ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

RENATA ČIUČKYTĖ

Magistro neakivaizdinių studijų matematikos studijų programos studentė

IŠSIGIMSTANČIOS DALINIŲ IŠVESTINIŲ SISTEMOS SPRENDINIŲ STRUKTŪRA

Magistro darbas

Darbo vadovas: prof. dr. D. Jurgaitis.

Katedros vedėjas: doc. V.Kanišauskas.

Šiauliai, 2006

TURINYS

1. Įvadas

Gamtoje nuolat vyksta įvairūs procesai, reiškiniai. Nagrinėjant tokius procesus, dažniausiai yra sudaromi matematiniai modeliai. Norint tiksliau aprašyti fizikinį procesą, reikia naudoti diferencialines lygtis, kadangi norima ištirti proceso priklausomybę nuo nepriklausomo kintamojo – laiko, įvertinti proceso vyksmo greitį – pirmoji funkcijos išvestinė, pagreitį – antroji funkcijos išvestinė.

Diferencialinė lygtis – lygybė, siejanti nepriklausomus kintamuosius, nežinomą funkciją ir jos išvestines [8]. Jei diferencialinėje lygtyje yra tik vienas nepriklausomas kintamasis, ją vadiname paprastąją diferencialine lygtimi, priešingu atveju – diferencialine dalinių išvestinių lygtimi. Išsprendę tiriamojo vyksmo matematinį modelį (diferencialinę lygtį) ir atsižvelgę į pradinius duomenis, randame to vyksmo kitimo dėsnį.

Kuo sudėtingesni procesai, tuo sudėtingesnės diferencialinės lygtys, aprašančios tuos procesus. Dažniau vartojamos diferencialinės lygtys dalinėmis išvestinėmis, nes realių procesų priklausančių tik nuo vieno kintamojo praktiškai nėra. Tiriant kelių tarpusavyje susijusių sudėtingų procesų vyksmą, sudaromos diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistemos. Tokių sistemų sprendinių analizinių išraiškų radimas yra dažnai nelengvas uždavinys. Be to, tokių uždavinių sprendimą apsunkina diferencialinių lygčių išsigimimas. Diferencialinės lygties išsigimimas reiškia, kad tam tikrų taškų aplinkose mažėja diferencialinės lygties eilė (tarkime, iš diferencialinės lygties gauname algebrinę lygtį ar panašiai). Sunkiausia yra spręsti diferencialines lygtis su ireguliariuoju eilės išsigimimu, kai išsigimimo laipsnis yra didesnis už ieškomosios funkcijos išvestinės, prieš kurią yra išsigimimo daugiklis, eilę.

Magistro darbe nagrinėjame keturių pirmos eilės diferencialinių lygčių sistemą dalinėmis išvestinėmis, su x laipsniu p+1 eilės išsigimimu, kai p = 0. Nagrinėjamoji sistema turi laipsninį išsigimimą ir yra žinomos Moisilo Teodoresko sistemos apibendrinimas [10]. Nagrinėjamos sistemos išsigimimas taškuose x=0 yra reguliarusis, atitinkantis paprastųjų diferencialinių lygčių eilės išsigimimą, o kada sistemos koeficientai priklauso nuo kintamųjų, pagal kuriuos dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema neišsigimsta, turime analogo analizinėje išsigimusių paprastųjų diferencialinių lygčių teorijoje neturinčio, išsigimimo atvejį, kurį sekdami [16] vadiname kvazireguliariuoju išsigimimu.

Dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą spręsime apibendrintųjų laipsninių eilučių metodu, išdėstytu [16], ir jį modifikuosime. Šis metodas plačiai taikomas išsigimusių tiesinių paprastųjų diferencialinių lygčių ir jų sistemų sprendimui.

Nagrinėsime du atvejus: bendrąjį ir kai sistemos koeficientų pradinė matrica yra specialios struktūros. Patikrinsime, kaip pasikeis sistemos sprendiniai nuo koeficientų, esančių prie dalinių išvestinių. Ieškosime sistemos analizinių sprendinių visur, išskyrus galbūt sistemos eilės išsigimimo taškus. Trečiajame ir ketvirtajame paragrafe yra nagrinėjami įvairūs reguliariojo išsigimimo atvejai ir kvazireguliarusis išsigimimas. Darbe bandysime rasti išsigimusios dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos sprendinius, išsiaiškinti sprendinių struktūrą bei jų elgseną išsigimimo taškų aplinkoje. Darbo rezultatai yra pateikiami išvadose.

2. Uždavinio formulavimas

Magistro darbe nagrinėjama keturių tiesinių diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistema:

$$\begin{cases} x^{p+1}(a\frac{\partial u_2}{\partial x}+b\frac{\partial u_2}{\partial y}+b\frac{\partial u_3}{\partial x}+c\frac{\partial u_3}{\partial y}+d\frac{\partial u_4}{\partial z})+\sum_{j=1}^{4}a_{1j}(x,y,z)u_j=0 \\ x^{p+1}(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_4}{\partial y}-\frac{\partial u_3}{\partial z})+\sum_{j=1}^{4}a_{2j}(x,y,z)u_j=0 \\ x^{p+1}(-\frac{\partial u_4}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial z})+\sum_{j=1}^{4}a_{3j}(x,y,z)u_j=0 \\ x^{p+1}(\frac{\partial u_3}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_1}{\partial z})+\sum_{j=1}^{4}a_{4j}(x,y,z)u_j=0 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Šioje sistemoje:

- *x, y, z* – apskritai nepriklausomi kompleksiniai kintamieji;
- a, b, c, d – žinomos konstantos.

u(x,y,z)= $\begin{pmatrix} u_1(x,y,z) \\ u_2(x,y,z) \\ u_3(x,y,z) \\ u_4(x,y,z) \end{pmatrix}$ – ieškomasis keturmatis vektorius stulpelis;

A(x,y,z)= {a_{ij}(x, y, z) =const} i = 1,2,3,4 j = 1,2,3,4 ketvirtos eilės kvadratinė matrica – funkcija, kurios elementai yra holomorfinės funkcijos policilindre D: {(x,y,z) / |x| < r, |y-y_0| <r_1, |z-z_0| <r_2 }.

Ieškosime (1) sistemos sprendinių, kurie būtų analiziniai policilindre P(x,y,z) = {(x,y,z) / |x| < r, |y| < r_1, |z| < r_2 }visur, išskyrus galbūt išsigimimo hiperplokštumos T = {x | x = 0} taškus.

Diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistemos (1) koeficientai yra išdėstomi konverguojančia x = 0 aplinkoje laipsnine eilute:

$$a(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^{(k)}{}_{ij}(y,z)x^k, \ k \in Z_0 . \qquad \textbf{(2)}$$

(1) sistemą užrašydami matricine forma naudosime tokius žymenis:

- $E=\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \ I_1=\begin{vmatrix} 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \ I_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

Tai matricos, sudarytos iš koeficientų, esančių prie ieškomųjų funkcijų dalinių išvestinių, pagal nepriklausomą kintamąjį x, $\frac{\partial u_j}{\partial x}$, y, $\frac{\partial u_j}{\partial y}$, z, $\frac{\partial u_j}{\partial z}$.

Panaudojus matematinės kompiuterinės programos Mathcad paketą, apskaičiuojame matricų E, I_1, I_2 determinantus:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ I_1 = \begin{pmatrix} 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tirdami nagrinėjamosios sistemos sprendinių struktūrą, turėsime atsižvelgti į sistemos matricų, esančių prie dalinių išvestinių pagal nepriklausomus kintamuosius, determinantų reikšmes. Šiose tyrimuose svarbu, ar minėtos matricos yra išsigimusios, t.y. ar jų determinantai lygūs nuliui, ar ne. Jeigu minėtos matricos neišsigimusios, tai egzistuoja jų atvirkštinės matricos ir tada žymiai paprasčiau ir kompaktiškiau galima užrašyti nagrinėjamos sistemos sprendinius. Dabar ir išsiaiškinsime šiuos faktus.

Jei a = -1, o b = 0, tai gauname, kam lygu matricos E determinantas

$$\det E = |E| = 1.$$

Jei c = -1, o b = 0, tai matricos I_1 determinantas yra:

$$\det I_1 = |I_1| = 1.$$

Jei d = -1, tai matricos I_2 detreminantas lygus

$$\det I_2 = |I_2| = 1.$$

Dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema turi sprendinius tada ir tik tada, kai matricos determinantas nelygus nuliui, t.y.

$$\det |E| \neq 0.$$

Dalinių išvestinių diferencialinės lygčių sistemos negalime spręsti atvirkštinės matricos metodu. Jei det |E| = 0, tai iš to seka, kad E^{-1} neegzistuoja. Remiantis tiesinės algebros formulėmis, atvirkštinę matricą užrašome taip:

$$E^{-1} = \frac{1}{\det E} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}.$$

Iš čia matome, kad ρ liks nenustatytas, kai det |E| = 0, nes dalyba iš nulio yra negalima. Todėl ρ nustatyti galime tik tada, kai det |E| $\neq 0$.

- $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - nulinis vektorius stulpelis.

Pasinaudojame minėtais žymenimis ir (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą užrašome kaip matricinę dalinių išvestinių diferencialinę lygtį:

$$x \cdot (E\frac{\partial u}{\partial x} + I_1 \frac{\partial u}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u}{\partial z}) + A \cdot u = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Akivaizdu, jog atlikus veiksmus su matricomis (3), gausime (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą. Kai x = 0, tai išsigimsta (1) sistemos eilė ir dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema virsta tokio pavidalo sistema:

$$A(x,y,z)\, u(x,y,z)=O. \qquad \textbf{(3a)}$$

(3a) lygčių sistema yra algebrinė, o ne diferencialinė. Jeigu į x nekreiptume dėmesio, tai (1) sistema yra elipsinių diferencialinių lygčių sistema.

Iš analizinės paprastųjų diferencialinių lygčių teorijos yra žinoma, kad išsigimusių paprastųjų diferencialinių lygčių sistemos sprendinių struktūra iš esmės skiriasi, kai laipsninės funkcijos, esančios prie aukščiausios eilės išvestinės yra didesnės už išvestinės eilę ir kada jos yra mažesnės. Tai atitiktų nagrinėjamosios sistemos atvejį, kada $p = 0$ ir kada $p > 0$. Minėtoje teorijoje šis faktas atitiktų reguliarųjį ir ireguliarųjį paprastųjų diferencialinių lygčių sistemų eilės išsigimimą. Ireguliarusis paprastųjų diferencialinių lygčių ir jų sistemų atvejis yra žymiai sudėtingesnis už reguliarųjį, o reguliariojo išsigimimo atvejis išsigimusiai dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemai – dar sudėtingesnis, todėl šiame darbe nagrinėjame (1) išsigimusią dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą , kai $p = 0$.

3. Dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos sprendinių struktūra kvazireguliaraus išsigimimo atveju

Paprastumo dėlei vietoje (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos nagrinėkime matricinę dalinių išvestinių diferencialinę lygtį:

$$x\cdot(E\frac{\partial u}{\partial x}+I_1\frac{\partial u}{\partial y}+I_2\frac{\partial u}{\partial z})+A\cdot u=0 \quad . \tag{4}$$

(4) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties eilė taškuose x = 0 išsigimsta ir lygtis iš pirmos eilės diferencialinės lygties tampa tokia algebrine lygčių sistema: A(x,y,z) u(x,y,z) = O. Ieškosime (4) matricinės diferencialinės lygties sprendinių, kurie būtų analiziniai visur, išskyrus galbūt eilės išsigimimo taškus. Todėl (4) matricinę dalinių išvestinių diferencialinę lygtį spręsime apibendrintųjų laipsninių eilučių metodu, t.y. ieškomąją funkciją u(x,y,z) dėstome x laipsnių eilute.

Priimame reikalavimą, kad (4) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties koeficientų matricos A(x,y,z) elementams galioja x laipsnių eilute:

$$\text{A(x,y,z)}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k A_k(y,z)\,. \tag{5}$$

Hiperplokštumos x = 0 taškai yra (1) sistemos reguliarūs eilės išsigimimo taškai, kada p = 0. Nagrinėkime (4) matricinę dalinių išvestinių diferencialinę lygtį

$$x\cdot(E\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}+I_1\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}+I_2\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z})+\sum_{k=0}^{\infty}A_k(y,z)x^k u(x,y,z)=0 \tag{5a}$$

ir joje imkime p = 0.

Šiame paragrafe suformuluosime pagrindinius rezultatus apie šios lygties sprendinius. Informaciją apie šios sistemos sprendinių radimą atskiru atveju galima rasti [7].

1 teorema. Jeigu visi (5a) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties koeficientų matricos A(x,y,z) dėstinio laipsnine eilute (5) koeficientai $A_k(y,z)$, k = 0,1,2,… priklauso nuo kintamųjų y ir z, tai (5a) formalūs sprendiniai išreiškiami tokia apibendrinta laipsnine x laipsnių eilute

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho(y,z)}u_k(y,z,s)\,. \tag{6}$$

Čia ρ(y,z) - kintamųjų y ir z funkcija parametras, s = lnx – naujas nepriklausomas kintamasis.

