ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MATEMATIKOS KATEDRA

Rita Noreikaitė

Išreikštinės Rymano dzeta funkcijos trupmeninių momentų įverčių konstantos

Magistro darbas

Darbo vadovas

Dr. Saulius Zamarys

Šiauliai, 2009

TURINYS

ĮVADAS

Pirmiausia paminėsime keletą rezultatų Rymano dzeta funkcijos $\varsigma(s)$ momentams. Primename, kad pusplokštumėje $\sigma > 1$ funkcija $\varsigma(s)$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\varsigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Ji yra analiziškai pratęsiama Į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastą polių taške $s = 1$ su reziuumu 1. Vienas svarbiausių funkcijos $\varsigma(s)$ teorijos uždavinių yra momentų

$$I_k(T,\sigma) = \int_1^T |\varsigma(\sigma + it)|^{2k}\, dt, \quad \sigma \geq \frac{1}{2},\ k \geq 0,$$

Asimptotika, kai $T \to \infty$. Gerai žinomas klasikinis rezultatas, kad kiekvienam fiksuotam $\sigma > \frac{1}{2}$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{I_1(T,\sigma)}{T} = \varsigma(2\sigma).$$

Iš Oilerio sandaugos

$$\varsigma(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \sigma > 1,$$

Pagal pirminius skaičius p, išplaukia, kad srityje $\sigma > 1$,

$$\varsigma^k(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-k} =$$

$$= \prod_p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_k(p^j)}{p^{js}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s}.$$

Čia koeficientai $d_k(n)$ yra multiplikatyvūs, be to p ir $r \in N$ yra teisinga formulė

$$d_k(p^r) = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(k)r!} = \frac{k(k+1)\ldots(k+r-1)}{r!}.$$

Tuomet viesiems $k \in N$ srityje $\sigma > 1 - \frac{1}{k}$ yra teisinga formulė

$$\lim_{T\to\infty} \frac{I_k(T,\sigma)}{T} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_k^2(m)}{m^{2\sigma}}. \tag{1}$$

Egzistuoja hipotezė, kad (1) lygybė yra teisinga visiems $\sigma > \frac{1}{2}$ ir $k > 0$. Tegul $I_k\left(T, \frac{1}{2}\right) = I_k(T)$. Daug rezultatų yra skirta momentų $I_k(T)$ asimptotikai. G. H. Hardis (Hardy) ir J. E. Litlvudas (Littlewood) 1918 m. Įrodė, kad

$$I_1(T) = (1 + o(1))T \log T,$$

o A. E. Ingamas (Ingham) 1928 m. gavo asimptotinę formulę

$$I_2(T) = (1 + o(1))\frac{1}{2\pi^2} T \log^4 T, \quad T \to \infty$$

Vėliau pastaruosius rezultatus tikslino daugelis matematikų. Tegul

$$E(T) = I_1(T) - T \log \frac{T}{2\pi} - (2\gamma_0 - 1)T,$$

kur γ_0 yra Oilerio konstanta. A. Gudas (Good) Įrodė, kad

$$E(T) = \Omega\left(T^{\frac{1}{4}}\right),$$

o geriausias žinomas Įvertis

$$E(T) << T^{\frac{72}{227}} (\log T)^B, \quad B > 0,$$

yra gautas 1994 m. ir priklauso M. N. Haksliui (Huxley). Yra žinoma hipotezė, kad visiems $k \geq 0$ egzistuoja tokia konstanta c_k, jog

$$I_k(T) \sim c_k T (\log T)^{k^2}, \; T \to \infty. \tag{2}$$

Iš anksčiau paminėtų rezultatų išplaukia, kad $c_1 = 1$, $c_2 = \frac{1}{2\pi^2}$. Be to 1996 m. A. Laurinčikas pastebėjo, jog $c_k = 1$, kai

$$k = \frac{u}{\sqrt{2 \log \log T}},$$

su $u > 0$, apibrėžtu konstanta. Hipotezė (2) yra, be abejo, sudėtinga, paprasčiau yra nagrinėti Įverčius

$$I_k(T) >>_k T (\log T)^{k^2} \tag{3}$$

ir

$$I_k(T) <<_k T (\log T)^{k^2} \quad . \tag{4}$$

Kai kurie tvirtinimai apie (3) ir (4) Įverčius yra Įrodyti remiantis Rymano hipoteze, kuri yra viena iš svarbiausių matematikoje.

1 hipotezė. *(Rymano hipotezė) Visų netrivialiųjų Rymano dzeta funkcijos nulių realioji dalis yra lygi ½.*

K. Ramačandra pirmasis 1978 m. parodė, kad iš Rymano hipotezės visiems $k \geq 0$ išplaukia (3) Įvertis, o 1980 m. jis gavo (4) Įvertį su $k = \frac{1}{2}$, ir visiems $0 \leq k \leq 2$, jei teisinga Rymano hipotezė. D. R. His – Braunas taip pat nagrinėjo (3) ir (4) Įverčius. Jis 1981 m. Įrodė tokią teoremą.

A teorema. 1^0 *Jei* $k \geq 0$ *yra racionalus skaičius, tai teisingas* (3) *Įvertis.*

2^0 *Jei* $k = 1/n$, $n \in N$, *tuomet teisingas* (4) *Įvertis.*

3^0 *Jei Rymano hipotezė yra teisinga, tai* (3) *Įvertis yra teisingas visiems* $k \geq 0$.

