ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

IRMUTĖ MACIULEVIČIENĖ

DVIMATĖ RIBINĖ TEOREMA DIRICHLĖ L-FUNKCIJOMS

MAGISTRO DARBAS

Darbo vadovas
prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas

Šiauliai , 2006

TURINYS

ĮVADAS

Tegul $\chi(m)$ yra Dirichlė charakteris moduliu k, o $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Dirichlė L-funkcija $L(s,\chi)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama eilute

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

Jeigu $\chi(m)$ nėra pagrindinis charakteris $\chi_0(m)$, tai funkcija $L(s,\chi)$ yra analiziškai pratęsiama į visą s-plokštumą, t.y. ji yra sveikoji funkcija. Kai $\chi = \chi_0$, tai funkcija $L(s,\chi_0)$ taške $s = 1$ turi paprastą polių su reziduumu

$$\prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Dirichlė L-funkcijos yra naudojamos nagrinėjant pirminių skaičių pasiskirstymą aritmetinėse progresijose.

Nuo H. Boro (Bohr) ir B. Jeseno (Jessen) laikų (1930 m.) Dirichlė eilučių teorijoje yra naudojami tikimybiniai metodai, yra įrodinėjamos ribinės teoremos silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme. Dirichlė L-funkcijoms tokio tipo teoremas galime įrodyti pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$ ant vertikalių tiesių, tačiau galima gauti ir ribines teoremas charakterio modulių atžvilgiu. Trumpai apžvelgsime pastarojo tipo rezultatus.

Simboliu p žymėsime pirminį skaičių. Tegul $Q \geq 2$, o

$$M_Q = \sum_{p \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi(mod p) \\ \chi \neq \chi_0}} 1.$$

Iš pirminių skaičių pasiskirstymo dėsnio

$$\sum_{p<x} 1 = \frac{x}{\log x} + O(xe^{-c\sqrt{\log x}})$$

nesunkiai gaunama [1], kad

$$M_Q = \frac{Q^2}{2\log Q} + O(\frac{Q^2}{\log^2 Q}).$$

Tegul

$$\nu_Q(\ldots) = \frac{1}{M_Q} \sum_{p \le Q} \sum_{\substack{\chi = \chi(\bmod p) \\ \chi \ne \chi_0, \ldots}} 1.$$

Čia vietoje daugtaškio yra rašoma sąlyga, kurią tenkina pora $(p, \chi(modp))$. Tegul $L(s,\chi) \neq 0$ ir $\frac{1}{2} < \sigma \le 1$. Tuomet arg $L(s,\chi)$ žymi funkcijos $L(s,\chi)$ argumento reikšmę, apibrėžiamą tolydžiu kitimu iš taško $s = 2$ išilgai bet kurios kreivės, kurioje $L(s,\chi)$ nevirsta nuliu. Pirmoji ribinė teorema Dirichlė L-funkcijoms su augančiu moduliu priklauso P.D.T.A.Elijotui (Elliott). Tegul

$$F_Q(x) = \nu_Q \left(\frac{1}{2\pi} \arg L(s,\chi) < x(\bmod 1) \right).$$

Tuomet [1] straipsnyje buvo gautas toks rezultatas. $\mathbb{C}$ yra kompleksinė plokštuma, o $D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\}$.

A teorema. *Tegul $s \in D$. Tuomet, kai $Q \to \infty$, pasiskirstymo funkcija moduliu 1 F_Q (x) konverguoja į tolydžią pasiskirstymo funkciją moduliu 1, apibrėžiamą Furjė transformacija*

$$\prod_p \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\frac{-k}{2}}{m} \binom{\frac{k}{2}}{m} \frac{1}{p^{2m\sigma}} \right).$$

Čia $\binom{\pm\frac{k}{2}}{m}$ apibrėžia binominius koeficientus, t.y.

$$\binom{\pm\frac{k}{2}}{m} = \frac{\pm\frac{k}{2}\left(\pm\frac{k}{2} - 1\right)\ldots\left(\pm\frac{k}{2} - m + 1\right)}{m!}.$$

Panašus tvirtinimas yra teisingas ir funkcijos $L(s,\chi)$ moduliui $|L(s,\chi)|$. Tegul

$$\varepsilon(s,\chi) = \varepsilon(\chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \exp\left\{-\frac{\chi(p)}{p^s}\right\}.$$

Tuomet funkcija $\varepsilon(s,\chi)$ yra analizinė srityje D. Be to, kiekvienam $\delta > 0$ egzistuoja [3] tokios teigiamos konstantos $c_1 = c_1(\delta)$ ir $c_2 = c_2(\delta)$, kad tenkinama nelygybė $c_1 \leq |\varepsilon(s,\chi)| \leq c_2$ tolygiai σ atžvilgiu, $\sigma \geq \frac{1}{2} + \delta$. Apibrėžiame pasiskirstymo funkciją

$$G_Q(x) = \nu_Q(|\varepsilon(s,\chi)||L(s,\chi)| < x).$$

Tuomet yra žinomas toks tvirtinimas [3].

B teorema. *Tegul $s \in D$. Tuomet egzistuoja tokia pasiskirstymo funkcija $G(x)$, į kurią, kai $Q \to \infty$, silpnai konverguoja pasiskirstymo funkcija $G_Q(x)$.*

E. Stankus apibendrino A ir B teoremas. Jis įrodė ribinę teoremą kompleksinėje plokštumoje. Tegul $\mathcal{B}(S)$ yra erdvės Borelio aibių klasė. Apibrėšime tikimybinį matą

$$P_Q(A) = \nu_Q(L(s,\chi) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Be to, tegul

$$\eta = \frac{i\tau + k}{2},$$

$$c_{\tau,k}(p^\alpha) = \frac{\eta(\eta+1)\dots(\eta+\alpha-1)}{\alpha!}$$

ir

$$c_{\tau,k}(m) = \prod_{p^\alpha \| m} c_{\tau,k}(p^\alpha).$$

Čia $\tau \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$, o $p^\alpha \| m$ reiškia, kad $p^\alpha |\ m$, tačiau $p^{\alpha+1} \nmid k$. Apibrėžiame

$$\mathrm{w}(\tau,k) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{\tau,k}(m)\ c_{\tau,-k}(m)\ \frac{1}{m^{2\sigma}},\ \sigma > \frac{1}{2}.$$

Tuomet [11] darbe buvo įrodyta tokia teorema.

C teorema. *Tegul $s \in D$. Tuomet tikimybinis matas P_Q , kai $Q \to \infty$, silpnai konverguoja į tikimybinį matą erdvėje , apibrėžiamą charakteringąja transformacija* $\mathrm{w}(\tau,k)$.

Magistro darbo tikslas - gauti dvimatį C teoremos analogą. Tegul $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ir $\sigma_1 > \frac{1}{2}$, $\sigma_2 > \frac{1}{2}$. Apibrėžiame funkcijas

$$\mathrm{w}_j(\tau,k) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{\tau,k}(m)\ c_{\tau,-k}(m)\ \frac{1}{m^{2\sigma_j}},\ \tau \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z},\ j = 1,2,$$

ir

$$\mathrm{w}(\tau_1,\tau_2,k_1,k_2)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{d_1d_2=m}\frac{c_{\tau_1,k_1}(d_1)\ c_{\tau_2,k_2}(d_2)}{d_1^{s_1}d_2^{s_2}}\times$$

$$\times\sum_{d_1d_2=m}\frac{c_{\tau_1,-k_1}(d_1)\ c_{\tau_2,k_2}(d_2)}{d_1^{\bar{s}_1}d_2^{\bar{s}_2}},\ \tau_1,\tau_2\in\mathbb{R},\ k_1,k_2\in\mathbb{Z}.$$

Čia $s_j=\sigma_j+it_j$, o $\overline{s}_j=\sigma_j$ - it_j yra jungtinis kompleksinis skaičius, $j=1,\ 2.$

Pagrindinis darbo rezultatas yra ši teorema. Tegul

$$\mu_Q(A)=\nu_Q((L(s_1,\chi),L(s_2,\chi))\ \in A),\ A\in\mathcal{B}(\mathbb{C}^2).$$

Pagrindinė teorema. *Tegul $s_1,s_2\in D$. Tuomet tikimybinis matas μ_Q, kai $Q\to\infty$, silpnai konverguoja į tikimybinį matą erdvėje $(\mathbb{C}^2,\mathcal{B}(\mathbb{C}^2))$, apibrėžiamą charakteringosiomis transformacijomis*

$$\left(\mathrm{w}_j(\tau,k),\ j=1,2,\ \mathrm{w}(\tau_1,\tau_2,k_1,k_2)\right).$$

1. DIRICHLĖ CHARAKTERIAI

Dirichlė charakteris moduliu k yra funkcija $\chi(n) = \chi(n; k)$ sveikųjų skaičių aibėje, tenkinanti sąlygas:

$$\chi(n) \not\equiv 0,$$

$$\chi(n)\chi(l) = \chi(nl),$$

$$\chi(n) = \chi(n + k).$$

Kitaip sakant, Dirichlė charakteriai moduliu k - tai aritmetinės funkcijos, kurios nėra tapatingai lygios nuliui, pilnai multiplikatyvios ir periodinės su periodu k.

