ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Laimonas Meška

Jungtinio Hurvico dzeta funkcijų universalumo išvados

Magistro darbas

Darbo vadovas
prof. habil. dr. A. Laurinčikas

Šiauliai, 2013

Turinys

SUMMARY

Consequences of the joint universality of Hurwitz zeta-functions

Let $s=\sigma+it$ be a complex variable, and α, $0<\alpha\leq 1$, be a fixed parameter. The Hurwitz zeta-function $\zeta(s,\alpha)$, for $\sigma>1$, is defined by the series

$$\zeta(s,\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+\alpha)^s},$$

and continues meromorphically to the whole complex plane. It is known that, for some values of the parameter α, the function $\zeta(s,\alpha)$ is universal in the sense that the shifts $\zeta(s+i\tau,\alpha)$, $\tau\in\mathbb{R}$, approximate any analytic function.

Also, Hurwitz zeta-functions are jointly universal. This means that any collection of analytic functions can be approximated by a collection of shifts $\zeta(s+i\tau,\alpha_1),...,\zeta(s+i\tau,\alpha_r)$.

In the master work, we consider the universality of the function $F(\zeta(s,\alpha_1),...,\zeta(s,\alpha_r))$ for some classes of functions $F:H^r(D)\to H(D)$, where $H(D)$ is the space of analytic functions on $D=\{s\in\mathbb{C}:\frac{1}{2}<\sigma<1\}$ equipped with the topology of uniform convergence on compacta. We give one example. Suppose that the set

$$\{\log(m+\alpha_j):m\in\mathbb{N}_0,\ j=1,...,r\}$$

is linearly independent over the field of rational numbers, and that $F:H^r(D)\to H(D)$ is continuous function such that, for every open set $G\subset H(D)$, the set $F^{-1}G$ is not empty. Let K be a compact subset of D with connected complement, and $f(s)$ be a continuous function on K which is analytic in the interior of K. Then, for every $\varepsilon>0$

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau,\alpha_1),...,\zeta(s+i\tau,\alpha_r))-f(s)|<\varepsilon\}>0.$$

SANTRAUKA

Jungtinio Hurvico dzeta funkcijų universalumo išvados

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o α, $0 < \alpha \leq 1$, yra fiksuotas parametras. Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s},$$

ir yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą. Yra žinoma, kad funkcija $\zeta(s, \alpha)$, su kai kuriomis parametro α reikšmėmis, yra universali ta prasme, kad jos postūmiai $\zeta(s + i\tau, \alpha)$, $\tau \in \mathbb{R}$ aproksimuoja kiekvieną analizinę funkciją.

Beto, Hurvico dzeta funkcija turi jungtinio universalumo savybę. Tai reiškia, kad kiekvienas analizinių funkcijų rinkinys gali būti aproksimuojamas postūmių $\zeta(s+i\tau, \alpha_1), \ldots, \zeta(s+i\tau, \alpha_r)$ rinkiniu.

Magistro darbe nagrinėjame sudėtinių funkcijų $F(\zeta(s, \alpha_1), \ldots, \zeta(s, \alpha_r))$ universalumą kai kurioms funkcijų $F : H^r(D) \to H(D)$ klasėms, čia $H(D)$ yra analizinių funkcijų erdvė juostoje $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ su tolydaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija. Pateiksime pavyzdį. Tarkime, kad aibė

$$\{\log(m + \alpha_j) : m \in \mathbb{N}_0, \; j = 1, \ldots, r\}$$

yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno, o $F : H^r(D) \to H(D)$ yra tokia tolydi funkcija, kad su kiekviena atvira aibe $G \subset H(D)$ aibė $F^{-1}G$ yra netuščia. Tegul K yra D kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, o funkcija $f(s)$ yra tolydi aibėje K ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau, \alpha_1), \ldots, \zeta(s + i\tau, \alpha_r)) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

1. ĮVADAS

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o α, $0 < \alpha \leq 1$, yra fiksuotas parametras. Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s,\alpha)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama eilute

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}.$$

Tokio pavidalo funkcinės eilutės yra vadinamos Dirichlė eilutėmis, jų bendras pavidalas

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s},$$

čia a_m yra kompleksiniai skaičiai. Iš Dirichlė eilučių savybių išplaukia, kad $\zeta(s,\alpha)$ yra analizinė pusplokštumėje $\sigma > 1$. Beto, ji yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Kai $\alpha = 1$, tai funkcija $\zeta(s,\alpha)$ virsta Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

Be to, yra teisinga lygybė

$$\zeta(s,\frac{1}{2}) = (2^s - 1)\zeta(s).$$

Kadangi funkcija $\zeta(s,\alpha)$ priklauso nuo parametro α, tai jos analizinės savybės priklauso nuo to parametro aritmetinės prigimties. Šis parametras gali būti racionalusis, transcendentusis arba algebrinis įracionalusis skaičius. α yra vadinamas transcendenčiuoju jeigu jis nėra polinomo šaknis su racionaliaisiais koeficientais, ir yra vadinamas algebriniu, jei yra polinomo su racionaliaisiais koeficientais šaknis. Kai kuriais atvejais transcendenčiojo parametro α atvejis yra pats paprasčiausias, kadangi aibė $\{\log(m,\alpha) : \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno.