Taikome apibendrintą laipsninių eilučių metodą išdėstytą [5].

(4) matricinėje diferencialinėje lygtyje yra ieškomosios funkcijos dalinės išvestinės pagal kintamuosius x, y, ir z, todėl randame tas išvestines. Diferencijuodami (6) pagal kintamuosius x, y, z gauname tokias lygybes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho-1}((k+\rho)u_k + \frac{\partial u_k}{\partial s}), \quad \textbf{(7)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho}(s \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} u_k + \frac{\partial u_k}{\partial s}), \quad \textbf{(8)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho}(s \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} u_k + \frac{\partial u_k}{\partial s}). \quad \textbf{(9)}$$

(5), (6), (7), (8), (9) įrašę į (4) gauname:

$$x \cdot \left\{ E\sum_{k=0}^{\infty}((k+\rho)u_k + \frac{\partial u_k}{\partial s}) \cdot x^{k+\rho-1} + I_1 \sum_{k=0}^{\infty}(s \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} u_k + \frac{\partial u_k}{\partial y}) \cdot x^{k+\rho} + I_2 \sum_{k=0}^{\infty}(s \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} u_k + \frac{\partial u_k}{\partial z}) + x^{k+\rho} \right\} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho} u_k = 0, \quad (10)$$

(10) lygtyje atlikę elementariuosius pertvarkymus gauname:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (E(k+\rho)x^{k+\rho}u_k + \frac{\partial u_k}{\partial s} x^{k+\rho} + s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z})u_k x^{k+\rho+1} + (I_1 \frac{\partial u_k}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_k}{\partial z})x^{k+\rho+1} +$$

$$+ A_0 + \sum_{l=0}^{k} A_l u_{k-l} x^{k+\rho}) = 0, \quad \textbf{(11)}$$

čia l = 0,….,k.

Kad rastume (6) eilutės koeficientus $u_k(y,z,s)$, (11) lygybėje koeficientus prie vienodų x-o laipsnių lyginame nuliui. Mažiausias x-o laipsnis (6) eilutėje yra ρ. Koeficientas prie x^ρ yra:

$$(E\rho + A_0) \cdot u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = 0. \quad \textbf{(12)}$$

Tęsdami toliau gauname, kad koeficientas prie $x^{\rho+1}$ yra

$$(E(\rho+1) + A_0)u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial s} + I_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_0}{\partial z} + s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z})u_0 + A_1 u_0 = 0. \quad \textbf{(13)}$$

O prie $x^{\rho+2}$ koeficientas yra

$$(E(\rho+2) + A_0)u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial s} + I_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} + s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z})u_1 + A_1 u_1 + A_2 u_0 = 0 \quad \textbf{(14)}$$

Iš (12), (13), (14) seka, kad koeficientas bet kokio x-o laipsnio ρ+k, k= 0, 1, 2, 3,… yra randamas iš šios rekurentinės formulės

$$(E(\rho+k) + A_0)u_k + \frac{\partial u_k}{\partial s} + I_1 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z})u_{k-1} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l} u_l = 0, \quad \textbf{(15)}$$

kurioje $u_k \equiv 0$, kai $k < 0$.

Iš (15), kai k = 0, gauname

$$(E\rho + A_0)\, u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = 0. \quad \textbf{(16)}$$

Pareikalaukime, kad u_0 nepriklausytų nuo s, t.y. $u_0 = u_0(y,z)$. Tuomet iš (16) gauname;

$$(\mathrm{E}\,\rho + A_0)\cdot u_0 = 0 \qquad \textbf{(16.1)}$$

Gavome tiesinių homogeninių lygčių sistemą, kurioje u_0 yra nežinomųjų vektorius stulpelis. Iš tiesinės algebros kurso žinoma, kad (16) tiesinių homogeninių lygčių sistema turės nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai

$$\det(E\rho(y,z)+A_0(y,z)) = 0. \qquad \textbf{(17)}$$

(17) lygybės funkcijos $\rho(y,z)$ atžvilgiu yra ketvirtojo laipsnio algebrinė lygtis, kuri bendruoju atveju virš kompleksinių skaičiaus lauko turi keturias $\rho_i(y,z)$, $i = 1,2,3,4$ šaknis. Pareikalaukime, kad šaknų skaičius nesikeistų visiems $(y,z) \in P$.

(17) lygybę, analogiškai kaip ir paprastųjų diferencialinių lygčių teorijoje, pavadinkime (3) sistemos nusakančiąja lygtimi.

Iš (17) formulės gavome $\rho_i(y,z)$, i= 1,2,3,4,… .Pagal pasirinktą ρ_i iš (16.1) lygybės vienareikšmiškai nustatome u_0. Telieka surasti visus kitus u_k, k= 1,2,3.... . Tuo tikslu (15) lygybę pertvarkome išreikšdami u_k per u_{k-1}.

$$(E(\rho+k)+A_0)u_k + \frac{\partial u_k}{\partial s} = -(s(I_1\frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial \rho}{\partial z})u_{k-1} + I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l}u_l), \qquad \textbf{(18)}$$

Mus domina tik patys paprasčiausi (18) lygties sprendiniai. Todėl y, z laikysime konstantomis. Tada funkcija u priklauso tik nuo s, t.y. u = u(s). u(s) atžvilgiu (18) yra tiesinė diferencialinė lygtis, kurią spręsime konstantų varijavimo metodu.

