

ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Deimantė Kravčenkaitė

Matematikos ir informatikos studijų programos MI–6 grupės studentė

**ELIPSINIO TIPO B -ERDVIŲ BEVEIK
KONTAKTINIAI METRINIAI
HIPERPAVIRŠIAI**

BAKALAURO DARBAS

Darbo vadovė
prof. Angelė Baškienė

Šiauliai, 2010

TURINYS

Ivadas.....	3
1. Tenzorinės struktūros daugdarose ir podaugdariuose	4
2. Elipsinio tipo II rūšies beveik kontaktinių metrinių struktūrų šeimos savybės	10
3. Kompleksinės keturmatės pseudoeuklidinės erdvės beveik kontaktiniai metriniai hiperpaviršiai	13
4. (φ, ξ, η, g) -struktūros savybių kriterijai. Pavyzdžiai	23
Išvados	29
Literatūra	30

Ivadas

Beveik kontaktinės struktūros (φ, ζ, η) tenzoriniu metodu buvo pradėtos tyrinėti 1960 metais Japonijoje [5]. Jų analogai ir apibendrinimai tiriami iki šių dienų įvairiose šalyse [3, 4 – 6, 7]. 1968 metais Kazanėje buvo pradėti nagrinėti šių struktūrų hiperboliniai analogai [10, 11], suteikiant tradicinėms (φ, ζ, η) -struktūroms elipsinio tipo beveik kontaktinių struktūrų vardą.

Nuo 1976 metų įvairių šalių matematikai tyrė hiperbolinio tipo II rūšies struktūras, pavadindami jas beveik parakontaktinėmis metrinėmis struktūromis [6]. Tuo tarpu beveik parakontaktinių metrinų struktūrų elipsiniai analogai nuo jų įvedimo 1968 metais beveik netyrinėti. Mums žinomas tik vienas straipsnis [8], nagrinėjantis elipsinio tipo II rūšies beveik kontaktines metrinės struktūras.

Pateikiamas darbas skirtas elipsinio tipo II rūšies $(\varphi, \zeta, \eta, g)$ -struktūroms, egzistuojančioms elipsinio tipo B -erdvių hiperpaviršiuose. Struktūrų savybių tyrimas praturtina minėtų erdvių paviršių teoriją.

1. TENZORINĖS STRUKTŪROS DAUGDAROSE IR PODAUGDARIUOSE

Apibrėšime pagrindines sąvokas, kurios bus naudojamos darbe.

Apibrėžimas 1. Netuščios aibės X poaibių sistema τ , tenkinanti aksiomas:

- 1) $X \in \tau, \emptyset \in \tau$;
- 2) bet kurių aibių iš τ sąjunga yra aibė iš τ ;
- 3) baigtinio skaičiaus aibių iš τ sankirta yra aibė iš τ ,

vadinama topologija.

Aibės U , priklausančios topologijai, vadinamos atvirosiomis, aibės X / U – uždarosiomis. Pora (X, τ) vadinama topologine erdve, aibės X elementai – taškais.

Metrinėje erdvėje atvira aibe vadinama tokia aibė U , kurios kiekvienas taškas turi aplinką (atvirą rutulį), įeinančią į tą aibę. Topologijoje įrodoma, jog metrine prasme atvirosios aibės tenkina topologijos aksiomas, t.y. apibrėžia metrinėje erdvėje topologiją.

Apibrėžimas 2. Metrinės erdvės M atvaizdis į metrinę erdvę N vadinamas tolydžiuoju, jei be galo artimų taškų $x_1, x_2 \in M$ vaizdai $y_1, y_2 \in N$ yra be galo artimi.

Apibrėžimas 3. Atvaizdis $h: M \rightarrow N$ vadinamas topologiniu atvaizdžiu, arba homeomorfizmu, jei jis yra bijektyvus, tolydus, ir atvaizdis h^{-1} – tolydus.

Jei egzistuoja dvi atvirosios netuščios aibės $U_1 \in \tau, U_2 \in \tau$, nesutampančios su aibe X , kurių sąjunga $U_1 \cup U_2 = X$, o sankirta $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, tuomet aibė X vadinama nejungiąja topologine erdve. Priešingu atveju ji vadinama jungiąja topologine erdve.

Apibrėžimas 4. Elementariąja n -mate N -tos klasės diferencijuojamąją daugdarą vadinama topologinė erdvė M_n , homeomorfiška realiųjų skaičių aibės Dekarto n -tojo laipsnio netuščiam atviram jungiajam poaibiui Ω .

Homeomorfizmas $h: M_n \rightarrow \Omega \subset R^n$ vadinamas koordinačių sistema, skaičiai $x^i = h(M)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $M \in M_n$, vadinami taško M koordinatėmis.

Tarkime, jog duotos dvi koordinačių sistemos: „senoji“ h ir „naujoji“ h' .

Daugdara M_n vadinama diferencijuojamąją daugdarą, jei „naujosios“ bet kurio taško $M \in M_n$ koordinatės $X^{i'}$ išreiškiamos „senosiomis“ X^i („senosios“ — „naujosiomis“) vienareikšmiškų N kartų tolydžiai diferencijuojamų funkcijų pagalba:

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i), \quad x^i = x^i(x^{i'}), \quad i' = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

Apibrėžimas 5. $(k+l)$ -valenčių k kartų kovariantinių ir l kartų kontravariantinių tenzoriumi daugdaros M_n taške M_0 vadinsime n^{k+l} skaičių $V_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l}$, kurie keičiantis koordinačių sistemai pagal (1.1) formulę, keičiasi pagal dėsnį:

$$V_{i'_1, \dots, i'_k}^{j'_1, \dots, j'_l} = \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}(M_0) \cdot \frac{\partial x^{j'_2}}{\partial x^{j_2}}(M_0) \cdot \dots \cdot \frac{\partial x^{j'_l}}{\partial x^{j_l}}(M_0) \cdot \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}(M_0) \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i'_2}}(M_0) \cdot \dots \cdot \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}(M_0) \cdot V_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l},$$

$$i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l = 1, 2, \dots, n,$$

$$i'_1, i'_2, \dots, i'_k, j'_1, \dots, j'_l = 1, 2, \dots, n.$$

Jei vienuodžiai tenzoriai apibrėžti kiekviename daugdaros taške $M(x^i)$, t.y. jei aukščiau pateiktose formulėse visi dydžiai yra n kintamųjų x^i funkcijos, tuomet daugdaroje M_n turime tenzorinį lauką.

Pvz., vektorinio lauko $\vec{V}(x^i)$ koordinačių kitimo dėsnis yra: $V^i(x^j) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(M(x^j))V^j(x^j)$;

kovektorinio lauko $C(C_i)$ koordinačių kitimo dėsnis: $C_i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(M)C_j$; afinoriaus f_i^j :

$f_i^{j'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \cdot \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} f_i^j$; metrinio tenzorius, t.y. bitiesinės simetrinės neišsigimusios formos

koordinačių kitimo dėsnis yra $g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}$.

Susipažinkime su išorine daugyba ir išoriniu diferencijavimu.

Tarkime, jog turime p simbolių $u_1, u_2, \dots, u_p$, iš kurių sudaromas dar vienas simbolis $U = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_p$. Jis vadinamas simbolių $u_1, u_2, \dots, u_p$ išorine sandauga, jei tenkina reikalavimus:

1) monomais vadinamus reiškinius $k \cdot U = ku_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_p$, $k \in R$, galima sudėti, atimti, dauginti iš skaičiaus, ir tos operacijos tenkina komutatyvumo, asociatyvumo ir distributyvumo dėsnius;

2) išorinė daugyba asociatyvi, distributyvi ir antikomutyvi:

- $u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$;
- $(u + v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$;
- $u_1 \wedge u_2 = -u_2 \wedge u_1$.

Pfafo forma, arba diferencialine 1-forma, n -matėje daugdaroje M_n vadinamas invariantas $\eta = \eta_i dx^i$. Čia dx^i - vektorius, η_i - kovektorius.

Pfafo formos η išoriniu diferencialu vadinama diferencialinė 2-forma

$$d\eta = \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^i = (\partial_i \eta_j - \partial_j \eta_i) (dx^i \wedge dx^j). \quad (1.2)$$

Apibrėžimas 6. Jei elementariojoje diferencijuojamoje N -tos klasės n -matėje daugdaroje M_n apibrėžtas dukart kovariantinis simetrinis, neišsigimęs tenzorius g_{ij} (metrinis tenzorius), o funkcijos $g_{ij}(x')$ yra $(N - 1)$ -mos klasės, tuomet daugdara M_n vadinama n -mate Rymano daugdara. Jei kiekvieno vektoriaus $\vec{x}$ skaliarinis kvadratas $\vec{x}^2 = g_{ij} x^i x^j > 0$, kai $\vec{x} \neq \vec{0}$, tai metrinis tenzorius g_{ij} vadinamas teigiamai apibrėžtu, o jei egzistuoja vektoriai $\vec{a} / \vec{a}^2 > 0$, egzistuoja vektoriai $\vec{b} / \vec{b}^2 < 0$, egzistuoja vektoriai $\vec{c} \neq \vec{0} / \vec{c}^2 = 0$, metrika g_{ij} yra vadinama pseudo-metrika, o daugdara M_n – pseudo-Rymano daugdara.

Sakoma, kad metrinis tenzorius g_{ij} Rymano daugdaroje M_n apibrėžia metrinę struktūrą.

Paprastumo dėlei ateityje kalbėdami apie elementariąsias diferencijuojamąsias N -tos klasės n -mates daugdaras, žodžius: „elementarioji, diferencijuojamoji, N -tos klasės“ praleisime.

Darbe mes dažniausiai susidursime su Rymano daugdaromis, kuriose svarbią vietą užima Kristofelio simboliai

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \quad (1.3)$$

Čia $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ yra kontravariantinio metrinio tenzoriaus matrica.

Šių simbolių pagalba atliekame kovariantinį diferencijavimą. Pvz., vektorinio lauko ξ^i kovariantinė išvestinė

$$\nabla_k \xi^i = \partial_k \xi^i + \Gamma_{kj}^i \xi^j. \quad (1.4)$$

Kovektorinio lauko η_j kovariantinė išvestinė

$$\nabla_k \eta_i = \partial_k \eta_i - \Gamma_{ki}^j \eta_j. \quad (1.5)$$

Afinoriaus φ_i^j kovariantinė išvestinė

$$\nabla_k \varphi_i^j = \partial_k \varphi_i^j - \Gamma_{ki}^l \varphi_l^j + \Gamma_{kl}^j \varphi_i^l. \quad (1.6)$$

Jeigu kovariantinė tenzorinio lauko išvestinė lygi 0, tenzorinis laukas vadinamas kovariantiškai pastoviu. Pvz., $\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \Gamma_{kj}^l g_{il} = 0$, todėl metrinis tenzorius g_{ij} yra kovariantiškai pastovus [1].

Matematika nagrinėja matematinės struktūras, tarp kurių yra ir tenzorinės struktūros, pvz., metrinės struktūros. Tarp tenzorinių struktūrų ženklią vietą užima afinorinės struktūros, kurias daugdarose apibrėžia afinoriniai laukai, tenkinantys tam tikras savybes.

Nelyginio matavimo daugdaroje M_{2n-1} beveik kontaktinę struktūrą (φ, ζ, η) apibrėžia afinorius φ_i^j , vektorius ξ^i ir kovektorius η_j , tenkinantys aksiomas [1]:

$$\varphi_i^j \varphi_j^k = -\delta_i^k + \xi^k \eta_i, \quad \varphi_i^j \eta_j = \varphi_i^j \xi^i = 0, \quad \xi^i \eta_i = 1. \quad (1.7)$$

Čia $\delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{jei } i = k, \\ 0, & \text{jei } i \neq k, \end{cases}$ yra Kronekerio simbolis, $i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, 2n-1$.