Yra žinoma, [1], [3], kad funkcija $\zeta(s,\alpha)$ su transcendenčiuoju arba racionaliuoju $\neq 1, \frac{1}{2}$ parametru α yra universali ta prasme, kad jos postūmiai $\zeta(s+i\tau,\alpha)$, $\tau \in \mathbb{R}$ aproksimuoja norimu tikslumu kiekvieną analizinę funkciją. Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$, o $meas\{A\}$ yra mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas. Griežtas funkcijos $\zeta(s,\alpha)$ universalumo savybės formulavimas yra toks.

1.1 teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis arba racionalusis $\neq 1, \frac{1}{2}$ skaičius, K yra kompaktinė juostos D aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra tolydi aibėje K ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Teoremos nelygybė parodo, kad postūmių $\zeta(s+i\tau,\alpha)$, aproksimuojačių norimu tikslumu duotą analizinę funkciją $f(s)$,aibė yra begalinė, ji netgi turi teigiamą apatinį tankį. Atveju $\alpha = 1, \frac{1}{2}$

funkcija $\zeta(s,\alpha)$ taip pat yra universali, tačiau šiuo atveju aproksimuojama funkcija turi nevirsti 0 aibėje K.

Yra žinoma [5], kad kai kurios sudėtinės funkcijos $F(\zeta(s,\alpha))$ taip pat išlaiko unversalumo savybę aproksimuojant analizines funkcijas. Pateiksime vieną pavyzdį. Tegul $H(D)$ yra analizinių juostoje D funkcijų erdvė su tolydaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija. Šioje topologijoje seka $g_n(s) \in H(D)$, kai $n \to \infty$, konverguoja į funkciją $g(s) \in H(D)$, jei su bet kuria kompaktine aibe $K \subset D$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in K} |g_n(s) - g(s)| = 0.$$

Tegul $a_1, ..., a_r$ yra kokie nors kompleksiniai skaičiai, o $U_{H,a_1,...,a_r}$ yra tokių tolydžių funkcijų $F : H^r(D) \to H(D)$ klasė, kad $F(H(D)) \supset H_{a_1,...,a_r}(D)$, o

$$H_{a_1,...,a_r}(D) = \left\{ g \in H(D) : (g(s) - a_j)^{-1} \in H(D), j = 1, ..., r \right\}.$$

Tuomet yra teisingas toks tvirtinimas.

1.2 teorema. *Tarkime, kad α transcendentusis skaičius, o $F \in U_{H,a_1,...,a_r}$. Kai $r = 1$, tegul $K \subset D$ yra kompaktiškas poaibis, turintis jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra tolydi, $\neq a_1$ aibėje K ir analizinė jos viduje. Kai $r \geq 2$, tegul $K \subset D$ yra bet kuris kompaktinis poaibis, o funkcija $f(s) \in H_{a_1,...,a_r}(D)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau),\alpha) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Pavyzdžiui, iš šios teoremos išplaukia, kad $\sin(\zeta(s,\alpha))$ ir $\cos(\zeta(s,\alpha))$ yra universalios funkcijos. Šiuo atveju $r = 2$, o $a_1 = -1$, $a_2 = 1$.

Yra žinoma, kad dzeta ir L funkcijos turi ir jungtinę universalumo savybę. Šiuo atveju analizinių funkcijų rinkinys tuo pačiu metu tolygiai, kurios nors srities kompleksinėse aibėse yra aproksimuojamas dzeta arba L funkcijų postūmių rinkiniu. Pirmąjį tokio tipo rezultatą Dirichlė L funkcijoms įrodė S. M. Voroninas. Priminsime Dirichlė L funkcijų apibrėžimą. Tegul $\chi(m)$ yra Dirichlė charakteris moduliu q, t.y., $\chi(m)$ yra periodinė, su periodu q ($\chi(m+q) = \chi(m)$, $m \in \mathbb{N}$), visiškai multiplikatyvi ($\chi(mn) = \chi(m)\chi(n), m,n \in \mathbb{N}$) funkcija tenkinanti sąlygą

$$\chi(m) = \begin{cases} 0, & (m,q) > 1 \\ \neq 0, & (m,q) = 1. \end{cases}$$

Atitinkama Dirichlė L funkcija $L(s,\chi)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

