnothing$ (rinkinyje *U* nėra briaunų), grafas $G = (V, U = L)$ vadinamas orientuotu.

Kai $L \neq \varnothing, B \neq \varnothing$, grafas $G = (V, U = B \cup L)$ vadinamas mišriuoju.

Aibė *U* neorientuoto grafo atveju vadinama grafo briaunų aibe, o orientuoto grafo atveju – lankų aibe. Laikysime, kad briaunų ar lankų skaičius $|U| = m$, o apie grafą *G*, turintį *n* viršūnių ir *m* briaunų sakysime, kad *G* yra (n, m) - grafas.

Briauną (v_1, v_2) ribojančios viršūnės v_1 ir v_2 vadinamos briaunos galais, o lanko atveju viršūnė v_1 yra lanko pradžia, o v_2 - lanko pabaiga (galas), arba v_1 ir v_2 yra lanko kraštinės viršūnės.

Briaunos galų viršūnės vadinamos gretimomis viršūnėmis.

Dvi briaunos yra gretimos, jei jos turi bendrą galą. Orientuotojo grafo viršūnės yra gretimos, jei jos yra kraštinės lanko viršūnės, o lankai yra gretimi, jei jie turi bendrą kraštinę viršūnę.

1 apibrėžimas.Grafas vadinamas pilnu, jei kiekviena jo viršūnių pora sujungta briauna arba egzistuoja lankas su pradžia vienoje poros viršūnėje ir pabaiga kitoje poros viršūnėje.

Pilnas neorientuotas grafas, turintis *n* viršūnių, žymimas G_n.

2 apibrėžimas. Grafas vadinamas dviskilčiu grafu, jei jo viršūnių aibę galima suskirstyti į du poaibius V_1 ir V_2 taip, kad bet kuri grafo briauna jungia viršūnes iš skirtingų poaibių, o bet kuris lankas prasideda iš vieno poaibio ir baigiasi antrame poaibyje.

3 apibrėžimas. Dviskiltis grafas vadinamas pilnu, jeigu kiekviena V_1 viršūnė sujungta briauna ar lanku su kiekviena V_2 viršūne.

Tarkime, jog aibės V_1 elementų, kuriuos vadinsime viršūnėmis, skaičius – *n*, aibės V_2 - *m*, tuomet pilnas dviskiltis neorientuotas grafas žymimas $G_{n,m}$.

4 apibrėžimas. Grafas, kurį plokštumoje galima pavaizduoti taip, kad briaunos nesikirstų, vadiname plokščiuoju grafu.

5 apibrėžimas. Jei kuri nors viršūnė nepriklauso jokiai briaunai ar lankui, ji vadinama izoliuota viršūne.

Tarkime, plokščiojo neorientuoto grafo *G* viršūnių skaičius – *e*, briaunų skaičius – *f*. Grafo vaizdo plokštumos dalys, į kurias plokštumą suskaido briaunos, vadinamos grafo sienomis. Begalinę plokštumos dalį, esančią grafo vaizdo išorėje taip pat vadinsime siena. Sienų skaičių pažymėkime *g*.

Eulerio teorema. Skaičius $k=e-f+g$ vadinamas plokščiojo grafo Eulerio skaičiumi (charakteristika).

Aptarsime veiksmus su grafais.

Viršūnės šalinimas. Duotas grafas $G=(V,U)$. Pašalinti viršūnę *x*, tai iš grafo pašalinti šią viršūnę drauge su jai incidentinėmis briaunomis. Gaunamas grafas $H=(V_1,U_1)$, čia $V_1=V\setminus\{x\}$, o $U_1=U\setminus\{$briaunos, incidentiškos viršūnei $x\}$.

Briaunos (v_1,v_2) šalinimas. Iš grafo $G=(V,U)$ šalinama briauna (v_1,v_2). Gaunamas grafas, turintis tą pačią viršūnių aibę *V* ir briaunų aibę $U^*=U\setminus\{(v_1,v_2)\}$.

Viršūnių sutapatinimas. Tarkime, kad v_1 ir v_2 yra grafo $G=(V,U)$ viršūnės. Viršūnių v_1 ir v_2 sutapatinimas atliekamas taip:

1) iš grafo G pašalinamos viršūnės v_1 ir v_2;
2) įvedama nauja viršūnė *v*;
3) viršūnė *v* jungiama briaunomis su tomis viršūnėmis, kurios buvo gretimos arba viršūnei v_1, arba v_2, t. y.

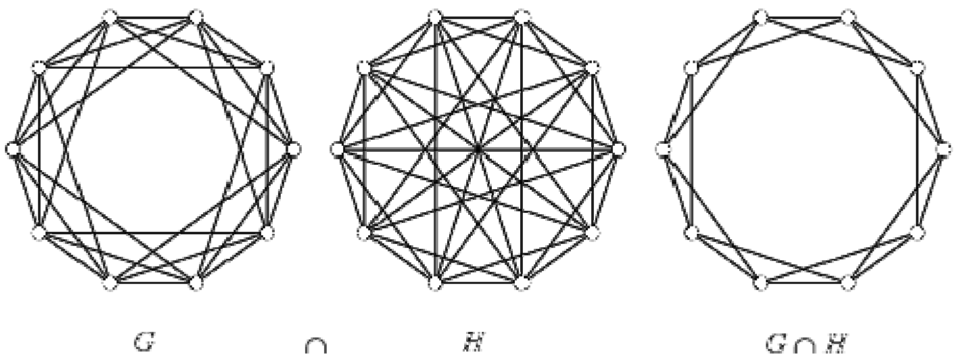
$$N(v) = N(v_1) \cup N(v_2).$$

<u>Briaunos sutraukimas</u>. Tarkime (v_1, v_2) yra grafo $G = (V, U)$ briauna. Tada briaunos (v_1, v_2) sutraukimas - tai gretimų viršūnių v_1 ir v_2 sutapatinimas.

<u>Viršūnės išskaidymo operacija</u>. Operacija, duali briaunos sutraukimui, yra viršūnės išskaidymo operacija. Tarkime v yra viena iš grafo G viršūnių ir $N(v) = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$. Tada viršūnės išskaidymo operacija atliekama taip:

1) iš grafo G pašalinama viršūnė v;
2) įvedamos dvi naujos viršūnės v_1 ir v_2 ir jas jungiančioji briauna;
3) viršūnė v_1 jungiama briaunomis su aibės A viršūnėmis, o v_2 - su aibės B viršūnėmis.

<u>Grafų sąjunga ir sankirta</u>. Tarkime, kad duoti grafai $G_1 = (V_1, U_1)$ ir $G_2 = (V_2, U_2)$. Tada grafas $G = (V, U)$ yra šių grafų sąjunga (žymime $G = G_1 \cup G_2$), jei $V = V_1 \cup V_2$, o $U = U_1 \cup U_2$. Jei $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, tai grafų G_1 ir G_2 sąjunga vadinama disjunktyvine sąjunga. Grafas $G = (V, U)$ yra šių grafų sankirta (žymime $G = G_1 \cap G_2$), jei $V = V_1 \cap V_2$, o $U = U_1 \cap U_2$ (1 pav.).



1 pav.

Operacijos apibendrinamos imant daugiau nei du grafus.

$G = (V, U) = \bigcup_{i=1}^{n} G_i(V_i, U_i)$, jei $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ ir $G = (V, U) = \bigcap_{i=1}^{n} G_i(V_i, U_i)$, jei $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$, $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$.

<u>Grafų sandauga</u>. Grafų $G_1 = (V_1, U_1)$ ir $G_2 = (V_2, U_2)$ sandaugos grafas $G = (V, U)$ (žymima $G = G_1 \times G_2$) apibrėžiamas taip:

1) $V = V_1 \times V_2$ (aibių Dekarto sandauga);

2) viršūnė (a,b) jungiama su viršūne (c,d), jeigu:

a) $a = c$ ir $(b,d) \in U_2$ arba

b) $b = d$ ir $(a,c) \in U_1$.

1959m. Redos ir Renyi išspausdino populiarų straipsnį, kuriame jie įvedė atsitiktinio grafo sąvoką.

6 apibrėžimas. Atsitiktinis grafas – grafas, kuriame savybės: viršūnių skaičius grafe, grafo briaunos ir ryšys tarp jų yra nustatomas atsitiktiniu keliu.

Aiškesnis yra sekantis apibrėžimas.

7 apibrėžimas. Atsitiktinis grafas yra:

- bet kuris atsitiktinis viršūnių arba taškų rinkinys;
- bet kurios linijos arba briaunos, jungiančios atsitiktinai viršūnes poromis;
- kiekviena viršūnė turi mažiausią laipsnį lygų 1.

Taigi, atsitiktinis grafas gaunamas paimant *n* atsitiktinų viršūnių ir pridedant *l* atsitiktinai paimtų briaunų, jungiančių tas viršūnes. Skirtingi atsitiktinių grafų modeliai, skirtingos briaunų arba lankų prijungimo tikimybės. Labiausiai matematinėje literatūroje išnagrinėtas modelis yra grafas $G(n,p)$, kuriame kiekviena iš galimų briaunų $\binom{n}{2}$ atsiranda nepriklausomai viena nuo kitos ir su tikimybe p.

2004 metais Starkas iškėlė klausimą: kokie turi būti skaičiai n ir p, kad grafas $G(n,p)$ būtų jungus? Sprendžiant šią problemą buvo tiriama, kaip elgiasi atsitiktinis grafas, kokios grafų jungumo tikimybės, kai n artėja į begalybę, jei kiekviena briauna tarp dviejų nepriklausomų grafo viršūnių įtraukta į grafą su tikimybe p.