Tarkime, jog daugdaroje M_{2n-1} duotas metrinis tenzorius g , kuris kartu su tenzoriais φ, ζ, η (1.7) tenkina sąlygas:

$$\varphi_i^j g_{jk} = \varphi_{ik} = \rho \varphi_{ki}, \quad g_{ij} \xi^j = \varepsilon \eta_i, \quad \rho = \pm 1, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (1.8)$$

Atveji, kai $\rho = -1, \varepsilon = 1$, o metrika g_{ij} yra teigiamai apibrėžta, tyrė japonų matematikai [5]. Daugdaroje M_{2n-1} apibrėžtą $(\varphi, \zeta, \eta, g)$ -struktūrą (1.7), (1.8) jie pavadino beveik kontaktine metriniu struktūra. Jei metrika g nebūtinai teigiamai apibrėžta, t. y. $\varepsilon = \pm 1, \rho = -1$, $(\varphi, \zeta, \eta, g)$ -struktūra buvo pavadinta elipsinio tipo I rūšies beveik kontaktine metriniu struktūra, o kai $\rho = 1, -$ II rūšies struktūra [10].

Matematinėje literatūroje gerai žinomos tokios šių struktūrų savybės.

(φ, ζ, η) -struktūra (1.7) vadinama integruojamąja, jei afinoriaus φ Nijenhuis'o tenzorius N_{ij}^k lygus 0 [1]:

$$N_{ij}^k = \varphi_i^l \partial_l \varphi_j^k - \varphi_j^l \partial_l \varphi_i^k - \varphi_i^k (\partial_i \varphi_j^l - \partial_j \varphi_i^l) = 0; \quad (1.9)$$

normaliąja, jei lygus nuliui tenzorius S_{ij}^k :

$$S_{ij}^k = N_{ij}^k + \xi^k (\partial_i \eta_j - \partial_j \eta_i) = 0, \quad (1.10)$$

ir kontaktine, jei kovektoriaus η rangas yra maksimalus, t.y.

$$\eta \wedge \underbrace{d\eta \wedge \dots \wedge d\eta}_{n-1} \neq 0. \quad (1.11)$$

Čia d – išorinio diferencijavimo simbolis, $\wedge$ – išorinės daugybos simbolis.

Panagrinėkime lyginio matavimo daugdarą M_{2n} , kurioje apibrėžtas afinorius F_α^β ir metrinis tenzorius $G_{\alpha\beta}$, tenkinantys sąlygas

$$F_\alpha^\beta F_\beta^\gamma = -\delta_\alpha^\gamma, \quad F_\alpha^\beta G_{\beta\gamma} = F_{\alpha\gamma} = F_{\gamma\alpha}. \quad (1.12)$$

Čia δ_α^β – Kronekerio simbolis, o $\alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots, 2n$. Tokia daugdara vadinama beveik kompleksine daugdara su B -metrika [11]. Jei afinorius F yra kovariantiškai pastovus, t.y. $\nabla_\alpha F_\beta^\gamma = \partial_\alpha F_\beta^\gamma - \left\{ \begin{smallmatrix} \delta \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} F_\delta^\gamma + \left\{ \begin{smallmatrix} \gamma \\ \alpha\delta \end{smallmatrix} \right\} F_\beta^\delta = 0$, tuomet daugdara $M_{2n}(F, G)$ vadinama elipsinio tipo B -erdve.

Čia $\left\{ \begin{smallmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} G^{\gamma\delta} (\partial_\alpha G_{\beta\delta} + \partial_\beta G_{\alpha\delta} - \partial_\delta G_{\alpha\beta})$ yra metrikos $G_{\alpha\beta}$ Kristoferio simboliai.

Tarkime, jog beveik kompleksinėje daugdaroje $M_{2n}(x^\alpha)$ su B -metrika (1.12) hiperpaviršius $M_{2n-1}(y^j)$ apibrėžtas parametrinėmis lygtimis $x^\alpha = x^\alpha(y^j)$. Normalizuokime hiperpaviršių, kiekviename jo taške apibrėždami vektorių $\vec{C}$, kuris su hiperpaviršiaus liečiamaisiais vektoriais sudarytų daugdaros M_{2n} liečiamosios erdvės bazę. Normalizaciją atlikime beveik kontaktiniu vektoriumi, t.y. tokiu vektoriumi, kurį paveikę afinoriai F gauname hiperpaviršiaus liečiamąjį vektorių.

Teorema 1.1 [10]. Beveik kompleksinės daugdaros M_{2n} , turinčios B -metriką, hiperpaviršiuje M_{2n-1} , normalizuotame beveik kontaktiniu ε -vienetiniu vektoriumi

$$C^\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}(n^\alpha + \varepsilon \mu F_\beta^\alpha n^\beta), \quad \mu = F_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta, \quad \varepsilon = G_{\alpha\beta} C^\alpha C^\beta = G_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = \pm 1, \quad (1.13)$$

invariantiškai apibrėžtu normalės ε -vienetiniu vektoriumi $n^\alpha \neq \pm F_\beta^\alpha n^\beta$, indukuojasi elipsinio tipo II rūšies beveik kontaktinė metrinė struktūra $(\varphi, \zeta, \eta, g)$, gaunama iš sistemos

$$F(B_i) = \varphi_i^j B_j + \eta_i C, \quad F(C) = -\zeta^i B_i, \quad g_{ij} = G_{\alpha\beta} B_i^\alpha B_j^\beta. \quad (1.14)$$

Čia B_i – hiperpaviršiaus liečiamieji vektoriai, kurių koordinatės $B_i^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}$.

Pastebime, jog simetrinis tenzorius $F_{\alpha\beta}$ (1.12) yra daugdaros M_{2n} kitas metrinis tenzorius. Iš (1.13) formulės matome, jog normalės vektorius n^α yra beveik kontaktinis vektorius C^α tada ir tik tada, kai $\mu = F_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = 0$, t. y. kai normalės vektorius yra izotropinis metrikos $F_{\alpha\beta}$ atžvilgiu.

Teorema 1.2 [10]. Elipsinio tipo B -erdvės hiperpaviršius turi integruojamąją elipsinio tipo II rūšies $(\varphi, \zeta, \eta, g)$ -struktūrą tada ir tik tada, kai galioja tenzorinė lygybė

$$h_{ij} \varphi_k^j - h_{kj} \varphi_i^j = \varphi_k^l h_{lj} \zeta^j \eta_i - \varphi_i^l h_{lj} \zeta^j \eta_k, \quad (1.15)$$

ir normaliąją $(\varphi, \zeta, \eta, g)$ -struktūrą, kai galioja viena iš ekvivalenčių sąlygų

$$\begin{aligned} 1) \quad & \partial_i \eta_j - \partial_j \eta_i = 0 \text{ (kovektoriaus } \eta \text{ – gradientas),} \\ 2) \quad & h_{ij} \varphi_k^j - h_{kj} \varphi_i^j = 0 \text{ (tenzorius } h_{ij} \varphi_k^j \text{ - simetrinis).} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Čia

$$h_{ij} = \partial_i B_j^\alpha C_\alpha + B_i^\alpha B_j^\beta \left\{ \begin{smallmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} C_\gamma \quad (1.17)$$

yra hiperpaviršiaus, normalizuoto vektoriumi C^α (1.13), asimptotinis tenzorius, gaunamas iš Gauso lygčių [1]: $\partial_i B_j^\alpha + \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{smallmatrix} \right\} B_i^\beta B_j^\gamma - \Gamma_{ij}^k B_k^\alpha = h_{ij} C^\alpha$, C_α randami iš sistemos $C_\alpha B_i^\alpha = 0$, $C_\alpha C^\alpha = 1$, $\left\{ \begin{smallmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\}$ yra metrikos $G_{\alpha\beta}$ Kristofelio simboliai, Γ_{ij}^k - metrikos g_{ij} Kristofelio simboliai.

Jei elipsinio tipo II rūšies $(\varphi, \zeta, \eta, g)$ -struktūra elipsinio tipo B -erdvės hiperpaviršiuje yra normalioji, tai ji yra ir integruojamoji. Įrodymas išplaukia iš normalumo apibrėžimo (1.10) ir teoremos 1.2. Pavyzdžiui, umbilinis hiperpaviršius, kurio asimptotinis tenzorius $h_{ij} = \lambda g_{ij}$, tenkina

(1.16) sąlygą, nes $\varphi_i^j g_{jk} = \varphi_{ik} = \varphi_{ki}$. Vadinasi, umbilinis hiperpaviršius turi normaliąją, taigi ir integruojamąją, elipsinio tipo II rūšies $(\varphi, \zeta, \eta, g)$ -struktūrą.

Kadangi $d\eta = (\partial_i \eta_j - \partial_j \eta_i) dx^i \wedge dx^j$, tai iš teoremos 1.1 išplaukia, kad normalioji elipsinio tipo II rūšies $(\varphi, \zeta, \eta, g)$ -struktūra elipsinio tipo B -erdvės hiperpaviršiuje negali būti kontaktinė, nes $d\eta=0$.

2. ELIPSINIO TIPO II RŪŠIES BEVEIK KONTAKTINIŲ METRINIŲ STRUKTŪRŲ ŠEIMOS SAVYBĖS

Elipsinio tipo B -erdvėje $M_{2n}(x^\alpha)$ panagrinėkime dviparametrinę metrikų šeimą

$$G'_{\alpha\beta} = aG_{\alpha\beta} + bF_{\alpha\beta}, \quad a, b = \text{const}, \quad (2.1)$$

tarp kurių yra B -metrika $G_{\alpha\beta}$ ($a = 1, b = 0$) ir metrika $F_{\alpha\beta}$ ($a = 0, b = 1$). Keičiantis parametrų a ir b hiperpaviršiuje $M_{2n-1}(y^i)$ gauname normalės vektorių dviparametrinę šeimą $\mathbf{n}'(a, b)$. Pagal (1.13) formulę vektoriams $\mathbf{n}'$ randame beveik kontaktinius vektorius $\mathbf{C}'(a, b)$.

Lema 2. 1. Beveik kontaktinių vektorių $\mathbf{C}'$ kryptis nepriklauso nuo parametrų a ir b .