Beto, funkcija $L(s,\chi)$ yra analiziškai pratęsiama į visą s plokštumą, jei χ nėra pagrindinis charankteris. Jei χ pagrindinis charakteris, tai funkcija $L(s,\chi)$ taške $s = 1$ turi paprastąjį polių. Du Dirichlė charakteriai vadinami ekvivalenčiais, jeigu jie yra generuojami to paties primityvaus charakterio. Šias sąvokas galima rasti [7] monografijoje.

Yra teisingas toks tvirtinimas [8].

1.3 teorema. *Tarkime, kad* $\chi_1,...,\chi_r$ *yra poromis neekvivalentūs Dirichlė charakteriai. Su kiekvienu* $j=1,...,r$*,* K_j *yra juostos* D *kompaktinė aibė turinti jungųjį papildinį, o funkcija* $f_j(s)$ *yra tolydi,* $\neq 0$ *aibėje* K_j *ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T]:\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K_j}|L(s+i\tau,\chi_j)-f_j(s)|<\varepsilon\}>0.$$

Yra žinoma, kad Hurvico dzeta funkcijos taip pat turi jungtinę universalumo savybę. Visiems $j=1,...,r$, tegul $\alpha_j\in\mathbb{R}$, $0<\alpha_j\le 1$, o $\zeta(s,\alpha_j)$ yra atitinkama Hurvico dzeta funkcija.

Apibrėžiame aibę

$$L(\alpha_1,...,\alpha_r)=\{\log(m+\alpha_j):m\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\},j=1,...,r\}.$$

Tuomet [4] darbe buvo įrodyta tokia teorema.

1.4 teorema. *Tarkime, kad aibė* $L(\alpha_1,...,\alpha_r)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno* $\mathbb{Q}$*. Su kiekvienu* $j=1,...,r$*,* K_j *yra juostos* D *kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija* $f_j(s)$ *yra tolydi aibėje* K_j *ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon>0$

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T]:\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K_j}|\zeta(s+i\tau,\alpha_j)-f_j(s)|<\varepsilon\}>0.$$

Magistro darbo tikslas yra gauti kai kurioms funkcijų F klasėms sudėtinių funkcijų $F(\zeta(s,\alpha_1),...,\zeta(s,\alpha_r))$ universalumą. Viena iš tokių funkcijų F klasių yra aprašoma taip. Tegul

$$H^r(D)=\underbrace{H(D)\times...\times H(D)}_{r}.$$

Sakome, kad $F:H^r(D)\to H(D)$ priklauso klasei $Lip(\beta_1,...,\beta_r)$, $\beta_1,...,\beta_r>0$, jei yra išpildytos sąlygos:

1° Su kiekvienu polinomu $p=p(s)$ egzistuoja elementas $\underline{g}\in F^{-1}\{p\}\subset H^r(D)$;

2° Kiekvieną kompaktinę aibę $K\subset D$, turinčią jungųjį papildinį, atitinka konstanta $c>0$ ir kompaktinės aibės $K_1,...,K_r\subset D$, turinčios jungiuosius papildinius, kad su bet kuriomis $(g_{j1},..,g_{jr})\in H^r(D)$, $j=1,2$, yra teisinga nelygybė

$$\sup_{s\in K}|F(g_{11}(s),...,g_{1r}(s))-F(g_{21}(s),...,g_{2r}(s))|\le c\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K_j}|g_{1j}(s)-g_{2j}(s)|^{\beta_j}.$$

1.5 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha_1,...,\alpha_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o $F \in Lip(\beta_1,...,\beta_r)$. Tegul $K \subset D$ yra kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra tolydi aibėje K ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau,\alpha_1),...,\zeta(s+i\tau,\alpha_r)) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Dabar suformuluosime 1.5 teoremos analogus kitoms funkcijų F klasėms.