Dirichlė charakterio sąvoką įvedė vokiečių matematikas P. Dirichlė. Jis įrodė teoremą, kad, kai tik aritmetinės progresijos pirmasis narys ir skirtumas yra tarpusavyje pirminiai, joje būtinai yra be galo daug pirminių skaičių.

Pateiksime pilną Dirichlė charakterio apibrėžimą. Tegul

$$k = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$$

yra kanoninis skaičiaus k skaidinys, n - sveikas, tarpusavyje pirminis su k, skaičius; $c = c_0 = 1$, jei $\alpha = 0$ arba $\alpha = 1$; $c = 2$, $c_0 = 2^{\alpha-2}$, jeigu $\alpha \geq 2$; $c_1 = \varphi(p_1^{\alpha_1})$, ..., $c_r = \varphi(p_r^{\alpha_r})$, kur $\varphi(n)$ yra Oilerio funkcija. Tegul $\gamma, \gamma_0, \gamma_1$, ..., γ_r - skaičiaus n indeksų sistema moduliu k, t.y. mažiausių neneigiamų sveikųjų skaičių, tenkinančių lyginius

$$n \equiv (-1)^{\gamma} 5^{\gamma_0} \pmod{2^{\alpha}},$$

$$n \equiv g_j^{\gamma_j} (\bmod p_j^{\alpha_j}), j = 1, ..., r,$$

sistema. Čia g_j – mažiausia primityvioji šaknis moduliu $p_j^{\alpha_j}$; ε, ε_0, ε_1, ..., ε_r – šaknų atitinkamai eilės c, c_0, c_1, ..., c_r sistema.

Funkcija

$$\chi(n) = \begin{cases} \varepsilon^{\gamma} \varepsilon_0^{\gamma_0} \varepsilon_1^{\gamma_1} \dots \varepsilon_r^{\gamma_r}, & \text{jeigu}(n, k) = 1, \\ 0, & \text{jeigu}(n, k) \neq 1, \end{cases}$$

apibrėžta visoje natūraliųjų skaičių aibėje, yra vadinama *Dirichlė charakteriu moduliu k.* Kai ε, ε_0, ε_1, ..., ε_r perbėga visas galimas reikšmes, gauname

$$\varphi(2^\alpha)\ \varphi(p_1^{\alpha_1})\ldots\ \varphi(p_r^{\alpha_r}) = \varphi(k)$$

skirtingų Dirichlė charakterių moduliu k. Charakteris, kai $\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_r = 1$, vadinamas *pagrindiniu charakteriu.* Jis žymimas χ_0. Taigi

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1, & \text{jei } (n,k) = 1, \\ 0, & \text{jei } (n,k) \neq 1. \end{cases}$$

Bet kuriems natūraliesiems skaičiams n, l ir k teisingos lygybės

$$\chi(n)\chi(l) = \chi(nl),$$
$$\chi(n) = \chi(l), \text{ jeigu } \ n \equiv l (\text{mod } \ k),$$

$$\chi(1) = 1,$$
$$\chi(n,k) = \chi(n;2^\alpha)\chi(n;p_1^{\alpha_1})\ldots\chi(n;p_r^{\alpha_r}),$$
$$\chi^{\varphi(k)}(n) = \chi_0(n).$$

Jeigu $\chi(n)$ yra Dirichlė charakteris moduliu k, tai kompleksinė jungtinė funkcija $\overline{\chi}(n)$ taip pat yra Dirichlė charakteris moduliu k.

Mažiausias iš skaičių ν, tenkinančių lygybę $\chi^\nu(n) = \chi_0(n)$, vadinamas *Dirichlė charakterio laipsniu.* Kai $\nu = 1$, tai egzistuoja vienas toks charakteris χ_0. Kai $\nu = 2$, tai $\chi(n)$ gali įgyti tik reikšmes 0; ± 1; tokie Dirichlė charakteriai vadinami *realiaisiais arba kvadratiniais charakteriais.* Kai $\nu \geq 3$, tai Dirichlė charakteris vadinamas *kompleksiniu charakteriu.* $\chi(n)$ vadinamas *lyginiu arba nelyginiu charakteriu* priklausomai nuo to, ar $\chi(-1) = 1$, ar $\chi(-1) = -1$. Pagrindinės Dirichlė charakterių sumų savybės išreiškiamos formulėmis:

$$\sum_{n (\text{mod } \ k)} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(k), & \text{jeigu } \chi = \chi_0, \\ 0, & \text{jeigu } \chi \neq \chi_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\sum_{\chi (\text{mod } \ k)} \chi(l) = \begin{cases} \varphi(k), & \text{jeigu } l \equiv 1 (\text{mod } k), \\ 0, & \text{jeigu } l \neq 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

Čia (1.1) formulėje n perbėga pilną likinių moduliu k sistemą, o (1.2) formulėje χ perbėga visus $\varphi(k)$ charakterius moduliu k.

Kai (l, k)=1, teisinga formulė:

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi(\mathrm{mod}\ k)} \chi(n)\overline{\chi}(l) = \begin{cases} 1, & \text{jeigu } n \equiv l(\mathrm{mod}\ k), \\ 0, & \text{jeigu } n \not\equiv l(\mathrm{mod}\ k). \end{cases}$$

Ji yra *Dirichlė charakterio ortogonalumo savybė.*

Tegul $\chi(n; k)$ - bet kuris nepagrindinis charakteris moduliu k ir $(n, k) = 1$. Jei skaičius k yra mažiausias charakterio $\chi(n; k)$ periodas, tai k yra vadinamas *pagrindiniu charakterio* χ *moduliu*, o pats charakteris χ vadinamas *primityviuoju charakteriu* moduliu k. Priešingu atveju egzistuoja vienintelis skaičius $k_1 > 1$, dalantis k, $k_1 < k$, ir primityvusis charakteris χ_1 (mod k_1) toks, kad

$$\chi(n; k) = \begin{cases} \chi_1(n; k_1), & \text{jeigu } (n, k) = 1, \\ 0, & \text{jeigu } (n, k) \neq 1. \end{cases}$$

Šiuo atveju $\chi(n; k)$ vadinamas *neprimityviuoju charakteriu* moduliu k, ir sakoma, kad charakteris χ_1 indikuoja χ. Charakteris $\chi(n; k)$ yra primityvusis tada ir tik tada, kai bet kuriam d, dalijančiam k, $d < k$, egzistuoja a su sąlygomis

$$a \equiv 1(\ \mathrm{mod}\ d),$$

$$\chi(a; k) \neq 0; 1.$$

Šio skyrelio apibrėžimus ir tvirtinimus galima rasti, pavyzdžiui, [5], [6], [7] ir [12] monografijose.

2. DIRICHLĖ L-FUNKCIJOS

Dirichlė L-funkcija $L(s,\chi)$ yra kompleksinio kintamojo $s=\sigma+it$ funkcija, apibrėžiama visiems Dirichlė charakteriams χ moduliu d srityje $\sigma>1$ eilute

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}. \tag{2.1}$$

(2.1) eilutė, vadinama Dirichlė eilute, absoliučiai ir tolygiai konverguoja bet kokioje baigtinėje kompleksinės plokštumos srityje, kuriai $\sigma\geq 1+\gamma$, $\gamma>0$. Jeigu χ yra nepagrindinis charakteris, tai

$$L(s,\chi)=s\int_1^{\infty}\sum_{n\leq u}\chi(n)u^{-s-1}du. \tag{2.2}$$

Kadangi pointegralinė suma yra aprėžta, ši formulė reiškia, kad $L(s,\chi)$ yra reguliarioji funkcija pusplokštumėje $\sigma>0$. Bet kuriam charakteriui χ moduliu d funkciją $L(s,\chi)$ galima išreikšti Oilerio sandauga pagal pirminius skaišius p :

$$L(s,\chi)=\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}, \sigma>1. \tag{2.3}$$