▲ Kadangi vektorius $\mathbf{n}'(n'^\alpha)$ yra statmenas hiperpaviršiui metrikos $G'_{\alpha\beta}$ atžvilgiu, tai

$$G'_{\alpha\beta} n'^\alpha B_i^\beta = aG_{\alpha\beta} n'^\alpha B_i^\beta + bF_{\alpha\beta} n'^\alpha B_i^\beta = 0.$$

Iš čia ir (1.12) formulės $G_{\alpha\beta}(a n'^\alpha + b F_\gamma^\alpha n'^\gamma) B_i^\beta = 0$, todėl $a n'^\alpha + b F_\gamma^\alpha n'^\gamma = \nu n^\alpha$. Pastarąją lygybę paveikime afinoriumi F ir vėl pritaikykime (1.12) formulę:

$$F_\alpha^\beta (a n'^\alpha + b F_\gamma^\alpha n'^\gamma) = \nu F_\alpha^\beta n^\alpha,$$

$$a F_\alpha^\beta n'^\alpha - b n'^\beta = \nu F_\alpha^\beta n^\alpha.$$

Vadinasi, dvimatė vektorinė erdvė V_2 , kurioje yra vektoriai $n'^\alpha, F_\beta^\alpha n'^\beta$, sutampa su vektorine erdve, kurios bazė yra $(n^\alpha, \tilde{n}^\alpha = F_\gamma^\alpha n'^\gamma)$. Bet vektorinėje erdvyje V_2 egzistuoja vienintelė beveik kontaktinė kryptis, kuri gaunama hiperpaviršiaus liečiamąją erdvę kertant erdve V_2 ir sankirtą veikiant afinoriumi F . Taigi $\mathbf{C}' = \tau \mathbf{C}$. ▼

Normuokime vektorių $\mathbf{C}'$ taip, kad $G'_{\alpha\beta} C'^\alpha C'^\beta = \varepsilon_1 = \pm 1$. Pritaikę (1.14) ir (2.1) formules randame

$$\begin{aligned} C'^\alpha &= \frac{\tau}{\sqrt{1+\mu^2}} (n^\alpha + \mu F_\beta^\alpha n^\beta), \\ \tau^2 &= \varepsilon_1 / (G'_{\alpha\beta} C'^\alpha C'^\beta) = \frac{\varepsilon_1}{aG_{\alpha\beta} C^\alpha C^\beta + bF_{\alpha\beta} C^\alpha C^\beta}, \\ \tau(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1(a\varepsilon - \mu b)}}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Lema 2. 2. Normalizuojant hiperpaviršių $M_{2n-1} \subset M_{2n}$ beveik kontaktiniu vektoriumi $\mathbf{C}' = \tau \mathbf{C}$, jame indukuojasi dviparametrinė elipsinio tipo II rūšies beveik kontaktinių metrinių struktūrų $(\varphi', \xi', \eta', g')$ šeima, kurių struktūriniai tenzoriai yra $\varphi'^j_i = \varphi^j_i, \xi'^i = \tau \xi^i, \eta'^j = \frac{1}{\tau} \eta_j, g'_{ij} = a g_{ij} + b \varphi_{ij} + b \mu \eta_i \eta_j$.

▲ $(\varphi', \xi', \eta', g')$ -struktūrų egzistavimas išplaukia iš teoremos 1.1. Struktūriniai tenzoriai gaunami iš sistemos

$$F(\mathbf{B}_i) = \varphi_i'^j \mathbf{B}_j + \eta_i' \mathbf{C}', F(\mathbf{C}') = -\xi'^i \mathbf{B}_i, \quad g'_{ij} = G'_{\alpha\beta} B_i^\alpha B_j^\beta. \quad (2.3)$$

Palyginę (2.3) ir (1.14) formulių pirmąsias lygybes gauname, jog $\varphi_i'^j = \varphi_i^j$, $\xi'^i = \tau \xi^i$, $\eta_i' = \frac{1}{\tau} \eta_j$.

Rasime metrinį tenzorių g'_{ij} . Iš (1.14), (2.3) ir (2.1) formulių

$$\begin{aligned} g'_{ij} &= a G_{\alpha\beta} B_i^\alpha B_j^\beta + b F_{\alpha\beta} B_i^\alpha B_j^\beta = a g_{ij} + b [\varphi_i^k B_k^\gamma + \eta_i C^\gamma] G_{\gamma\beta} B_j^\beta = \\ &= a g_{ij} + b \varphi_{ij} + b \eta_i G_{\gamma\beta} C^\gamma B_j^\beta = a g_{ij} + b \varphi_{ij} + b \mu \eta_i \eta_j, \end{aligned}$$

nes pagal (1.13), (1.14), (1.12) formules

$$\begin{aligned} G_{\gamma\beta} C^\gamma B_j^\beta &= \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \varepsilon \mu G_{\gamma\beta} F_\alpha^\gamma n^\alpha B_j^\beta = \\ &= \frac{\varepsilon \mu}{\sqrt{1+\mu^2}} G_{\gamma\alpha} n^\alpha (\varphi_j^k B_k^\gamma + \eta_j C^\gamma) = \\ &= \frac{\varepsilon \mu}{\sqrt{1+\mu^2}} n_j \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\mu^2}} + \frac{\varepsilon \mu}{\sqrt{1+\mu^2}} G_{\gamma\alpha} n^\alpha F_\beta^\gamma n^\beta \right) = \mu \eta_j. \quad \blacktriangledown \end{aligned}$$

Teorema 2.3 [2]. Elipsinio tipo II rūšies (φ, ξ, η, g) -struktūros, gautos iš (1.14) sistemos, elipsinio tipo B -erdvės hiperpaviršiuje integruojamumas, normalumas, kontaktiškumas ekvivalentus kiekvienos $(\varphi', \xi', \eta', g')$ -struktūros iš dviparametrinės struktūrų šeimos, gautos pagal lemą 2, integruojamumui, normalumui, kontaktiškumui (atitinkamai).

▲ Kadangi $\varphi_i'^j = \varphi_i^j$, o struktūros integruojamumo būtina ir pakankama sąlyga (1.9) priklauso tik nuo afinoriaus, tai pirmoji teoremos dalis įrodyta.

Kai normalizatorių C^α (1.13) padauginame iš τ (2.2), dydžiai C_α pasikeičia į dydžius C'_α , gaunamus iš lygybių $C'_\alpha B_i^\alpha = 0$, $C'_\alpha C'^\alpha = 1$. Vadinasi, $C'_\alpha = \frac{1}{\tau} C_\alpha$. Tuo tarpu metrikos $G_{\alpha\beta}$ Kristofelio simboliai $\{\gamma_{\alpha\beta}\}$ nepasikeičia, todėl iš formulės (1.17)

$$h'_{ij} = \partial_i B_j^\alpha C'_\alpha + B_i^\alpha B_j^\beta \{\gamma_{\alpha\beta}\} C'_\alpha = \frac{1}{\tau} h_{ij}.$$

Pagal teoremą 1.2 (φ, ξ, η, g) -struktūros normalumo kriterijus yra lygybė (1.16)₂. Padauginame šią lygybę iš $\frac{1}{\tau}$. Pritaikę lemą 2.2 gauname, jog

$$h'_{ij} \varphi_k'^j - h'_{kj} \varphi_i'^j = \frac{1}{\tau} (h_{ij} \varphi_k^j - h_{kj} \varphi_i^j) = 0.$$

Vadinasi, visos šeimos struktūros yra normaliosios. Atvirkščiai, jei kuri nors viena $(\varphi', \xi', \eta', g')$ -struktūra yra normalioji, t. y. $h'_{ij}\varphi'^j_k - h'_{kj}\varphi'^j_i = 0$, tuomet galioja (1.17) lygybė, ir (φ, ξ, η, g) -struktūra yra normalioji.

Tarkime, kad (φ, ξ, η, g) -struktūra yra kontaktinė, todėl teisinga nelygybė (1.11). Kadangi $\eta'_j = \frac{1}{\tau}\eta_j$, $\tau \neq 0$, o $d\eta' = d(1/\tau) \wedge \eta + \frac{1}{\tau}d\eta$, tai

$$\eta' \wedge \underbrace{d\eta' \wedge \dots \wedge d\eta'}_{n-1} = \frac{1}{\tau^n} (\eta \wedge \underbrace{d\eta \wedge \dots \wedge d\eta}_{n-1}) \neq 0,$$

nes $\eta \wedge \eta = 0$. Taigi visos šeimos struktūros yra kontaktinės. Akivaizdu, kad vieno kurio nors kovektoriaus η' kontaktiškumas sąlygoja ir kovektoriaus η kontaktiškumą. ▼

3. KOMPLEKSNĖS KETURMATĖS PSEUDOEUKLIDINĖS ERDVĖS BEVEIK KONTAKTINIAI METRINIAI HIPERPAVIRŠIAI

Panagrinėkime keturmatę pseudoeuklidinę nulinės signatūros erdvę ${}^2E_4(x^1, x^2, x^3, x^4)$, kurios metrinis tenzorius yra

$$(G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, 3, 4. \quad (3.1)$$

Tarkime, jog šioje erdvėje turime afinorių

$$(F_{\alpha}^{\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Afinorius F_{α}^{β} ir metrinis tenzorius $G_{\alpha\beta}$ tenkina (1.12) sąlygas, t.y. 2E_4 yra beveik kompleksinė erdvė su B -metrika. Kadangi $G_{\alpha\beta} = \text{const}$, $F_{\beta}^{\alpha} = \text{const}$, tai Kristofelio simboliai $\{\gamma_{\alpha\beta}\} = 0$, o afinorius F yra kovariantiškai pastovus: $\nabla_{\gamma} F_{\alpha}^{\beta} = 0$. Vadinasi, erdvė 2E_4 yra elipsinio tipo B -erdvė [1]. Šioje erdvėje $E_4(x^{\alpha})$ panagrinėkime hiperpaviršių $M_3(x^i)$, apibrėžtą viena lygtimi

$$x^4 = f(x^i), i, j, k, \dots = 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

Liečiamųjų vektorių koordinatės $B_i^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^i}$ yra tokios:

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 & (1, 0, 0, f_1), \\ \vec{B}_2 & (0, 1, 0, f_2), \\ \vec{B}_3 & (0, 0, 1, f_3) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$f_i = \frac{\partial_i f}{\partial x^i}.$$

Rasime vektorių $\vec{n}$, statmeną vektoriams $\vec{B}_i$. Pažymėkime jo koordinatės $\vec{n}(n^1, n^2, n^3, n^4)$. Iš statmenumo sąlygos $\vec{B}_i \cdot \vec{n} = G_{\alpha\beta} B_i^{\alpha} n^{\beta} = 0$, paėmę $i = 1, 2, 3$, pritaikę (3.1), (3.4), gausime lygčių sistemą. Pvz., kai $i = 1$,

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} B_1^{\alpha} n^{\beta} &= G_{11} B_1^1 n^1 + G_{12} B_1^1 n^2 + G_{13} B_1^1 n^3 + G_{14} B_1^1 n^4 + G_{21} B_1^2 n^1 + G_{22} B_1^2 n^2 + G_{23} B_1^2 n^3 + \\ &+ G_{24} B_1^2 n^4 + G_{31} B_1^3 n^1 + G_{32} B_1^3 n^2 + G_{33} B_1^3 n^3 + G_{34} B_1^3 n^4 + G_{41} B_1^4 n^1 + G_{42} B_1^4 n^2 + G_{43} B_1^4 n^3 + \\ &+ G_{44} B_1^4 n^4 = 0. \end{aligned}$$

Iš čia gauname, kad $n^1 - f_1 n^4 = 0$. Analogiškai, kai $i = 2$, galioja lygybė $n^2 - f_2 n^4 = 0$, jei $i = 3$, - $n^3 + f_3 n^4 = 0$. Taigi mūsų lygčių sistema turi pavidalą:

$$\begin{cases} n^1 - f_1 n^4 = 0, \\ n^2 - f_2 n^4 = 0, \\ n^3 + f_3 n^4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^1 = f_1 n^4, \\ n^2 = f_2 n^4, \\ n^3 = -f_3 n^4. \end{cases}$$

Normuokime vektorių $\vec{n}$ iki ε -vienetinio vektoriaus. Jei $f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 - 1 \neq 0$, t.y., jei normalinis vektorius nėra izotopinis, tarę, jog $n^4 = \sqrt{\frac{1}{|f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 - 1|}}$, gauname normalinį ε -vienetinį vektorių $\vec{n}$:

$$\vec{n}(f_1 \ f_2 \ -f_3 \ 1) \cdot \frac{\varepsilon}{k}, k = \sqrt{|f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 - 1|}, \varepsilon = \text{sgn}(f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 - 1) = \pm 1. \quad (3.5)$$