4^0 *Jei Rymano hipotezė yra teisinga, tai* (4) *Įvertis yra teisingas visiems* $0 \leq k \leq 2$.

M. Jutila 1983 m. patikslino A teoremą atveju, kai $k = \frac{1}{n}$, $n \in N$. Jis Įrodė tokĮ tvirtinimą.

B teorema. *Tegul* $k = \frac{1}{n}$, $n \in N$. *Tuomet egzistuoja tokios absoliučios teigiamos konstantos* c_1 *ir* c_2, $c_1 \leq c_2$, *kad*

$$c_1 T(\log T)^{\frac{1}{n^2}} \leq I_{\frac{1}{n}}(T) \leq c_2 T(\log T)^{\frac{1}{n^2}} \tag{5}$$

Ivērčiuose (3) ir (4) nėra aišku, kokios konstantos yra simboliuose ,,$\ll_k$" ir ,,$\gg_k$". Tegul

$$c_k = \frac{1}{\Gamma(k^2+1)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k^2} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{d_k^2(p^\alpha)}{p^\alpha}, \tag{6}$$

kur $\Gamma(s)$, kaip visada, yra oilerio gama - gama funkcija. Remdamiesi Rymano hipoteze, J. B. Konris (Conrey) ir A. Gošas (Ghosh) 1984 m. Įrodė, kad visiems fiksuotiems $k \geq 0$

$$I_k(T) \geq (c_k + o(1))T(\log T)^{k^2}, \quad T \to \infty.$$

D. R. His - Braunas 1993 m. rado išreikštinę konstanta (4) Įvertyje. Jis Įrodė tokią teoremą.

C teorema. *Tegul* $k \in (0,\ 2)$ *yra fiksuotas ir teisinga Rymano hipotezė. Tuomet, kai* $T \to \infty$,

$$I_k(T) \leq \left(\frac{2c_k}{(k^2+1)(2-k)} + o(1)\right) T(\log T)^{k^2}.$$

Panašius rezultatus momentams $I_k(T, \sigma_T)$, kur

$$\sigma_T = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_T}$$

su $l_T > 0$ ir $\lim_{T\to\infty} l_T = +\infty$, gavo A. Laurinčikas.

J. B. Konris ir A. Gošas 1998 m. iškėlė hipotezę, kad

$$\hat{c}_3 = \frac{42}{9!}\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^4\left(1+\frac{4}{p}+\frac{1}{p^2}\right),$$

o 2001 m. J. B. Konris ir S. M. Gonekas pasiūlė formulę

$$\hat{c}_4 = \frac{24024}{14!}\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^9\left(1+\frac{9}{p}+\frac{9}{p^2}+\frac{1}{p^3}\right).$$

Bendra hipotezė, kad

$$\hat{c}_k = \frac{1}{\Gamma(1+k^2)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{k^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{d_k^2(p^j)}{p^j}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{j!}{(j+k)!}$$

priklauso J. P. Kitingui (Keating) ir N. C. Snaitui (Snaith) (2000). Čia k yra nebūtinai natūralusis skaičius.

Darbo tikslas yra panagrinėti Rymano dzeta funkcijos trupmeninių momentų įverčių išreikštinių konstantų gavimo metodiką.

Darbo uždavinys yra nustatyti apytikslę išreikštinių konstantų reikšmę, naudojant kompiuterinę matematikos sistemą Matcad.

1. TRUPMENINIAI RYMANO DZETA FUNKCIJOS MOMENTAI

Nagrinėsime Rymano Dzeta funkcijos momentus

$$I_k(T) = \int_0^T \left[\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right]^{2k} dt,$$

kur $k \geq 0$ nebūtinai sveikasis skaičius. Yra žinomos tokios asimtotikos:

$$I_1(T) \sim C_1 T \log T,\ I_2(T) \sim C_2 (T \log T)^2,\ T \to \infty, \tag{1}$$

kur $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{1}{2\pi^2}$; be to, trivialu, kad $I_0(T) = C_0 T$ su $C_0 = 1$.

Taip pat yra žinoma, kad remiantis Rymano hipoteze

$$T(\log T)^{k^2} << I_k(T) << T(\log T)^{k^2},\ 0 \leq k \leq 2. \tag{2}$$

Todėl galime kelti prielaidą, kad

$$I_k(T) \sim C_k T(\log T)^{k^2} \tag{3}$$

bet kokiam fiksuotam $k \geq 0$ ir su tinkama konstanta C_k, tačiau nėra aišku kokia turi būti C_k.

Conrey ir Ghosh Remdamiesi Rymano hipoteze gavo

$$I_k(T) \geq (c_k + o(1)) T(\log T)^{k^2},$$

bet kokiems $k \geq 0$, su

$$C_k = \frac{1}{\Gamma(k^2+1)} \prod_p \left\{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{k(k+1)\ldots(k+m+1)}{m!}\right)^2 p^{-m}\right\} \tag{4}$$

Jie pastebėjo, kad $c_0 = C_0$ ir $c_1 = C_1$, bet ne $c_2 = C_2$. Todėl jie nusprendė, kas (3) teisingas su $C_k = c_k$, kai $0 \leq k \leq 1$. Mes Įrodysime tokĮ tvirtinimą.