Tegul $\chi=\chi_0$ yra pagrindinis charakteris moduliu d. Kai $d=1$, tada

$$L(s,\chi_0)=\zeta(s),$$

kur $\zeta(s)$ yra Rymano dzeta funkcija, srityje $\sigma>1$ apibrėžiama eilute

$$\zeta(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}.$$

Kai $d>1$, tai tada

$$L(s,\chi_0)=\zeta(s)\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^s}\right).$$

Todėl $L(s,\chi_0)$ savybės visoje kompleksinėje plokštumoje išplaukia iš funkcijos $\zeta(s)$ savybių. Funkcija $L(s,\chi_0)$ yra reguliari visiems s , išskyrus tašką

$s = 1$, kuris yra jos paprastas polius su reziduumu $d\ \varphi(d)$; čia $\varphi(m)$ yra Oilerio funkcija. Jeigu $\chi \neq \chi_0$ ir χ^* yra primityvusis charakteris, kuris indukuoja charakterį χ moduliu d, tai tada

$$L(s, \chi) = L(s, \chi^*) \prod_{p|d} \left(1 - \frac{\chi^*(p)}{p^s}\right). \tag{2.4}$$

Kai $\chi(\text{mod } d)$ yra primityvusis charakteris, tai funkcija $L(s, \chi)$ turi Rymano tipo funkcinę lygtį. Tegul

$$\xi(s, \chi) = \left(\frac{d}{\pi}\right)^{\frac{s+\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s, \chi)$$

ir

$$\delta = \frac{1 - \chi(-1)}{2}.$$

Tuomet visiems kompleksiniams s teisinga funkcinė lygtis

$$\xi(1 - s, \overline{\chi}) = \varepsilon(\chi)\xi(s, \chi), \tag{2.5}$$

kur $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija, o

$$\varepsilon(\chi) = \frac{i^\delta d^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)}, |\varepsilon(\chi)| = 1,$$

$\tau(\chi)$ yra Gauso suma, $\overline{\chi}$ - charakteris, jungtinis charakteriui χ. Iš (2.5) lygties ir (2.2) ir (2.4) formulių išplaukia, kad funkcijos $L(s, \chi)$ ir $\xi(s, \chi)$ yra sveikosios funkcijos visiems $\chi \neq \chi_0$. Be to, kai $\sigma \leq 0$, $L(s, \chi) = 0$ tik taškuose s = -2ν - δ , ν = 0, 1, 2, ..., ir taškuose s, kuriuose (2.4)-os išvestinė lygi nuliui; šie taškai vadinami *trivialiais funkcijos $L(s, \chi)$ nuliais.* Kai $\sigma > 1$, tai funkcija $L(s, \chi) \neq 0$; Vallė Pusenas (Ch. J. Vallee - Poussin) įrodė, kad $L(1 + it, \chi) \neq 0$, t.y. visi Dirichlė L-funkcijos netrivialūs nuliai priklauso juostai $0 < \sigma < 1$, kuri vadinama *kritine juosta.*

Tegul $N(T,\chi)$ yra funkcijos $L(s, \chi)$ su primityviuoju charakteriu χ moduliu d nulių skaičius stačiakampyje $0 < \sigma < 1$, $|t| < T$, $T \geq 2$. Tada

$$\frac{1}{2}N(T, \chi) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{Td}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log Td).$$

Tegul $\Lambda(n)$ yra Mangoldto funkcija, t.y.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{jei } n = p^k, \\ 0, & \text{jei } n \neq p^k, \end{cases}$$

$$1 \leq l \leq d, (l, d) = 1,$$

ir

$$\psi(x; d, l) = \sum_{\substack{n \leq x, \\ n \equiv t (\bmod\ d)}} \Lambda(n),$$

$$\psi(x; \chi) = \sum_{n \leq x} \chi(n) \Lambda(n).$$

Tada iš charakaterių ortogonalumo savybės išplaukia, jog

$$\psi(x; d, l) = \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\chi (\bmod\ d)} \overline{\chi}(l) \psi(x; \chi); \tag{2.6}$$

čia yra sumuojama pagal visus charakterius χ moduliu d. Kai χ yra primityvusis charakteris ir $\alpha = 1 - \delta$, tai tada

$$\psi(x; \chi) = -\sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{\delta - 2m}}{2m - \delta} - \lim_{s \to 0} \left\{ \frac{L'(\alpha s, \chi)}{L(\alpha s, \chi)} - \frac{\alpha}{s} \right\} - \alpha \log x;$$

čia $\rho = \beta + i\gamma$ perbėga visus $L(s, \chi)$ netrivialius nulius.

Sprendžiant įvairius uždavinius, dažnai yra naudojamos funkcijos $\psi(x; \chi)$ formulės :

kai $\chi \neq \chi_0$, $2 \leq T \leq x$, tai

$$\psi(x, \chi) = -\sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{|\gamma| < 1} \frac{1}{\rho} + O\left(\frac{x}{T} \log^2 xd \right); \tag{2.7}$$

kai $\chi = \chi_0$, tai

$$\psi(x, \chi_0) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) + O(\log x \log d). \tag{2.8}$$

Egzistuoja hipotezė, vadinama išplėstine Rymano hipoteze, tvirtinanti, kad visi Dirichlė L-funkcijų netrivialūs nuliai yra tiesėje $\sigma = \frac{1}{2}$. Jei ši hipotezė teisinga ir $d \leq x$, tai tada

$$\psi(x; d, l) = \frac{x}{\varphi(d)} + O(\sqrt{x} \log^2 x).$$

Šiuo metu yra žinoma tokia sritis, kurioje nėra funkcijos $L(s, \chi)$ netrivialių nulių: kompleksiniam charakteriui χ moduliu d egzistuoja tokia konstanta c, kad $L(s, \chi)$ neturi nulių srityje

$$\sigma > 1 - \frac{c}{\log d(|t| + 2)}.$$

Jeigu χ yra realus nepagrindinis charakteris moduliu d , tai $L(s, \chi)$ šioje srityje gali turėti daugiausia vieną paprastą realų (t=0) nulį, kuris vadinamas *išskirtiniu funkcijos $L(s, \chi)$ nuliu.* Išskirtiniam nuliui β galioja nelygybė

$$\beta \leq 1 - \frac{c}{d^{\frac{1}{2}} \log^2 d}.$$

Be to, K. Zygelis (C. Siegel) 1935 metais įrodė, kad bet kuriam $\varepsilon > 0$ egzistuoja tokia teigiama konstanta c (ε), kad

$$\beta \leq 1 - c(\varepsilon) d^{-\varepsilon}.$$

Tačiau ši nelygybė yra neefektyvi, t.y. duotam skaičiui $\varepsilon > 0$ negalima nurodyti konstantos $c(\varepsilon)$ reikšmės. Aišku, jog šį trūkumą turi ir visi rezultatai, gauti remiantis Zygelio nelygybe.

Iš minėtų rezultatų gaunamas toks pirminių skaičių aritmetinėje progresijoje pasiskirstymo asimptotinis dėsnis:

$$\psi(x; d, l) = \frac{x}{\varphi(d)} + O(x \exp\{-c_1 \sqrt{\log x}\});$$

čia c_1 yra absoliuti teigiama konstanta, $d \leq (\log x)^{1-\gamma}$, $\gamma > 0$.

Tegul

$$\pi(x; d, l) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p = l (\bmod d) \\ (l, d) = 1}} 1.$$

Tuomet iš čia išplaukia, kad

$$\pi(x;d,l) = \frac{x}{\varphi(d)\log x} + O(xe^{-c_2\sqrt{\log x}}).$$

Šio skyrelio rezultatų įrodymus galima rasti [10], [12] monografijose.

3. TIKIMYBINIAI MATAI

Tarkime, jog X yra bet kokia netuščia aibė.

3.1 *apibėžimas.* Funkcija $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ yra vadinama *metrika* aibėje X, jei ji tenkina aksiomas:

1^0. $d(x, y) \geq 0$ ir $d(x, y) = 0$ tada ir tik tada, kai $x = y$, $x, y \in X$;

2^0. $d(x, y) = d(y, x)$, $x, y \in X$;

3^0. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $x, y, z \in X$.

3.2 *apibrėžimas.* Pora (X, d) yra vadinama *metrine erdve.*

3.3 *apibrėžimas.* Tegul S yra bet kuri metrinė erdvė. Šios erdvės poaibių sistema $\mathcal{A}$ yra vadinama *σ-kūnu*, jeigu yra patenkinamos sąlygos:

1^0. $S \in \mathcal{A}$;

2^0. Jei $A \in \mathcal{A}$, tai aibės A papildinys $A^c = S \setminus A \in \mathcal{A}$;

3^0. Jei A_1, A_2, ... $\in \mathcal{A}$, tai ir $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{A}$.