Pirmiausia kairiąją pusę prilyginame nuliui

$$(E(\rho+k)+A_0)u_k + \frac{\partial u_k}{\partial s} = 0. \qquad \textbf{(19)}$$

Tada atskyrę kintamuosius, gauname

$$\frac{du_k}{u_k} = -(E(\rho+k)+A_0)ds. \qquad \textbf{(20)}$$

Abi (20) lygybės puses suintegravę, gauname:

$$\ln u_k = -s(E(\rho+k)+A_0) + C(s) \qquad \textbf{(21)}$$

Iš (21) randame kam lygus u_k:

$$u_k = e^{-s(E(\rho+k)+A_0)}C(s). \qquad \textbf{(22)}$$

Šioje lygybėje yra nežinoma funkcija C(s). Kad ją rastume (22) lygybę diferencijuojame pagal s ir gauname:

$$u''_k = C''e^{-s(E(\rho+k)+A_0)} - C(E(\rho+k)+A_0)e^{-s(E(\rho+k)+A_0)}. \qquad \textbf{(23)}$$

(22) ir (23) įrašę į (18), gauname (24):

$$(E(\rho+k)+A_0)\cdot C\cdot e^{-s(E(\rho+k)+A_0)}+C'e^{-s(E(\rho+k)+A_0)}-C(E(\rho+k)+A_0)e^{-s(E(\rho+k)+A_0)}=$$
$$=-(s(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z})u_{k-1}+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l)$$

(24) lygybėje sutraukę panašius narius, gauname

$$C''\cdot e^{-s(E(\rho+k)+A_0)}=-(s(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z})u_{k-1}+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l). \quad \textbf{(25)}$$

Ši diferencialinė lygtis C(s) atžvilgiu yra tiesinė diferencialinė lygtis su atskiraisiais kintamaisiais. Atskyrę kintamuosius gauname

$$dC=-e^{s(E(\rho+k)+A_0)}\cdot(s(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z})u_{k-1}+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l. \quad \textbf{(26)}$$

Abi puses suintegravę, gauname

$$C=-\int e^{s(E(\rho+k)+A_0)}\cdot(s(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z})u_{k-1}+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l)ds+C. \quad \textbf{(27)}$$

C parenkame patys, tada C = 0.

(27) įrašę į (22) gauname, rekurentinę formulę, kai k = 1,2,…

$$u_k=-e^{s(E(\rho+k)+A_0}\cdot\int e^{s(E(\rho+k)+A_0)}\cdot(s(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z})u_{k-1}+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l)ds. \quad \textbf{(28)}$$

Iš šios rekurentinės formulės visi koeficientai $u_k(y,z,s)$, k = 1, 2,... randami vienareikšmiškai pagal laisvai pasirinktą $u_0(y,z)$, kuri yra analizinė kintamųjų y ir z funkcija. Teisinga tokia teorema:

2 teorema. Matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties (3) formalūs sprendiniai, kuomet diferencialinės lygties koeficientų matricos A(x,y,z) dėstinio laipsnine eilute koeficientai priklauso nuo kintamųjų y ir z yra (6)

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho(y,z)}u_k(y,z,s),$$

čia ρ randame iš (17)

$$\det(E\rho(y,z)+A_0(y,z))=0.$$

u_k randamas iš (28) lygybės, k = 0, 1, 2,..., o u_0 parenkamas laisvai toks, kad nepriklausytų nuo s ir priklausytų tik nuo kintamųjų y ir z.

Toliau ištirsime laipsninės eilutės (6) konvergavimą. Tuo tikslu nagrinėkime (15) rekurentinę formulę. (6) eilutės konvergavimą tirsime mažorantų metodu, kuris išdėstytas monografoje [2].

Iš (5) lygybės seka, kad koeficientų A_k mažorantė yra tokio pavidalo, kurį galime rasti literatūroje [12]:

$$A_k \ll M^k, \quad \textbf{(29)}$$

čia M – žinoma pastovi ketvirtos eilės kvadratinė matrica. Čia ir toliau “ $<<$ “ žymėsime mažoravimo operaciją.

Tarkime, kad $u_k(y,z,s)$ mažorantė yra:

$$u_k(y,z,s) << Q^k(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-\alpha(k)}\cdot|s|^{\beta(k)} I\ , \tag{30}$$

kur Q- nežinoma konstanta; I – ketvirtos eilės vektorius-stulpelis, kurios visi elementai vienetai; $\alpha(k)$ ir $\beta(k)$ – dydžiai, kuriuos nustatysime vėliau. Kadangi $A_k(y,z)$ yra holomorfinė funkcija, tai jos mažorantė yra :

$$A_k(y,z) << M^k(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-1}\ , \tag{31}$$

kur M – žinoma pastovi ketvirtos eilės kvadratinė matrica. Iš $\rho(y,z,s)$ apibrėžimo seka, kad šios funkcijos mažorantę galima imti tokią :

$$\rho(y,z) << P(\ |y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-1}\ , \tag{32}$$

kur P – konstanta.

(30),(31),(32) įrašę į rekurentinę formulę (15) gauname, kad $u_k(y,z,s)$ mažorantė yra:

$$\begin{gathered} u_k(y,z,s) << (E(\rho+k)+A_0)^{-1}(EQ^k(|\mathrm{y}-\mathrm{y}_0|\cdot|z-z_0|)^{-\alpha(k)}\cdot|s|^{\beta(k)-1}\cdot I + \\ + s\cdot P\cdot L(|y-y_0|^{-2}\cdot|z-z_0|^{-1}+|y-y_0|^{-1}\cdot|z-z_0|^{-2})\cdot Q^{k-1}\cdot(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{\alpha(k-1)}\cdot \\ |s|^{\beta(k)-1}\cdot I + L\cdot Q^{k-1}|\alpha(k-1)|\cdot|s|^{\beta(k)-1}\cdot(|y-y_0|^{-\alpha(k-1)-1}\cdot|z-z_0|^{-\alpha(k-1)}+|y-y_0|^{-\alpha(k-1)}\cdot \\ |z-z_0|^{-\alpha(k-1)-1})+\sum M^{k-l}Q^l(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-\alpha(l)-1}|s|^{\beta(l)}\cdot I) \end{gathered} \tag{33}$$

kur L – ketvirtos eilės kvadratinė matrica, kurios visi elementai vienetai. Nesiaurindami bendrumo iš (33) parenkame $\alpha(k) = 2k$, $\beta(k) = k$. Tuomet $u_k(y,z,s)$ mažorantė yra :

$$u_k(y,z,s) << Q^k(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-2k}\cdot|s|^k\ . \tag{34}$$

Įrašę $\alpha(k) = 2k$ ir $\beta(k) = k$ išraiškas į (33), gauname :

$$\begin{gathered} u_k(y,z,s) << (E(\rho+k)+A_0)^{-1}(EQ^k(|\mathrm{y}-\mathrm{y}_0|\cdot|z-z_0|)^{-2k}\cdot|s|^k\cdot(E\cdot|s|^{-1}\cdot I + \\ + P\cdot(|z-z_0|+|y-y_0|)\cdot\frac{1}{Q}|2k-2|\cdot|y-y_0|\cdot|z-z_0|\cdot(|y-y_0|+ \\ +|z-z_0|)\cdot L+\sum_{l=0}^{k-1}M^{k-l}Q^{l-k}(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{2k-2l-1}|s|^{l-k})\cdot I \end{gathered} \tag{35}$$