Teorema. *Tegul* $k \in (0;2)$ *yra fiksuotas skaičius, tuomet remiantis Rymano hipoteze*

$$\{c_k + o(1)\} T(\log T)^{k^2} \leq I_k(T) \leq \left\{\frac{2}{(k^2+1)(2-k)} c_k + o(1)\right\} T(\log T)^{k^2},\ \text{kai}\ T \to \infty.$$

Reikia pastebėti, kad trupmena

$$\frac{2}{(k^2+1)(2-k)}$$

Įgyja reikšmę 1 kai $k = 0$ ir $k = 1$, todėl teorema apima Įverčius (1). Be to, trupmena yra baigtinė kai $k \in (0;\ 2)$ ir aprėžta $\frac{27}{25}$ intervale [0; 1]. Kai $k = \frac{1}{2}$ ji tampa lygi $\frac{16}{15}$. Šis rezultatas gali būti palygintas su Conrey rezultatu, kur jis gavo išreikštines konstantas kitiems momentams.

Dabar reikalingas vienas paaiškinimas. Toliau naudodami Landau simboliką $O(\ldots)$, mes pateiksime nelygybes formoje $f \geq g + O(h)$ arba net $f \geq O(h)$. Tai reikš, kad $\frac{f-g}{h}$ arba $\frac{f}{g}$ yra aprėžtos iš apačios, tolygiai pagal kintančius argumentus.

1.1. PAGALBINĖS LEMOS

Šiame skyriuje mes apibrėšime tris vidurkių integralus ir nustatysime jų ryšius. Kadangi remsimės Rymano hipoteze, apibrėšime daugiareikšmę $\zeta(s)^k$ funkciją kai $\sigma \geq \frac{1}{2}$, $T \leq t \leq 2T$) pagal tolygią variaciją išilgai atkarpos nuo $s = 2$. Apibrėšime apibendrintą daliklių funkciją $d_k(n) = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) n^{-s}$ ir $\zeta(s)^k = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) n^{-s}$. Funkcija $d_k(n)$ yra multiplikatyvi bei tenkina sąlygą

$$d_k(p^m) = \frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+m-1)}{m!}, \quad m \in N. \tag{5}$$

Be to, yra žinoma, kad $d_k(n) << n^{\varepsilon}$, bet kokiam fiksuotam $\varepsilon > 0$. Parenkame parametrą N, $N \in Z$, $N \leq T$ ir apibrėžiame

$$S(s) = \sum_{n=1}^{N} d_k(n) n^{-s}.$$

Čia pagrindiniai nagrinėjami objektai bus

$$I(\sigma) = \int_T^{2T} |\varsigma(\sigma + it)|^{2k} dt$$

$$I(\sigma) = \int_T^{2T} |(\sigma + it)^k - S(\sigma + it)|^2 dt$$

ir

$$K(\sigma) = \int_T^{2T} |S(\sigma + it)|^2 dt.$$

Pirmiausia nagrinėsime $I(\sigma)$.

1. lema. *Tegul* $\frac{1}{2} < \sigma \leq 2$. *Tuomet turime*

$$I'(\sigma) \geq -kI(\sigma)\log T + O(I(\sigma)) \tag{6}$$

tolygiai pagal σ.

Įrodymas pradedamas priklausomybe

$$\frac{\varsigma'(s)}{\varsigma(s)} = A - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}s+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)} + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right).$$

Čia A absoliuti konstanta. Intervale $\frac{1}{2} < \sigma \leq 2$, $T \leq t \leq 2T$, mes turime

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}s+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)}\right) = \log T + O(1).$$

Be to kadangi $\mathrm{Re}(\rho) = \frac{1}{2}$, tai turime $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) \geq 0.$

Todėl gauname

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\varsigma'(\sigma+it)}{\varsigma(\sigma+it)}\right) \geq -\frac{1}{2}\log T + O(1). \tag{7}$$

Iš kitos pusės turime

$$\frac{d}{d\sigma}\left|\varsigma(\sigma+it)\right|^{2k} = \frac{d}{d\sigma}\varsigma(\sigma+it)^k\varsigma(\sigma-it)^k =$$
$$k\left\{\varsigma(\sigma+it)^{k-1}\varsigma'(\sigma+it)\varsigma(\sigma-it)^k + \varsigma(\sigma+it)^k\varsigma(\sigma-it)^{k-1}\varsigma'(\sigma-it)\right\}$$
$$= k\varsigma(\sigma+it)^k\varsigma(\sigma-it)^k\left\{\frac{\varsigma'(\sigma+it)}{\varsigma(\sigma+it)} + \frac{\varsigma'(\sigma-it)}{\varsigma(\sigma-it)}\right\}$$
$$= 2k\left|\varsigma(\sigma+it)\right|^{2k}\mathrm{Re}\left(\frac{\varsigma'(\sigma+it)}{\varsigma(\sigma+it)}\right).$$

Iš čia ir (7) mes gauname

$$\frac{d}{d\sigma}\left|\varsigma(\sigma+it)\right|^{2k} \geq -k\left|\varsigma(\sigma+it)\right|^{2k}(\log T + O(1)).$$

Dabar mes integruojame intervale $T \leq t \leq 2T$ ir gauname (6). Gauti rezultatai dalinai irodo, kad $I'(\sigma)$ egzistuoja, kai $\frac{1}{2} < \sigma \leq 2$.

Kita lema bus dėl $J(\sigma)$.