3.4 *apibrėžimas.* Tegul $\mathcal{A}$ yra erdvės S atvirųjų aibių sistema. Mažiausias σ-kūnas, kuriam priklauso sistema $\mathcal{A}$, yra vadinamas erdvės S *Borelio aibių klase* (Borelio σ-kūnu) ir žymima $\mathcal{B}(S)$.

3.5 *apibrėžimas.* Tegul aibės funkcija $P : \mathcal{B}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$ tenkina sąlygas:

1^0. $P(A) \geq 0$ visoms aibėms $A \in \mathcal{B}(S)$;

2^0. $P(S) = 1$;

3^0. Jei A_1, A_2, ... $\in \mathcal{B}(S)$ ir $A_k \bigcap A_l = \varnothing$, $k \neq l$, tai $P(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) = \sum_{m=1}^{\infty} P(A_m)$.

Tuomet aibės funkcija P yra vadinama *tikimybiniu matu*, apibrėžtu erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$.

3.6 *apibrėžimas.* Tegul P_n, $n \in N$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Jei su kiekviena realia, aprėžta, tolydžia funkcija f erdvėje S

$$\int_S f dP_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_S f dP,$$

tai sakome, jog tikimybinis matas P_n , kai $n \longrightarrow \infty$, *silpnai konverguoja* į matą P.

4. CHARAKTERINGOJI TRANSFORMACIJA KOMPLEKSINĖJE PLOKŠTUMOJE

Tegul P yra tikimybinis matas erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$. Naudosime kompleksinio skaičiaus trigonometrinę formą: $z = re^{i\varphi}$, kai $r = |z|$, o $\varphi = \arg z$.

4.1 *apibrėžimas.* Mato P *chrakteringąja transformacija* yra laikoma funkcija

$$\mathrm{w}(\tau, k) = \int_C r^{i\tau} e^{ik\varphi} dP, \ \tau \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Jeigu $r = 0$, tai pointegralinę funkciją laikome lygia nuliui.

Tikimybinių matų chrakteringosios transformacijos buvo apibrėžtos [9] straipsnyje. Jos yra nagrinėjamos ir [4] monografijoje.Yra žinoma, jog matas P yra vienareikšmiškai apibrėžiamas savo chrakteringąja transformacija $\mathrm{w}(\tau, k)$.

5. CHARAKTERINGOSIOS TRANSFORMACIJOS ERDVĖJE $\mathbb{C}^2$.

Primename, kad $\mathbb{C}$ yra kompleksinė plokštuma, o $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Šiame skyrelyje apibrėšime tikimybinių matų erdvėje $(\mathbb{C}^2, \mathcal{B}(\mathbb{C}^2))$ chrakteringąsias transformacijas ir šių transformacijų terminais suformuluosime teoremą apie silpnąjį matų konvergavimą toje erdvėje.

Tegul P yra tikimybinis matas erdvėje $(\mathbb{C}^2, \mathcal{B}(\mathbb{C}^2))$, P_1 ir P_2 yra mato P marginalieji matai, t.y.

$$P_1(A) = P(A \times \mathbb{C}), A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

$$P_2(A) = P(\mathbb{C} \times A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Naudosime kompleksinių skaičių trigonometrinę formą, t.y. $z = re^{i\varphi}$, čia $r = |z|$, o $\varphi = \arg z$.

5.1 *apibrėžimas.* Funkcijos

$$\mathrm{w}_j(\tau, k) = \int_{\mathbb{C}} r^{i\tau} e^{ik\varphi} dP_j, \ j = 1, 2, \ \tau \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{Z},$$

$$\mathrm{w}(\tau_1, \tau_2, k_1, k_2) = \int_{\mathbb{C}^2} r_1^{i\tau_1} r_2^{i\tau_2} e^{ik_1\varphi_1 + ik_2\varphi_2} dP, \ \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, \ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

yra vadinamos *tikimybinio mato P charakteringosiomis transformacijomis. Pointegralinės funkcijos yra laikomos lygiomis nuliui, jei atitinkamai $r=0$ ir $r_1 r_2 = 0$* .

Tikimybinių matų daugiamatėje kompleksinėje plokštumoje charakteringųjų transformacijų apibrėžimas yra duotas [11] straipsnyje. Yra žinoma, jog charakteringosios transformacijos $(\mathrm{w}_j(\tau, k), j = 1, 2, \mathrm{w}(\tau, \tau_2, k_1, k_2))$ vienareikšmiškai apibrėžia tikimybinį matą P. Pagrindinės teoremos įrodymui bus reikalinga tokia teorema.

5.1 teorema. *Tegul P_n yra tikimybinis matas erdvėje* $(\mathbb{C}^2, \mathcal{B}(\mathbb{C}^2))$, o $(\mathrm{w}_{j,n}(\tau, k), j = 1, 2, \ \mathrm{w}_n(\tau_1, \tau_2, k_1, k_2))$ *yra jį atitinkančios chrakteringosios transformacijos, $n \in \mathbb{N}$. Tarkime, kad visiems $\tau, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ ir $k, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$*

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{w}_{j,n}(\tau, k) = \mathrm{w}(\tau, k)$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{w}_n(\tau_1, \tau_2, k_1, k_2) = \mathrm{w}(\tau_1, \tau_2, k_1, k_2),$$

o funkcijos $\mathrm{w}_j(\tau, 0), j = 1, 2$, ir $\mathrm{w}(\tau_1, \tau_2, 0, 0)$ *yra tolydžios atitinkamai taškuose* $\tau = 0$ *ir* $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0$. *Tuomet erdvėje* $(\mathbb{C}^2, \mathcal{B}(\mathbb{C}^2))$ *egzistuoja toks tikimybinis matas* P*, į kurį, kai* $n \to \infty$ *, silpnai konverguoja matas* P_n. *Šiuo atveju,* $(\mathrm{w}_j(\tau, k))$, j = 1, 2, $\mathrm{w}(\tau_1, \tau_2, k_1, k_2)$ *yra mato* P *chrakteringosios transformacijos.*

Įrodymas. Teorema yra atskiras atvejis bendros teoremos, gautos [8] straipsnyje apie tikimybinių matų konvergavimą daugiamatėje kompleksinėje plokštumoje. Pastebime, jog [8] straipsnyje yra naudojamas specialus silpnojo konvergavimo apibrėžimas daugiamatėje kompleksinėje plokštumoje. Į šio konvergavimo apibrėžimą įeina ir įprastas silpnasis konvergavimas. Kadangi pagrindinėje teoremoje rezultatas yra formuluojamas silpnojo matų konvergavimo terminais, tai mums nėra prasmės pateikti specialaus silpnojo matų konvergavimo apibrėžimo.

6. PAGALBINIAI REZULTATAI

Šiame skyrelyje pateiksime keletą rezultatų, kurie bus reikalingi pagrindinės teoremos įrodymui.

Tegul $0 < \delta < \frac{1}{2}$, $k \geq 2$, $L = \log\log Q$ $(\log x = \ln x = \log_e x)$, o $R = R(\delta, K, Q)$ yra stačiakampis kompleksinėje plokštumoje, apibrėžiamas nelygybėmis

$$R = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} + \delta \leq \sigma \leq K, |t| \leq (\log L)^{\frac{1}{2}}\}.$$

Naudinga aproksimuoti funkciją $L(s,\chi)$ baigtine Oilerio sandauga. Tai duoda žemiau formuluojama lema. Čia q yra pirminis skaičius.

6.1 lema. *Tolygiai pagal $s \in R$, kai $Q \to \infty$,*

$$\nu_Q \left(L(s,\chi) = \left(1 + O\left(L^{-\frac{\delta}{4}}\right)\right) \prod_{q \leq L} \left(1 - \frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-1} \right) = 1 + o(1).$$

Lemos įrodymas yra pateiktas P. D. T. A. Elijoto [1] straipsnyje.

Tegul

$$d(m) = \sum_{d|m} 1$$

yra skaičiaus m daliklių skaičius (daliklių funkcija).

6.2 lema. *Tegul $a_1, \ldots, a_n, n \leq Q$ yra kompleksiniai skaičiai su teigiamomis konstantomis c_1 ir c_2 , tenkinantys nelygybę*

$$|a_m| \leq c_1 d^{c_2}(m), m = 1, \ldots, n.$$

Tuomet kiekvienam realiam skaičiai u, $1 \leq u \leq n$, su $c_3 = 4^{c_2}$ yra teisingas įvertis

$$\nu_Q \left(\max_{s \in R} \Big| \sum_{u < m \leq n} a_m \chi(m) m^{-s} \Big| > v \right) = O\left(\frac{1}{u^{2\delta} v^2} \left(\log \max(u, L)\right) \right)^{c_3}.$$

Lema taip pat priklauso P. D. T. A. Elijotui ir yra įrodyta [1] darbe.