Į (35) įeina $|s|^{-1}$ arba $\frac{1}{\ln x}$. Kadangi ieškome sprendinių, kai $x\to 0$, tai $|\ln x|\to\infty$. Iš to seka, kad $|s|^{-1} < \varepsilon$, kur $\varepsilon\to 0$. Kadangi $|y-y_0|<\frac{r_1}{2};|z-z_0|<\frac{r_2}{2}$, tai iš (54) gauname :

$$\begin{gathered} |u_k(y,z,s)| < Q^k(|\mathrm{y}-\mathrm{y}_0|\cdot|z-z_0|)^{-2k}\cdot|s|^k\cdot[(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot k\cdot\varepsilon+(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot \\ \frac{P(r_1+r_2)}{2Q}\cdot L+(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot\frac{|2k-2|r_1r_2(r_1+r_2)}{8Q}L+(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot r_1r_2(4QM^{-1}-r_1r_2L)^{-1}]\cdot I \end{gathered} \tag{36}$$

Laužtiniuose skliaustuose antrasis ir ketvirtasis dėmenys k augant į begalybę artėja į nulį. Konstanta Q parinksime taip, kad (36) lygybės laužtiniuose skliaustuose esančių pirmojo ir trečiojo dėmenų suma nebūtų didesnė už 1. Tuomet (6) eilutės koeficientams galioja šis įvertis :

$$|u_k(y,z)|<Q^k(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-2k}|s|^k\cdot I. \quad \textbf{(37)}$$

(37) įvertis garantuoja eilutės konvergavimą, kai

$$|x|<\frac{(r_1 r_2)^2}{16Q};\quad |y-y_0|<\frac{r_1}{2};|z-z_0|<\frac{r_2}{2}.$$

ε artėjant į nulį gautojo sprendinio konvergavimo spindulys yra labai mažas.

<u>3 teorema</u>. Jeigu (1) sistemos nusakančiosios lygties šaknys yra:

- realios,
- skirtingos,
- jų skirtumai nėra sveikieji skaičiai
- šios savybės galioja visoje kintamųjų y ir z srityje,

tai dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema (1) srityje

$$|x|<\frac{(r_1 r_2)^2}{16Q};\quad |y-y_0|<\frac{r_1}{2};|z-z_0|<\frac{r_2}{2}$$

turi keturias atskirųjų sprendinių šeimas

$$u(x,\ y,\ z)=\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho_i(y,z)}u_k(y,z,\ln x),\ i=1,2,3,4.$$

4. Reguliarusis išsigimimas

Ištirsime kitą atvejį. Nagrinėkime matricinę dalinių išvestinių diferencialinę lygtį

$$x \cdot (E\frac{\partial u}{\partial x} + I_1\frac{\partial u}{\partial y} + I_2\frac{\partial u}{\partial z}) + A \cdot u = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

kada šios matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties koeficientų matricos A(x,y,z) elementams galioja dėstinys tokia x – ų laipsnių eilute:

$$A(x,y,z)=A_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A_k(y,z)x^k \ . \qquad \textbf{(38)}$$

Kada (3) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties koeficientų matricos A(x) dėstinio laipsnine eilute koeficientai nepriklauso nuo kintamųjų y ir z, tos lygties sprendinių ieškosime tokia apibendrinta laipsnine x laipsnių eilute

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(y,z,s)x^{k+\rho} \ , \qquad \textbf{(39)}$$

čia ir toliau šiame paragrafe s = x *ln*x, $k \in Z_0$, ρ - parametras.

(3) matricinėje diferencialinėje lygtyje yra ieškomosios funkcijos dalinės išvestinės pagal kintamuosius x, y ir z, todėl randame tas išvestines. Diferencijuodami (39) pagal kintamuosius x, y, z, gauname tokias lygybes

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k=0}^{\infty}((k+\rho)\cdot x^{k+\rho-1}\cdot u_k + x^{k+\rho}\frac{\partial u_k}{\partial s}(1+\ln x)) \qquad \textbf{(40)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial y} \qquad \textbf{(41)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial z} \qquad \textbf{(42)}$$

Kaip ir ankstesniu atveju, įrašome (38), (39), (40), (41) ir (42) į (3) ir gauname

$$\begin{aligned} &x\cdot\left\{E\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)x^{k+\rho-1}u_k + x^{k+\rho}\frac{\partial u_k}{\partial s}(1+\ln x) + I_1\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}\frac{\partial u_k}{\partial y} + I_2\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}\frac{\partial u_k}{\partial z}\right\} + \\ &+\sum_{k=0}^{\infty}A_k x^{k+\rho}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}u_k = 0 \end{aligned} . \qquad \textbf{(43)}$$

Atlikę (43) lygtyje perėję prie vienos sumos, gauname:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty}\ (E(k+\rho)x^{k+\rho}u_k + \frac{\partial u_k}{\partial s}x^{k+\rho+1} + s\frac{\partial u_k}{\partial s}x^{k+\rho} + I_1\frac{\partial u_k}{\partial y}x^{k+\rho+1} + I_2\frac{\partial u_k}{\partial z}x^{k+\rho+1} + \\ &+\sum_{l=0}^{k} A_l u_{k-l}x^{k+\rho}) = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(44)}$$

čia l = 0,….,k-1.

Kad rastume (39) eilutės koeficientus $u_k(y,z)$, (44) lygybėje koeficientus prie vienodų x-o laipsnių lyginame nuliui. Mažiausias x-o laipsnis (39) eilutėje yra ρ. Koeficientas prie x^ρ yra:

$$(E\rho+A_0)\cdot u_0.+ s\frac{\partial u_0}{\partial s} = 0 \qquad \textbf{(45)}$$

Pratęsus skaičiavimus toliau gauname, kad koeficientas prie $x^{\rho+1}$ yra

$$(E(\rho+1)+A_0)u_1 + s\frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\partial u_0}{\partial s} + I_1\frac{\partial u_0}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_0}{\partial z} + A_1 u_0 = 0\,. \qquad \textbf{(46)}$$

O prie $x^{\rho+2}$ koeficientas yra

$$(E(\rho+2)+A_0)u_2 + s\frac{\partial u_2}{\partial s} + \frac{\partial u_1}{\partial s} + I_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_2}{\partial z} + A_2 u_0 + A_1 u_1 = 0 \qquad \textbf{(47)}$$

Iš (45), (46), (47) seka, kad koeficientas bet kokio x-o laipsnio ρ+k, k = 0, 1, 2,… yra randamas iš šios rekurentinės formulės

$$(E(\rho+k)+A_0)u_k + s\frac{\partial u_k}{\partial s} + \frac{\partial u_{k-1}}{\partial s} + I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l}u_l = 0\,, \qquad \textbf{(48)}$$

kurioje $u_k(y,z) \equiv 0$, kai $k < 0$.