2. Parametrai – viršūnių laipsnis

1 apibrėžimas. Iš grafo viršūnės v išeinančių (įeinančių) briaunų skaičius vadinamas viršūnės valentingumu arba laipsniu ir žymimas $d(v)$. Izoliuotos viršūnės laipsnis laikomas lygus 0, kilpa laipsnį padidina 2.

1 teorema. Visų grafo viršūnių valentingumų suma yra lyginis skaičius.

Kiekviena grafo briauna turi du galus. Jei briaunų skaičius yra *f*, tada viršūnių valentingumų suma lygi 2*f*.

<u>Išvada</u>. Viršūnių, kurių valentingumas yra nelyginis, yra lyginis skaičius.

<u>2 apibrėžimas</u>. Neorientuotas grafas vadinamas *p*-tojo laipsnio homogeniniu grafu, jeigu kiekvienos jo viršūnės valentingumas lygus *p*.

Homogeniniame *p*-tojo laipsnio grafe briaunų skaičius:

$$f = \frac{ep}{2}, \tag{2.1}$$

kur *e* – viršūnių skaičius.

Iš grafo viršūnės *v* išeinančių lankų skaičių pažymėkime $d_1(v)$, įeinančių - $d_2(v)$. Kiekvienas lankas turi vieną pradžią ir vieną pabaigą, todėl $f = \sum_{i=1}^{e} d_1(v_i) = \sum_{i=1}^{e} d_2(v_i)$.

<u>3 apibrėžimas</u>. Maršrutu M_{jk}, jungiančiu viršūnes v_j ir v_k, vadiname seką viršūnių ir jas jungiančių briaunų ar lankų: $v_j, (v_j, v_1), v_1, (v_1, v_2), v_2, ..., (v_{n-1}, v_k), v_k$, kur $v_1, v_2, ..., v_{n-1} \in V$, $u_1 = (v_j, v_1), u_2 = (v_1, v_2), ..., u_n = (v_{n-1}, v_k) \in U$. Jei maršrutas neturi lankų, o briaunos nesikartoja, jis vadinamas keliu.

<u>4 apibrėžimas</u>. Grafo viršūnės v_j ir v_k vadinamos sujungtomis, jei egzistuoja maršrutai M_{jk} ir M_{kj}.

<u>5 apibrėžimas</u>. Neorientuotas grafas, kurio kiekvienos dvi viršūnės sujungtos, vadinamas jungiuoju neorientuotu grafu.

<u>2 teorema</u>. Jei grafe lygiai dvi viršūnės turi nelyginį laipsnį, tuomet tos viršūnės sujungtos.

Tarkime, kad $G = (V, U)$ yra jungusis grafas, $u, w \in V$ - dvi kurios nors jo viršūnės. Sunumeruokime visus šias viršūnes jungiančius kelius:

$$P_k = (u, v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_l}, w).$$

<u>6 apibrėžimas</u>. Atstumu tarp grafo viršūnių vadinamas trumpiausio jas jungiančio kelio ilgis:

$$\rho(u, w) = \min_k |P_k(u, ..., v)|. \tag{2.2}$$

Taip apibrėžtas atstumas turi metrikos savybes:

1) $\rho(u, w) \geq 0$ & $\rho(u, w) = 0 \Leftrightarrow u = w$;

2) $\rho(u, w) = \rho(w, u) \; \forall u, v \in V$;

3) $\rho(v, u) + \rho(u, w) \geq \rho(v, w) \; \forall v, u, w \in V$.

<u>7 apibrėžimas</u>. Grafo skersmeniu vadinamas maksimalus atstumas tarp grafo viršūnių:

$$d(G) = \max_{v, w \in V} \rho(v, w). \tag{2.3}$$

8 apibrėžimas. Viršūnės ekscentricitetu vadinamas jos atstumų nuo kitų grafo viršūnių maksimumas:

$$e(u) = \max_{v \in V} \rho(v, u). \tag{2.4}$$

9 apibrėžimas. Viršūnė $c \in V$ vadinama grafo centru, jei jos ekscentricitetas yra minimalus:

$$e(c) = \min_{v \in V} e(v). \tag{2.5}$$

10 apibrėžimas. Centro ekscentricitetas vadinamas grafo spinduliu:

$$r(G) = \min_{v \in V} e(v). \tag{2.6}$$

3. Grafo G(n, p) viršūnių laipsnis

Atsitiktinį grafą paprasta sukonstruoti. Panagrinėkime vieną atsitiktinio grafo viršūnę. Su kiekviena iš likusių *n*-1 grafo viršūnių ji sujungiama tikimybe *p*.

Tikimybę, kad ši viršūnė turi laipsnį, lygų skaičiui *k*, pažymėkime p_k. Ji išreiškiama Binominio skirstinio formulės tikimybe:

$$p_k = \binom{n-1}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-1-k}. \tag{3.1}$$

Viršūnių pasirinkimo vidurkis $z = (n-1)p$. Iš čia

$$p_k = \binom{n-1}{k} \cdot \left(\frac{z}{n-1-z}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{z}{n-1}\right)^{N-1} \cong \frac{z^k}{k!} e^{-z}, \tag{3.2}$$

kur paskutinė apytikslė lygybė tampa lygybe, kai n yra labai didelis. (3.2) formulė matematinėje literatūroje žinoma kaip Puasono pasiskirstymas.

4. Sankirtų grafai

Tarkime, jog turime aibių W_j, $j = 0, 1, 2, \ldots,$ šeimą.

Konstruojame neorientuotą grafą *G*. Jo viršūnės v_j atitinka aibes W_j, o grafo briaunų aibė $E(G) = \{\{v_i, v_j\} \mid W_i \cap W_j \neq \varnothing\}$ sudaroma taip: viršūnės v_i ir v_j sujungtos briauna, jei atitinkamos aibės W_i ir W_j turi netuščią sankirtą. Toks grafas vadinamas sankirtos grafu.

Atsitiktinio sankirtų grafo sąvoka buvo įvesta Singerio (1995) ir Karonskio (1999). Vėliau buvo daugelio mokslininkų tyrinėta ir apibendrinta.

Tarkime, kad bet kuri sankirtų grafo *G* viršūnė v_j, gauta iš W_j pasirenka kiekvieną aibės W_j elementą su vienoda tikimybe *p*. Toks grafas vadinamas atsitiktiniu sankirtų grafu.

Kiekvieną atsitiktinį sankirtų grafą galima pateikti kaip dviskiltį grafą $G(n, m, p)$ tokiu būdu: Imama aibė *V*, turinti *n* viršūnių v_j ir aibė *W*, turinti *m* elementų w_i. Kiekvieną viršūnę v_j jungiame su kiekvienu elementu w_i su tikimybe *p*. Tokių briaunų yra $m{\cdot}n$. Gauname pilną dviskiltį grafą $G^*(n, m, p)$.

Praktiniuose modeliuose vieną viršūnę $v_j \in V$ jungiame ne su visais elementais w_i, bet su aibės *W* poaibių elementais. Gauname nepilną dviskiltį grafą.

5. Viršūnių laipsniai sankirtų grafuose

Tarkime, jog turime aibę *V* su *n* viršūnėmis ir aibę *W* su *m* objektais, kurie apibrėžia dviskiltį grafą $G^*(n, m, p)$. Atsitiktinis sankirtų grafas $G(n, m, p)$ gaunamas iš grafo $G^*(n, m, p)$. aibės V

Grafo $G(n, m, p)$ savybės išnagrinėtos [2,6].Jos skiriasi nuo žinomo atsitiktinių grafų modelio $G(n, p)$, kuriame viršūnės sujungtos nepriklausomai viena nuo kitos ir su tikimybe *p*. Aibės *W* objektų skaičius *m* paimtas toks, kad $m = \lfloor n^{\alpha} \rfloor$, kiekvienam $\alpha > 0$.

Į sankirtų grafus galima žiūrėti kaip į santykių grafus. Pvz., jei aibė *V* yra matematikai, o *W* – matematikų referatai, tai jie sujungti briauna, jei matematikas *v* buvo autoriumi referato *w*. Gaunamas sankirtų grafas arba santykių grafas aibėje *V*, kur du matematikai sujungti briauna, jei jie parašė referatą kartu. Aibes *V* ir *W* galima sukeisti, kai du referatai sujungti briauna ir jie turi tą patį autorių. Jei $m = \lfloor n^{\alpha} \rfloor$, tai $n \in \left(m^{\frac{1}{\alpha}}, (m+1)^{\frac{1}{\alpha}} \right)$. Tuomet grafas $G(n,m,p)$ su $\alpha = \beta > 1$ yra iš esmės grafas $G(n,m,p)$ su $\alpha = \beta^{-1} < 1$.

Grafo $G(n,p)$ viršūnės laipsnio skirstinys konverguoja į Puasono skirstinį su parametru c, kai $n \to \infty$ jei $p = cn^{-1}$. Kai $p = \sqrt{c}n^{\frac{-(1+\alpha)}{2}}$, tuomet grafo $G(n,m,p)$ viršūnės laipsnio skirstinys konverguoja į Puasono skirstinį, jei $\alpha > 1$. Sakoma, kad atsitiktinio kintamojo seka Y_n asimptotiškai artėja į a_n, jei $P\left(\left| \frac{Y_n}{a_n} - 1 \right| > \varepsilon \right) \to 0$, kai $n \to \infty$, kiekvienam $\varepsilon > 0$.