2. lema. *Bet kuriam fiksuotam* $\varepsilon > 0$ *mes turime*

$$J(\sigma) = I(\sigma) - K(\sigma) + O(T^{\varepsilon}N) \qquad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1, \tag{8}$$

ir

$$J'(\sigma) = I'(\sigma) - K'(\sigma) + O(T^{\varepsilon}N) \qquad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1, \tag{9}$$

tolygiai pagal σ *. Be to mes turime*

$$J(\sigma) << TN^{-1}, \tag{10}$$

tolygiai pagal $1+\varepsilon \le \sigma \le 2$.

Įrodymams (8) ir (9) mes praplėsime σ intervalą iki $\frac{1}{2} \le \sigma \le 1$. Pirmiausia pastebėsime, kad teisinga lygybė

$$\left|\varsigma(\sigma+it)^k - S(\sigma+it)\right|^2 = \left|\varsigma(\sigma+it)\right|^{2k} - \left|\varsigma(\sigma+it)\right|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\left\{\varsigma(\sigma+it)^k - S(\sigma+it)\right\}S(\sigma-it)\right),$$

todėl

$$J(\sigma) = I(\sigma) - K(\sigma) - 2\operatorname{Re} I, \tag{11}$$

su

$$\begin{aligned} I &= \int_T^{2T} \left\{\varsigma(\sigma+it)^k - S(\sigma+it)\right\}S(\sigma-it)dt \\ &= \frac{1}{i}\int_{\sigma+iT}^{\sigma+2iT} \left\{\varsigma(s)^k - S(s)\right\}S(2\sigma-s)ds. \end{aligned} \tag{12}$$

Dabar perkeliame integravimo tiesę į $\operatorname{Re}(s) = 1+\varepsilon$. Tuomet

$$I = \frac{1}{i}\left(I_1 - I_2 + I_3\right), \tag{13}$$

kur

$$I_m = \int_{\sigma+imT}^{1+\varepsilon+imT} \left\{\varsigma(s)^k - S(s)\right\}S(2\sigma-s)ds \qquad (m = 1, 2)$$

ir

$$I_3 = \int_{\sigma+iT}^{1+\varepsilon+2iT} \left\{\varsigma(s)^k - S(s)\right\}S(2\sigma-s)ds.$$

Čia atkreipiame dėmesį, kad s neturi realiosios dalies σ. Integralams I_1 ir I_2 naudosime įvertį

$$S(s) << \sum_1^N \frac{d_k(n)}{n^{\operatorname{Re}(s)}} << N^{\varepsilon}\sum_1^N n^{-\operatorname{Re}(s)} << N^{1-\operatorname{Re}(s)+3\varepsilon}, \text{ kur } -\varepsilon \le \operatorname{Re}(s) \le 1+\varepsilon. \tag{14}$$

Pagal Liondeliofo hipotezę, turime įvertį $\varsigma(s) << T^{\varepsilon}$, todėl

$$\varsigma(s)^k S(2\sigma-s) << T^{k\varepsilon}N^{1+4\varepsilon} << T^{(k+4)\varepsilon}N \tag{15}$$

kai $-\varepsilon \le \operatorname{Re}(2\sigma-s) \le 1$. Be to,

$$S(s)S(2\sigma-s) << N^{2-2\sigma+6\varepsilon} << T^{6\varepsilon}N. \tag{16}$$

Todėl gauname

$$I_1, I_2 << T^{(k+6)\varepsilon} N. \tag{17}$$

Integralą I_3 mes integruojame panariui gauname

$$I_3 = \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{d_k(m)}{m^{1+\varepsilon}} \cdot \frac{d_k(n)}{n^{2\sigma-1-\varepsilon}} \int_T^{2T} \left(\frac{n}{m}\right)^{it} idt << \sum_m \sum_n \frac{m^{\varepsilon/2}}{m^{1+\varepsilon}} \cdot \frac{n^{\varepsilon/2}}{n^{2\sigma-1-\varepsilon}} \left(\log \frac{m}{n}\right)^{-1}$$

$$<< \left\{ \sum_{m=N+1}^{\infty} m^{-1-\varepsilon/2} \left(\log \frac{m}{n}\right)^{-1} \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{N} n^{3\varepsilon/2+1-2\sigma} \right\}.$$

Pirmoji suma yra $O(1)$, nes taip gauname nagrinėdami atskirai intervalus $N+1 \le m \le 2N$ ir $m > 2N$; antroji suma yra $O(N^{1+2\varepsilon})$. Todėl turime $I_3 << T^{2\varepsilon} N$ ir galutinai $I << T^{(k+6)\varepsilon} N$, kai pritaikome (13) ir (17). Įvertį (8) gauname iš (11), kai parenkame kitą ε reikšmę. Kad gauti (9), mes diferencijuojame (11). Iš (12) gauname

$$\frac{dI}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{i} \int_{\sigma+iT}^{\sigma+2iT} \left\{ \varsigma(s)^k - S(s) \right\} S(2\sigma - s) ds \right)$$

$$= \frac{2}{i} \int_{\sigma+iT}^{\sigma+2iT} \left\{ \varsigma(s)^k - S(s) \right\} S'(2\sigma - s) ds + \frac{1}{i} \left[\left\{ \varsigma(s)^k - S(s) \right\} S(2\sigma - s) \right]_{\sigma+iT}^{\sigma+2iT},$$

kai $\sigma > \frac{1}{2}$.

Pirmąjį narį galime įvertinti nukeldami integravimo tiesę į $\mathrm{Re}(s) = 1+\varepsilon$, kaip prieš tai, o antrasis narys yra $O\left(T^{(k+6\varepsilon)N}\right)$. Tuomet iš (15) ir (16) gauname (9).