Iš (48), kai k = 0, gauname

$$(E\rho+A_0)\, u_0 + s\frac{\partial u_0}{\partial s} = 0. \qquad \textbf{(49)}$$

Pareikalaukime, kad u_0 nepriklausytų nuo s, t.y. $u_0 = u_0(y,z)$. Tuomet iš (49) gauname

$$(E\rho+A_0)\, u_0 = 0. \qquad \textbf{(50)}$$

Tai tiesinių homogeninių lygčių sistema, kurioje u_0 nežinomųjų vektorius stulpelis. Tam, kad (50) sistema turėtų nenulinį sprendinį, būtina ir pakanka, kad

$$\det(\rho E+A_0) = 0. \qquad \textbf{(50a)}$$

(50) lygybės funkcijos parametro ρ atžvilgiu yra ketvirtojo laipsnio algebrinė lygtis, kuri bendruoju atveju virš kompleksinių skaičių lauko turi keturias ρ_i, i = 1, 2, 3, 4 šaknis. Tarkime, kad visos šaknys yra skirtingos, o jų skirtumai nėra sveikieji skaičiai.

(50) lygybę, analogiškai kaip ir paprastųjų diferencialinių lygčių teorijoje, pavadinkime (3) sistemos nusakančiąja lygtimi. Iš (50a) formulės gauname ρ_i, i = 1, 2, 3, 4. Pagal pasirinktą ρ_i, iš (50) lygybės vienareikšmiškai nustatome u_0.

Liko surasti kitus (39) eilutės koeficientus u_k, kai k = 1, 2,…. . Tuo tikslu (48) lygybę pertvarkome išreikšdami u_k per u_k

$$(E(\rho+k)+A_0)u_k + s\frac{\partial u_k}{\partial s} = -((I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \frac{\partial u_{k-1}}{\partial s} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l}u_l)\,. \qquad \textbf{(51)}$$

Gavome primos eilės tiesinę diferencialinę lygtį dalinėmis išvestinėmis. Kadangi mus domina tik paprasčiausi šios lygties sprendiniai, tai tarkime, kad

$$u_k = u_k(s).$$

Tada ši lygtis virsta paprastąją pirmos eilės tiesine dalinių išvestinių diferencialine lygtimi, kurią spręsime konstantų varijavimo metodu. Kairiąją lygties pusę prilyginę nuliui, gauname:

$$(E(\rho+k)+A_0)u_k+s\frac{\partial u_k}{\partial s}=0. \quad \textbf{(52)}$$

Atskyrus kintamuosius gauname tokią lygtį

$$\frac{du_k}{u_k}=-(E(\rho+k)+A_0)\frac{ds}{s}. \quad \textbf{(53)}$$

Suintegravę (53) lygybės abi puses gauname

$$ln\mathrm{u}_\mathrm{k}=-(E(\rho+k)+A_0)\cdot\ln s+C(s). \quad \textbf{(54)}$$

Iš (54) lygybės seka, kad

$$u_k=C(s)\cdot e^{-(E(\rho+k)+A_0)\cdot\ln s}. \quad \textbf{(55)}$$

(55) lygybę diferencijuojame pagal s ir gauname

$$u'_k=C'(s)\cdot e^{-(E(\rho+k)+A_0)\cdot\ln s}-\frac{1}{s}(E(\rho+k)+A_0)\cdot C\cdot e^{-(E(\rho+k)+A_0)\ln s}. \quad \textbf{(56)}$$

(55) ir (56) įrašę į (51) gauname:

$$\frac{dC}{ds}s\cdot e^{-(E(\rho+k)+A_0)\ln s}=-(I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\frac{\partial u_{k-1}}{\partial s}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l). \quad \textbf{(57)}$$

(57) lygybėje atskyrę kintamuosius ir suintegravę gauname:

$$C=-\int e^{-(E(\rho+k)+A_0)\ln s}(I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\frac{\partial u_{k-1}}{\partial s}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l)ds. \quad \textbf{(58)}$$

(58) įrašę į (55) gauname rekurentinę formulę

$$u_k=-s^{-(E(\rho+k)+A_0)\ln s}\int\frac{1}{s}s^{(E(\rho+k)+A_0)}(I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\frac{\partial u_{k-1}}{\partial s}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l)ds,$$

kai k = 1, 2, 3,…. .

Gautasis sprendinys yra tik formalus. Kad jis virstų tikruoju sprendiniu reikia parodyti, kad (39) eilutė, kurios koeficientai randami iš (58) formulės, konverguoja. Tai atliksime mažorantų metodu, kuris išdėstytas monografijoje [2].

Tarkime, kad $A_k(y,z)$ - ojo mažorantė yra:

$$A_k(y,z)<<M^k(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-1}, \quad \textbf{(59)}$$

čia M- pastovis ketvirtos eilės kvadratinė matrica. $u_k(y,z,s)$ mažorantę parinksime tokią

$$u_k(y,z,s)<<Qk(|y-y0||z-z0|)-\mu(\kappa)|s|^{\beta(k)}\cdot I \quad \textbf{(60)}$$

kur I – keturmatis vektorius stulpelis, kurio elementai yra vienetai.

(59) ir (60) įrašę į rekurentinę formulę (44) gauname, kad $u_k(y,z,s)$ mažorantė yra

$$u_k(y,z,s)<<Q^k(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-\alpha(k)}\cdot|s|^{\beta(k)}\ ((E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot[|\beta(k)|\cdot E+$$

$$+\frac{1}{Q}(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{\alpha(k)-\alpha(k-1)}\cdot|s|^{-\beta(k)+\beta(k)-1}E+$$

$$+\frac{1}{Q}|\alpha(k-1)|\times\cdot|s|^{-\beta(k)+\beta(k-1)}\cdot(|y-y_0|^{\alpha(k)-\alpha(k-1)-1}\cdot|z-z_0|^{\alpha(k)-\alpha(k-1)}+$$

$$+|y-y_0|^{\alpha(k)-\alpha(k-1)}\cdot|z-z_0|^{\alpha(k)-\alpha(k-1)-1})\cdot L+$$

$$+\sum_{l=0}^{k-1}M^{k-l}Q^{l-k}\cdot(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{\alpha(k)-\alpha(l)-1}|s|^{\beta(l)-\beta(k)}]\cdot I$$

(61),

kur L – ketvirtos eilės kvadratinė matrica, kurios visi elementai vienetai.