Iš lygties (1.14)₃ rasime hiperpaviršiuje metrinį tenzorių g_{ij} :

$$g_{11} = G_{11}B_1^1B_1^1 + G_{12}B_1^1B_1^2 + G_{13}B_1^1B_1^3 + G_{14}B_1^1B_1^4 + G_{21}B_1^2B_1^1 + G_{22}B_1^2B_1^2 + G_{23}B_1^2B_1^3 + G_{24}B_1^2B_1^4 + \\ + G_{31}B_1^3B_1^1 + G_{32}B_1^3B_1^2 + G_{33}B_1^3B_1^3 + G_{34}B_1^3B_1^4 + G_{41}B_1^4B_1^1 + G_{42}B_1^4B_1^2 + G_{43}B_1^4B_1^3 + G_{44}B_1^4B_1^4 = 1 - f_1^2.$$

Analogiškai randamos kitos metrinio tenzoriaus koordinatės. Metrinio tenzoriaus matrica yra

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 - f_1^2 & -f_1 f_2 & -f_1 f_3 \\ -f_1 f_2 & 1 - f_2^2 & -f_2 f_3 \\ -f_1 f_3 & -f_2 f_3 & -1 - f_3^2 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Hiperpaviršiaus $M_3(x^i)$ neišsigimusio metrinio tenzoriaus koordinačių g_{ij} determinantas

$$\Delta = \det(g_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 - f_1^2 & -f_1 f_2 & -f_1 f_3 \\ -f_1 f_2 & 1 - f_2^2 & -f_2 f_3 \\ -f_1 f_3 & -f_2 f_3 & -1 - f_3^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} f_1^2 - 1 & f_1 f_2 & f_1 f_3 \\ f_1 f_2 & f_2^2 - 1 & f_2 f_3 \\ f_1 f_3 & f_2 f_3 & f_3^2 + 1 \end{vmatrix} = \\ = [(f_1^2 - 1)(f_2^2 - 1)(f_3^2 + 1) + 2f_1^2 f_2^2 f_3^2 - f_1^2 f_3^2 (f_2^2 - 1) - f_2^2 f_3^2 (f_1^2 - 1) - f_1^2 f_2^2 (f_3^2 + 1)] = \\ = f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 - 1 \neq 0.$$

Ateityje mums bus naudingos formulės, siejančios dydžių k ir Δ reikšmes:

$$k = \sqrt{|f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 - 1|} = \sqrt{|\Delta|} > 0, \Delta = \varepsilon \cdot k^2. \quad (3.7)$$

Vektorių $\vec{n}$ (3.5) paveikę afinoriumi F (3.2), turime vektorių $F(\vec{n})$, kurio koordinatės

$$F_\alpha^\beta n^\alpha \text{ yra } \frac{f_3}{k}, -\frac{1}{k}, \frac{f_1}{k}, \frac{f_2}{k}:$$

$$F(\vec{n})(f_3, -1, f_1, f_2) \cdot \frac{1}{k}. \quad (3.8)$$

Vektoriai $\vec{B}_i$ (3.4) ir $\vec{n}$ (3.5) yra tiesiškai nepriklausomi, todėl sudaro kiekviename hiperpaviršiaus taške erdvės 2E_4 bazę. Vektorių $F(\vec{n})$ (3.8) išreiškiame baziniais vektoriais: $F(\vec{n}) = \lambda^i \vec{B}_i + \lambda \vec{n}$. Padauginkime lygybę skaliariškai iš vektoriaus $\vec{n}$: $F(\vec{n}) \cdot \vec{n} = \lambda^i \vec{B}_i \cdot \vec{n} + \lambda \vec{n}^2$. Kadangi vektorius $\vec{n}$ statmenas liečiamiesiems vektoriams, o $\vec{n}^2 = \varepsilon$, tai

$$\lambda = \varepsilon \cdot F(\vec{n}) \cdot \vec{n} = \varepsilon \cdot F_{\alpha}^{\beta} G_{\beta\gamma} n^{\alpha} n^{\gamma}.$$

Jei vektorius $\vec{n}$ nėra izotropinis metrikos $F_{\alpha\beta}$ atžvilgiu, t.y. jei $F_{\alpha}^{\beta} G_{\beta\gamma} n^{\alpha} n^{\gamma} \neq 0$, tai $\lambda \neq 0$, ir vektorius $\vec{n}$ nėra beveik kontaktinis vektorius.

Ieškome beveik kontaktinio vektoriaus $\vec{D}$, priklausančio plokštumai $(\vec{n}, F(\vec{n}))$:

$$\vec{D} = \vec{n} + \nu \cdot F(\vec{n}).$$

Iš (3.5), (3.8) formulų išplaukia, kad vektoriaus $\vec{D}$ koordinatės yra tokios:

$$\begin{aligned} D^1 &= \frac{1}{k}(f_1 + \nu \cdot f_3), \\ D^2 &= \frac{1}{k}(f_2 - \nu), \\ D^3 &= \frac{1}{k}(-f_3 + \nu \cdot f_1), \\ D^4 &= \frac{1}{k}(1 + \nu \cdot f_2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nežinomąjį ν ieškosime iš reikalavimo, kad vektorius $\vec{D}$ turi būti beveik kontaktinis, t.y., kad vektorius $F(\vec{D})$ būtų hiperpaviršiaus liečiamasis vektorius:

$$F_i^j D^i \bar{D}_j = 0, \quad (3.10)$$

kur $\bar{D}_j$ gaunami iš lygčių $B_i^j \bar{D}_j = 0$. Nesunku apskaičiuoti, kad $\bar{D}_j (f_1 \ f_2 \ f_3 \ -1)$.

Iš (3.10) lygybės rasime ν :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}(f_1 + \nu \cdot f_3)f_3 + \frac{1}{k}(f_2 - \nu)(-1) - \frac{1}{k}(-f_3 + \nu \cdot f_1)f_1 - \frac{1}{k}(1 + \nu \cdot f_2)f_2 &= 0, \\ \frac{1}{k}\nu(f_3^2 + 1 - f_1^2 - f_2^2) &= -f_1 f_3 + f_2 - f_1 f_3 + f_2, \\ \nu &= \frac{2(f_2 - f_1 f_3)}{1 + f_3^2 - f_1^2 - f_2^2} = \frac{2L}{-\Delta}, \text{ kur } L = f_2 - f_1 f_3, \Delta = -1 - f_3^2 + f_1^2 + f_2^2. \end{aligned}$$

Irašę gautą ν reikšmę į vektorių $\vec{D}$ koordinačių išraiškas (3.9), gauname beveik kontaktinį vektorių $\vec{D}$, apibrėžtą normaliniu vektoriumi $\vec{n}$, t.y. esantį plokštumose $(\vec{n}, F(\vec{n}))$:

$$D^1 = \frac{1}{k}(f_1 + \nu \cdot f_3) = \frac{1}{k}\left(f_1 - \frac{2L}{\Delta} \cdot f_3\right) = \frac{1}{k\Delta}(f_1\Delta - 2Lf_3),$$

$$D^2 = \frac{1}{k}(f_2 - \nu) = \frac{1}{k\Delta}(f_2\Delta + 2L),$$

$$D^3 = \frac{1}{k}(-f_3 + \nu \cdot f_1) = \frac{1}{k\Delta}(-f_3\Delta - 2Lf_1),$$

$$D^4 = \frac{1}{k}(1 + \nu \cdot f_2) = \frac{1}{k\Delta}(\Delta - 2Lf_2), \quad L = f_2 - f_1 f_3.$$

Rasime jo skaliarinį kvadratą: $\vec{D}^2 = G_{\alpha\beta} D^\alpha D^\beta =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{k^2 \Delta^2} [\Delta^2 (f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 - 1) + 4L^2 (f_3^2 + 1 - f_1^2 f_2^2) + 4\Delta L (-f_1 f_3 + f_2 - f_1 f_3 + f_2)] = \\ &= \Delta(k^4 + 4L^2) / k^2 \Delta^2 = \varepsilon(k^4 + 4L^2) / \Delta^2. \end{aligned}$$

Pastebime, jog $\vec{D}^2$ ženklas yra ε , kaip ir Δ ženklas.

Normuokime vektorių $\vec{D}$ taip, kad jis būtų ε -vienetinis, ir patogumo dėlei pakeiskime jo kryptį.

$$\vec{C} = \frac{-\vec{D}}{\sqrt{\vec{D}^2}} = \frac{1}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}} (-f_1\Delta + 2Lf_3 \quad -f_2\Delta - 2L \quad f_3\Delta + 2Lf_1 \quad -\Delta + 2Lf_2). \quad (3.11)$$

Vektorius $\vec{C}$ yra beveik kontaktinis ε -vienetinis vektorius, esantis plokštumoje $(\vec{n}, F(\vec{n}))$.

Paveikime afinoriumi F vektorių $\vec{C}$ ir gautą vektorių išreiškime vektoriais $\vec{B}_i$. Iš (1.14)₂ rasime dydžius ξ^i . Kai $\beta = 1$, pritaikę (3.2), (3.4), (3.11), gausime, jog

$$F_1^1 C^1 + F_2^1 C^2 + F_3^1 C^3 + F_4^1 C^4 = -\xi^1 B_1^1 - \xi^2 B_2^1 - \xi^3 B_3^1 \quad \text{arba} \quad -\frac{f_3\Delta + 2Lf_1}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}} = -\xi^1. \quad \text{Iš čia}$$

$$\xi^1 = \frac{f_3\Delta + 2Lf_1}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}}.$$

$$\text{Analogiškai, kai } \beta = 2, 3, \text{ randame } \xi^2 = \frac{-\Delta + 2Lf_2}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}}, \quad \xi^3 = \frac{f_1\Delta - 2Lf_3}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}}. \quad \text{Taigi}$$

turime, jog

$$\xi^i (f_3\Delta + 2Lf_1, \quad -\Delta + 2Lf_2, \quad f_1\Delta - 2Lf_3) \frac{1}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}}. \quad (3.12)$$

Paveikiame liečiamuosius vektorius $\vec{B}_i$ afinoriumi F ir gautus vektorius išreiškiame tiesiškai nepriklausomais vektoriais $\vec{B}_i, \vec{C}$. Iš (1.14)₁ lygybės pritaikę (3. 1), (3. 2), (3. 4), (3. 11) išraiškas rasime tenzorius φ_i^j, η_i .

Tarkime, kad $i = 1, \beta = 1$. Iš (1.14)₁ $F_\alpha^1 B_1^\alpha = \varphi_1^1 B_1^1 + \varphi_1^2 B_2^1 + \varphi_1^3 B_3^1 + \eta_1 C^1$.