Labai svarbi yra 6.3 lema. Ji baigtinėmis sumomis aproksimuoja sandaugą

$$|L(s,\chi)|^{i\tau}\exp\{ik\arg L(s,\chi)\}.$$

Sakome, kad koks nors tvirtinimas T galioja beveik visoms poroms $(p,\chi(\text{mod }p))$, jei, kai Q$\to\infty$, $\nu_Q(A)=\text{o}(1)$. Čia A yra aibė tų porų $(p,\chi(\text{mod }p))$, kurioms yra teisingas tvirtinimas T.

6.3 lema. *Beveik visoms poroms $(p,\chi(\mod p))$ ir kiekvienam fiksuotam $k\in\mathbb{Z}$*

$$|L(s,\chi)|^{i\tau}\exp\{ik\arg L(s,\chi)\}=(1+o(1))\left(\sum_{m\le L}c_{\tau,k}(m)\frac{\chi(m)}{m^s}+o(1)\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{m\le L}c_{\tau,-k}(m)\frac{\overline{\chi}(m)}{m^{\overline{s}}}+o(1)\right)$$

tolygiai pagal $s\in R$ ir $|\tau|\le c_4$. Čia c_4 yra bet kokia teigiama konstanta.

Įrodymas. Žinome, kad

$$|L(s,\chi)|^2=L(s,\chi)\overline{L(s,\chi)}=L(s,\chi)L(\overline{s},\overline{\chi}).$$

Todėl

$$|L(s,\chi)|=\left(L(s,\chi)L(\overline{s},\overline{\chi})\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pasinaudoję 6.1 lema, iš čia gauname, kad beveik visoms poroms $(p,$ $\chi(\text{mod }p))$, kai $Q\to\infty$,

$$|L(s,\chi)|=(1+o(1))\prod_{q\le L}\left(1-\frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-\frac{1}{2}}\prod_{q\le L}\left(1-\frac{\overline{\chi}(q)}{q^{\overline{s}}}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{6.1}$$

tolygiai pagal $s\in R$.

Kadangi

$$|L(s,\chi)|=|\overline{L(s,\chi)}|=|L(\overline{s},\overline{\chi})|,$$
$$\arg L(\overline{s},\overline{\chi})=\arg\overline{L(s,\chi)}=-\arg L(s,\chi),$$

tai

$$L(s,\chi)=|L(s,\chi)|\cdot e^{i\arg L(s,\chi)}$$

ir

$$L(\overline{s},\overline{\chi}) = |L(s,\chi)| \cdot e^{-i\arg L(s,\chi)}.$$

Iš čia gauname, kad

$$e^{2i\arg L(s,\chi)} = \frac{L(s,\chi)}{L(\overline{s},\overline{\chi})}$$

ir

$$e^{i\arg L(s,\chi)} = \left(\frac{L(s,\chi)}{L(\overline{s},\overline{\chi})}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Todėl, vėl pasinaudoję 6.1 lema, iš čia gauname, kad beveik visoms poroms $(p, \chi(\mathrm{mod}\ p))$, kai $Q \to \infty$,

$$\exp\{i\arg L(s,\chi)\} = (1+o(1))\prod_{q\le L}\left(1-\frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-\frac{1}{2}}\prod_{q\le L}\left(1-\frac{\overline{\chi}(q)}{q^{\overline{s}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

tolygiai pagal $s \in R$. Iš čia ir (6.1) asimptotinių lygybių turime, kad beveik visoms poroms $(p, \chi(\mathrm{mod}\ p))$ ir bet kuriam $k \in \mathbb{Z}$, kai $Q \to \infty$,

$$|L(s,\chi)|^{i\tau}\exp\{ik\arg L(s,\chi)\} = (1+o(1))\prod_{q\le L}\left(1-\frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-\frac{i\tau}{2}}\times$$

$$\times\prod_{q\le L}\left(1-\frac{\overline{\chi}(q)}{q^{\overline{s}}}\right)^{-\frac{i\tau}{2}}\prod_{q\le L}\left(1-\frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-\frac{k}{2}}\prod_{q\le L}\left(1-\frac{\overline{\chi}(q)}{q^{\overline{s}}}\right)^{\frac{k}{2}} =$$

$$= (1+o(1))\prod_{q\le L}\left(1-\frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-\frac{i\tau+k}{2}}\prod_{q\le L}\left(1-\frac{\overline{\chi}(q)}{q^{\overline{s}}}\right)^{-\frac{i\tau}{2}+\frac{k}{2}} =$$

$$= (1+o(1))\prod_{q\le L}\left(1-\frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-\eta}\prod_{q\le L}\left(1-\frac{\overline{\chi}(q)}{q^{\overline{s}}}\right)^{-\eta+k} \tag{6.2}$$

tolygiai pagal $s \in R$ ir $|\tau| \le c_4$. Primename, jog čia $\eta = \frac{i\tau+k}{2}$. Tegul $\sigma > \frac{1}{2}$. Tuomet kiekvienam charakteriui χ

$$\left|\frac{\chi(q)}{q^s}\right| \le \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Todėl
$$\left(1-\frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-\eta}$$
galime skleisti laipsnine eilute. Turime, jog

$$\left(1-\frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-\eta}=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\eta(\eta+1)\dots(\eta+\alpha-1)}{\alpha!}\frac{\chi^{\alpha}(q)}{q^{\alpha s}}=$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}c_{\tau,k}(q^{\alpha})\frac{\chi(q^{\alpha})}{q^{\alpha s}}. \tag{6.3}$$

Iš dydžių $c_{\tau,k}(q^{\alpha})$ apibrėžimo

$$c_{\tau,k}(q^{\alpha})=\frac{\eta(\eta+1)\dots(\eta+\alpha-1)}{\alpha!}$$

nesunku matyti, kad visiems $|\tau|\le c_4$

$$c_{\tau,k}(q^{\alpha})\le(\alpha+1)^{c_5}. \tag{6.4}$$

Čia c_5 yra konstanta, kuri priklauso tik nuo c_4 ir k. Funkcija $c_{\tau,k}(m)$ multiplikatyvi, t.y. $c_{\tau,k}(m\ n)=c_{\tau,k}(m)\ c_{\tau,k}(n)$ visiems tarpusavyje pirminiams m ir n. Todėl iš (6.4) išplaukia, jog

$$|c_{\tau,k}(m)|=\left|\prod_{q^{\alpha}\|m}c_{\tau,k}(q^{\alpha})\right|\le\prod_{q^{\alpha}\|m}(\alpha+1)^{c_5}=d^{c_5}(m), \tag{6.5}$$

nes $d(q^{\alpha})=\alpha+1$. Čia $q^{\alpha}\parallel m$ reiškia, jog $q^{\alpha}\mid m$, bet $q^{\alpha+1}\nmid m$. Iš čia, remdamiesi (6.3) lygybe ir funkcijų multiplikatyvumu, galime parašyti, jog

$$\prod_{q\le L}\left(1-\frac{\chi(q)}{q^{\bar{s}}}\right)^{-\eta}={\sum_{m=1}^{\infty}}^{*}c_{\tau,k}(m)\frac{\chi(m)}{m^{s}} \tag{6.6}$$

ir panašiai

$$\prod_{q\le L}(1-\frac{\overline{\chi}(q)}{q^{\bar{s}}})^{-\eta+k}={\sum_{m=1}^{\infty}}^{*}c_{\tau,-k}(m)\frac{\overline{\chi}(m)}{m^{\bar{s}}}. \tag{6.7}$$

Čia ženklas * rodo, kad yra sumuojama pagal tuos m, kurių pirminiai dalikliai yra mažesni už L.

Dabar belieka aproksimuoti (6.6) ir (6.7) baigtinėmis sumomis. Kadangi galioja (6.5) nelygybė, mes galime naudoti 6.2 lemą. Gauname, jog beveik visoms poroms $(p, \chi(\bmod p))$ ir kiekvienam fiksuotam $k \in \mathbb{Z}$, kai $Q \to \infty$,

$$\prod_{q \le L} \left(1 - \frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-\eta} = \sum_{m \le L} c_{\tau,k}(m) \frac{\chi(m)}{m^s} + o(1)$$

ir

$$\prod_{q \le L} \left(1 - \frac{\overline{\chi}(q)}{q^{\overline{s}}}\right)^{-\eta+k} = \sum_{m \le L} c_{\tau,-k}(m) \frac{\overline{\chi}(m)}{m^{\overline{s}}} + o(1)$$

tolygiai pagal $s \in R$ ir $|\tau| \le c_4$. Iš čia ir (6.2) gauname lemos tvirtinimą.