<u>1 teorema</u> [6]. Turime atsitiktinį sankirtų grafą $G(n,m,p)$ su $m = \lfloor n^{\alpha} \rfloor$ ir $p = \sqrt{c}n^{\frac{-(1+\alpha)}{2}}$:

a) kai $\alpha < 1$, tai skaičius neizoliuotų viršūnių yra asimptotiškai arti $\sqrt{c}n^{\frac{(1+\alpha)}{2}} = o(n)$. Be to, fiksuotos viršūnės iš V laipsnis turi skirstinį, kuris silpnai konverguoja į δ_0, tikimybės skirstinys artėja į 0.

b) kai $\alpha = 1$, tai fiksuotos viršūnės iš V laipsnis turi skirstinį, kuris silpnai konverguoja į sudėtinį Puasono skirstinį iš atsitiktinių dydžių sumos $Z_1 + Z_2 + ... + Z_N$, kur $N, Z_1, Z_2, ... \sim P(\sqrt{c})$.

c) kai $\alpha > 1$, tai fiksuotos viršūnės iš V laipsnis turi skirstinį, kuris silpnai konverguoja į Puasono skirstinį su parametru c.

Šitą teoremą galima paaiškinti taip: kai $\alpha < 1$ tikimybė, kad bet kuri viršūnė $v \in V$ sujungta su viršūne iš W, lygi nuliui ir tokiu atveju grafo $G(n,m,p)$ viršūnės skirstinys konverguoja į δ_0 ir dauguma viršūnių yra izoliuotos. Kai $\alpha = 1$, viršūnė turės apytiksliai Puasono $(\sqrt{c})$ skaičių kaimynų aibėje W ir kiekvienas iš tų kaimynų nepriklausomai nuo Puasono $(\sqrt{c})$ skaičiaus turės kaimynų iš aibės V, neįskaitant v.

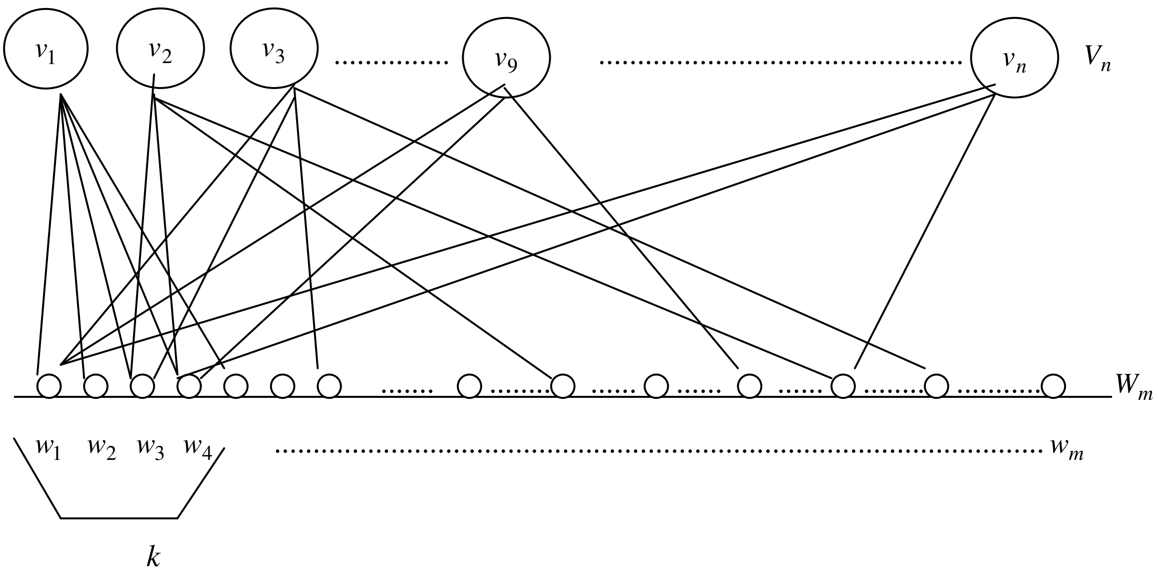
<u>2 teorema</u>. $G(n,m,p)$ - atsitiktinis sankirtų grafas su $m = \lfloor n^{\alpha} \rfloor$, tarkime, kad $\alpha > 1$ ir tarkime, kad p tenkina sąlygas $nmp^2 \to \infty$ ir $p = o\left(n^{-\frac{2}{3} - \frac{\alpha}{3}} \right)$ jei $1 < \alpha \le 2$, $p = o\left(n^{-\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2}} \right)$ jei $\alpha > 2$. Tuomet teisinga prielaida:

$$\frac{X - EX}{\sigma(X)} \Rightarrow N(0,1), \tag{5.1}$$

kur $\sigma(X)$ yra atsitiktinio dydžio X standartinis nuokrypis, o $N(0,1)$ - standartinis normalusis skirstinys.

6. Sankirtų grafų viršūnių laipsnių asimptotika

Panagrinėkime sankirtų grafo modelį (2 pav.).



2 pav.

Čia $v_1, v_2, ..., v_n$ - viršūnės, o $w_1, w_2, ..., w_m$ - objektai, k – aibės W_1 elementų skaičius, pasirinktas fiksuotas skaičius. Kiekviena viršūnė renkasi objektus su tam tikra tikimybe p. Tikimybę, kad viršūnės v_i ir v_j turi du ir daugiau bendrų objektų pažymėsime $P(v_i \sim v_j)$. Sakysime, jog bendrų objektų (raktų) skaičius yra s. Mūsų uždavinys rasti su kokia tikimybe dvi gretimos viršūnės turi du ir daugiau bendrų objektų. Taikome priešingos tikimybės formulę:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}). \tag{6.1}$$

Kiekvienas objektas pasirenkamas su tikimybe p^2. Tikimybė, kad objektas nėra bendras yra $P(W_i) = 1 - p^2$. Tuomet

$$P\left(\bigcap W_i\right)=\bigcap_i P(W_i)=\left(1-p^2\right)^m . \qquad (6.2)$$

Gavome tikimybės išraišką, kai dvi viršūnės neturi nė vieno bendro objekto iš W_m.

Dabar paimkime, kad vienas elementas w_i bendras, o visi kiti ne bendri. Tada $P(W_i)=p^2\left(1-p^2\right)^{m-1}$. Galutinis rezultatas, kai $W_i \cap W_j=\varnothing$, $i \neq j$ yra:

$$P\left(\bigcup W_i\right)=\sum_i P(W_i)=mp^2\left(1-p^2\right)^{m-1} . \qquad (6.3)$$

Įrašę (6.2) ir (6.3) į (6.1) gauname, kad tikimybė, jog dvi viršūnės v_1 ir v_2 turi bent du bendrus objektus yra

$$P(v_1 \sim v_2)=1-\left(1-p^2\right)^m-mp^2\left(1-p^2\right)^{m-1}. \qquad (6.4)$$

Pagal (6.4) formulę skaičiuojame tikimybę, kad dviems viršūnėms v_i ir v_j atitinkamos aibės W_i ir W_j turi du ir daugiau bendrų taškų. Įvertiname du narius (6.4) formulėje, kurių laipsniai m ir m-1. Pirmasis narys

$$\left(1-p^2\right)^m=e^{\ln\left(1-p^2\right)^m}=e^{m\cdot\ln\left(1-p^2\right)} . \qquad (6.5)$$

Natūrinį logaritmą skleidžiame Makloreno eilute, palikdami tik du pirmuosius narius, nes kiti nariai yra aukštesnės eilės begalinė mažybė

$$m\cdot\ln\left(1-p^2\right)=m\cdot\left(-p^2-\frac{p^4}{2}-...\right)=-\left(mp^2+\frac{mp^4}{2}+...\right).$$

Eksponentę skleidžiame taip pat Makloreno eilute ir paliekame tik tuos narius, kurių p laipsnis lygus keturiems arba mažesnis:

$$e^{-\left(mp^2+\frac{mp^4}{2}\right)}=1-mp^2-\frac{mp^4}{2}+\frac{m^2p^4}{2}+\frac{m^2p^8}{4}+\frac{m^2p^6}{2}+...=1-mp^2-\frac{mp^4}{2}+\frac{m^2p^4}{2}+.... $$

Gavome:

$$\left(1-p^2\right)^m=1-mp^2-\frac{mp^4}{2}+\frac{m^2p^4}{2} . \qquad (6.6)$$

Antrąjį narį įvertiname analogiškai:

$$\left(1-p^2\right)^{m-1}=e^{\ln\left(1-p^2\right)^{m-1}}=e^{(m-1)\cdot\ln\left(1-p^2\right)}.$$

$$(m-1)\cdot\ln\left(1-p^2\right)=(m-1)\cdot\left(-p^2-\frac{p^4}{2}-...\right)=-\left(mp^2+\frac{mp^4}{2}-p^2-\frac{p^4}{2}+...\right).$$

$$e^{-\left(mp^2+\frac{mp^4}{2}-p^2-\frac{p^4}{2}\right)}=1-mp^2-\frac{mp^4}{2}+p^2+\frac{p^4}{2}-mp^4+\frac{m^2p^4}{2}+\frac{p^4}{2}.... $$

Gavome: $\left(1-p^2\right)^{m-1} = 1 - mp^2 - \frac{mp^4}{2} + p^2 + \frac{p^4}{2} - mp^4 + \frac{m^2p^4}{2} + \frac{p^4}{2}$.