Pritaikę (3.2), (3.4), (3.11) formules gauname lygtį

$$\varphi_1^1 + \eta_1 \frac{-f_1 \Delta + 2L f_3}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}} = 0 \text{ arba } \varphi_1^1 = -\eta_1 \frac{-f_1 \Delta + 2L f_3}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}}.$$

Analogiškai, kai $\beta = 2$, turime lygtį

$$\varphi_1^2 + \eta_1 \frac{-f_2 \Delta - 2L}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}} = -f_1 \text{ arba } \varphi_1^2 = -f_1 - \eta_1 \frac{-f_2 \Delta - 2L}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}}.$$

Kai $\beta = 3$, gauname lygtį

$$\varphi_1^3 + \eta_1 \frac{f_3 \Delta + 2L f_1}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}} = 1 \text{ arba } \varphi_1^3 = 1 - \eta_1 \frac{f_3 \Delta + 2L f_1}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}}.$$

Pagaliau, kai $\beta = 4$,

$$\varphi_1^1 f_1 + \varphi_1^2 f_2 + \varphi_1^3 f_3 + \eta_1 \frac{-\Delta + 2L f_2}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}} = 0.$$

Iš paskutinės lygties randame η_1 :

$$\eta_1 \frac{f_1 \Delta - 2L f_3}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}} f_1 + \left(-f_1 + \eta_1 \frac{f_2 \Delta + 2L}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}} \right) \cdot f_2 + \left(1 - \eta_1 \frac{f_3 \Delta + 2L f_1}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}} \right) \cdot f_3 + \eta_1 \frac{-\Delta + 2L f_2}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}} = 0,$$

$$\frac{\eta_1}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}} (f_1^2 \Delta - 2L f_1 f_3 - f_1 f_2 + f_2^2 \Delta + 2L f_2 - f_3^2 \Delta - 2L f_1 f_3 - \Delta + 2L f_2) = f_1 f_2 - f_3,$$

$$\eta_1 = \frac{(f_1 f_2 - f_3) \sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}}{\Delta^2 + 4L^2} = \frac{(f_1 f_2 - f_3) \sqrt{|\Delta|}}{\sqrt{k^4 + 4L^2}}.$$

Panašiai randame $\eta_2 = \frac{(1 + f_2^2) \sqrt{|\Delta|}}{\sqrt{k^4 + 4L^2}}$, bei $\eta_3 = \frac{(f_1 + f_2 f_3) \sqrt{|\Delta|}}{\sqrt{k^4 + 4L^2}}$. Taigi turime kovektorių

$$\eta_j \begin{pmatrix} f_1 f_2 - f_3 & 1 + f_2^2 & f_1 + f_2 f_3 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{|\Delta|}}{\sqrt{k^4 + 4L^2}}. \quad (3. 13)$$

Irašę η_1 reikšmę į aukščiau gautas φ_1^i išraiškas, randame

$$\varphi_1^1 = (f_1 f_2 - f_3)(f_1 k^2 - 2 f_3 L)/(k^4 + 4L^2),$$

$$\varphi_1^2 = [(f_1 f_2 - f_3)(2L + f_2 k^2) - f_1(k^4 + 4L^2)]/(k^4 + 4L^2),$$

$$\varphi_1^3 = [-(f_1 f_2 - f_3)(f_3 k^2 + 2 f_1 L) + (k^4 + 4L^2)]/(k^4 + 4L^2).$$

Kai $i = 2$, iš (1.14)₁ išraiškos randame $\varphi_2^1 = (1 + f_2^2)(f_1 k - 2 f_3 L)/(k^4 + 4L^2)$,
 $\varphi_2^2 = [(1 + f_2^2)(2L + f_2 k) - f_2(k^2 + 4L^2)]/(k^4 + 4L^2)$, $\varphi_2^3 = -(1 + f_2^2)(f_3 k + 2 f_1 L)/(k^4 + 4L^2)$.

Jei $i = 3$, analogiškai randame

$$\varphi_3^1 = (f_1 + f_2 f_3)(f_1 k - 2 f_3 L)/(k^2 + 4L^2) - 1,$$

$$\varphi_3^2 = (f_1 + f_2 f_3)(2L + f_2 k)/(k^2 + 4L^2) - f_3,$$

$$\varphi_3^3 = -(f_1 + f_2 f_3)(f_3 k + 2 f_1 L)/(k^4 + 4L^2).$$

Hiperpaviršiuje gauto afnoriaus φ_i^j , vektoriaus ξ^j (3.12), kovektoriaus η_i (3.13), metrinio tenzoriaus g_{ij} (3.6) matricas surašome kompaktiškai:

$$(\varphi_i^j) = \begin{pmatrix} \eta_1 \xi^3 & \eta_1(\xi^1 f_1 + \xi^2 f_2 + \xi^3 f_3) - f_1 & -\eta_1 \xi^1 + 1 \\ \eta_2 \xi^3 & \eta_2(\xi^1 f_1 + \xi^2 f_2 + \xi^3 f_3) - f_2 & -\eta_2 \xi^1 \\ \eta_3 \xi^3 - 1 & \eta_3(\xi^1 f_1 + \xi^2 f_2 + \xi^3 f_3) - f_3 & -\eta_3 \xi^1 \end{pmatrix},$$

$$\eta_j (f_1 f_2 - f_3 \quad 1 + f_2^2 \quad f_1 + f_2 f_3) \frac{\sqrt{|\Delta|}}{\sqrt{k^4 + 4L^2}},$$

$$\xi^i (f_3 \Delta + 2L f_1 \quad -\Delta + 2L f_2 \quad f_1 \Delta - 2L f_3) \frac{1}{\sqrt{|\Delta|(k^4 + 4L^2)}}, \quad (3.14)$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 - f_1^2 & -f_1 f_2 & -f_1 f_3 \\ -f_1 f_2 & 1 - f_2^2 & -f_2 f_3 \\ -f_1 f_3 & -f_2 f_3 & -1 - f_3^2 \end{pmatrix}.$$

Nesunku patikrinti, jog tenzoriai (3.14) tenkina (1.7) ir (1.8) sąlygas, kuriose $\rho=1$, t.y. apibrėžia hiperpaviršiuje (3.3) elipsinio tipo II rūšies beveik kontaktinę metrinę struktūrą.

▲ Pirmiausiai įrodysime, kad $g_{ij}\xi^j = \varepsilon\eta_i$. Tarkime, kad $i=1$, tuomet turi galioti lygybė $g_{1j}\xi^j = \varepsilon\eta_1$ arba $g_{11}\xi^1 + g_{12}\xi^2 + g_{13}\xi^3 = \varepsilon\eta_1$.

$$\begin{aligned}
& (1-f_1^2)\frac{f_3\Delta+2Lf_1}{\sqrt{|\Delta|(k^4+4L^2)}} + (-f_1f_2)\frac{-\Delta+2Lf_2}{\sqrt{|\Delta|(k^4+4L^2)}} + (-f_1f_3)\frac{f_1\Delta-2Lf_3}{\sqrt{|\Delta|(k^4+4L^2)}} = \\
& = \frac{1}{\sqrt{|\Delta|(k^4+4L^2)}} (f_3\Delta+2Lf_1 - f_1^2f_3\Delta-2Lf_1^3 + f_1f_2\Delta-2Lf_1f_2^2 - f_1^2f_3\Delta+2Lf_1f_3^2) = \\
& = \frac{1}{\sqrt{|\Delta|(k^4+4L^2)}} (\Delta(f_3-f_1^2f_3+f_1f_2-f_1^2f_3)+2L(f_1-f_1^3-f_1f_2^2+f_1f_3^2)) = \\
& = \frac{1}{\sqrt{|\Delta|(k^4+4L^2)}} (\Delta(f_3-2f_1^2f_3+f_1f_2)+2L(f_1(1-f_1^2-f_2^2+f_3^2))) = \\
& = \frac{1}{\sqrt{|\Delta|(k^4+4L^2)}} (\Delta(f_3-2f_1^2f_3+f_1f_2-2f_1f_2+2f_1^2f_3)) = \frac{\Delta(f_3-f_1f_2)}{\sqrt{|\Delta|(k^4+4L^2)}} = \frac{\varepsilon(f_1f_2-f_3)\sqrt{|\Delta|}}{\sqrt{k^2+4L^2}} = \varepsilon\eta_1.
\end{aligned}$$

Panašiai įrodoma, jog $g_{2j}\xi^j = \varepsilon\eta_2$, $g_{3j}\xi^j = \varepsilon\eta_3$.

Įrodysime, jog $\varphi_i^j\varphi_j^k = -\delta_i^k + \xi^k\eta_i$. Pastebime, kad $-\delta_\alpha^\gamma B_i^\alpha = -B_i^\gamma = -\delta_i^k B_k^\gamma = -\delta_i^j B_j^\gamma$.

Paveikę (1.14)₁ lygybę afinoriumi F , gauname, kad

$$\begin{aligned}
F_\beta^\gamma F_\alpha^\beta B_i^\alpha &= \varphi_i^j \varphi_j^k B_k^\gamma + \varphi_i^k \eta_k C^\gamma - \eta_i \xi^j B_j^\gamma = -B_i^\gamma, \\
-\delta_\alpha^\gamma B_i^\alpha &= \varphi_i^j \varphi_j^k B_k^\gamma + \varphi_i^k \eta_k C^\gamma - \eta_i \xi^k B_k^\gamma = -\delta_i^k B_k^\gamma.
\end{aligned}$$

Kadangi vektoriai $\bar{B}_i$ ir $\bar{C}$ yra tiesiškai nepriklausomi, galima sulygtinti koeficientus prie B_k^γ :

$$\varphi_i^j \varphi_j^k = -\delta_i^k + \eta_i \xi^k.$$

Koeficientas prie C^γ : $\varphi_i^k \eta_k = 0$. Analogiškai įrodoma, kad $\varphi_a^b \xi^a = 0$, $\xi^a \eta_a = 1$.

Reikia patikrinti, ar tenzoriaus $\varphi_{ij} = \varphi_i^k g_{kj}$ yra simetrinis. Pritaikome (3.14)₁ ir (3.14)₂ išraiškas.

$$\begin{aligned}
\varphi_{21} &= \varphi_2^1 g_{11} + \varphi_2^2 g_{21} + \varphi_2^3 g_{31} = \frac{1}{\Delta^2 + 4L^2} \{ (1 + f_2^2) [\Delta(f_1(1 - f_1^2) - f_1 f_2^2 + f_1 f_3^2) + \\
&+ 2L(-f_3(1 - f_1^2) - f_1 f_2 + f_1^2 f_3)] + (\Delta^2 + 4L^2)(f_1 f_2^2) \} = \\
&= \frac{1}{\Delta^2 + 4L^2} \{ \Delta^2(-f_1 - f_1 f_2^2 + f_1 f_3^2) + 2L((1 + f_2^2)(-f_3 + 2f_1^2 f_3 - f_1^2 f_2) + 2(f_2 - f_1 f_3)f_1 f_2^2) \} = \\
&= \frac{1}{\Delta^2 + 4L^2} \{ -f_1 \Delta^2 + 2L(-f_3 + 2f_1^2 f_3 - f_1 f_2 - f_2^2 f_3 + 2f_2^2 f_1^2 f_3 - f_1 f_2^3 + 2f_1 f_2^3 - 2f_1^2 f_2^2 f_3) \} = \\
&= \frac{1}{\Delta^2 + 4L^2} \{ -f_1 \Delta^2 + 2L(-f_3 + 2f_1^2 f_3 - f_1 f_2 - f_2^2 f_3 + f_1 f_2^3) \}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{12} &= \varphi_1^1 g_{21} + \varphi_1^2 g_{22} + \varphi_1^3 g_{23} = \frac{1}{\Delta^2 + 4L^2} \{ (f_1 f_2 - f_3) \cdot [\Delta(-f_1^2 f_2 + f_2 - f_2^3 + f_2 f_3^2) + \\
&+ 2L(f_1 f_2 f_3 + 1 - f_2^2 + f_1 f_2 f_3)] + (\Delta^2 + 4L^2)(-f_1 + f_1 f_2^2 - f_2 f_3) \} = \\
&= \frac{1}{\Delta^2 + 4L^2} \{ -f_1 \Delta^2 + 2L(-f_3 + 2f_1^2 f_3 - f_1 f_2 - f_2^2 f_3 + f_1 f_2^3) \}.
\end{aligned}$$

Analogiškai galima įsitikinti, kad $\varphi_{13} = \varphi_{31}$, $\varphi_{23} = \varphi_{32}$, t.y., kad $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$. ▼

Teorema 3.1. Keturmatės pseudoeuklidinės kompleksinės erdvės 2E_4 hiperpaviršiuje (3.3), normalizuotame ε -vienetiniu beveik kontaktiniu vektoriumi (3.11), invariantiškai apibrėžtu normaliniu vektoriumi (3.5), indukuojasi elipsinio tipo II rūšies beveik kontaktinė metrinė struktūra (3.14).