Dabar nagrinėsime (10). Imame $1+\varepsilon \le \sigma \le 2$. Pagal Montgomerio – Vono (Montgomery – Vaughan) vidurinių reikšmių teoremą turime

$$J(\sigma) = \int_T^{2T} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^{\sigma}} n^{-it} \right|^2 dt =$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} d_k(n)^2 n^{-2\sigma} (T + O(n))$$

$$<< T \sum_{N+1}^{\infty} n^{\varepsilon-2\sigma} + \sum_{N+1}^{\infty} n^{\varepsilon+1-2\sigma}$$

$$<< TN^{\varepsilon+1-2\sigma} + N^{2\varepsilon+2-2\sigma} << TN^{-1},$$

Tai ir reikėjo įrodyti.

Dabar nagrinėsime integralą $K(\sigma)$.

3. lema. *Kai* $\varepsilon > 0$, *mes turime*

$$K(\sigma) = T \sum_{n \le N} d_k(n)^2 n^{-2\sigma} + O(N^{1+\varepsilon}), \tag{18}$$

ir

$$K'(\sigma) = -2T\sum_{n\le N} d_k(n)^2 n^{-2\sigma}\log n + O(N^{1+\varepsilon}), \tag{19}$$

tolygiai pagal $\frac{1}{2} \le \sigma \le 2.$

Be to, kai $N \to \infty$, gauname

$$\sum_{n\le N} d_k(n)^2 n^{-1} \sim c_k (\log N)^{k^2}, \tag{20}$$

kur c_k duotas (4) lygybe ir

$$\sum_{n\le N} d_k(n)^2 n^{-1}\log n \sim \frac{k^2}{k^2+1} c_k (\log N)^{k^2+1}. \tag{21}$$

Lema Įrodyta.

Pirmiausiai nagrinėsime $K'(\sigma)$. Turime

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\sigma}\int_T^{2T} S(\sigma+it)S(\sigma-it)dt &= 2\,\mathrm{Re}\int_T^{2T} S'(\sigma+it)S(\sigma-it)dt\\ &= -2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{m,n\le N} d_k(m)d_k(n)(mn)^{-\sigma}\log m\int_T^{2T}\left(\frac{n}{m}\right)^{it}dt\right\}\\ &= -2T\sum_{n\le N} d_k(n)^2 n^{-2\sigma}\log n + O\left(\sum_{\substack{m,n\le N\\ m\ne n}} \frac{d_k(m)d_k(n)}{(mn)^{\sigma}}\cdot\frac{\log m}{\left|\log\frac{m}{n}\right|}\right).\end{aligned} \tag{22}$$

Kadangi $\sigma \ge \frac{1}{2}$, liekamasis narys yra $O(N^{1+\varepsilon})$, pagal gerai žinomą K. Tičmaršo (Titchmarsh) rezultatą. Pagal tai gauname (18). Kad Įrodyti (20), naudosime Perono formulę ir naudosimės lygybe

$$\sum_1^{\infty} d_k(n)^2 n^{-s} = \sigma(s)^{k^2} f(s),\ (\mathrm{Re}(s) > 1),$$

kur $f(s)$ yra apibrėžta formule

$$f(s) = \prod_p \left\{\left(1-p^{-s}\right)^{k^2}\sum_{m=0}^{\infty} d_k(p^m)^2 p^{-ms}\right\},$$

kuri yra holomorfinė dėl $\mathrm{Re}(s) \ge \frac{3}{4}$. Konstanta c_k gaunama iš $c_k = \Gamma(k^2+1)^{-1} f(1)$, pagal (5).

Pagaliau (21) gaunama iš (20), naudojant dalinio sumavimo metodą.

Pastebėsime, kad 2 ir 3 lemos jau Įrodo apatinĮ teoremos ĮvertĮ, kai imame $N = T^{1-\varepsilon}$ bei remiantis faktu, kad $J(\sigma) \ge 0$. Įrodysime tokĮ teiginĮ.

4 lema. *Tegul* $\varepsilon > 0$. *Tuomet*

$$J'(\sigma) \geq O(T^{1+\varepsilon})$$

tolygiai pagal $\frac{1}{2} < \sigma \leq 2$.

Ši nelygybė reiškia, kad $J'(\sigma)T^{-1-\varepsilon}$ yra aprėžta iš apašios, tolygiai pagal σ, T ir N. Kadangi Rymano Hipotezė ekvivalenti Įverčiui $\varsigma(s) << T^{\varepsilon}$, tai mes turime $I(\sigma) << T^{1+2k\varepsilon}$, kadangi 1 lema duoda Įvertį

$$I'(\sigma) \geq O(T^{1+\varepsilon}),$$

parenkant kitą ε reikšmę. Be to 3 lema duoda $K'(\sigma) << T^{1+\varepsilon}$, todėl 4 lema gaunama iš 2 lemos.

1.2. PAGRINDINĖ LEMA

Šiame skyriuje surasime nelygybes tarp $J(\sigma)$ ir $J'(\sigma)$. Pradėsime nuo pagrindinio rezultato.