Šis reiškinys yra padaugintas iš mp^2. Todėl imame tik narius, kurių p laipsnis lygus 2. Tuomet gauname, kad:

$$mp^2 \cdot \left(1-p^2\right)^{m-1} = mp^2 \cdot \left(1 - mp^2 + p^2\right) = mp^2 - m^2p^4 + mp^4 . \tag{6.7}$$

Įrašę gautas išraiškas (6.6) ir (6.7) į (6.4) formulę, turime, jog tikimybė, kad viršūnės v_1 ir v_2 turi bent du bendrus taškus, yra

$P(v_1 \sim v_2) = 1 - 1 + mp^2 + \frac{mp^4}{2} - \frac{m^2p^4}{2} - mp^2 + m^2p^4 - mp^4 = -\frac{mp^4}{2} + \frac{m^2p^4}{2}$, t. y.

$$P(v_1 \sim v_2) = \frac{m^2p^4}{2} . \tag{6.8}$$

Mūsų tikslas apskaičiuoti ir pačią tikimybę p. Ji randama iš sąlygos:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left\{1 - \left(1-p^2\right)^m - mp^2 \cdot \left(1-p^2\right)^{m-1}\right\} = c . \tag{6.9}$$

Kadangi riba turi artėti į *const*, tai $n \cdot \frac{m^2p^4}{2} \to const \Rightarrow$

$$p = \frac{c^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{1}{4}} \cdot m^{\frac{1}{2}}} .$$

Gavome tikimybės p išraišką, kai s=2, viršūnės v_1 ir v_2 turi du ir daugiau bendrų objektų aibės W poaibiuose W_1, W_2.

Kai s=3, tikimybė skaičiuojama pagal formulę

$$P(v_1 \sim v_2) = 1 - \left(1-p^2\right)^m - mp^2\left(1-p^2\right)^{m-1} - \frac{m(m-1)}{2!}\left(1-p^2\right)^{m-2} . \tag{6.10}$$

Įvertiname visus (6,10) formulės narius. Tai darome tokiu pat būdu, kaip ir atveju s=2. Tik dabar skleisdami eilute imame tris pirmuosius narius.

$$\left(1-p^2\right)^m = e^{\ln\left(1-p^2\right)^m} = e^{m\ln\left(1-p^2\right)} .$$

$$m \cdot \ln\left(1-p^2\right) = m \cdot \left(-p^2 - \frac{p^4}{2} - \frac{p^6}{3} - \ldots\right) = -\left(mp^2 + \frac{mp^4}{2} + \frac{mp^6}{3} + \ldots\right) .$$

$$e^{-\left(mp^2+\frac{mp^4}{2}+\frac{mp^6}{3}\right)}=1-mp^2-\frac{mp^4}{2}-\frac{mp^6}{3}+\frac{m^2p^4}{2}+\frac{m^2p^8}{8}+\frac{m^2p^6}{2}+\frac{m^2p^8}{3}+\frac{m^2p^{10}}{6}-\frac{m^3p^6}{6}-...=$$
$$=1-mp^2-\frac{mp^4}{2}+\frac{m^2p^4}{2}-\frac{mp^6}{3}+\frac{m^2p^6}{2}-\frac{m^3p^6}{6}.$$
$$\left(1-p^2\right)^m=1-mp^2-\frac{mp^4}{2}+\frac{m^2p^4}{2}-\frac{mp^6}{3}+\frac{m^2p^6}{2}-\frac{m^3p^6}{6}. \qquad (6.11)$$

Analogiškai apskaičiuojame antrą (6.10) formulės narį.

$$\left(1-p^2\right)^{m-1}=e^{\ln\left(1-p^2\right)^{m-1}}=e^{(m-1)\ln\left(1-p^2\right)}.$$
$$(m-1)\cdot\ln\left(1-p^2\right)=(m-1)\cdot\left(-p^2-\frac{p^4}{2}-...\right)=-\left(mp^2+\frac{mp^4}{2}-p^2-\frac{p^4}{2}+...\right).$$
$$e^{-\left(mp^2+\frac{mp^4}{2}-p^2-\frac{p^4}{2}\right)}=1-mp^2-\frac{mp^4}{2}+p^2+\frac{p^4}{2}+\frac{m^2p^4}{2}+\frac{m^2p^8}{2}+\frac{m^2p^6}{2}+\frac{p^4}{2}+\frac{p^6}{2}-mp^4-\frac{mp^6}{2}-...=$$
$$=1-mp^2-\frac{3mp^4}{2}+p^2+p^4+\frac{m^2p^4}{2}.$$
$$mp^2\cdot\left(1-mp^2-\frac{3mp^4}{2}+p^2+p^4+\frac{m^2p^4}{2}\right)=mp^2-m^2p^4-\frac{3m^2p^6}{2}+mp^4+mp^6+\frac{m^3p^6}{2}. \qquad (6.12)$$

Skaičiuojame trečią (6.10) formulės narį:

$$\left(1-p^2\right)^{m-2}=e^{\ln\left(1-p^2\right)^{m-2}}=e^{(m-2)\ln\left(1-p^2\right)}.$$
$$(m-2)\cdot\ln\left(1-p^2\right)=(m-2)\cdot\left(-p^2-\frac{p^4}{2}-...\right)=-\left(mp^2+\frac{mp^4}{2}-2p^2-p^4+...\right).$$
$$e^{-\left(mp^2+\frac{mp^4}{2}-2p^2-p^4\right)}=1-mp^2-\frac{mp^4}{2}+2p^2+p^4+\frac{m^2p^4}{2}+\frac{m^2p^8}{8}+\frac{m^2p^6}{2}+2p^4-2mp^4-...=1-mp^2-\frac{5mp^4}{2}+$$
$$+2p^2+3p^4+\frac{m^2p^4}{2}.$$

Gautą išraišką padauginame iš $\frac{m^2p^4}{2}$ ir $-\frac{mp^4}{2}$. Gauname:

$$\frac{m^2p^4}{2}\cdot\left(1-mp^2-\frac{5mp^4}{2}+2p^2+3p^4+\frac{m^2p^4}{2}\right)=\frac{m^2p^4}{2}-\frac{m^3p^6}{2}-\frac{5m^3p^8}{4}+m^2p^6+\frac{3m^2p^8}{2}+\frac{m^4p^8}{4}=$$
$$=\frac{m^2p^4}{2}-\frac{m^3p^6}{2}+m^2p^6.$$
$$-\frac{mp^4}{2}\cdot\left(1-mp^2-\frac{5mp^4}{2}+2p^2+3p^4+\frac{m^2p^4}{2}\right)=-\frac{mp^4}{2}+\frac{m^2p^6}{2}-mp^6. \qquad (6.13)$$

Įrašę (6.11)-(6.13) išraiškas į (6.10) gauname:

$$P(v_1 \sim v_2) = 1 - 1 + mp^2 + \frac{mp^4}{2} - \frac{m^2 p^4}{2} + \frac{mp^6}{3} - \frac{m^2 p^6}{2} + \frac{m^3 p^6}{6} - mp^2 + m^2 p^4 + \frac{3m^2 p^6}{2} - mp^4 - mp^6 -$$
$$- \frac{m^3 p^6}{2} - \frac{m^2 p^4}{2} + \frac{m^3 p^6}{2} - m^2 p^6 + \frac{mp^4}{2} - \frac{m^2 p^6}{2} + mp^6) = \frac{mp^6}{3} - \frac{m^2 p^6}{2} + \frac{m^3 p^6}{6}.$$

Mus domina tikimybės p išraiška. Iš ribos:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left\{1 - \left(1 - p^2\right) - mp^2\left(1 - p^2\right)^{m-1} - \left(\frac{m^2 p^4 - mp^4}{2!}\right)\left(1 - p^2\right)^{m-2}\right\} = c \text{ gauname:}$$

$n \cdot \frac{m^3 p^6}{6} \to const \Rightarrow p = \frac{c^{\frac{1}{6}} \cdot 6^{\frac{1}{6}}}{n^{\frac{1}{6}} \cdot m^{\frac{1}{2}}}$. Gavome tikimybės p išraišką, kai s=3:

$$p = \frac{c^{\frac{1}{6}} \cdot 6^{\frac{1}{6}}}{n^{\frac{1}{6}} \cdot m^{\frac{1}{2}}}.$$

Kai s=4, riba atrodo taip:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left\{1 - \left(1 - p^2\right)^m - mp^2\left(1 - p^2\right)^{m-1} - \left(\frac{m^2 p^4}{2} - \frac{mp^4}{2}\right) \cdot \left(1 - p^2\right)^{m-2} - \left(\frac{m^3 p^6}{6} - \frac{m^2 p^6}{2} + \frac{mp^6}{3}\right) \cdot \left(1 - p^2\right)^{m-3}\right\}.$$

Po ribos ženklu yra reiškinys, kuris lygus tikimybei $P(v_1 \sim v_2)$. Skaičiuojame visus narius, po ribos ženklu analogiškai, kaip ir atvejais s=2, s=3.