Ateityje patogumo dėlei šią struktūrą vadinsime trumpai: (φ, ξ, η, g) -struktūra.

Dar mums bus reikalingi metrinio tenzoriaus g_{ij} Kristoferio simboliai ir hiperpaviršiaus (3.3) asimptotinis tenzorius. Pirmiausiai rasime metrikos (3.6) Kristofelio simbolius Γ_{ij}^k (1.3). Tam tikslui randama atvirkštinė matrica $(g^{kl}) = (g_{ij})^{-1}$:

$$g^{kl} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -1 - f_3^2 + f_2^2 & -f_1 f_2 & f_1 f_3 \\ -f_1 f_2 & -1 - f_3^2 + f_1^2 & f_2 f_3 \\ f_1 f_3 & f_2 f_3 & 1 - f_1^2 - f_2^2 \end{pmatrix}.$$

Iš čia

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \{ g^{11}(\partial_1 g_{11}) + g^{12}(2\partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}) + g^{13}(2\partial_1 g_{13} - \partial_3 g_{11}) \} = \\
&= \frac{1}{2\Delta} \{ (-1 - f_3^2 + f_2^2)(-2f_1 f_{11}) - f_1 f_2(-2f_{11} f_2 - 2f_1 f_{21} + 2f_1 f_{12}) + \\
&+ f_1 f_3(-2f_{11} f_3 - 2f_1 f_{31} + 2f_1 f_{13}) \} = \frac{2f_1 f_{11}}{2\Delta} (1 + f_3^2 - f_2^2 + f_2^2 - f_3^2) = \\
&= \frac{f_1 f_{11}}{\Delta}, \quad f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}.
\end{aligned}$$

Analogiškai

$$\Gamma_{ij}^1 = \frac{f_1 f_{ij}}{\Delta}, \Gamma_{ij}^2 = \frac{f_2 f_{ij}}{\Delta}, \Gamma_{ij}^3 = \frac{-f_3 f_{ij}}{\Delta}. \quad (3.15)$$

Hiperpaviršiaus asimptotinių tenzorių rasime iš (1. 17) formulės. Kadangi erdvės 2E_4 metrinio tenzoriaus koordinatės $G_{\alpha\beta} = \text{const}$, tai Kristoferio simboliai lygūs nuliui, ir asimptotinio tenzoriaus koordinatės

$$h_{ij} = \partial_i B_j^\gamma C_\gamma = f_{ij} \cdot \mu, \mu = C_4 = \frac{1}{k^4 + 4L^2}. \quad (3.16)$$

Pateiksime elipsinio tipo II rūšies beveik kontaktinių metrinų hiperpaviršių pavyzdžių.

1. Panagrinėkime hipersferą S^3 , apibrėžtą lygtimi $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = c$ arba jos dalį $x^4 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - c}$, $c = \text{const} \neq 0$. Nesunku apskaičiuoti, kad $f_1 = \frac{x^1}{x^4}$, $f_2 = \frac{x^2}{x^4}$,

$$f_3 = \frac{-x^3}{x^4}, \text{ o } f_{11} = \frac{(x^2)^2 - (x^3)^2 - c}{(x^4)^3} = \frac{1 - f_1^2}{x^4} = \frac{g_{11}}{x_4}.$$

Analogiškai galima įrodyti, kad $f_{ij} = \lambda g_{ij}$, $\lambda = \frac{1}{x^4}$. Metrinio tenzoriaus (3.1) koordinatės pastovios, o Kristoferio simboliai $\left\{ \begin{smallmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} = 0$, todėl iš

(3.16) formulės ir tenzoriaus φ_{ki} simetriškumo išplaukia, jog hipersferoje tenzorius $h_{ij}\varphi_k^j = f_{ij}\mu\varphi_k^j = \mu\lambda g_{ij}\varphi_k^j$ yra simetrinis tenzorius ir tenkina (1.16) sąlygas. Antra vertus, kadangi $\partial_i \eta_j - \partial_j \eta_i = 0$, tai iš (1.11) ir (1.2) formulių matome, kad $d\eta=0$, ir kovektorius η nėra kontaktinis. Tuo būdu įrodytas toks teiginys.

Teorema 3.2. Erdvės 2E_4 hipersferoje S^3 indukuotoji (φ, ξ, η, g) - struktūra (3.14) turi tokias savybes:

- 1) struktūra yra normalioji, taigi ir integruojamoji;
- 2) kovektorius η yra gradientas, todėl struktūra yra nekontaktinė.

2. Tarkime, jog turime hiperplokštumą $x^4 = Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 + D$. Kadangi $f_1 = A = \text{const}$, $f_2 = B = \text{const}$, $f_3 = C = \text{const}$, tai $f_{ij} = 0$. Dauguma pirmojo paragrafo formulių yra homogeninės išvestinių f_{ij} atžvilgiu. Taigi hiperplokštumai galioja (1.16), (1.15), bet negalioja (1.11) sąlygos. Pastebime, kad hiperplokštumai struktūrinių tenzorių koordinatės pastovios, o Kristoferio simboliai (3. 15) lygūs 0, todėl iš (1.4), (1.5), (1.6) ir (3.15) formulių matome, jog $\nabla_i \varphi_j^k = 0$, $\nabla_i \eta_j = 0$, $\nabla_i \xi^j = 0$. Įrodėme tokį teiginį.

Teorema 3.3. Erdvės 2E_4 hiperplokštumoje indukuotoji (φ, ξ, η, g) - struktūra (3.14) turi tokias savybes:

- 1) struktūra yra normalioji, taigi ir integruojamoji ($N_{ij}^k = S_{ij}^k = 0$);
- 2) struktūra nėra kontaktinė, nes kovektorius η yra gradientas ($\partial_i \eta_j - \partial_j \eta_i = 0$);
- 3) struktūriniai tenzoriai $\varphi_i^j, \xi^j, \eta_i, g_{ij}$ yra kovariantiškai pastovūs;
- 4) vektorius $\vec{\xi}$ yra Killing'o vektorius [1], t. y. $\nabla_i \eta_j + \nabla_j \eta_i = 0$.

4. (φ, ξ, η, g) -STRUKTŪROS SAVYBIŲ KRITERIJAI. PAVYZDŽIAI

Šiame paragrafe nagrinėsime erdvės ${}^2E_4(F, G)$ (3.1), (3.2) hiperpaviršius (3.3), kurių normalės vektorius $\vec{n}$ (3.5) yra beveik kontaktinis, t.y. kai galioja lygybė $L = f_2 - f_1 f_3 = 0$. Šiuo atveju (φ, ξ, η, g) -struktūra (3.14) įgauna paprastesnį pavidalą

$$(\varphi_i^j) = \begin{pmatrix} \frac{f_2}{f_3^2 + 1} & -\frac{f_1}{f_3^2 + 1} & \frac{1}{f_3^2 + 1} \\ \frac{\varepsilon f_1(1 + f_2^2)}{k^2} & \frac{\varepsilon f_2(f_3^2 - f_1^2 + 2)}{k^2} & -\frac{\varepsilon f_3(1 + f_2^2)}{k^2} \\ \frac{1}{f_1^2 - 1} & \frac{f_3}{f_1^2 - 1} & -\frac{f_2}{f_1^2 - 1} \end{pmatrix},$$

$$\xi^i \left(\frac{f_3}{k} \quad \frac{-1}{k} \quad \frac{f_1}{k} \right), \quad k = \sqrt{(f_3^2 + 1)|f_1^2 - 1|}, \quad (4.1)$$

$$\eta_j (\varepsilon f_3(f_1^2 - 1) \quad \varepsilon(1 + f_2^2) \quad \varepsilon(f_1 + f_2 f_3)) \frac{1}{k}, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn}(f_1^2 - 1) = \pm 1,$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 - f_1^2 & -f_1 f_2 & -f_2 \\ -f_1 f_2 & 1 - f_2^2 & -f_2 f_3 \\ -f_2 & -f_2 f_3 & -1 - f_3^2 \end{pmatrix}.$$

1. Ieškosime šios struktūros integruojamumo kriterijaus. Apskaičiuokime Nijenhuis'o tenzorių $N_{ij}^l = \varphi_i^l \partial_l \varphi_j^k - \varphi_j^l \partial_l \varphi_i^k - \varphi_l^k (\partial_i \varphi_j^l - \partial_j \varphi_i^l)$.

$$\begin{aligned} N_{13}^1 &= \varphi_1^1 \partial_1 \varphi_3^1 + \varphi_1^2 \partial_2 \varphi_3^1 + \varphi_1^3 \partial_3 \varphi_3^1 - \varphi_3^1 \partial_1 \varphi_1^1 - \varphi_3^2 \partial_2 \varphi_1^1 - \varphi_3^3 \partial_3 \varphi_1^1 - \varphi_1^1 (\partial_1 \varphi_3^1 - \partial_3 \varphi_1^1) - \\ &- \varphi_3^1 (\partial_1 \varphi_3^3 - \partial_3 \varphi_1^3) - \varphi_2^1 (\partial_1 \varphi_3^2 - \partial_3 \varphi_1^2) = \partial_3 (\varphi_1^3 \varphi_3^1) + \partial_3 \varphi_1^1 (\varphi_1^1 - \varphi_3^3) + \varphi_1^2 \partial_2 \varphi_3^1 - \varphi_3^1 \partial_1 \varphi_1^1 \\ &- \varphi_3^2 \partial_2 \varphi_1^1 + \varphi_2^1 (\partial_3 \varphi_1^2 - \partial_1 \varphi_3^2) - \varphi_3^1 \partial_1 \varphi_3^3 \end{aligned}$$

Žinant φ_i^j išraiškas (4.1)₁, suradus jų dalines išvestines, N_{13}^1 įgauna tokį pavidalą:

$$\begin{aligned} N_{13}^1 &= \frac{-2 f_3 f_{33} (f_1^2 - 1) - 2 f_1 f_{13} (1 + f_3^2)}{(1 + f_3^2)^2 (f_1^2 - 1)^2} + \frac{f_2 (f_1^2 + f_3^2)}{(1 + f_3^2) (f_1^2 - 1)} \cdot \frac{f_{23} (1 + f_3^2) - 2 f_2 f_3 f_{33}}{(1 + f_3^2)^2} + \\ &+ \frac{2 f_1^2 f_{12}}{(1 + f_3^2) (f_1^2 - 1)^2} - \frac{1}{(f_1^2 - 1)} \cdot \frac{f_{21} (1 + f_3^2) - 2 f_2 f_3 f_{31}}{(1 + f_3^2)^2} - \frac{f_3}{(f_1^2 - 1)} \cdot \frac{f_{22} (1 + f_3^2) - 2 f_2 f_3 f_{32}}{(1 + f_3^2)^2} + \\ &+ \frac{f_1 (1 + f_2^2)}{(1 + f_3^2) (f_1^2 - 1)} \cdot \left[-\frac{f_{13} (1 + f_3^2) + 2 f_1 f_3 f_{33}}{(1 + f_3^2)^2} - \frac{f_{31} (f_1^2 - 1) - 2 f_3 f_1 f_{11}}{(f_1^2 - 1)^2} \right] + \\ &+ \frac{1}{(f_1^2 - 1)} \cdot \frac{f_{21} (f_1^2 - 1) - 2 f_2 f_1 f_{11}}{(f_1^2 - 1)^2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Šį reiškinį paverčiame paprastesniu pritaikę iš lygybės $L = f_2 - f_1 f_3 = 0$ išplaukiančias formules:

$$\begin{aligned}
 f_2 &= f_1 f_3, \\
 f_{23} &= f_{13} f_3 + f_1 f_{33}, \\
 f_{21} &= f_{11} f_3 + f_1 f_{13}, \\
 f_{22} &= f_{11} f_3^2 + 2 f_{13} f_1 f_3 + f_{33} f_1^2, \\
 \Delta &= f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 - 1 = (f_1^2 - 1)(f_3^2 + 1), \\
 k^2 &= \varepsilon(1 + f_3^2)(f_1^2 - 1), \varepsilon = \operatorname{sgn}(f_1^2 - 1) = \pm 1.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pastebime, jog N_{13}^1 išraiškoje figūruoja dydžiai f_1, f_2, f_3 bei f_{11}, f_{13}, f_{33} . Tad patogumo dėlei apskaičiuojant reiškinį (4.2) sugrupuokime narius, esančius prie f_{11}, f_{13}, f_{33} .