Nesiaurindami bendrumo iš (61) parenkame $\alpha(k)=2k,\beta(k)=k.$

Tuomet $u_k(y,z,s)$ mažorantė yra

$$U_k(y,z,s) << Q^k(|y-y_0|\,|z-z_0|)^{-2k}|s|^k I. \tag{62}$$

Įrašę $\alpha(k)=2k,\beta(k)=k$ išraiškas į (61) gauname

$$u_k(y,z,s) << Q^k(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-2k}\cdot|s|^k\quad((E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot(k\cdot E+$$

$$+\frac{|k-1|1}{Q}(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^2\cdot|s|^{-2}E+\frac{|2k-2|}{Q}\cdot|s|^{-1}\cdot(|y-y_0|\cdot|z-z_0|^2+$$

$$+|y-y_0|^2\cdot|z-z_0|)\cdot L+\sum_{l=0}^{k-1}M^{k-l}Q^{l-k}\cdot(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{2k-2l-1}|s|^{2l-2k}]\cdot I \tag{63}$$

Šiame paragrafe s = x *ln*x. Kai $x\to 0$, tai $s\to 0$.

Vadinasi $|s|<\varepsilon,\frac{1}{|s|}<N,(\frac{1}{|s|})^2<N^2$, kur $\varepsilon\to 0$, o $N\to\infty$. Kadangi $|y-y_0|<\frac{r_1}{2};|z-z_0|<\frac{r_2}{2}$, tai iš (63) gauname išraišką:

$$|u_k(y,z,s)| << Q^k(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-2k}\cdot|s|^k[(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot k+E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot$$

$$\frac{|k-1|(r_1r_2)^2N^2}{16Q}+(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot\frac{|2k-2|r_1r_2(r_1+r_2)N}{8Q}L+(E(\rho+k)+A_0)^{-1}r_1r_2(16QM^{-1}\varepsilon^2-$$

$$-(r_1r_2)^2L)^{-1}]\cdot I$$

(64)

(64) lygybės laužtiniuose skliaustuose ketvirtasis dėmuo k, augant į begalybę, artėja į nulį. Konstantą Q parinksime taip, kad (64) lygybės laužtiniuose skliaustuose esančių pirmojo, antrojo ir trečiojo dėmenų suma nebūtų didesnė už 1. Tuomet (39) eilutės koeficientams galioja šis įvertis:

$$|u_k(y,z,s)| << Q^k(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-2k}|s|^k I. \tag{65}$$

(65) įvertis garantuoja eilutės konvergavimą, kai

$$|x|<\frac{(r_1r_2)^2}{16Q};|y-y_0|<\frac{r_1}{2};|z-z_0|<\frac{r_2}{2}.$$

4 teorema. (3) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties formalūs sprendiniai randami, kuomet diferencialinės lygties koeficientų matricos A(x,y,z) dėstinio (5) laipsnine eilute visi koeficientai nepriklauso nuo y ir z, o matrica A_0 yra paprastosios struktūros matrica, tai tos lygties formalūs sprendiniai yra pavidalo

$$u(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(y, z) x^{k+\rho} ,$$

o srityje $|x| < \frac{(r_1 r_2)^2}{16Q}; |y - y_0| < \frac{r_1}{2}; |z - z_0| < \frac{r_2}{2}$ yra tikrieji tos sistemos sprendiniai.

IŠVADOS

Magistro darbe išnagrinėjome išsigimstančios diferencialinių lygčių sistemos sprendinių struktūrą išsigimimo hiperploktšumoje T = {x | x = 0} taškuose ir darome šias išvadas:

1) Išnagrinėta dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema,

$$\begin{cases} x^{p+1}(a\frac{\partial u_2}{\partial x}+b\frac{\partial u_2}{\partial y}+b\frac{\partial u_3}{\partial x}+c\frac{\partial u_3}{\partial y}+d\frac{\partial u_4}{\partial z})+\sum_{j=1}^{4}a_{1j}(x,y,z)u_j=0 \\ x^{p+1}(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_4}{\partial y}-\frac{\partial u_3}{\partial z})+\sum_{j=1}^{4}a_{2j}(x,y,z)u_j=0 \\ x^{p+1}(-\frac{\partial u_4}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial z})+\sum_{j=1}^{4}a_{3j}(x,y,z)u_j=0 \\ x^{p+1}(\frac{\partial u_3}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_1}{\partial z})+\sum_{j=1}^{4}a_{4j}(x,y,z)u_j=0 \end{cases}$$

kurios matricinė forma yra

$$x\cdot(E\frac{\partial u}{\partial x}+I_1\frac{\partial u}{\partial y}+I_2\frac{\partial u}{\partial z})+A\cdot u=0\ .$$

Šioje matricinėje dalinių išvestinių diferencialinėje lygtyje x, y, z – nepriklausomi kompleksiniai kintamieji; E, I_1, I_2 – konkrečios ketvirtos eilės kvadratinės matricos; u(x,y,z) – ieškomasis keturmatis vektorius stulpelis, parametras p =0; A(x,y,z) – ketvirtos eilės kvadratinė matrica – funkcija, kurios elementams galioja dėstinys apibendrinta x-o laipsnių eilute

$$A(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^kA_k(y,z)\ .$$

Ši eilutė konverguoja išsigimimo hiperplokštumos taškų aplinkoje. Dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos sprendinių struktūra iš esmės priklauso nuo parametro p parinkimo.

Išnagrinėti šie atvejai:

2) kai parametras p = 0, o

$$A(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(y,z)x^k\ .$$

(1) sistemos sprendiniai išreiškiami šia apibendrinta x-o laipsnių eilute

$$u(x,\ y,\ z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho(y,z)}u_k(y,z,s)\ ,$$

čia s = *ln*x, o ρ(y,z)– kintamųjų y ir z funkcija parametras. Parametras ρ(y,z) ir koeficientas u_0(y,z,s) yra randami iš tokios matricinės lygties

$$(E\rho+A_0)\cdot u_0=0.$$

Koeficientai u_k(y,z,s), kai k = 1, 2, 3,… randami iš šios rekurentinės formulės:

$$u_k = -e^{s(E(\rho+k)+A_0} \cdot \int e^{s(E(\rho+k)+A_0)} \cdot (s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z})u_{k-1} + I_1 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l} u_l)ds.$$

Gautieji sprendiniai teisėti tokioje srityje:

$$|x| < \frac{(r_1 r_2)^2}{16Q}; |y - y_0| < \frac{r_1}{2}; |z - z_0| < \frac{r_2}{2}.$$