Pirmasis narys

$$\left(1 - p^2\right)^m = e^{\ln\left(1 - p^2\right)^m} = e^{m \ln\left(1 - p^2\right)}.$$

$$m \cdot \ln\left(1 - p^2\right) = m \cdot \left(-p^2 - \frac{p^4}{2} - \frac{p^6}{3} - \frac{p^8}{4} - \ldots\right) = -\left(mp^2 + \frac{mp^4}{2} + \frac{mp^6}{3} + \frac{mp^8}{4} + \ldots\right).$$

$$e^{-\left(mp^2 + \frac{mp^4}{2} + \frac{mp^6}{3} + \frac{mp^8}{4}\right)} = 1 - mp^2 - \frac{mp^4}{2} - \frac{mp^6}{3} - \frac{mp^8}{4} + \frac{m^2 p^4}{2} + \frac{m^2 p^8}{8} + \frac{m^2 p^6}{2} + \frac{m^2 p^8}{3} - \frac{m^3 p^6}{6} -$$
$$- \frac{m^3 p^8}{4} + \frac{m^4 p^8}{24} + \ldots.$$

$$\left(1 - p^2\right)^m = 1 - mp^2 - \frac{mp^4}{2} - \frac{mp^6}{3} - \frac{mp^8}{4} + \frac{m^2 p^4}{2} + \frac{11m^2 p^8}{14} + \frac{m^2 p^6}{2} - \frac{m^3 p^6}{6} - \frac{m^3 p^8}{4} + \frac{m^4 p^8}{24}. \quad (6.14)$$

Įvertiname antrą narį:

$$\left(1 - p^2\right)^{m-1} = e^{\ln\left(1 - p^2\right)^{m-1}} = e^{(m-1)\ln\left(1 - p^2\right)}.$$

$$(m-1) \cdot \ln\left(1 - p^2\right) = (m-1) \cdot \left(-p^2 - \frac{p^4}{2} - \frac{p^6}{3} - \ldots\right) = -\left(mp^2 + \frac{mp^4}{2} + \frac{mp^6}{3} - p^2 - \frac{p^4}{2} - \frac{p^6}{3} + \ldots\right).$$

$$e^{-\left(mp^2+\frac{mp^4}{2}+\frac{mp^6}{3}-p^2-\frac{p^4}{2}-\frac{p^6}{3}\right)}=1-mp^2-\frac{mp^4}{2}-\frac{mp^6}{3}+p^2+\frac{p^4}{2}+\frac{p^6}{3}+\frac{m^2p^4}{2}+\frac{m^2p^6}{2}+\frac{p^4}{2}+\frac{p^6}{2}-mp^4-$$

$$-\frac{mp^6}{2}-\frac{m^3p^6}{6}-\frac{p^6}{6}+\frac{m^2p^6}{2}-\frac{mp^6}{2}-\ldots=1-mp^2-\frac{3mp^4}{2}-\frac{4mp^6}{3}+p^2+p^4+\frac{2p^6}{3}+\frac{m^2p^4}{2}+m^2p^6-\frac{m^3p^6}{6}.$$

$$mp^2\cdot\left(1-mp^2-\frac{3mp^4}{2}-\frac{4mp^6}{3}+p^2+p^4+\frac{2p^6}{3}+\frac{m^2p^4}{2}+m^2p^6-\frac{m^3p^6}{6}\right)=mp^2-m^2p^4-\frac{3m^2p^6}{2}-$$

$$-\frac{4m^2p^8}{3}+mp^4+mp^6+\frac{2mp^8}{3}+\frac{m^3p^6}{2}+m^3p^8-\frac{m^4p^8}{6}.$$

$$mp^2\left(1-p^2\right)^{m-1}=mp^2-m^2p^4-\frac{3m^2p^6}{2}-\frac{4m^2p^8}{3}+mp^4+mp^6+\frac{2mp^8}{3}+\frac{m^3p^6}{2}+m^3p^8-\frac{m^4p^8}{6}. \quad (6.15)$$

Skaičiuojame trečiąjį narį:

$$\left(1-p^2\right)^{m-2}=e^{\ln\left(1-p^2\right)^{m-2}}=e^{(m-2)\cdot\ln\left(1-p^2\right)}.$$

Paliekame narius su ketvirtuoju p laipsniu, nes dar reikės dauginti iš narių, esančių prieš skliaustus.

$$(m-2)\cdot\ln\left(1-p^2\right)=(m-2)\cdot\left(-p^2-\frac{p^4}{2}-\ldots\right)=-\left(mp^2+\frac{mp^4}{2}-2p^2-p^4+\ldots\right).$$

$$e^{-\left(mp^2+\frac{mp^4}{2}-2p^2-p^4\right)}=1-mp^2-\frac{mp^4}{2}+\frac{m^2p^4}{2}+2p^2+2p^4-2mp^4-\ldots=1-mp^2-\frac{5mp^4}{2}+\frac{m^2p^4}{2}+2p^2+3p^4.$$

$$\frac{m^2p^4}{2}\cdot\left(1-mp^2-\frac{5mp^4}{2}+\frac{m^2p^4}{2}+2p^2+3p^4\right)=\frac{m^2p^4}{2}-\frac{m^3p^6}{2}-\frac{5m^3p^8}{4}+\frac{m^4p^8}{4}+m^2p^6+\frac{3m^2p^8}{2}.$$

$$-\frac{mp^4}{2}\cdot\left(1-mp^2-\frac{5mp^4}{2}+\frac{m^2p^4}{2}+2p^2+3p^4\right)=-\frac{mp^4}{2}+\frac{m^2p^6}{2}+\frac{5m^2p^8}{4}-\frac{m^3p^8}{4}-mp^6-\frac{3mp^8}{2}. \quad (6.16)$$

Iš paskutinio nario gauname:

$$\left(1-p^2\right)^{m-3}=e^{\ln\left(1-p^2\right)^{m-3}}=e^{(m-3)\cdot\ln\left(1-p^2\right)}.$$

$$(m-3)\cdot\ln\left(1-p^2\right)=(m-3)\cdot\left(-p^2-\ldots\right)=-\left(mp^2-3p^2+\ldots\right).$$

$$e^{-\left(mp^2-3p^2\right)}=1-mp^2+3p^2+\ldots.$$

$$\frac{m^3p^6}{6}\cdot\left(1-mp^2+3p^2\right)=\frac{m^3p^6}{6}-\frac{m^4p^8}{6}+\frac{m^3p^8}{2}. \quad (6.17)$$

$$-\frac{m^2p^6}{2}\cdot\left(1-mp^2+3p^2\right)=-\frac{m^2p^6}{2}+\frac{m^3p^8}{2}-\frac{3m^2p^8}{2}. \quad (6.18)$$

$$\frac{mp^6}{3}\cdot\left(1-mp^2+3p^2\right)=\frac{mp^6}{3}-\frac{m^2p^8}{3}+mp^8. \quad (6.19)$$

Įrašę reiškinius (6.14)-(6.19) į tikimybės $P(v_1 \sim v_2)$ išraišką esant s=4, gauname:

$$P(v_1 \sim v_2) = 1 - 1 + mp^2 + \frac{mp^4}{2} + \frac{mp^6}{3} + \frac{mp^8}{4} - \frac{m^2p^4}{2} - \frac{m^2p^8}{8} - \frac{m^2p^6}{2} - \frac{m^2p^8}{3} + \frac{m^3p^6}{6} + \frac{m^3p^8}{4} -$$
$$- \frac{m^4p^8}{24} - mp^2 + m^2p^4 + \frac{3m^2p^6}{2} + \frac{4m^2p^8}{3} - mp^4 - mp^6 - \frac{2mp^8}{3} - \frac{m^3p^6}{2} - m^3p^8 + \frac{m^4p^8}{6} - \frac{m^2p^4}{2} +$$
$$+ \frac{m^3p^6}{2} + \frac{5m^3p^8}{4} - \frac{m^4p^8}{4} - m^2p^6 - \frac{3m^2p^8}{2} + \frac{mp^4}{2} - \frac{m^2p^6}{2} - \frac{5m^2p^8}{4} + \frac{m^3p^8}{4} + mp^6 + \frac{3mp^8}{2} -$$
$$- \frac{m^3p^6}{6} + \frac{m^4p^8}{6} - \frac{m^3p^8}{2} + \frac{m^2p^6}{2} - \frac{m^3p^8}{2} + \frac{3m^2p^8}{2} - \frac{mp^6}{3} + \frac{m^2p^8}{3} - mp^8) = \frac{mp^8}{12} - \frac{m^2p^8}{24} -$$
$$- \frac{m^3p^8}{4} + \frac{m^4p^8}{24}.$$

Randame p išraišką: $n \cdot \frac{m^4p^8}{24} \to const \Rightarrow p = \frac{c^{\frac{1}{8}} \cdot 24^{\frac{1}{8}}}{n^{\frac{1}{8}} \cdot m^{\frac{1}{2}}}$. Gavome p išraišką, kai s=4:

$$p = \frac{c^{\frac{1}{8}} \cdot 24^{\frac{1}{8}}}{n^{\frac{1}{8}} \cdot m^{\frac{1}{2}}}.$$

Kai penkios ir daugiau viršūnių bendros, skaičiuojame ribą:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \Big\{1 - \left(1 - p^2\right)^m - mp^2\left(1 - p^2\right)^{m-1} - \left(\frac{m^2p^4}{2} - \frac{mp^4}{2}\right) \cdot \left(1 - p^2\right)^{m-2} - \left(\frac{m^3p^6}{6} - \frac{m^2p^6}{2} + \frac{mp^6}{3}\right) \cdot \left(1 - p^2\right)^{m-3} -$$
$$- \left(\frac{m^4p^8}{24} - \frac{m^3p^8}{4} + \frac{11m^2p^8}{24} - \frac{mp^8}{4}\right) \cdot \left(1 - p^2\right)^{m-4}\Big\}.$$