Koeficientas prie f_{11} lygus:

$$\begin{aligned}
 &\frac{2 f_1^2 f_3}{(1 + f_3^2)(f_1^2 - 1)^2} - \frac{f_3}{(1 + f_3^2)(f_1^2 - 1)} - \frac{f_3 f_3^2}{(1 + f_3^2)(f_1^2 - 1)} + \frac{2 f_1 f_2 (1 + f_2^2)}{(1 + f_3^2)(f_1^2 - 1)^3} + \frac{f_3}{(f_1^2 - 1)^2} - \frac{2 f_1 f_2}{(f_1^2 - 1)^3} = \\
 &= \frac{f_3}{(1 + f_3^2)(f_1^2 - 1)} \cdot \left[\frac{2 f_1^2 - (1 + f_3^2)(f_1^2 - 1)}{(f_1^2 - 1)} + \frac{2 f_1^2 (1 + f_2^2 - 1 - f_3^2)}{(f_1^2 - 1)^2} + \frac{1 + f_3^2}{(f_1^2 - 1)} \right] = \frac{f_3}{(1 + f_3^2)(f_1^2 - 1)} \cdot \\
 &\cdot \left[\frac{f_1^2 + f_3^2 - f_2^2 + 1 + 2 f_1^2 f_3^2 + 1 + f_3^2}{f_1^2 - 1} \right] = \frac{f_3}{(1 + f_3^2)(f_1^2 - 1)} \cdot \frac{f_1^2 + f_2^2 + 2 + 2 f_3^2}{f_1^2 - 1} = \frac{f_3 (2 + f_1^2)}{(f_1^2 - 1)^2}.
 \end{aligned}$$

Panašiai randami koeficientai prie f_{13}, f_{33} . Po šių skaičiavimų gauname žymiai paprastesnę koordinatės N_{13}^1 (4.2) išraišką:

$$N_{13}^1 = \frac{f_3 f_{11} (2 + f_1^2)}{(f_1^2 - 1)^2} + \frac{f_3 f_{33} (2 + f_1^2)}{(1 + f_3^2)^2} = \frac{f_3 (2 + f_1^2)}{(1 + f_3^2)^2 (f_1^2 - 1)^2} \cdot [f_{11} (1 + f_3^2)^2 + f_{33} (f_1^2 - 1)^2].$$

Reiškinio N_{13}^1 išraišką gauname dar paprastesnę, skliaustuose esantį reiškinį pažymėję simboliu M :

$$\begin{aligned}
 f_{11} (1 + f_3^2)^2 + f_{33} (f_1^2 - 1)^2 &= M, \\
 N_{13}^1 &= \frac{f_3 (2 + f_1^2)}{(1 + f_3^2)^2 (f_1^2 - 1)^2} \cdot M.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Analogiškai galime surasti ir likusius N_{ij}^k : $N_{ij}^k = \lambda_{ij}^k \cdot M$, kur

$$\lambda_{13}^1 = \frac{f_3 (2 + f_1^2)}{k^4}, \lambda_{13}^2 = \frac{f_3^2 - f_1^2 - 1}{k^4}, \lambda_{13}^3 = \frac{f_1 (2 - f_3^2)}{k^4}, \dots \tag{4.5}$$

Pastebime, kad Nijenhuis'o tenzorius koordinatės N_{ij}^k tiesiškai priklauso nuo M , todėl galime teigti, jog iš lygybės $M = 0$ išplaukia lygybė $N_{ij}^k = 0$. Atvirkščiai, tegul $N_{ij}^k = 0$, tada

$\lambda_{ij}^k = 0$ arba $M = 0$. Įrodysime, kad $M = 0$. Tarkime priešingai, $M \neq 0$, o $\lambda_{ij}^k = 0$. Jei $\lambda_{ij}^k = 0$, tai iš (4.5) išraiškų matome, kad $f_3 = f_1 = 0$, $f_{11} = f_{13} = f_{33} = 0$, o iš (4.4) lygybės matome, kad $M = 0$. Gavome prieštaravimą. Vadinasi, mūsų prielaida, jog $M \neq 0$, neteisinga. Tuo būdu įrodėme tokį teiginį.

Teorema 4.1. (φ, ξ, η, g) -struktūra, (4.1) hiperpaviršiuje (3.3), kurio normalės vektorius yra beveik kontaktinis vektorius, yra integruojamoji tada ir tik tada, kai funkcija $f(x^i)$, apibrėžianti hiperpaviršių, tenkina diferencialinę lygtį

$$f_{11}(1 + f_3^2)^2 + f_{33}(f_1^2 - 1)^2 = 0. \quad (4.6)$$

2. Toliau rasime pirmo laipsnio formos η uždaro būtiną ir pakankamą sąlygą. Tam tikslui randame kovektoriaus η koordinačių (4.1)₃ dalines išvestines. Taikydami (4.3) formules, turime, jog

$$\begin{aligned} \partial_1 \eta_3 &= \partial_1 \left(\frac{\varepsilon(f_1 + f_2 f_3)}{k} \right) = \varepsilon \partial_1 \left(f_1 \sqrt{\frac{1 + f_3^2}{f_1^2 - 1}} \right) = \varepsilon \cdot \left[f_{11} \sqrt{\frac{1 + f_3^2}{f_1^2 - 1}} + f_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{f_1^2 - 1}{f_3^2 - 1}} \cdot \frac{2 f_3 f_{31} |f_1^2 - 1| - 2 \varepsilon f_1 f_{11} (1 + f_3^2)}{(f_1^2 - 1)^2} \right) \right] = \\ &= \varepsilon \left[f_{11} \sqrt{\frac{1 + f_3^2}{f_1^2 - 1}} + \frac{f_1 \sqrt{|f_1^2 - 1|}}{\sqrt{1 + f_3^2}} \cdot \frac{f_3 f_{31}}{|f_1^2 - 1|} - \frac{f_1 \sqrt{|f_1^2 - 1|}}{\sqrt{1 + f_3^2}} \cdot \frac{(1 + f_3^2) f_1 f_{11} \varepsilon}{(f_1^2 - 1)^2} \right] = \varepsilon \left[f_{11} \sqrt{\frac{1 + f_3^2}{f_1^2 - 1}} \cdot \left(1 - \frac{f_1^2 \varepsilon}{|f_1^2 - 1|} \right) + \frac{f_2 f_{31}}{\sqrt{|f_1^2 - 1|} (1 + f_3^2)} \right] = \\ &= \varepsilon \left[f_{11} \sqrt{\frac{1 + f_3^2}{f_1^2 - 1}} \cdot \left(1 - \frac{f_1^2}{f_1^2 - 1} \right) + \frac{f_2 f_{31}}{\sqrt{|f_1^2 - 1|} (1 + f_3^2)} \right] = \varepsilon \left[f_{11} \sqrt{\frac{1 + f_3^2}{f_1^2 - 1}} \cdot \left(-\frac{f_1^2}{f_1^2 - 1} \right) + \frac{f_2 f_{31}}{\sqrt{|f_1^2 - 1|} (1 + f_3^2)} \right] = \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|f_1^2 - 1|} (1 + f_3^2)} \left[\frac{-f_{11} (1 + f_3^2)}{(f_1^2 - 1)} + f_2 f_{31} \right]. \end{aligned}$$

Panašiai apskaičiuojame $\partial_3 \eta_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|f_1^2 - 1|} (1 + f_3^2)} \left[\frac{f_{33} (1 + f_3^2)}{(f_1^2 - 1)} + f_{13} f_2 \right]$. Iš čia gauname, kad

$$\partial_1 \eta_3 - \partial_3 \eta_1 = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{|f_1^2 - 1|} (f_3^2 + 1)} \left[\frac{f_{11} (f_3^2 + 1)}{(f_1^2 - 1)} + \frac{f_{33} (f_1^2 - 1)}{(f_3^2 + 1)} \right] = -\frac{M}{k^3}. \quad (4.7)$$

Analogiškai randame

$$\partial_1 \eta_2 - \partial_2 \eta_1 = -f_1 \frac{M}{k^3}, \quad \partial_2 \eta_3 - \partial_3 \eta_2 = -f_3 \frac{M}{k^3}. \quad (4.8)$$

Iš (4.8), (4.7) formulių išplaukia tokia išvada.

Teorema 4.2. Erdvės 2E_2 hiperpaviršiuje (3.3), kurio normalės vektorius yra beveik kontaktinis vektorius, 1-forma η yra uždara tada ir tik tada, kai funkcija $f(x^1, x^2, x^3)$, apibrėžianti hiperpaviršių, tenkina diferencialinę lygtį (4.6).

3. Rasime (φ, ξ, η, g) -struktūros (4.1) normalumo kriterijų.

Tarkime, kad mūsų tiriama elipsinio tipo antros rūšies beveik kontaktinė metrinė struktūra (φ, ξ, η, g) yra normalioji, t.y. tenkinama sąlyga (1. 10).

Apskaičiuosime tenzoriaus S koordinates S_{ij}^k , kai $i=1, j=3, k=1$. Pagal (1.10) formulę

$S_{13}^1 = N_{13}^1 + \xi^1(\partial_1\eta_3 - \partial_3\eta_1)$. Iš (4.1)₂, (4.7), (4.8) formulių išplaukia, kad

$$S_{13}^1 = \frac{f_3(2+f_1^2)}{k^4} \cdot M - \frac{f_3}{k^4} \cdot M = \frac{f_3(1+f_1^2)}{k^4} \cdot M.$$

Analogiškai surandami ir visos likusios koordinatės S_{ij}^k : $S_{ij}^k = \mu_{ij}^k \cdot M$, kur

$$\mu_{13}^1 = \frac{f_3(1+f_1^2)}{k^4}, \mu_{13}^2 = \frac{f_3^2 - f_1^2}{k^4}, \mu_{13}^3 = \frac{f_1(1-f_3^2)}{k^4}, \dots \quad (4.9)$$

Tegul $M = 0$, tada $S_{ij}^k = 0$. Kitaip tariant, jei $M = 0$, tai (φ, ξ, η, g) -struktūra (4.1) yra normalioji. Atvirkščiai, tarkime, kad (φ, ξ, η, g) -struktūra yra normalioji, t.y. $S_{ij}^k = 0$. Tada $M = 0$ arba $\mu_{ij}^k = 0$. Tarkime, kad $M \neq 0$, o $\mu_{ij}^k = 0$. Iš (4.3) ir (4.9) formulių seka, kad $f_1 = f_3 = 0$, $f_{11} = f_{13} = f_{33} = 0$, o iš reiškinių M apibrėžimo (4.4) išplaukia, kad $M = 0$. Gavome prieštaravimą. Mūsų prielaida, jog $M \neq 0$, neteisinga. Vadinas jei $S_{ij}^k = 0$, tai ir $M = 0$. Taigi įrodytas toks teiginys.