1.6 teorema. *Tarkime $L(\alpha_1,...,\alpha_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o $F : H^r(D) \to H(D)$ yra tokia tolydi funkcija, kad su kiekviena atvira aibe $G \subset H(D)$ aibė $F^{-1}G$ yra netuščia. Tegul K ir $f(s)$ yra tokios pačios kaip ir 1.5 teoremoje. Tuomet yra teisingas 1.5 teoremos tvirtinimas.*

Tegul $a_1,...,a_k \in \mathbb{C}$ apibrėžia aibę

$$H_{a_1,...,a_k}(D) = \{g \in H(D) : (g(s) - a_j)^{-1} \in H(D), j = 1,...,k\}.$$

1.7 teorema. *Tarkime $L(\alpha_1,...,\alpha_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o $F : H^r(D) \to H(D)$ yra tokia tolydi funkcija, kad $F(H^r(D)) \supset H_{a_1,...,a_k}(D)$. Kai $k = 1$, tegul $k \subset D$ yra kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra tolydi, $\neq a_1$ aibėje K ir analizinė jos viduje. Kai $k \geq 2$, tegul $K \subset D$ yra bet kokia kompaktinė aibė, o $f(s) \in H_{a_1,...,a_k}(D)$. Tuomet yra teisingas 1.5 teoremos tvirtinimas.*

Funkcijų F pavyzdžiai bus pateikti vėliau.

1.5 teorema tiesiogiai išplaukia iš 1.4 teoremos, o 1.5 ir 1.6 teoremų įrodymui yra naudojamas tikimybinis metodas.

2. TIKIMYBIŲ TEORIJOS ELEMENTAI

Šiame skyrelyje pateiksime kai kuriuos rezultatus, reikalingus tikimybinio metodo taikymui įrodinėjant universalumo teoremas. Pirmiausia priminsime tikimybinio mato sąvoką.

Tarkime, kad Ω yra bet kuri netuščia aibė. Šios aibės poaibių sistema $\mathcal{A}$ yra vadinama σ kūnu, jeigu yra išpildomos sąlygos:

1° $\Omega \in \mathcal{A}$;

2° Jei $A \in \mathcal{A}$, tai ir $A^c \in \mathcal{A}$;

3° Jei $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$, tai ir $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Pora $(\Omega, \mathcal{A})$ yra vadinama mačia erdve.

Neneigiama aibės funkcija $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ yra vadinama tikimybiniu matu, apibrėžtu mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{A})$, jei galioja sąlygos:

1° $P(\Omega) = 1$;

2° Jei $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ ir $A_j \cap A_k = \emptyset$, $j \neq k$, tai $P(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} P(A_j)$.

Pastaroji mato P savybė yra vadinama σ adityvumu.

Trejetas $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ yra vadinamas tikimybine erdve.

Tegul S yra metrinė erdvė (bendru atveju S gali būti topologinė erdvė). σ kūnas, generuotas erdvės S atvirųjų aibių sistemos, t.y., minimalus σ kūnas, kuriam priklauso erdvės S atvirųjų aibių sistema, yra vadinamas erdvės S Borelio σ kūnu, arba Borelio aibių klase, ir yra žymimas $\mathcal{B}(S)$.

Funkcija $X : \Omega \to S$ yra vadinama S reikšmiu atsitiktiniu elementu, apibrėžtu tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, jeigu su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(S)$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{A}.$$

Kitais žodžiais tariant, atsitiktinis elementas X yra $(\mathcal{B}(S), \mathcal{A})$ mati funkcija.

Atsitiktinio elemento pasiskirstymu yra vadinamas tikimybinis matas P_X erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$, apibrėžiamas formule

$$P_X(A) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}, A \in \mathcal{B}(S).$$

Universalumo teoremos įrodymas remiasi ribinėmis teoremomis apie silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą analizinių funkcijų erdvėje. Todėl priminsime silpnojo tikimybinių matų konvergavimo apibrėžimą ir kai kurias jo savybes.

Tegul S yra metrinė erdvė su savo Borelio σ kūnu, o P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Sakome, kad P_n, $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, jei su kiekviena realia, tolydžia, aprėžta funkcija f erdvėje S yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S f dP_n = \int\limits_S f dP$$

Pagal šį apibrėžimą nėra lengva patikrinti silpnąjį matų konvergavimą, todėl yra naudojami įvairūs silpnojo matų konvergavimo ekvivalentai įvairių tipų aibių terminais. Mums bus reikalingas toks ekvivalentas, naudojantis atvirąsias aibes.

2.1 lema *P_n, $n \to \infty$, silpnai konverguoja į P tada ir tik tada, kai su kiekviena atvirąja aibe $G \subset S$, yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{n\to\infty} P_N(G) \geq P(G).$$

Lema yra 2.1 teoremos iš [2] dalis. Čia yra duotas ir jos įrodymas.