Skaičiuojame visus narius, esančius riestiniuose skliaustuose po ribos ženklu. Pirmasis narys

$$\left(1 - p^2\right)^m = e^{\ln\left(1-p^2\right)^m} = e^{m\ln\left(1-p^2\right)}.$$

$$m \cdot \ln\left(1 - p^2\right) = m \cdot \left(-p^2 - \frac{p^4}{2} - \frac{p^6}{3} - \frac{p^8}{4} - \frac{p^{10}}{5} - \ldots\right) = -\left(mp^2 + \frac{mp^4}{2} + \frac{mp^6}{3} + \frac{mp^8}{4} + \frac{mp^{10}}{5} + \ldots\right).$$

$$e^{-\left(mp^2 + \frac{mp^4}{2} + \frac{mp^6}{3} + \frac{mp^8}{4} + \frac{mp^{10}}{5}\right)} = 1 - mp^2 - \frac{mp^4}{2} - \frac{mp^6}{3} - \frac{mp^8}{4} - \frac{mp^{10}}{5} + \frac{m^2p^4}{2} + \frac{m^2p^8}{8} + \frac{m^2p^6}{2} + \frac{m^2p^8}{3} + \frac{m^2p^{10}}{4} +$$
$$+ \frac{m^2p^{10}}{6} - \frac{m^3p^6}{6} - \frac{m^3p^8}{4} - \frac{m^3p^{10}}{6} - \frac{m^3p^{10}}{8} + \frac{m^4p^8}{24} + \frac{m^4p^{10}}{12} - \frac{m^5p^{10}}{120} - \ldots = 1 - mp^2 - \frac{mp^4}{2} - \frac{mp^6}{3} - \frac{mp^8}{4} -$$
$$- \frac{mp^{10}}{5} + \frac{m^2p^4}{2} + \frac{m^2p^6}{2} + \frac{11m^2p^8}{24} + \frac{5m^2p^{10}}{12} - \frac{m^3p^6}{6} - \frac{m^3p^8}{4} - \frac{7m^3p^{10}}{24} + \frac{m^4p^8}{24} + \frac{m^4p^{10}}{12} - \frac{m^5p^{10}}{120}.$$

$$\left(1-p^2\right)^m=1-mp^2-\frac{mp^4}{2}-\frac{mp^6}{3}-\frac{mp^8}{4}-\frac{mp^{10}}{5}+\frac{m^2p^4}{2}+\frac{m^2p^6}{2}+\frac{11m^2p^8}{24}+\frac{5m^2p^{10}}{12}-\frac{m^3p^6}{6}-\frac{m^3p^8}{4}-$$

$$-\frac{7m^3p^{10}}{24}+\frac{m^4p^8}{24}+\frac{m^4p^{10}}{12}-\frac{m^5p^{10}}{120}. \tag{6.20}$$

Antras narys

$$\left(1-p^2\right)^{m-1}=e^{\ln\left(1-p^2\right)^{m-1}}=e^{(m-1)\ln\left(1-p^2\right)}$$

$$(m-1)\cdot\ln\left(1-p^2\right)=(m-1)\cdot\left(-p^2-\frac{p^4}{2}-\frac{p^6}{3}-\frac{p^8}{4}-...\right)=-\left(mp^2+\frac{mp^4}{2}+\frac{mp^6}{3}+\frac{mp^8}{4}-p^2-\frac{p^4}{2}-\frac{p^6}{3}-\frac{p^8}{4}+...\right)$$

$$e^{-\left(mp^2+\frac{mp^4}{2}+\frac{mp^6}{3}+\frac{mp^8}{4}-p^2-\frac{p^4}{2}-\frac{p^6}{3}-\frac{p^8}{4}\right)}=1-mp^2-\frac{mp^4}{2}-\frac{mp^6}{3}-\frac{mp^8}{4}+p^2+\frac{p^4}{2}+\frac{p^6}{3}+\frac{p^8}{4}+\frac{m^2p^4}{2}+\frac{m^2p^6}{2}+$$

$$+\frac{m^2p^8}{3}-mp^4-\frac{mp^6}{2}-\frac{mp^8}{3}+\frac{m^2p^8}{8}-\frac{mp^6}{2}-\frac{mp^8}{4}-\frac{mp^8}{3}+\frac{p^4}{2}+\frac{p^6}{2}+\frac{p^8}{3}+\frac{p^8}{8}-\frac{m^3p^6}{6}-\frac{m^3p^8}{4}+\frac{m^2p^6}{2}+$$

$$+\frac{m^2p^8}{4}+\frac{m^2p^8}{2}-\frac{mp^6}{2}-\frac{mp^8}{2}-\frac{mp^8}{4}+\frac{p^6}{6}+\frac{p^8}{4}+\frac{m^4p^8}{24}-\frac{m^3p^8}{6}+\frac{m^2p^8}{4}-\frac{mp^8}{6}+\frac{p^8}{24}+...=1-mp^2-$$

$$-\frac{3mp^4}{2}-\frac{11mp^6}{6}-\frac{25mp^8}{12}+p^2+p^4+p^6+p^8+\frac{m^2p^4}{2}+m^2p^6+\frac{35m^2p^8}{24}-\frac{m^3p^6}{6}-\frac{5m^3p^8}{12}+\frac{m^4p^8}{24}.$$

$$mp^2\cdot(1-mp^2-\frac{3mp^4}{2}-\frac{11mp^6}{6}-\frac{25mp^8}{12}+p^2+p^4+p^6+p^8+\frac{m^2p^4}{2}+m^2p^6+\frac{35m^2p^8}{24}-\frac{m^3p^6}{6}-$$

$$-\frac{5m^3p^8}{12}+\frac{m^4p^8}{24})=mp^2-m^2p^4-\frac{3m^2p^6}{2}-\frac{11m^2p^8}{6}-\frac{25m^2p^{10}}{12}+mp^4+mp^6+mp^8+mp^{10}+\frac{m^3p^6}{2}+$$

$$+m^3p^8+\frac{35m^3p^{10}}{24}-\frac{m^4p^8}{6}-\frac{5m^4p^{10}}{12}+\frac{m^5p^{10}}{24}.$$

$$mp^2\left(1-p^2\right)^{m-1}=mp^2-m^2p^4-\frac{3m^2p^6}{2}-\frac{11m^2p^8}{6}-\frac{25m^2p^{10}}{12}+mp^4+mp^6+mp^8+mp^{10}+\frac{m^3p^6}{2}+$$

$$+m^3p^8+\frac{35m^3p^{10}}{24}-\frac{m^4p^8}{6}-\frac{5m^4p^{10}}{12}+\frac{m^5p^{10}}{24}. \tag{6.21}$$

Skaičiuojame likusius po ribos ženklu riestiniuose skliaustuose esančius narius:

$$\left(1-p^2\right)^{m-2}=e^{\ln\left(1-p^2\right)^{m-2}}=e^{(m-2)\cdot\ln\left(1-p^2\right)}.$$

$$(m-2)\cdot\ln\left(1-p^2\right)=(m-2)\cdot\left(-p^2-\frac{p^4}{2}-\frac{p^6}{3}...\right)=-\left(mp^2+\frac{mp^4}{2}+\frac{mp^6}{3}-2p^2-p^4-\frac{2p^6}{3}+...\right).$$

$$e^{-\left(mp^2+\frac{mp^4}{2}+\frac{mp^6}{3}-2p^2-p^4-\frac{2p^6}{3}\right)}=1-mp^2-\frac{mp^4}{2}-\frac{mp^6}{3}+2p^2+p^4+\frac{2p^6}{3}+\frac{m^2p^4}{2}+\frac{m^2p^6}{2}-2mp^4-mp^6-$$

$$-mp^6+2p^4+2p^6-\frac{m^3p^6}{6}+m^2p^6-2mp^6-...=1-mp^2-\frac{5mp^4}{2}-\frac{13mp^6}{3}+2p^2+3p^4+\frac{8p^6}{3}+\frac{m^2p^4}{2}+$$

$$+\frac{3m^2p^6}{2}-\frac{m^3p^6}{6}.$$

$$\frac{m^2p^4}{2}\left(1-mp^2-\frac{5mp^4}{2}-\frac{13mp^6}{3}+2p^2+3p^4+\frac{8p^6}{3}+\frac{m^2p^4}{2}+\frac{3m^2p^6}{2}-\frac{m^3p^6}{6}\right)=\frac{m^2p^4}{2}-\frac{m^3p^6}{2}-$$

$$-\frac{5m^3p^8}{4}-\frac{13m^3p^{10}}{6}+m^2p^6+\frac{3m^2p^8}{2}+\frac{4m^2p^{10}}{3}+\frac{m^4p^8}{4}+\frac{3m^4p^{10}}{4}-\frac{m^5p^{10}}{12}. \qquad (6.22)$$

$$-\frac{mp^4}{2}\left(1-mp^2-\frac{5mp^4}{2}-\frac{13mp^6}{3}+2p^2+3p^4+\frac{8p^6}{3}+\frac{m^2p^4}{2}+\frac{3m^2p^6}{2}-\frac{m^3p^6}{6}\right)=-\frac{mp^4}{2}+\frac{m^2p^6}{2}+$$

$$+\frac{5m^2p^8}{4}+\frac{13m^2p^{10}}{6}-mp^6-\frac{3mp^8}{2}-\frac{4mp^{10}}{3}-\frac{m^3p^8}{4}-\frac{3m^3p^{10}}{4}+\frac{m^4p^{10}}{12}. \qquad (6.23)$$

$$\left(1-p^2\right)^{m-3}=e^{\ln\left(1-p^2\right)^{m-3}}=e^{(m-3)\cdot\ln\left(1-p^2\right)}.$$

$$(m-3)\cdot\ln\left(1-p^2\right)=(m-3)\cdot\left(-p^2-\frac{p^4}{2}-...\right)=-\left(mp^2+\frac{mp^4}{2}-3p^2-\frac{3p^4}{2}+...\right).$$