Teorema 4.3. (φ, ξ, η, g) -struktūra (4.1) hiperpaviršiuje (3.3), kuriame galioja sąlyga $f_2 = f_1 f_3$, yra normalioji tada ir tik tada, kai funkcija $f(x^1, x^2, x^3)$ tenkina diferencialinę lygtį (4.6).

4. Rasime 1-formos η kontaktiškumo kriterijų. Pritaikę (4.1)₃, (4.7), (4.8) išraiškas apskaičiuojame reiškinį

$$\begin{aligned} & \eta_1(\partial_2\eta_3 - \partial_3\eta_2) + \eta_2(\partial_3\eta_1 - \partial_1\eta_3) + \eta_3(\partial_1\eta_2 - \partial_2\eta_1) = \\ & = \frac{\varepsilon}{k^4} M [f_3(f_1^2 - 1) \cdot (-f_3) + (1 + f_2^2) + f_1(1 + f_3^2) \cdot (-f_1)] = \\ & = \frac{\varepsilon M}{k^4} [-f_3^2 f_1^2 + f_3^2 + 1 + f_2^2 - f_1^2 - f_1^2 f_3^2] = \frac{-\varepsilon M \Delta}{k^4}. \end{aligned}$$

Matome, jog šis reiškinys lygus 0 tada ir tik tada, kai $M = 0$, nes $\Delta \neq 0, k \neq 0$.

Teorema 4.4. (φ, ξ, η, g) -struktūra (4.1) hiperpaviršiuje (3.3), kuriame normalės vektorius yra beveik kontaktinis vektorius, yra kontaktinė tada ir tik tada, kai funkcija $f(x^1, x^2, x^3)$, apibrėžianti hiperpaviršių, tenkina diferencialinę nelygybę

$$M = f_{11}(1 + f_3^2)^2 + f_{33}(f_1^2 - 1)^2 \neq 0. \quad (4.10)$$

Pateiksime keturmatės kompleksinės pseudoeuklidinės erdvės elipsinio tipo II rūšies beveik kontaktinių metrinčių hiperpaviršių su norimomis savybėmis pavyzdžių, t.y. (4. 6) diferencialinės lygties sprendinių.

1. Panagrinėkime hipercilindrą, nusakytą lygtimi $x^4 = f(x^3)$. Randame funkcijos f dalines išvestines

$$f_1 = f_2 = 0, \quad f_3 = \frac{df}{dx^3} = f', \quad f_2 = f_1 f_3, \quad f_{1i} = f_{2i} = 0. \quad (4.11)$$

Įrašę (4.11) išraiškas į (4.1) formules gauname, jog hipercilindre $x^4 = f(x^3)$ indukuota (φ, ξ, η, g) -struktūra yra tokia:

$$(\varphi_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{1+(f')^2} \\ 0 & 0 & \frac{f'}{1+(f')^2} \\ -1 & -f' & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^i \left(-f', \quad 1, \quad \frac{f'}{k} \right) \frac{1}{\sqrt{|-(f')^2 - 1|}},$$

$$\eta_j \left(-f', \quad 1, \quad 0 \right) \frac{\sqrt{|-(f')^2 - 1|}}{1+(f')^2}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-(f')^2 \end{pmatrix}.$$

Apskaičiuokime reiškinį $M = f''[(f')^2 - 1]^2$. Jei $f' \neq \text{const} (f'' \neq 0)$, tuomet $M \neq 0$. Atvirkščiai $M = 0$ tada ir tik tada kai $f'' = 0$, t.y. kai hipercilindras yra hiperplokštuma.

2. Panagrinėkime hipercilindrą, apibrėžtą lygtimi $x^4 = h(x^1)$. Apskaičiuojame funkcijos h išvestines

$$h_2 = h_3 = 0, \quad h_1 = h', \quad h_2 = h_1 h_3, \quad h_{2i} = h_{3i} = 0. \quad (4.12)$$

Įrašę (4.12) išraiškas į (4.1) formules gauname tokią (φ, ξ, η, g) -struktūrą:

$$(\varphi_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & -h' & 1 \\ \frac{h'}{(h')^2 - 1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{(h')^2 - 1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^i (0, \quad -1, \quad h') \frac{1}{\sqrt{|(h')^2 - 1|}}, \quad \eta_j (0, \quad 1, \quad h') \frac{\sqrt{|(h')^2 - 1|}}{(h')^2 - 1},$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1-(h')^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Kadangi $M = f''$, tai $M = 0$ tada ir tik tada, kai $f'' = 0$, t.y., kai hipercilindras yra hiperplokštuma. Įrodyta

Teorema 4.5. Hipercilindruose $x^4 = f(x^3)$ ir $x^4 = h(x^1)$ indukuotoji (φ, ξ, η, g) -struktūra (4.1) yra normalioji (taigi ir integruojamoji, ir 1-forma η yra uždara, nekontaktinė), tada ir tik tada, kai hipercilindras yra hiperplokštuma.

Pateiksime netrivialių hiperpaviršių, turinčių normaliąją, integruojamąją, nekontaktinę elipsinio tipo II rūšies beveik kontaktinę metrinę struktūrą, pavyzdžių, t.y. (4. 6) lygties sprendinių.

Panagrinėkime izotropinį paviršių metrikos $F_{\alpha}^{\beta} G_{\beta\gamma} = F_{\alpha\gamma}$ atžvilgiu. Iš (3.1), (3.2) formulių matome, jog $(F_{\alpha\gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}$. Čia (0) yra nulinė antros eilės matrica, (I_2) – vienetinė matrica. Taigi izotropinio paviršiaus lygtis yra $(x^1 - a)(x^3 - c) + (x^2 - b)(x^4 - d) = 0$. Iš čia

$$x^4 = d - \frac{x^1 - a}{x^2 - b}(x^3 - c). \quad (4. 13)$$

Apskaičiuojame funkcijos (4. 13) dalines išvestines.

$f_1 = -\frac{1}{x^2 - b}(x^3 - c)$, $f_2 = \frac{x^1 - a}{(x^2 - b)^2}(x^3 - c)$, $f_3 = -\frac{x^1 - a}{x^2 - b}$. Nesunku pastebėti, kad $f_2 = f_1 f_3$, t.y. hiperpaviršiaus (4. 13) normaliais vektorius yra beveik kontaktinis vektorius. Kadangi $f_{11} = 0$, $f_{33} = 0$, $f_{13} = -\frac{1}{x^2 - b}$, tai $M = 0$. Vadinas, hiperpaviršius (4. 13), izotropinis metrikos $F_{\alpha}^{\beta} G_{\beta\gamma} = F_{\alpha\gamma}$ atžvilgiu, tenkina (4. 6) sąlygą.

Teorema 4. 6. Erdvės 2E_2 hiperpaviršiuje $x^4 = d - \frac{x^1 - a}{x^2 - b}(x^3 - c)$ indukuotoji (φ, ξ, η, g) -struktūra (4.1) yra normalioji integruojamoji, 1-forma η yra uždara, nekontaktinė.

Galima nagrinėti hiperkvadrikas, apibrėžtas lygtimi $a_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} + 2a_{\alpha 0} x^{\alpha} + a_{00} = 0$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$. Įdomu, kokias sąlygas turi tenkinti 14 koeficientų $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, a_{\alpha 0}$, kad funkcijai $x^4 = f(x^1, x^2, x^3)$, tenkinančiai šią antros eilės lygtį, galiotų sąlygos $L = M = 0$. Kitaip, galima ieškoti diferencialinių lygčių sistemos

$$\begin{aligned} f_2 &= f_1 f_3, \\ f_{11}(1 + f_3^2) + f_{33}(f_1^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

sprendinių, kai ieškoma funkcija nusakyta neišreikštine antros eilės lygtimi. Sprendinių aibė nėra tuščioji, nes hiperpaviršius (4. 13) tenkina minėtas sąlygas. Tokie ieškojimai yra tolesnių tyrinėjimų objektas.

IŠVADOS

Darbe nagrinėjamos elipsinio tipo II rūšies beveik kontaktinės metrinės struktūros matematinėje literatūroje yra mažai tyrinėtos. Jos egzistuoja beveik kompleksinių daugdarų, turinčių B -metriką, normalizuotuose hiperpaviršiuose. Tiriama dviparametrinė tokių struktūrų šeima $2n$ -matės elipsinio tipo B -erdvės hiperpaviršiuje. Ryšys tarp šeimos struktūrų savybių įrodytas lemos ir teoremoje 2. 3.

Konkretūs elipsinio tipo II rūšies beveik kontaktinių metrinų struktūrų pavyzdžiai pateikti atskiru atveju, nagrinėjant keturmatės kompleksinės pseudoeuklidinės erdvės 2E_2 hiperpaviršius. Pritaikius teoremą 2.1, hiperpaviršiuje, normalizuotame beveik kontaktiniu vektoriumi, invariantiškai apibrėžtu normaliniu vektoriumi, rasta nagrinėjamoji struktūra. Tiriamos šios struktūros savybės: normalumas, integruojamumas, kontaktiškumas ir kt.

Daug dėmesio skiriama atvejui, kai beveik kontaktinė normalizacija sutampa su natūralia normalizacija normalinio vektoriaus pagalba. Rasti savybių kriterijai – antros eilės diferencialinės lygtys vienos trijų kintamųjų funkcijos, apibrėžiančios hiperpaviršių, atžvilgiu. Rasti diferencialinių lygčių atskiri sprendiniai, t. y. pateikti nagrinėjamų elipsinio tipo II rūšies beveik kontaktinių metrinų struktūrų pavyzdžiai.

LITERATŪRA

1. A. Baškienė, *Tenzorinės struktūros*, Šiauliai (2006).
2. D. Kravčenkaitė, A. Baškienė, Beveik kontaktinės metrinės struktūros elipsinio tipo B-erdvių hiperpaviršiuose, *Jaunųjų mokslininkų darbai*, **3(24)**, 168-171 (2009).
3. E. Mazėtis, On intristic tensor structures of a second order tangent bundle, *Lith. Math. J.*, **36(4)**, 409–419 (1996).
4. I. Sato, On a structure similar to almost contact structures, *Tensor*, **30(3)**, 219–224 (1976).
5. K. Matsumoto, I. Mihai, Warped product manifolds in Sasakian space forms, *SUT J. Math.*, **38**, 135–144 (2002).
6. M. Tripathi, Y. Song, J. Kim, On hypersurfaces of manifolds equipped with hypercosymplectic ξ -structure, *Commun. Korean Math. Soc.*, **18(2)**, 297–308 (2003).
7. S. Sasaki, On differentiable manifolds with certain structure which are closely related to almost contact structure, I. *Tohoku Math. J.*, **12**, 459–476 (1960).
8. А. Башкене, Эллиптические почти параконтактные метрические гиперповерхности в $T(V_n)$, *Liet. Matem. Rink.* **27(1)**, 3 – 14 (1987).
9. А. Крищюнайте, Об условиях нормальности и интегрируемости почти контактных структур на гиперповерхностях комплексного и двойного пространства, *Уч. зап. Казанского ун-та*, **128(3)**, 55 – 75 (1968).
10. А. П. Широков, Структуры на дифференцируемых многообразиях, *Алгебра. Топология. Геометрия*, Н.С., 127–188 (1969).
11. Э. Камке, Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, М. (1966).