Dar mums bus reikalingas silpnasis tikimybinių matų konvergavimas kai turime dviejų metrinių erdvių atvaizdžius. Tegul S_1 ir S_2 yra dvi metrinės erdvės su jų Borelio σ kūnais $\mathcal{B}(S_1)$ ir $\mathcal{B}(S_2)$. Funkcija $h : S_1 \to S_2$ yra vadinama $(\mathcal{B}(S_1), \mathcal{B}(S_2))$ mačia, jeigu yra teisingas sąryšis

$$h^{-1}\mathcal{B}(S_2) \subset \mathcal{B}(S_1).$$

Tai reiškia, kad su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(S_2)$ pirmavaizdis $h^{-1}A \in \mathcal{B}(S_1)$.

Tegul $h : S_1 \to S_2$ yra $(\mathcal{B}(S_1), \mathcal{B}(S_2))$ mati funkcija. Tuomet yra žinoma [2], kad kiekvienas tikimybinis matas P erdvėje $(S_1, \mathcal{B}(S_1))$ apibrėžia vienintelį tikimybinį matą Ph^{-1} erdvėje $(S_2, \mathcal{B}(S_2))$ formule

$$Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A), A \in \mathcal{B}(S_2).$$

Yra įrodoma, kad jei funkcija $h : S_1 \to S_2$ yra tolydi, tai yra ir $(\mathcal{B}(S_1), \mathcal{B}(S_2))$ mati. Dažnai yra naudojamas toks paprastas tvirtinimas.

2.2 lema. *Tarkime, kad funkcija $h : S_1 \to S_2$ yra tolydi, P_n, $n \in \mathbb{N}$ ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S_1, \mathcal{B}(S_1))$ ir P_n, $n \to \infty$ silpnai konverguoja į matą P. Tuomet $P_n h^{-1}$, $n \to \infty$, taip pat silpnai konverguoja į matą Ph^{-1}.*

Lemos įrodymas yra duotas [2] monografijoje.

Universalumo teoremų įrodymui dar yra reikalingas tam tikrų tikimybinių matų atramos išreikštinis pavidalas. Todėl primename tikimybinio mato atramos apibrėžimą. Tegul P yra tikimybinis matas erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$, o metrinė erdvė yra separabili. Minimali, uždara aibė $A \subset S$ yra vadinama mato P atrama, jei $P(A) = 1$. Atrama A sudaryta iš tų erdvės S elementų a, kurių kiekvienai atvirajai aplinkai G galioja nelygybė

$$P(G) > 0.$$

3. PAGALBINIAI REZULTATAI

Šiame skyrelyje pateiksime įvairaus pobūdžio rezultatus, kurie tiesiogiai naudojami universalumo teoremų įrodymui.

Tegul γ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}$, t.y., $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. Apibrėžiame aibę

$$\Omega = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m,$$

sandaugos ženklas reiškia Dekarto sandaugą, o $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Aibė Ω yra vadinama begaliniamačiu toru, ją sudaro visos funkcijos, atvaizduojančios aibę $\mathbb{N}_0$ vienetiniame apskritime γ. Aibėje Ω galima apibrėžti pataškinės daugybos operaciją bei sandaugos topologiją [6]. Tuomet aibė Ω tampa topologine grupe. Kadangi vienetinis apskritimas yra kompaktinė aibė, tai iš Tichonovo teoremos [6] išplaukia, kad vienetinių apskritimų sandauga taip pat yra kompaktinė aibė. Taigi gauname, kad Ω yra kompaktinė topologinė erdvė. Yra žinoma, kad kiekvienoje topologinėje grupėje galima apibrėžti tikimybinį Haro matą. Taigi, erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis Haro matas μ_H. Haro matas iš kitų tikimybinių matų išsiskiria invariantiškumo savybe, kurios esmė yra tokia: su kiekviena $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ ir kiekvienu elementu $\omega \in \Omega$ yra teisingos lygybės

$$\mu_H(A) = \mu_H(\omega A) = \mu_H(A\omega).$$

Abibrėžiame dar vieną aibių Dekarto sandaugą

$$\Omega^r = \Omega_1 \times ... \times \Omega_r,$$

čia $\Omega_j = \Omega$, visiems $j = 1, ..., r$. Kadangi Ω yra kompaktinė topologinė erdvė, tai pagal Tichonovo teoremą turime Ω^r taip pat yra kompaktinė topologinė erdvė. Todėl erdvėje $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r))$ galime apibrėžti tikimybinį Haro matą m_H. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r), m_H)$. Tegul $\omega_j(m)$ yra elemento $\omega_j \in \Omega_j$, $j = 1, ..., r$, projekcija į vienetinį apskritimą γ_m, $m \in \mathbb{N}_0$. Grupės Ω^r elementus žymėsime simboliu $\omega = (\omega_1, ..., \omega_r)$, $\omega_j \in \Omega$, $j = 1, ..., r$. Tegul, trumpumo dėlei, $\underline{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_r)$. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r), m_H)$ apibrėžiame $H^r(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą $\zeta(s, \omega, \underline{\alpha})$ formule

$$\zeta(s, \omega, \underline{\alpha}) = (\zeta(s, \omega_1, \alpha_1), ..., \zeta(s, \omega_r, \alpha_r)),$$