$$e^{-\left(mp^2+\frac{mp^4}{2}-3p^2-\frac{3p^4}{2}\right)}=1-mp^2-\frac{mp^4}{2}+3p^2+\frac{3p^4}{2}+\frac{m^2p^4}{2}+\frac{9p^4}{2}-3mp^4-...=1-mp^2-\frac{7mp^4}{2}+3p^2+6p^4+\frac{m^2p^4}{2}.$$

$$\frac{m^3p^6}{6}\left(1-mp^2-\frac{7mp^4}{2}+3p^2+6p^4+\frac{m^2p^4}{2}\right)=\frac{m^3p^6}{6}-\frac{m^4p^8}{6}-\frac{7m^4p^{10}}{12}+\frac{m^3p^8}{2}+m^3p^{10}+\frac{m^5p^{10}}{12}. \qquad (6.24)$$

$$-\frac{m^2p^6}{2}\left(1-mp^2-\frac{7mp^4}{2}+3p^2+6p^4+\frac{m^2p^4}{2}\right)=-\frac{m^2p^6}{2}+\frac{m^3p^8}{2}+\frac{7m^3p^{10}}{4}-\frac{3m^2p^8}{2}-$$

$$-3m^2p^{10}-\frac{m^4p^{10}}{4}. \qquad (6.25)$$

$$\frac{mp^6}{3}\left(1-mp^2-\frac{7mp^4}{2}+3p^2+6p^4+\frac{m^2p^4}{2}\right)=\frac{mp^6}{3}-\frac{m^2p^8}{3}-\frac{7m^2p^{10}}{6}+mp^8+2mp^{10}+\frac{m^3p^{10}}{6}. \qquad (6.26)$$

$$\left(1-p^2\right)^{m-4}=e^{\ln\left(1-p^2\right)^{m-4}}=e^{(m-4)\cdot\ln\left(1-p^2\right)}.$$

$$(m-4)\cdot\ln\left(1-p^2\right)=(m-4)\cdot\left(-p^2-...\right)=-\left(mp^2-4p^2+...\right).$$

$$e^{-\left(mp^2-4p^2\right)}=1-mp^2+4p^2+....$$

$$\frac{m^4p^8}{24}\cdot\left(1-mp^2+4p^2\right)=\frac{m^4p^8}{24}-\frac{m^5p^{10}}{24}+\frac{m^4p^{10}}{6}. \qquad (6.27)$$

$$-\frac{m^3p^8}{4}\cdot\left(1-mp^2+4p^2\right)=-\frac{m^3p^8}{4}+\frac{m^4p^{10}}{4}-m^3p^{10}. \tag{6.28}$$

$$\frac{11m^2p^8}{24}\cdot\left(1-mp^2+4p^2\right)=\frac{11m^2p^8}{24}-\frac{11m^3p^{10}}{24}+\frac{11m^2p^{10}}{6}. \tag{6.29}$$

$$-\frac{mp^8}{4}\cdot\left(1-mp^2+4p^2\right)=-\frac{mp^8}{4}+\frac{m^2p^{10}}{4}-mp^{10}. \tag{6.30}$$

Skaičiuojame tikimybę, kad dvi viršūnės turi penkis ir daugiau bendrų taškų. Surašę (6.20)-(6.30) formules į tikimybės išraišką, gauname:

$$1-1+mp^2+\frac{mp^4}{2}+\frac{mp^6}{3}+\frac{mp^8}{4}+\frac{mp^{10}}{5}-\frac{m^2p^4}{2}-\frac{m^2p^6}{2}-\frac{11m^2p^8}{24}-\frac{5m^2p^{10}}{12}+\frac{m^3p^6}{6}+\frac{m^3p^8}{4}+\frac{7m^3p^{10}}{24}-$$
$$-\frac{m^4p^8}{24}-\frac{m^4p^{10}}{12}+\frac{m^5p^{10}}{120}-mp^2+m^2p^4+\frac{3m^2p^6}{2}+\frac{11m^2p^8}{6}+\frac{25m^2p^{10}}{12}-mp^4-mp^6-mp^8-mp^{10}-\frac{m^3p^6}{2}-$$
$$-m^3p^8-\frac{35m^3p^{10}}{24}+\frac{m^4p^8}{6}+\frac{5m^4p^{10}}{12}-\frac{m^5p^{10}}{24}-\frac{m^2p^4}{2}+\frac{m^3p^6}{2}+\frac{5m^3p^8}{4}+\frac{13m^3p^{10}}{6}-m^2p^6-\frac{3m^2p^8}{2}-$$
$$-\frac{4m^2p^{10}}{3}-\frac{m^4p^8}{4}-\frac{3m^4p^{10}}{4}+\frac{m^5p^{10}}{12}+\frac{mp^4}{2}-\frac{m^2p^6}{2}-\frac{5m^2p^8}{4}-\frac{13m^2p^{10}}{6}+mp^6+\frac{3mp^8}{2}+\frac{4mp^{10}}{3}+\frac{m^3p^8}{4}+$$
$$+\frac{3m^3p^{10}}{4}-\frac{m^4p^{10}}{12}-\frac{m^3p^6}{6}+\frac{m^4p^8}{6}+\frac{7m^4p^{10}}{12}-\frac{m^3p^8}{2}-m^3p^{10}-\frac{m^5p^{10}}{12}+\frac{m^2p^6}{2}-\frac{m^3p^8}{2}-\frac{7m^3p^{10}}{4}+$$
$$+\frac{3m^2p^8}{2}+3m^2p^{10}+\frac{m^4p^{10}}{4}-\frac{mp^6}{3}+\frac{m^2p^8}{3}+\frac{7m^2p^{10}}{6}-mp^8-2mp^{10}-\frac{m^3p^{10}}{6}-\frac{m^4p^8}{24}+\frac{m^5p^{10}}{24}-\frac{m^4p^{10}}{6}+$$
$$+\frac{m^3p^8}{4}-\frac{m^4p^{10}}{4}+m^3p^{10}-\frac{11m^2p^8}{24}+\frac{11m^3p^{10}}{24}-\frac{11m^2p^{10}}{6}+\frac{mp^8}{4}-\frac{m^2p^{10}}{4}+mp^{10}=-\frac{7mp^{10}}{15}+\frac{7m^3p^{10}}{24}-$$
$$-\frac{m^4p^{10}}{12}+\frac{m^5p^{10}}{120};$$

t. y. $P\left(v_1\sim v_2\right)=\dfrac{m^5p^{10}}{120}$.

Kadangi riba artėja į *const*, tai $n\cdot\dfrac{m^5p^{10}}{120}\to const\Rightarrow p=\dfrac{c^{\frac{1}{10}}\cdot 120^{\frac{1}{10}}}{n^{\frac{1}{10}}\cdot m^{\frac{1}{2}}}$. Gavome p išraišką, kai s=5.

$$p=\frac{c^{\frac{1}{10}}\cdot 120^{\frac{1}{10}}}{n^{\frac{1}{10}}\cdot m^{\frac{1}{2}}}.$$

Po visų skaičiavimų galima prognozuoti bendrą formulę tikimybei p apskaičiuoti, priklausomai nuo s:

$$p = \frac{c^{\frac{1}{2s}} \cdot (s!)^{\frac{1}{2s}}}{n^{\frac{1}{2s}} \cdot m^{\frac{1}{2}}}. \tag{6.31}$$

Viršūnės laipsnis skaičiuojamas pagal formulę:

$$d(v_1) = 1_{v_1 \sim v_2} + 1_{v_1 \sim v_3} + \ldots + 1_{v_1 \sim v_n}. \tag{6.32}$$

kur $1_{v_1 \sim v_2} = \begin{cases} 1, & kai\ v_1\ ir\ v_2\ turi\ du\ ir\ daugiau\ \ bendrų\ objektų, \\ 0, & kai\ v_1\ ir\ v_2\ neturi\ \ dviejų\ ir\ daugiau\ \ bendrų\ objektų. \end{cases}$

Kiekvienas iš indikatorių yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai ir jų iš viso yra n-1.

Kai s=2 ir n - didelis, gauname:

$$d(v_1) \sim B\left(n-1, \frac{m^2 p^4}{2}\right). \tag{6.33}$$

Tai įrodo, kad viršūnės laipsnis turi Binominį pasiskirstymą.