7.PAGRINDINĖ TEOREMA

Šiame skyrelyje suformuluosime ir įrodysime dvimatę ribinę teoremą Dirichlė L-funkcijoms.

Tegul p yra pirminis skaičius, $Q \geq 2$, χ yra Dirichlė charakteris moduliu p, χ_0 yra pagrindinis Dirichlė charakteris moduliu p,

$$M_Q = \sum_{p \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi(\mathrm{mod} p) \\ \chi \neq \chi_0}} 1$$

ir

$$\nu_Q(\ldots) = \frac{1}{M_Q} \sum_{p \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi(\mathrm{mod} p) \\ \chi \neq \chi_0, \ldots}} 1.$$

Čia vietoje daugtaškio yra rašoma sąlyga, kurią tenkina pora $(p, \chi(\mathrm{mod} p))$. Simboliu $\mathbb{C}$ žymėsime kompleksinę plokštumą, $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, o $\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ yra erdvės $\mathbb{C}^2$ Borelio aibių klasė. Tegul $L(s, \chi)$ yra Dirichlė L-funkcija, o $D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\}$. Magistro **darbo tikslas** – gauti tikimybinio mato

$$\mu_Q(A) \stackrel{def}{=} \nu_Q\left((L(s_1, \chi), L(s_2, \chi)) \in A\right), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2),$$

silpnąjį konvergavimą, kai $Q \to \infty$.

Pagrindinės teoremos formulavimui yra reikalingos tokios funkcijos. Tegul $\eta = \frac{i\tau + k}{2}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_{\tau,k}(p^\alpha) = \frac{\eta(\eta+1)\ldots(\eta+\alpha-1)}{\alpha!}$$

ir

$$c_{\tau,k}(m) = \prod_{p^\alpha \| m} c_{\tau,k}(p^\alpha).$$

Čia $p^\alpha \parallel m$ reiškia, kad $p^\alpha \mid m$, bet $p^{\alpha+1} \nmid k$, t.y. pirminis skaičius p laipsniu α įeina į natūraliojo skaičiaus m kanoninį skaidinį.

Tegul $s_1 = \sigma_1 + it_1$, $s_2 = \sigma_2 + it_2$ ir $\sigma_1 > \frac{1}{2}$, $\sigma_2 > \frac{1}{2}$. Naudodami skaičius $c_{\tau,k}(m)$, apibrėžiame funkcijas

$$\mathrm{w}_j(\tau, k) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{\tau,k}(m) c_{\tau,-k}(m) \frac{1}{m^{2\sigma_j}}, j = 1, 2,$$

ir

$$\mathrm{w}(\tau_1, \tau_2, k_1, k_2) = \sum_{m=1;}^{\infty} \sum_{d_1 d_2 = m} \frac{c_{\tau,k_1}(d_1) c_{\tau,k_2}(d_2)}{d_1^{s_1} d_2^{s_2}} \times$$

$$\times \sum_{d_1 d_2 = m} \frac{c_{\tau,-k}(d_1) c_{\tau,-k_2}(d_2)}{d_1^{\bar{s}_1} d_2^{\bar{s}_2}}, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Pagrindinė teorema. *Tegul s_1, $s_2 \in D$. Tuomet tikimybinis matas μ_Q, kai $Q \to \infty$, silpnai konverguoja į tikimybinį matą erdvėje* $(\mathbb{C}^2, \mathcal{B}(\mathbb{C}^2))$, *apibrėžiamą charakteringosiomis transformacijomis* ($\mathrm{w}_j(\tau, k)$, j = 1,2, $\mathrm{w}(\tau_1, \tau_2, k_1, k_2)$.

Pagrindinės teoremos įrodymui naudosime charakteringųjų transformacijų erdvėje $\mathbb{C}^2$ metodą (5 skyrelis). Tegul

$$(\mathrm{w}_{Q,j}(\tau, k),\ j = 1, 2,\ \mathrm{w}_Q(\tau_1, \tau_2, k_1, k_2))$$

yra tikimybinio mato μ_Q charakteringosios transformacijos, o $\mu_{Q,j}$, j = 1,2, yra mato μ_Q marginalieji matai. Tuomet iš mato μ_Q apibrėžimo išplaukia, kad

$$\mathrm{w}_{Q,j}(\tau, k) = \int_{\mathbb{C} \setminus \{0\}} r^{i\tau} e^{ik\varphi} d\mu_{Q,j} =$$

$$= \frac{1}{M_Q} \sum_{p \le Q} \sum_{\substack{\chi = \chi(\mathrm{mod} p) \\ \chi \ne \chi_0 \\ L(s_j, \chi) \ne 0}} |L(s_j, \chi)|^{i\tau} \exp\{ik \arg L(s_j, \chi)\}, j = 1, 2$$

ir

$$\mathrm{w}_Q(\tau_1, \tau_2, k_1, k_2) = \int_{\mathbb{C}^2} r_1^{i\tau_1} r_2^{i\tau_2} e^{ik_1\varphi_1 + ik_2\varphi_2} d\mu_Q =$$

$$= \frac{1}{M_Q} \sum_{p \le Q} \sum_{\substack{\chi = (\mathrm{mod} p), \chi \ne \chi_0 \\ L(s_1, \chi) L(s_2, \chi) \ne 0}} |L(s_1, \chi)| |L(s_2, \chi)|^{i\tau} \times$$

$$\times \exp\{ik_1 \arg L(s_1,\chi) + ik_2 \arg L(s_2,\chi)\}. \tag{7.1}$$

Remiantis 5.1 teorema, reikia išnagrinėti funkcijų $\mathrm{w}_{Q,j}(\tau,k)$, j = 1, 2, ir $\mathrm{w}_Q(\tau_1,\tau_2,k_1,k_2)$ elgesį, kai $Q\to\infty$.

7.1 lema. *Visiems* $\tau\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}$

$$\lim_{Q\to\infty} \mathrm{w}_{Q,j}(\tau,k) = \mathrm{w}_j(\tau,k),$$

o funkcija $\mathrm{w}_j(\tau,o)$ *yra tolydi taške* τ=0, j=1, 2.

Lemos įrodymas pateiktas [4] darbe.

Vadinasi, lieka išnagrinėti funkcijos $\mathrm{w}_Q(\tau_1,\tau_2,k_1,k_2)$ asimptotinį elgesį, kai $Q\to\infty$.

Tegul A yra porų $(p,\chi(\bmod p))$ aibė, kurioms $L(s,\chi)\neq 0$, kai $s\in R$, ir galioja (6.8) ir (6.9) lygybės. Tuomet iš 6.1 lemos turime, kad

$$\nu_Q\,(p,\chi(\bmod\ p))\in A = 1+o(1). \tag{7.2}$$

Tegul, trumpumo dėlei,

$$\sum_{m\le L} c_{\tau,k}(m)\frac{\chi(m)}{m^{s_j}} = a_j$$

ir

$$\sum_{m\le L} c_{\tau,-k}(m)\frac{\overline{\chi}(m)}{m^{\bar{s}_j}} = b_j.$$

Tuomet iš (7.1), 6.3 lemos ir (7.2) gauname, jog

$$\mathrm{w}_Q(\tau_1,\tau_2,k_1,k_2) = \frac{1}{M_Q}\sum_{p\le Q}\ \sum_{\substack{\chi=\chi(\bmod\ p),\\ \chi\neq\chi_0,\\ (p,\chi(\bmod\ p))\in A}} |L(s_1,\chi)|^{i\tau_1}|L(s_2,\chi)|^{i\tau_2}\times$$

$$\times \exp\{ik_1\arg L(s_1,\chi)+ik_2\arg L(s_2\chi)\}+o(1) =$$

$$= (1+o(1))\frac{1}{M_Q}\sum_{p\le Q}\ \sum_{\substack{\chi=\chi(\bmod\ p),\\ \chi\neq\chi_0}} (a_1+o(1))\times$$

$$\times(b_1+o(1))(a_2+o(1))(b_2+o(1))+o(1)$$

tolygiai pagal $s_j \in R,\ j=1,2$, ir $|\tau_1| \le c_6$, $|\tau_2| \le c_7$. Todėl

$$\mathrm{w}_Q(\tau_1,\tau_2,k_1,k_2) = (1+o(1))\times$$

$$\times\Bigg(\frac{1}{M_Q}\sum_{p\le Q}\sum_{\substack{\chi=\chi(\mathrm{mod}\ p),\\ \chi\ne\chi_0}} a_1b_1a_2b_2+$$

$$+\,O\Bigg(\frac{1}{M_Q}\sum_{p\le Q}\sum_{\substack{\chi=\chi(\mathrm{mod}\ p),\\ \chi\ne\chi_0,\\ (p,\chi(\mathrm{mod}\ p))\notin A}} |a_1b_1a_2b_2|\Bigg)+$$

$$+o\Bigg(\frac{1}{M_Q}\sum_{p\le Q}\times\sum_{\substack{\chi=\chi(\mathrm{mod}\ p),\\ \chi\ne\chi_0}}\Big|a_1b_1a_2+a_1a_2b_2+b_1a_2b_2+a_1b_1+$$

$$+a_1a_2+a_1b_2+b_1a_2+b_1b_2+a_2b_2+a_1+b_1+a_2+b_2+1\Big|\Bigg)\Bigg)=$$

$$\stackrel{def}{=}(1+o(1))\,\frac{1}{M_Q}\,(\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3)\,. \tag{7.3}$$