čia

$$\zeta(s, \omega_j, \alpha_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega_j(m)}{(m + \alpha_j)^s}, \; j = 1, ..., r.$$

Tegul P_ζ yra atsitiktinio elemento $\zeta(s, \omega, \alpha)$ pasiskirstymas, t.y.,

$$P_\zeta(A) = m_H(\omega \in \Omega^r : \zeta(s, \omega, \underline{\alpha}) \in A), A \in \mathcal{B}(H^r(D)).$$

1.4 teoremos įrodyme pagrindinį vaidmenį atlieka ribinė teorema apie silpnąjį mato

$$P_T(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \zeta(s+i\tau,\underline{\alpha}) \in A\}, A \in \mathcal{B}(H^r(D)),$$

konvergavimą. Čia

$$\zeta(s,\underline{\alpha}) = (\zeta(s,\alpha_1),...,\zeta(s,\alpha_r)).$$

Minėta teorema mums bus reikalinga, todėl ją pateikiame atskira lema.

3.1 lema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha_1,...,\alpha_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tuomet matas P_T, $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_ζ.*

Lemos įrodymą galima rasti [4] straipsnyje.

Dabar įrodysime ribinę teoremą sudėtinei funkcijai $F(\zeta(s,\alpha))$.

3.2 lema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha_1,...,\alpha_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o funkcija $F : H^r(D) \to H(D)$ yra tolydi. Tuomet tikimybinis matas*

$$P_{T,F} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : F(\zeta(s+i\tau),\underline{\alpha}) \in A\}, A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_\zeta F^{-1}$.

Įrodymas. Iš matų P_T ir $P_{T,F}$ apibrėžimų matome, kad

$$P_{T,F}(A) = \frac{1}{T}\{\tau \in [0,T] : \zeta(s+i\tau,\underline{\alpha}) \in F^{-1}A\} = P_T(F^{-1}A) = P_T F^{-1}(A)$$

su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(H(D))$. Taigi, turime, kad $P_{T,F} = P_T F^{-1}$, Iš čia bei 3.1 ir 2.2 lemų gauname, kad matas $P_{T,F}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_\zeta F^{-1}$. □

Dabar formuluosime tvirtinimus apie tikimybinių matų atramas.

3.3 lema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha_1,...,\alpha_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tuomet mato P_ζ atrama yra visa erdvė $H^r(D)$.*

Lemos įrodymas yra duotas [4] straipsnyje.

3.4 lema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha_1,...,\alpha_r)$ ir funkcija $F : H^r(D) \to H(D)$ tenkina 1.6 teoremos sąlygas. Tuomet mato $P_\zeta F^{-1}$ atrama yra visa erdvė $H(D)$.*

Įrodymas. Tegul g yra bet kuris erdvės $H(D)$ elementas, o G yra bet kuri atviroji elemento g aplinka. Iš funkcijos F tolydumo išplaukia, kad aibė $F^{-1}G$ taip pat atvira ir pagal 1.6 teoremos sąlygą ji yra netuščia. Vadinasi, aibė $F^{-1}G$ yra bet kurio nors elemento $\underline{g} \in H^r(D)$ atviroji aplinka. Todėl iš 3.3 lemos ir mato atramos savybių gauname, kad

$$m_H(\omega \in \Omega^r : \zeta(s,\omega,\underline{\alpha}) \in F^{-1}G) > 0.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$m_H(\omega \in \Omega^r : F(\zeta(s,\omega,\underline{\alpha})) \in G) = m_H(\omega \in \Omega^r : \zeta(s,\omega,\underline{\alpha}) \in F^{-1}G) > 0.$$

Kadangi elementas g ir jo atviroji aplinka G buvo parinkti bet kaip, tai pastaroji lygybė rodo, kad mato $P_\zeta F^{-1}$ atrama yra visa erdvė $H(D)$. $\square$

3.5 lema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o funkcija $F: H^r(D) \to H(D)$ yra tolydi. Tuomet mato $P_\zeta F^{-1}$ atramai priklauso aibės $F(H^r(D))$ uždarinys.*