Kitas mus dominantis klausimas: kaip pasikeis tikimybė $P(v_1 \sim v_2)$, kai $k = mp + \varepsilon$? ε - kaip norint mažas dydis. Įvesime, kai kuriuos naujus pažymėjimus: B_k - aibė objektų, kuriuos pasirenka viršūnė v_1, S_2 - pasirinktų objektų iš W_m skaičius viršūnės v_2. Kai $s = 2$ skaičiuojame tikimybę:

$$P(v_1 \sim v_2 \mid d(v_1) = k) = P(|S_2 \cap B_k| \geq 2) = 1 - P(|S_2 \cap B_k| = 0) - P(|S_2 \cap B_k| = 1) = 1 - (1-p)^k - kp(1-p)^{k-1}. \tag{6.34}$$

Skaičiuojame narius, esančius po paskutinios lygybės. Pirmasis narys

$$(1-p)^k = e^{k\ln(1-p)}.$$

$$(mp+\varepsilon)\ln(1-p) = (mp+\varepsilon)\cdot\left(-p - \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{6} - \ldots\right) = -\left(mp^2 + \frac{mp^3}{2} + \frac{mp^4}{6} + \varepsilon p + \frac{\varepsilon p^2}{2} + \frac{\varepsilon p^3}{6} + \ldots\right).$$

$$e^{-\left(mp^2 + \frac{mp^3}{2} + \frac{mp^4}{6} + \varepsilon p + \frac{\varepsilon p^2}{2} + \frac{\varepsilon p^3}{6}\right)} = 1 - mp^2 - \frac{mp^3}{2} - \frac{mp^4}{6} - \varepsilon p - \frac{\varepsilon p^2}{2} - \frac{\varepsilon p^3}{6} + \frac{m^2 p^4}{2} + \frac{\varepsilon^2 p^2}{2} + m\varepsilon p^3 + \frac{m\varepsilon p^4}{2} +$$
$$+ \frac{\varepsilon^2 p^3}{2} + \frac{m\varepsilon p^4}{2} + \frac{\varepsilon^2 p^4}{2}.$$

$$(1-p)^k = 1 - mp^2 - \frac{mp^3}{2} - \frac{mp^4}{6} - \varepsilon p - \frac{\varepsilon p^2}{2} - \frac{\varepsilon p^3}{6} + \frac{m^2 p^4}{2} + \frac{\varepsilon^2 p^2}{2} + m\varepsilon p^3 + \frac{m\varepsilon p^4}{2} +$$
$$+ \frac{\varepsilon^2 p^3}{2} + \frac{m\varepsilon p^4}{2} + \frac{\varepsilon^2 p^4}{2}. \tag{6.35}$$

Skaičiuojame antrąjį narį:

$$(1-p)^{k-1} = e^{(k-1)\ln(1-p)}.$$

$$(mp+\varepsilon-1)\ln(1-p)=(mp+\varepsilon-1)\left(-p-\frac{p^2}{2}-\frac{p^3}{6}-...\right)=$$
$$=-\left(mp^2+\frac{mp^3}{2}+\frac{mp^4}{6}+\varepsilon p+\frac{\varepsilon p^2}{2}+\frac{\varepsilon p^3}{6}-p-\frac{p^2}{2}-\frac{p^3}{6}+...\right).$$
$$e^{-\left(mp^2+\frac{mp^3}{2}+\frac{mp^4}{6}+\varepsilon p+\frac{\varepsilon p^2}{2}+\frac{\varepsilon p^3}{6}-p-\frac{p^2}{2}-\frac{p^3}{6}\right)}=1-mp^2-\frac{mp^3}{2}-\varepsilon p-\frac{\varepsilon p^2}{2}-\frac{\varepsilon p^3}{6}+p+\frac{p^2}{2}+\frac{p^3}{6}+\frac{\varepsilon^2p^2}{2}+\frac{p^2}{2}+$$
$$+m\varepsilon p^3-mp^3+\frac{\varepsilon^2p^3}{2}-\varepsilon p^2-\frac{\varepsilon p^3}{2}-\frac{\varepsilon p^3}{2}+\frac{p^3}{2}+...=1-mp^2-\frac{3mp^3}{2}-\varepsilon p-\frac{3\varepsilon p^2}{2}-\frac{7\varepsilon p^3}{6}+p+p^2+\frac{2p^3}{3}+$$
$$+\frac{\varepsilon^2p^2}{2}+m\varepsilon p^3+\frac{\varepsilon^2p^3}{2}+....$$

$$mp^2\left(1-mp^2-\frac{3mp^3}{2}-\varepsilon p-\frac{3\varepsilon p^2}{2}-\frac{7\varepsilon p^3}{6}+p+p^2+\frac{2p^3}{3}+\frac{\varepsilon^2p^2}{2}+m\varepsilon p^3+\frac{\varepsilon^2p^3}{2}\right)=$$
$$=mp^2-m^2p^4-\frac{3m^2p^5}{2}-m\varepsilon p^3-\frac{3m\varepsilon p^4}{2}-\frac{7m\varepsilon p^5}{6}+mp^3+mp^4+$$
$$+\frac{2mp^5}{3}+\frac{m\varepsilon^2p^4}{2}+m^2\varepsilon p^5+\frac{m\varepsilon^2p^5}{2}. \tag{6.36}$$
$$\varepsilon p\left(1-mp^2-\frac{3mp^3}{2}-\varepsilon p-\frac{3\varepsilon p^2}{2}-\frac{7\varepsilon p^3}{6}+p+p^2+\frac{2p^3}{3}+\frac{\varepsilon^2p^2}{2}+m\varepsilon p^3+\frac{\varepsilon^2p^3}{2}\right)=$$
$$=\varepsilon p-\varepsilon mp^3-\frac{3\varepsilon mp^4}{2}-\varepsilon^2p^2-\frac{3\varepsilon^2p^3}{2}-\frac{7\varepsilon^2p^4}{6}+\varepsilon p^2+\varepsilon p^3+\frac{2\varepsilon p^4}{3}+\frac{\varepsilon^3p^3}{2}+m\varepsilon^2p^4+\frac{\varepsilon^3p^4}{2}. \tag{6.37}$$

Įrašę (6.35), (6.36) ir (6.37) į (6.34), gauname:

$$P(v_1\sim v_2 \mid d(v_1)=k)=1-1+mp^2+\frac{mp^3}{2}+\frac{mp^4}{6}+\varepsilon p+\frac{\varepsilon p^2}{2}+\frac{\varepsilon p^3}{6}-\frac{m^2p^4}{2}-\frac{\varepsilon^2p^2}{2}-m\varepsilon p^3-\frac{m\varepsilon p^4}{2}-\frac{\varepsilon^2p^3}{2}-$$
$$-\frac{m\varepsilon p^4}{2}-\frac{\varepsilon^2p^4}{2}-mp^2+m^2p^4+m\varepsilon p^3+\frac{3m\varepsilon p^4}{2}-mp^3-mp^4-\frac{m\varepsilon^2p^4}{2}-\varepsilon p+\varepsilon mp^3+\frac{3\varepsilon mp^4}{2}+\varepsilon^2p^2+$$
$$+\frac{3\varepsilon^2p^3}{2}+\frac{7\varepsilon^2p^4}{6}-\varepsilon p^2-\varepsilon p^3-\frac{2\varepsilon p^4}{3}-\frac{\varepsilon^3p^3}{2}-m\varepsilon^2p^4-\frac{\varepsilon^3p^4}{2}=-\frac{mp^3}{2}-\frac{4mp^4}{3}-\frac{\varepsilon p^2}{2}-\frac{5\varepsilon p^3}{6}+\frac{m^2p^4}{2}+$$
$$+\frac{\varepsilon^2p^2}{2}+m\varepsilon p^3+3m\varepsilon p^4+\frac{\varepsilon^2p^3}{2}-\frac{3m\varepsilon^2p^4}{2}+\frac{\varepsilon^2p^4}{2}-\frac{\varepsilon p^3}{2}-\frac{2\varepsilon p^4}{6}-\frac{\varepsilon^3p^3}{2}-\frac{\varepsilon^3p^4}{2}.$$

Galutinis rezultatas:

$$P(v_1\sim v_2 \mid d(v_1)=k)=\frac{m^2p^4}{2}(1+o(1)). \tag{6.38}$$

Taigi, kai $k=mp+\varepsilon$:

$$P(v_1 \sim v_2) = \frac{m^2 p^4}{2}(1 + o(1)). \tag{6.39}$$

Vadinasi kai $s = 2$ ir $k = mp + \varepsilon$, tikimybė nepasikeičia ir viršūnės laipsnis turi tą patį Binominį skirstinį kaip ir (6.33) formulėje.

Išvados

Pasaulyje ir Lietuvoje vis daugiau mokslininkų nagrinėja grafus, skaičiuoja viršūnių laipsnius esant tam tikroms sąlygoms. Skaičiavimai ir analizė padeda projektuoti tinklus ir garantuoti, kad jie veiks nepriekaištingai arba bent išvengs didesnių klaidų.

Darbe rastos tikimybės, kad dvi gretimos viršūnės atsitiktiniame sankirtų grafe $G(n, m, p)$ turi du ir daugiau bendrų objektų (dažnai juos vadina “raktais”), t. y. nustatyta su kokia tikimybe tos viršūnės pasirenka raktus. Svarbiausias rezultatas: grafo $G(n, m, p)$ viršūnės laipsnis, kai viršūnių skaičius n – didelis turi Binominį skirstinį. Rezultatai gauti, kai pirmosios grafo viršūnės v_1 pasirinktų elementų skaičius k buvo fiksuotas ir truputį nukrypęs nuo vidurkio. Kai skaičius k – atsitiktinis, bus tolimesnių tyrimų tikslas kitame darbe. Galima spėti, kad rezultatas bus toks pat, bet tai reikės dar įrodyti.

Literatūra

1. Fišas. M. Tikimybių teorija ir matematinė statistika, V., Mintis, (1968).
2. Godehardt. E., Jaworski. J., Two Models of Random Intersection Graphs for Classification (2002).
3. Krylovas. A. Diskrečioji matematika, V., Technika, (2005).
4. O. Ore. Grafai ir jų pritaikymas, V., Mintis, (1973).
5. Plukas. K. Taikomoji diskrečioji matematika, K., Technologija, (2007).
6. Stark. D. The Vertex Degree Distribution of Random Intersection Graphs, Wiley InterScience, (2004).
7. http://www.pnas.org/cgi/reprint/99/suppl_1/2566.
8. http://www2.math.su.se/~mia/rig.pdf.
9. http://en.wikipedia.org/wiki/Random_graph.

Summary

Random intersection graphs $G(n,m,p)$ audits vertex degree distributions are viewed. Its proved, vertex degree has Binomial distribution $B\left(n-1,\frac{m^2p^4}{2}\right)$.

Probability p that two vertex of graph chooses common object is find.