Kiekvieną iš sumų $\sum_1, \sum_2$ ir $\sum_3$ įvertiname atskirai. Pradėsime nuo $\sum_2$. Pritaikę Koši-Švarco nelygybę

$$|\sum_{m=1}^{n} a_m b_m|^2 \le \sum_{m=1}^{n}|a_m|^2\sum_{m=1}^{n}|b_m|^2,$$

kuri yra teisnga bet kuriems kompleksiniams skaičiams a_m ir b_m , gauname iš (7.2), jog

$$(\Sigma_2)^2 = \frac{1}{M_Q}\sum_{p\le Q}\Bigg|\sum_{\substack{\chi=\chi(\mathrm{mod}\ p),\\ \chi\ne\chi_0,\\ (p,\chi(\mathrm{mod}\ p))\notin A}} a_1b_1a_2b_2\Bigg|^2\times$$

$$\times\frac{1}{M_Q}\sum_{p\le Q}\Big|\sum_{\substack{\chi=\chi(\text{mod }p),\\ \chi\ne\chi_0,\\ (p,\chi(\text{mod }p))\notin A}} 1\Big|^2 =$$

$$= o(1)\frac{1}{M_Q}\sum_{p\le Q}\sum_{\substack{\chi=\chi(\text{mod }p),\\ \chi\ne\chi_0}} |a_1|^2|b_1|^2|a_2|^2|b_2|^2. \tag{7.4}$$

Iš dydžių a_j apibrėžimo turime, kad

$$a_j^2 = \left(\sum_{m\le L} c_{\tau,k}(m)\frac{\chi(m)}{m^{s_j}}\right)^2 = \sum_{r\le L^2} d_r\frac{\chi(r)}{r^{s_j}}. \tag{7.5}$$

Čia

$$d_r = \sum_{d|r} c_{\tau,k}(d)\ c_{\tau,k}\left(\frac{r}{d}\right).$$

Pasinaudoję nelygybe

$$|c_{\tau,k}(m)| \le (d(m))^{c_8},$$

iš čia gauname, kad

$$|d_r| \le \sum_{d|r}(d(d))^{c_8}\left(d(\frac{r}{d})\right)^{c_8} \le (d(r))^{2c_8+1}.$$

Dabar šis įvertis ir (7.5) leidžia tvirtinti, kad

$$(a_1a_2)^2 = \sum_{m\le L^4} u(m)\ \chi(m),$$

kur

$$|u(m)| \le (d(m))^{2(2c_8+1)+1}\ \frac{1}{m^{\min(\sigma_1,\sigma_2)}}. \tag{7.6}$$

Visiškai panašiai gauname, kad

$$(b_1b_2)^2 = \sum_{m\le L^4} v(m)\overline{\chi}(m),$$

kur

$$|v(m)| \leq (d(m))^{2(2c_8+1)+1} \frac{1}{m^{\min(\sigma_1,\sigma_2)}}. \tag{7.7}$$

Pasinaudoję žinoma nelygybe

$$|a||b| \leq \frac{|a|^2+|b|^2}{2},$$

turime, jog

$$|a_1|^2|a_2|^2|b_1|^2|b_2|^2 = O(|a_1|^4|a_2|^4+|b_1|^4|b_2|^4). \tag{7.8}$$

Kadangi $d(m) = O(m^\varepsilon)$ su bet kuriuo $\varepsilon > 0$ ir $\min(\sigma_1, \sigma_2) > \frac{1}{2}$, tai eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(d(m))^{c_9}}{m^{2\min(\sigma_1,\sigma_2)}}$$

konverguoja su bet kuriuo $c_9 > 0$. Taigi, pasinaudoję 6.3 lema ir atsižvelgę į (7.4)– (7.8), gauname, kad

$$\Sigma_2 = o(1), Q \to \infty, \tag{7.9}$$

tolygiai pagal $|\tau_1| \leq c_5$, $|\tau_2| \leq c_5$. Panašiai vertinsime ir sumą $\sum_3$. Turime, kad

$$a_1a_2 = \sum_{m\leq L^2} d_m \chi(m),$$

kur

$$|d_m| \leq \frac{(d(m))^{2(c_8+1)+1}}{m^{\min(\sigma_1,\sigma_2)}},$$

ir

$$b_1b_2 = \sum_{m\leq L^2} \widehat{d}_m \ \overline{\chi}(m),$$

kur

$$|\widehat{d}_m| \leq \frac{(d(m))^{2(c_8+1)+1}}{m^{\min(\sigma_1,\sigma_2)}}.$$

Todėl, pakartoję sumos $\sum_2$ įvertinime panaudotus samprotavimus (Koši-Švarco nelygybė, 6.3 lema), vėl gauname, jog

$$\Sigma_3 = o(1), \quad Q \to \infty, \tag{7.10}$$

tolygiai pagal $|\tau_1| \leq c_5, |\tau_2| \leq c_5$. Taigi, lieka apskaičiuoti $\sum_1$. Tai yra sudėtingiausia įrodymo dalis.

Kaip rašėme anksčiau,

$$a_1 a_2 = \sum_{m \leq L^2} d_m \ \chi(m),$$

o

$$b_1 b_2 = \sum_{m \leq L^2} \widehat{d}_m \ \overline{\chi}(m).$$

Dabar tiksliau užrašysime koeficientus d_m ir $\widehat{d}_m$. Pagal sumų dauginimo taisyklę turime, kad

$$d_m = \sum_{l_1 l_2 = m} \frac{c_{\tau_1, k_1}(l_1) \ c_{\tau_2, k_2}(l_2)}{l_1^{s_1} l_2^{s_2}},$$

o

$$\widehat{d}_m = \sum_{l_1 l_2 = m} \frac{c_{\tau_1, -k_1}(l_1) \ c_{\tau_2, -k_2}(l_2)}{l_1^{\overline{s}_1} l_2^{\overline{s}_2}}.$$

Taigi, gauname, kad

$$\Sigma_1 = \frac{1}{M_Q} \sum_{p \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi(\text{mod } p) \\ \chi \neq \chi_0}} a_1 a_2 b_1 b_2 =$$

$$= \frac{1}{M_Q} \sum_{p \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi(\text{mod } p) \\ \chi \neq \chi_0}} \sum_{m \leq L^2} d_m \ \chi(m) \ \sum_{n \leq L^2} \widehat{d}_n \ \overline{\chi}(n) =$$

$$= \sum_{m \leq L^2} d_m \sum_{n \leq L^2} \widehat{d}_n \frac{1}{M_Q} \sum_{p \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi(\text{mod } p) \\ \chi \neq \chi_0}} \chi(m) \ \overline{\chi}(n). \tag{7.11}$$

Tarkime, kad $m = n$. Tada, kadangi $\chi(m)\overline{\chi}(m) = |\chi(m)|^2$, tai

$$\sum_{p \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi(\text{mod } p) \\ \chi \neq \chi_0}} \chi(m)\overline{\chi}(n) = \sum_{p \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi(\text{mod } p) \\ \chi \neq \chi_0}} |\chi(m)|^2 =$$

$$= M_Q - \sum_{\substack{p \mid m \\ p \le L^2}} (p-2) = M_Q + O(\sum_{p \le L^2} p) = M_Q + O(L^4), \tag{7.12}$$

nes $|\chi(m)|^2 = 1$, jei $p \nmid m$. Iš koeficientų d_m ir $\widehat{d}_m$ išraiškos ir $c_{\tau,k}(m)$ įverčio su liekana $\varepsilon > 0$ gauname įvertį

$$|d_m \widehat{d}_m| \le \left(\frac{d(m)^{2c_8}}{m^{\min(\sigma_1,\sigma_2)}} \sum_{l_1 l_2 = m} 1 \right)^2 = O\left(\frac{m^{\varepsilon}}{m^{2\min(\sigma_1,\sigma_2)}} \right).$$