5 lema. *Tegul* $f(s)$ *yra nelygi tapatingai nuliui holomorfinė funkcija ant atviros aibės, susidedančios iš atkarpos nuo* $\sigma + iT_1$ *ir* $\sigma + iT_2$ *ir apibrėžkime*

$$L(\sigma) = \int_{T_1}^{T_2} |f(\sigma + it)|^2 dt, \quad M(\sigma) = \max_{t=T_1,T_2} |f(\sigma + it) f'(\sigma + it)|.$$

Tuomet teisinga lygybė

$$\left(\frac{L'(\sigma)}{L(\sigma)}\right)' \geq -4\frac{M(\sigma)}{L(\sigma)} \tag{23}$$

Pastebėsime, kad ribiniu atveju, kai $T_1 \to \infty$, $T_2 \to \infty$ ir $M(\sigma) \to 0$, šis rezultatas duoda, kad $\log L(\sigma)$ yra išgaubta žemyn funkcija. (23) Įvertis yra ekvivalentus tokiai nelygybei,

$$L'^2 \leq L(L'' + 4M).$$

Kad tai Įrodytume, pradėsime nuo lygybės

$$L'(\sigma) = 2\int_{T_1}^{T_2} \mathrm{Re}\left\{\overline{f(\sigma + it)} f'(\sigma + it)\right\} dt, \tag{24}$$

pagal Koši nelygybes gauname

$$L'(\sigma)^2 \leq \left\{\int_{T_1}^{T_2} |f(\sigma + it)|^2 dt\right\}\left\{4\int_{T_1}^{T_2} |f'(\sigma + it)|^2 dt\right\},$$

todėl mums reikia Įrodyti, kad

$$4\int_{T_1}^{T_2}|f'(\sigma+it)|^2\,dt \le L''(\sigma)+4M(\sigma). \tag{25}$$

Iš (24) mes turime

$$L''(\sigma)=2\int_{T_1}^{T_2}|f'(\sigma+it)|^2\,dt+2\int_{T_1}^{T_2}\operatorname{Re}\left\{\overline{f(\sigma+it)}f''(\sigma+it)\right\}dt$$

Pagal Koši - Rymano lygybes mes gauname

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{i}f'(\sigma+it)=f''(\sigma+it)$$

ir

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{f(\sigma+it)}=-\overline{if'(\sigma+it)},$$

todėl

$$\int_{T_1}^{T_2}\overline{f(\sigma+it)}f''(\sigma+it)\,dt=\left[\frac{1}{i}\overline{f(\sigma+it)}f'(\sigma+it)\right]_{T_1}^{T_2}+\int_{T_1}^{T_2}\overline{f'(\sigma+it)}f'(\sigma+it)\,dt.$$

Tuomet gauname

$$L''(\sigma)=4\int_{T_1}^{T_2}|f'(\sigma+it)|^2\,dt+2\operatorname{Re}\left[\frac{1}{i}\overline{f(\sigma+it)}f'(\sigma+it)\right]_{T_1}^{T_2}\ge 4\int_{T_1}^{T_2}|f'(\sigma+it)|^2\,dt+4M(\sigma),$$

todėl (25) Įrodyta.

Dabar pereisime prie pagrindinės lemos.

6 lema. *Tegul* $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{6}\right)$ *yra fiksuotas ir* $N=T^{1-4\varepsilon}$. *Tegul* $\theta=\frac{1}{2}+T^{-\varepsilon}$, *ir tarkime, kad* $J(\theta)\ge T$. *Tuomet*

$$\frac{J'(\theta)}{J(\theta)}\le-(2-12\varepsilon)\log T+O(1). \tag{26}$$

Pritaikysime 5 lemą su $f(s)=\varsigma(s)^k-S(s)$. Pradėsime nuo $M(\sigma)$ Įvertinimo dėl $\theta\le\sigma\le 1+\varepsilon$. Turime, kad

$$S(\sigma+it),\qquad S'(\sigma+it)<<T^{2\varepsilon}N^{1-\sigma},$$

Panašiai kaip ir (14) Įvertyje, pasinaudojant, kad pagal Lindeliofo hipotezę

$$\varsigma(\sigma+it)^k<<T^{\varepsilon}.$$

Koši formulė išvestinei duoda

$$\frac{d}{d\sigma}(\xi(\sigma+it))^k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\sigma-\frac{1}{2}}\frac{\xi(\sigma+it+z)^k}{z^2}\,dz<<\frac{T^{\varepsilon}}{\sigma-\frac{1}{2}}<<T^{2\varepsilon},$$

kai $\sigma \geq \theta$. Todėl

$$M(\sigma) << T^{4\varepsilon} N^{2-2\sigma}.$$

Dabar nagrinėsime du atvejus. Pirmiausia imsime, kad

$$J(\sigma) \geq T^{4\varepsilon} N^{2-2\sigma},$$

kai $\theta \leq \sigma \leq 1+\varepsilon$. Tuomet 5 lema duoda

$$\left(\frac{J'(\sigma)}{J(\sigma)}\right)' \geq O(1),$$

kai $\theta \leq \sigma \leq 1+\varepsilon$. Todėl gauname

$$\frac{J'(\phi)}{J(\phi)} - \frac{J'(\theta)}{J(\theta)} = \int_\theta^\phi \left(\frac{J'(\sigma)}{J(\sigma)}\right)' d\sigma \geq O(1),$$

kai $\theta \leq \phi \leq 1+\varepsilon$. Iš čia turime

$$(1+\varepsilon-\theta)\frac{J'(\theta)}{J(\theta)} \leq \int_\theta^{1+\varepsilon} \left\{\frac{J'(\phi)}{J(\phi)} + O(1)\right\} d\phi = \log\frac{J(1+\varepsilon)}{J(\theta)} + O(1). \tag{27}$$