Įrodymas. Samprotaujame panašiai 3.4 lemos įrodymui. Imame bet kurį aibės $F(H^r(D))$ elementą g ir jo bet kurią atvirąją aplinką G. Tuomet rasime tokį elementą $\underline{g} \in H^r(D)$, su kuriuo yra teisinga lygybė

$$F(\underline{g}) = g.$$

Iš čia ir funkcijos F tolydumo turime, kad atviroji aibė $F^{-1}G$ yra elemento $\underline{g}$ atviroji aplinka. Todėl iš 3.3 lemos ir atramos savybių išplaukia, kad

$$P_\zeta(F^{-1}G) > 0$$

Todėl

$$P_\zeta F^{-1}(G) = P_\zeta(F^{-1}G) > 0.$$

Beto,

$$P_\zeta F^{-1}(F(H^r(D))) = P_\zeta(F^{-1}F(H^r(D))) = P_\zeta(H^r(D)) = 1.$$

Tai reiškia, kad mato $P_\zeta F^{-1}$ atramai priklauso aibė $F(H^r(D))$. Kadangi atrama yra uždara aibė, tai to mato atramai priklauso aibės $F(H^r(D))$ uždarinys. $\square$

4. TEOREMŲ ĮRODYMAI

Visų magistro darbo teoremų įrodymui bus reikalinga Mergeliano teorema apie analizinės funkcijos aproksimavimą polinomais. Patogumo dėlei šią teoremą formuluosime atskiros lemos pavidalu.

4.1 lema. *Tarkime, kad K yra kompleksinės plokštumos kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra tolydi aibėje K ir analizinė jos viduje. Tuomet kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks polinomas $p(s)$, kad*

$$\sup_{s\in K}|f(s)-p(s)|<\varepsilon.$$

Lemos įrodymą galima rasti [9] monografijoje.

1.5 teoremos įrodymas. Ši teorema yra tiesioginė 1.4 teoremos ir 4.1 lemos išvada. Pagal 4.1 lemą egzistuoja toks polinomas $p = p(s)$, su kuriuo

$$\sup_{s\in K}|f(s)-p(s)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.1}$$

Remdamiesi klasės $Lip(\beta_1,...,\beta_r)$ 1° sąlyga, turime, kad egzistuoja elementas $(g_1(s),...,g_r(s)) \in F^{-1}\{p\} \subset H^r(D)$. Tarkime, kad realieji skaičiai τ tenkina nelygybę

$$\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K_j}|\zeta(s+i\tau,\alpha_j)-g_j(s)|<c^{-\frac{1}{\beta}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \tag{4.2}$$

kurioje juostos D kompaktinės aibės $K_1,...,K_r$ turi jungiuosius papildinius ir atitinka aibę K klasės $Lip(\beta_1,...,\beta_r)$ 2° sąlygoje, o $\beta = \min_{1\le j\le r}\beta_j$. Tuomet iš 2° sąlygos išplaukia, kad $\tau \in \mathbb{R}$, tenkinantiems (4.2) nelygybę, yra teisinga nelygybė

$$\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau,\alpha_1),...,\zeta(s+i\tau,\alpha_r))-p(s)| =$$
$$\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau,\alpha_1),...,\zeta(s+i\tau,\alpha_r))-F(g_1(s),...,g_r(s))| \le$$
$$c\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K_j}|\zeta(s+i\tau,\alpha_1),...,\zeta(s+i\tau,\alpha_r)-g_j(s)|^{\beta_j} \le cc^{-\frac{\beta}{\beta}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{\beta}{\beta}}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Vadinasi (4.2) nelygybė ir 1.4 teorema duoda nelygybę

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau,\underline{\alpha}))-p(s)|<\frac{\varepsilon}{2}\}>0. \tag{4.3}$$

Tačiau iš (4.1) nelygybės išplaukia, kad

$$\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau,\underline{\alpha}))-f(s)| \le$$
$$\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau,\underline{\alpha}))-p(s)|+\sup s\in K|f(s)-p(s)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Todėl

$$\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau,\underline{\alpha})) - f(s)| < \varepsilon\} \supset$$
$$\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau,\underline{\alpha})) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Vadinasi,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau,\underline{\alpha})) - f(s)| < \varepsilon\} \geq$$
$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau,\underline{\alpha})) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Iš čia ir (4.3) gauname, kad

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau,\underline{\alpha})) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

□

1.6 teoremos įrodymas. Vėl iš 4.1 lemos turime, kad egzistuoja toks polinomas $p(s)$, su kuriuo galioja (4.1) nelygybė. Apibrėžiame aibę

$$G = \{g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Tuomet G yra atvira polinomo $p(s)$ aplinka. Pagal 3.4 lemą, polinomas $p(s)$ yra mato $P_\zeta F^{-1}$ atramos elementas. Todėl yra teisinga nelygybė $P_\zeta F^{-1}(G) > 0$. Beto, iš 3.2 ir 2.1 lemų išplaukia, kad

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : F(\zeta(s+i\tau,\underline{\alpha})) \in G\} \geq P_\zeta F^{-1}(G).$$

Todėl

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : F(\zeta(s+i\tau,\underline{\alpha})) \in G\} > 0.$$

Iš čia ir aibės G apibrėžimo randame, kad

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau,\underline{\alpha})) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\} > 0.$$

Iš čia ir (4.1) nelygybės, kaip ir 4.1 teoremos įrodyme, gauname teoremos tvirtinimą. □

1.7 teoremos įrodymas. Atskirai nagrinėsime atvejus $k = 1$ ir $k \geq 2$.