3) kai parametras p = 0, o

$$A(x,y,z) = A_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A_k(y,z)x^k .$$

(1) sistemos sprendiniai išreiškiami tokia apibendrinta x-o laipsnių eilute

$$u(x,\ y,\ z) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho} u_k(y,z) \ ,$$

čia ρ– parametras. Parametras ρ ir koeficientas $u_0(y,z)$ randami iš šios sistemos

$$(E\rho + A_0) \cdot u_0 = 0.$$

Koeficientai $u_k(y,z,s)$, kai k = 1, 2, 3,…. randami iš šios rekurentinės formulės:

$$u_k = -s^{-(E(\rho+k)+A_0)\ln s} \int \frac{1}{s} s^{(E(\rho+k)+A_0)} (I_1 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \frac{\partial u_{k-1}}{\partial s} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l} u_l)ds \ .$$

Gautieji sprendiniai teisingi, kada

$$|x| < \frac{(r_1 r_2)^2}{16Q}; |y - y_0| < \frac{r_1}{2}; |z - z_0| < \frac{r_2}{2}.$$

Darbe gauti rezultatai neprieštarauja prof. habil.. dr. A.Janušausko darbe [16] ir prof. dr. D.Jurgaičio darbuose [12], [14], [15] gautiems rezultatams.

Santrauka

Magistro darbe nagrinėjama keturių pirmos eilės diferencialinių lygčių sistema dalinėmis išvestinėmis, su laipsniniu p+1 eilės išsigimimu, kada p = 0. Dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema išspręsta modifikuotu apibendrintųjų laipsninių eilučių metodu. Išnagrinėti du atvejai: bendrasis ir kai sistemos koeficientų pradinė matrica yra specialios struktūros matrica. Parodyta, kaip sistemos sprendiniai priklauso nuo koeficientų, esančių prie ieškomosios funkcijos dalinių išvestinių. Sukonstruotos keturios atskirųjų nagrinėjamos sistemos sprendinių šeimos ir įrodyta, kad kiekviena iš jų priklauso nuo vienos laisvai pasirinktos kintamųjų y ir z funkcijos. Sistemos sprendinių struktūra išsigimimo taškų aplinkoje priklauso ne tik nuo x laipsnio, bet ir nuo kintamųjų y ir z. Tokio tipo išsigimimo analizinėje išsigimusių paprastųjų diferencialinių lygčių teorijoje nėra, todėl nagrinėtąjį dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos išsigimimą vadiname kvazireguliariuoju.

Raktiniai žodžiai: diferencialinė lygtis, dalinė išvestinė, kvazireguliarusis išsigimimas.

Summary

In this master thesis it is analyzed the system of four partial fluxions of the primary row of differential equations the row of which dwindles at the point of p+1, when p = 0. The system of partial fluxions of differential equations has been solved through the modified technique of summarized degree rows. Two cases were explored: general and when the system's ratios initial matrix is a special structure matrix. The solutions of the system dependence on the ratios, which are near partial fluxions of the searched function, were explored. There were designed four families of the detached solutions and proved that each of them depends on one optional function of y and z variables. The structure of system of solutions at the malformation points depends not only on x degree, but also on y and z variables. There is no such type of malformation in the theory of dwindle simple differential equations, therefore this analyzed dwindle of the system of partial fluxion of differential equations is called quasi-regular malformation.

Keywords: differential equation, partial derivation, quasi-regular malformation**.**

LITERATŪRA

1. Čiegys, R., Būda, V. (1997). Skaičiuojamoji matematika. Vilnius.
2. Golokvosčius P. (2000). Diferencialinės lygtys. Vilnius, TEV.
3. Kačinskaitė R. (1994). Išsigimusios diferencialinės lygties sprendiniai. Diplominis darbas. Šiauliai.
4. Kvedaras, B., Sapagovas, M. (1999). Skaičiavimo metodai. Vilnius.
5. Paulauskas, V., Golokvosčius, P. (1998). Diferencialinės lygtys, Vilnius, Mokslas.
6. Plukas K. (2001). Skaitiniai metodai ir algoritmai. Kaunas.
7. Stanislovaitytė, G. (2005). Dalinių išvestinių sistemos su eilės išsigimimu sprendimas. Bakalauro darbas, Šiauliai.
8. Šiaučiūnas, D. (1999). Stipriai išsigimstančių pirmos eilės diferencialinių lygčių sistemų dalinėmis išvestinėmis sprendiniai. Magistro darbas, Šiauliai.
9. Zvezdova, J. (2003). Dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos su pusiau reguliariu išsigimimu sprendimas. Bakalauro darbas, Šiauliai.
10. Moisil Gr. C., Theodoresco N. (1931). Fonctions holomorphes dans l'espace. Mathematica, **5**.
11. Вазов, В. (1968). Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциалных уравнений. Москва, Мир.
12. Гедвилайте А., Каклаускас Л., Юргайтис Д. (1998). Об одной эллиптической системе первого порядка с полурегулярным вырожением. Lietuvos Matematikos rinkinys. XXVIII Nr. 4, Vilnius, Mokslas, psl. 655-661.
13. Глушаков, С.В., Жакин, И.А., Хачиров, Т.С. (2001). Математическое моделирование Mathcad 2000. Москва.
14. Юргайтис Д. (1983). О решениях сильно вырождающейся эллиптической системы первого порядка. Lietuvos Matematikos rinkinys. XXIII Nr. 2, Vilnius, Mokslas, psl. 197-212.
15. Юргайтис Д. (1993). О структуре решений вырождающейся эллиптической системы. Lietuvos Matematikos rinkinys. 33 Nr. 3, Vilnius, Leidykla TEV, psl. 293-301.
16. Янушаускас А.И. (1980). Аналитическая теория эллиптических уравнений. Наука, СО.

PRIEDAS

1) Matematinės programos Mathcad paketo pagalba apskaičiuojame matricos E determinantą:

$a := -1 \qquad b := 0$

$$E := \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|E| = 1$$

$$detE := |E|$$

$$detE = 1$$

2) Matematinės programos Mathcad paketo pagalba apskaičiuojame matricos I_1 determinantą:

$c := -1 \qquad b := 0$

$$I1 := \begin{pmatrix} 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|I1| = 1$$

$$detI1 := |I1|$$

$$detI1 = 1$$

3) Matematinės programos Mathcad paketo pagalba apskaičiuojame matricos I_2 determinantą:

$d := -1$

$$I2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|I2| = 1$$

$$detI2 := |I2|$$

$$detI2 = 1 \quad .$$