Iš (10) turime, kad

$$(1+\varepsilon-\theta)\frac{J'(\theta)}{J(\theta)} = \log\frac{T^{4\varepsilon}}{J(\theta)} + O(1).$$

Tegul $J(\theta) \geq T$, mes gauname

$$(1+\varepsilon-\theta)\frac{J'(\theta)}{J(\theta)} = \log T^{4\varepsilon-1} + O(1),$$

todėl

$$\frac{J'(\theta)}{J(\theta)} \leq -\frac{1-4\varepsilon}{1+\varepsilon-\theta}\log T + O(1),$$

ir (26) nelygybė įrodoma, nes

$$\frac{1-4\varepsilon}{1+\varepsilon-\theta} \geq \frac{1-4\varepsilon}{\frac{1}{2}+\varepsilon} \geq 2-12\varepsilon.$$

Dabar nagrinėsime alternatyvią galimybę, kad

$$J(\sigma) \leq T^{4\varepsilon} N^{2-2\sigma} \tag{28}$$

kai $\sigma \in [\theta, 1+\varepsilon]$. Tai negali buti teisinga kai $\sigma = \theta$, nes

$$J(\theta) \geq T = T^{4\varepsilon} N > T^{4\varepsilon} N^{2-2\theta}$$

Pažymėkime ρ infimumą tokių σ, kuriems (28) yra teisinga, tuomet $\theta < \rho \leq 1+\varepsilon$. Tada gauname

$$J(\rho) = T^{4\varepsilon} N^{2-2\rho} \tag{29}$$

ir

$$J(\rho) \geq T^{4\varepsilon} N^{2-2\rho}, \quad \text{kai } (\theta \leq \sigma \leq \rho) \tag{30}$$

Dabar vėl integruosime pagal $[\theta, \ \rho]$. Panašiai kaip ir (27) mes gauname

$$(\rho - \theta)\frac{J'(\theta)}{J(\theta)} \leq \log \frac{J(\rho)}{J(\theta)} + O(\rho - \theta).$$

Pagal (29), ir atveju $\sigma = \theta$ iš (30) mes turime

$$\frac{J(\rho)}{J(\theta)} \leq N^{2\theta - 2\rho},$$

todėl

$$(\rho - \theta)\frac{J'(\theta)}{J(\theta)} \leq -2(\rho - \theta)\log N + O(\rho - \theta).$$

Kadangi $\rho > \theta$, tai (26) Įrodymas iš čia išplaukia.

1.3. PAGRINDINIO TVIRTINIMO ĮRODYMAS

Pradėsime nuo prielaidos, kad $J(\theta) \geq T$. Imame $N = T^{1-4\varepsilon}$, kaip ir 6 lemoje. Tuomet iš 1 ir 2 lemos gauname

$$\begin{aligned} J'(\theta) &= I'(\theta) - K'(\theta) + O(T) \\ &\geq -kI(\theta)\log T - K'(\theta) + O(I(\theta)) + O(T) \\ &\geq -kI(\theta)\log T - kK(\theta)\log T - K'(\theta) + O(J(\theta)) + O(K(\theta)) \\ &+ O(T). \end{aligned}$$

Derindami su 3 ir 6 lemomis, gauname

$$\begin{aligned} (2 - k - 12\varepsilon)J(\theta)\log T &\leq kK(\theta)\log T + K'(\theta) + O(J(\theta)) + O(K(\theta)) + O(T) \\ &= TF(\theta) + O(J(\theta)) + O(K(\theta)) + O(T), \end{aligned} \tag{31}$$

kur mes laikinai pasižymėjome

$$F(\sigma) = \sum_{n \leq N} d_k(n)^2 n^{-2\sigma} \log(T^k / n^2).$$

Tačiau mes turime

$$F(\sigma) << \sum_{n \leq N} d_k(n)^2 n^{-1} (\log n)(\log T) << N^{\varepsilon}, \text{ kai } \sigma \geq \frac{1}{2},$$

todėl pagal vidurinių reikšmių teoremą, gauname

$$F(\theta) - F\left(\frac{1}{2}\right) << \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\left|F'(\sigma)\right| << T^{-\varepsilon} N^{\varepsilon} << 1,$$

dėl tam tikros $\sigma \in \left(\frac{1}{2}, \theta\right)$. Taip pat mes turime

$$F\left(\frac{1}{2}\right) \sim c_k (\log N)^{k^2} \left(k \log T - \frac{2k^2}{k^2+1} \log N\right),$$

pagal 3 lemą, todėl (31)

$$(2-k-12\varepsilon)J(\theta)\log T \le c_k T(\log T)^{k^2+1}\left(k - \frac{2k^2(1-4\varepsilon)}{k^2+1}\right) + O(J(\theta)) + O(K(\theta)) + o(T(\log T)^{k^2+1}).$$

pavirsta Į Pagal 3 lemą antrasis liekamasis narys gali būti Įtrauktas Į trečiąjĮ. Galime pastebėti, kad šis Įvertis yra teisingas net kai $J(\theta) \le T$. Pertvarkę šią nelygybę mes gauname

$$J(\theta) \le \left\{ \frac{k^3 - 2k^2 + k + 8k^2\varepsilon}{(2-k-12\varepsilon)\left(k^2+1\right)} + o(1) \right\} c_k T(\log T)^{k^2} \tag{32}$$