Tarkime $k = 1$. Iš 4.1 lemos turime, kad egzistuoja toks polinomas $p(s)$, su kuriuo

$$\sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.4}$$

Kadangi $f(s) \neq a_1$ aibėje K, tai iš čia turime, kad $p(s)$ taip pat $\neq a_1$ aibėje K, jeigu tik ε yra pakankamai mažas skaičius. Todėl galime apibrėžti tolydžią logaritmo $\log(p(s) - a_1)$ šaką, kuri aibės A viduje bus analizinė funkcija. Pritaikę dar kartą 4.1 lemą, randame tokį polinomą $p_1(s)$, su kuriuo

$$\sup_{s\in K}|p(s)-a_1-e^{p_1(s)}|<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.5}$$

Aišku, kad funkcija $g_0(s)=e^{p_1(s)}+a_1$ yra analizinė juostoje D, t.y., $g_0(s)\in H(D)$, ir $g_0(s)\neq a_1$, nes $e^{p_1(s)}\neq 0$. Taigi turime, kad funkcija $g_0(s)\in H_{a_1}(D)$. Todėl, pagal teoremos hipotezes ir 3.5 lemą, funkcija $g_0(s)$ yra mato $P_\zeta F^{-1}$ atramos elementas. Beto, iš (4.4) ir (4.5) nelygybių išplaukia, kad

$$\sup_{s\in K}|f(s)-g_0(s)|\leq\sup_{s\in K}|f(s)-p(s)|+\sup_{s\in K}|p(s)-g_0(s)|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.6}$$

Apibrėžiame aibę

$$G_1=\{g\in H(D):\sup_{s\in K}|g(s)-g_0(s)|<\frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Tuomet ši aibė yra elemento, priklausančio mato $P_\zeta F^{-1}$ atramai, atviroji aplinka. Todėl $P_\zeta F^{-1}(G)>0$. Iš 3.2 ir 2.1 lemų ir aibės G apibrėžimo, gauname, kad

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau,\underline{\alpha}))-g_0(s)|<\frac{\varepsilon}{2}\}>0.$$

Iš čia ir (4.6) nelygybės išplaukia teoremos tvirtinimas atveju $k=1$, t.y.,

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau,\underline{\alpha}))-f(s)|<\varepsilon\}>0.$$

Atvejis $k\geq 2$ yra paprastesnis. Apibrėžiame aibę

$$G_2=\{g\in H(D):\sup_{s\in K}|g(s)-f(s)|<\varepsilon\}.$$

Tuomet iš teoremos sąlygų ir 3.5 lemos turime, kad G_2 mato $P_\zeta F^{-1}$ atramos elemento $f(s)$ atviroji aplinka. Todėl iš 3.2 ir 2.1 lemų išplaukia nelygybė

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau,\underline{\alpha}))-f(s)|<\varepsilon\}\geq P_\zeta F^{-1}(G_2)>0.$$

$\square$

LITERATŪRA

[1] B.Bagchi, The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, Ph. D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcuta, 1981.

[2] P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, Willey, New York, 1968.

[3] S. M. Gonek, Analytic properties of zeta and *L*-functions, Ph. D. Thesis, University of Michigan, 1979.

[4] A. Laurinčikas, The joint universality of Hurwitz zeta-functions, Šiauliai, Math. Semin. 3(11) (2008), 169-187.

[5] A. Laurinčikas, On the universality of the Hurwitz zeta-function, Intern. J. Number Theory 9 No. 1 (2013), 155-165.

[6] V. Paulauskas, A. Račkauskas, Funkcinė analizė, I knyga. Erdvės, Vilnius, 2007.

[7] K. Prachar, Raspledelenie prostych chysel, MIR, Maskva, 1967.

[8] J. Steuding, Value Distribution of *L*-Functions, Lecture Notes Math., vol. 1877, Springer Varlag, Berlin, Heidelberg, 2007.

[9] J. L. Walsh, Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. Colloq. Vol. 20, 1960.