Iš čia ir (7.12) išplaukia, jog atvejis m = n sumoje (7.11) duoda reiškinį

$$\sum_{m \le L^2} d_m \widehat{d}_m (1 + O(M_Q^{-1} L^4)) = (1 + O(M_Q^{-1} L^4)) \sum_{m \le L^2} \sum_{l_1 l_2 = m} \frac{c_{\tau_1,k_1}(l_1)\ c_{\tau_2,k_2}(l_2)}{l_1^{s_1} l_2^{s_2}} \times$$

$$\times \sum_{l_1 l_2 = m} \frac{c_{\tau_2,-k_1}(l_1)\ c_{\tau_2,-k_2}(l_2)}{l_1^{\bar{s}_1} l_2^{\bar{s}_2}} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l_1 l_2 = m} \frac{c_{\tau_1,k_1}(l_1)\ c_{\tau_2,k_2}(l_2)}{l_1^{s_1} l_2^{s_2}} \times$$

$$\times \sum_{l_1 l_2 = m} \frac{c_{\tau_2,-k_1}(l_1)\ c_{\tau_2,-k_2}(l_2)}{l_1^{\bar{s}_1} l_2^{\bar{s}_2}} + o(1), \ Q \to \infty, \tag{7.13}$$

tolygiai pagal $|\tau_1| \le c_5, |\tau_2| \le c_5$.

Dabar tegul $m \ne n$. Pasinaudoję formule

$$\sum_{\chi (\mathrm{mod}\ p)} \chi(m)\overline{\chi}(n) = \begin{cases} \varphi(p), & \text{jei } m \equiv n (\mathrm{mod}\ p) \text{ ir } (p,m) = 1, \\ 0, & \text{priešingu atveju,} \end{cases}$$

kuri buvo paminėta 1 skyrelyje, gauname, kad

$$\sum_{p \le Q} \sum_{\substack{\chi = \chi(\mathrm{mod}\ p) \\ \chi \ne \chi_0}} \chi(m)\overline{\chi}(n) = O(\sum_{\substack{p \le Q, \\ p \nmid mn}} 1) + O(\sum_{\substack{p \nmid (m-n) \\ m \ne n, p \le L^2}} p) =$$

$$= O\left(\frac{Q}{\log Q} \right) + O(L^4) = O\left(\frac{Q}{\log Q} \right).$$

Vadinasi, atvejis $m \neq n$ sumoje (7.11) duoda dydį

$$O\left(Q^{-1}\sum_{m\le L^2} d_m \sum_{n\le L^2} \widehat{d}_n\right) = BQ^{-1}\left(\sum_{m\le L^2}\frac{m^{\varepsilon}}{\sqrt{m}}\right) = o(1), \tag{7.14}$$

kai $Q \to \infty$, tolygiai pagal $|\tau_1| \le c_5$, $|\tau_2| \le c_5$. Įstatę dabar (7.13) ir (7.14) į (7.11), galutinai gauname, jog

$$\mathrm{w}_Q(\tau_1,\tau_2,k_1,k_2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{d_1d_2=m}\frac{c_{\tau_1,k_1}(d_1)\ c_{\tau_2,k_2}(d_2)}{d_1^{s_1}d_2^{s_2}}\times$$

$$\times\sum_{d_1d_2=m}\frac{c_{\tau_1,-k_1}(d_1)\ c_{\tau_2,-k_2}(d_2)}{d_1^{\bar{s}_1}d_2^{\bar{s}_2}} + o(1), \tag{7.15}$$

kai $Q \to \infty$, tolygiai pagal $|\tau_1| \le c_5$, $|\tau_2| \le c_5$.

Taigi, iš tolygaus konvergavimo turime, jog $\mathrm{w}_Q(\tau_1,\tau_2,k_1,k_2)$, kai $Q \to \infty$, konverguoja į tolydžią funkciją.

Pagrindinės teoremos įrodymas. Teoremos tvirtinimas išplaukia iš 5.1 teoremos, 7.1 lemos ir (7.15).

IŠVADOS

Darbe gauta, jog Dirichlė L-funkcijoms yra teisinga dvimatė ribinė teorema, t.y. kad tikimybinis matas

$$\nu_Q\left((L(s_1,\chi), L(s_2,\chi)) \in A\right), A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2),$$

kai $Q \to \infty$, silpnai konverguoja į tikimybinį matą erdvėje $(\mathbb{C}^2, \mathcal{B}(\mathbb{C}^2))$. Čia Re $s_1 > \frac{1}{2}$ ir Re $s_2 > \frac{1}{2}$.

DVIMATĖ RIBINĖ TEOREMA DIRICHLĖ L-FUNKCIJOMS

Irmutė Maciulevičienė

Santrauka

Tegul p yra pirminis skaičius, χ - Dirichlė charakteris moduliu p, o $L(s,\chi)$ - atitinkama Dirichlė L-funkcija. Tarkime, jog $Q \geq 2$,

$$M_Q = \sum_{p \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi (\mathrm{mod}\ p) \\ \chi \neq \chi_0}} 1$$

ir

$$\nu_Q(\ldots) = \frac{1}{M_Q} \sum_{p \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi (\mathrm{mod}\ p) \\ \chi \neq \chi_0}} 1.$$

Čia vietoje daugtaškio rašoma sąlyga, kurią tenkina pora $(p, \chi (\mathrm{mod}\ p))$. Darbe gauta, jog Dirichlė L-funkcijoms yra teisinga dvimatė ribinė teorema, t.y. kad tikimybinis matas

$$\nu_Q \left((L(s_1, \chi), L(s_2, \chi)) \in A \right), A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2),$$

kai $Q \to \infty$, silpnai konverguoja į tikimybinį matą erdvėje $(\mathbb{C}^2, \mathcal{B}(\mathbb{C}^2))$. Čia $\mathrm{Re}\ s_1 > \frac{1}{2}$ ir $\mathrm{Re}\ s_2 > \frac{1}{2}$.

TWO-DIMENSIONAL LIMIT THEOREM FOR DIRICHLET L-FUNKCIONS

Irmutė Maciulevičienė

Summary

Let p be a prime number, χ denote a Dirichlet character mod p, and let $L(s,\chi)$ be a corresponding Dirichlet L-function. For $Q \geq 2$, define

$$M_Q = \sum_{p \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi(\mathrm{mod} p) \\ \chi \neq \chi_0}} 1,$$

and let

$$\nu_Q(\ldots) = \frac{1}{M_Q} \sum_{p \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi(\mathrm{mod} p) \\ \chi \neq \chi_0, \ldots}} 1$$

where in place of dots a condition satisfied by a pair $(p, \chi \mathrm{mod}\ p)$ is written. It proves that the probability measure

$$\nu_Q = ((L(s_1,\chi), L(s_2,\chi)) \in A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2),$$

converges weakly to some probability measure P on $(\mathbb{C}^2, \mathcal{B}(\mathbb{C}^2))$ as $Q \to \infty$. Here Re $s_1 > \frac{1}{2}$ and Re $s_2 > \frac{1}{2}$. The limit measure P is defined by its characteristic transforms.

LITERATŪRA

1. Elliott P. D. T. A. On the distribution of arg L(s, χ) in the half-plane $\sigma > \frac{1}{2}$, Acta Arith., 20 (1972), 155–169.

2. Elliott P. D. T. A. On the distribution of the values of guadratic L-series in the half- plane $\sigma > \frac{1}{2}$. Ynvent. Math., 21 (1973), 319–338.

3. Elliott P. D. T. A. On the distributionof the values of L-series in the half- plane $\sigma > \frac{1}{2}$. Indag. Math. 31 (1971), 222–234.

4. Laurinčikas A. Limit teorema for the Riemann Zeta-function, Kluwer, Dordrecht, (1996).

5. Девеннпорт Г. Мультипликативная теория чисел. Москва, (1971).

6. Дирихле П.Г.Л. Лекции по теори чисел. Москва, (1936).

7. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. Москва, (1975).

8. Лауринчикас А. О вероятностных мерах на многомерной комплексной плоскости.// Liet. Matem. Rink., 34, (1994), 331–346.

9. Лауринчикас А. Распределение значений комплекснозначных функцией. // Liet. Matem. Rink., 15, (1975), 25–39.

10. Прахар К. Распределение простих чисел. Москва, (1967).

11. Станкус Е. О распределении L-функций Дирихле.// Liet. Matem. Rink., 15, (1975), 127–134.

12. Чудаков Н. Г. Введение в теории L-функций Дирихле. Москва,(1947).