Pagaliau iš vidurinių reikšmių teoremos kartu su 4 lema gauname, kad

$$J(\theta) - J\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\theta - \frac{1}{2}\right) J'(\sigma) \ge O(T^{-\varepsilon} T^{1+\varepsilon}) = O(T),$$

prie tam tikro $\sigma \in \left(\frac{1}{2}, \theta\right)$. Todėl gauname

$$J\left(\frac{1}{2}\right) \le J(\theta) + O(T).$$

Pagal 2 ir 3 lemas gauname

$$I\left(\frac{1}{2}\right) \le J\left(\frac{1}{2}\right) + K\left(\frac{1}{2}\right) + O(T)$$

$$\le J(\theta) + (c_k + o(1)0T(\log T)^{k^2}$$

$$\le \left\{ \frac{k^3 - 2k^2 + k + 8k^2\varepsilon}{(2-k-12\varepsilon)(k^2+1)} + 1 + o(1) \right\} c_k T(\log T)^{k^2},$$

pagal (32) . Kadangi tai galioja pagal fuksuotą $\varepsilon \in \left(1, \frac{1}{6}\right)$ tai mes galime imti ribą $\varepsilon \to 0$.

Tuomet koeficientas prie c_k artės prie

$$\frac{2}{(2-k)(k^2+1)},$$

todėl

$$\int_T^{2T} \left|\varsigma\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^{2k} dt \le \left\{ \frac{2}{(2-k)(k^2+1)} + o(1) \right\} c_k T(\log T)^{k^2}.$$

Teorema Įrodyta.

2. IŠREIKŠTINIŲ KONSTANTŲ ĮVERTINIMAS

Kompiuterinėje matematikos sitemoje Mathcad Įvertinsime reiškinĮ

$$c_k = \frac{1}{\Gamma(k^2+1)} \prod_p \left\{ \left(1-\frac{1}{p}\right)^{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{k(k+1)\ldots(k+m+1)}{m!} \right)^2 p^{-m} \right\},$$

kai k =1/2. Kadangi sistemoje nėra pirminių skaičių kintamojo parinkimo, tai sandaugą pagal pirminius skaičius sudarysime pakopiškai, rankiniu būdu sudarant atskiras reiškinio reikšmes prie konkretaus pirminio ir paskui tų reiškinių reikšmes sudauginsime. Detalūs skaičiavimai atlikti priede, čia pateiksiu tik galutinĮ rezultatą:

$$\prod_{p=2}^{68} p_i = 2{,}532$$

Vadinasi išreikštinės konstantos apytiksliai bus lygios: apatinė lygi 2,532 ir viršutinė $\frac{16}{15} \cdot 2{,}532 = 2{,}7008$.

IŠVADOS

1. Tegul $k \in (0;2)$ yra fiksuotas skaičius, tuomet remiantis Rymano hipoteze

$$\{c_k + o(1)\} T(\log T)^{k^2} \le I_k(T) \le \left\{ \frac{2}{(k^2+1)(2-k)} c_k + o(1) \right\} T(\log T)^{k^2},$$

kai $T \to \infty$.

Čia

$$c_k = \frac{1}{\Gamma(k^2+1)} \prod_p \left\{ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{k(k+1)\dots(k+m+1)}{m!} \right)^2 p^{-m} \right\}.$$

2. Kompiuterine matematikos sistema Matcad gaunu apytikslĮ išreikštinių konstantų Įvertinimą, kai k = 1/2: iš apačios 2,532,... ir iš viršaus $\approx \frac{16}{15} \cdot 2{,}532 = 2{,}7008$.

LITERATŪRA

1. Laurinčikas, A. *Rymano dzeta funkcijos teorijos pagrindai*: mokymo priemonė. Vilnius, 1992. p. 34 – 39.

2. Heath-Brown D.R., *Fractional moments of the Riemann zeta-function*, II, Quart. J. Math. Oxford, 44(2), 1993, p. 185-197.

3. Kačėnas, A., Laurinčikas, A., Zamarys, S., *On fractional moments of Dirichlet L-functions*, Liet. Mat. Rink., 45(2), 2005, 208-228.

IŠREIKŠTINĖS RYMANO DZETA FUNKCIJOS TRUPMENINIŲ MOMENTŲ ĮVERČIŲ KONSTANTOS

Summary

Let $s = \sigma + it$ be complex variable and let

$$\varsigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

denotes the Riemann zeta-function that is entire in whole complex plane except the simple pole at point $s = 1$ with the rezidium equal to 1.

The most important part in the theory of the Riemann zeta-function takes the considering of mean-values

$$I(\sigma) = \int_T^{2T} |\varsigma(\sigma + it)|^{2k} \, dt ,$$

called the moments of the Riemann zeta-function.

We consider above mentioned moments when $\sigma = \frac{1}{2}$, $k \geq 0$ and $T \to \infty$. We repeat the prove of theorem of D.R. Heas-Brown.

Theorem. *Let* $k \in (0;2)$ *be a fixed number. Then under Riemann hypothesis*

$$\{c_k + o(1)\} T (\log T)^{k^2} \leq I_k(T) \leq \left\{ \frac{2}{(k^2+1)(2-k)} c_k + o(1) \right\} T (\log T)^{k^2}$$

as $T \to \infty$. Here

$$c_k = \frac{1}{\Gamma(k^2+1)} \prod_p \left\{ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{k(k+1)\ldots(k+m+1)}{m!} \right)^2 p^{-m} \right\}.$$

We found approximate bounds of constants in this theorem for $k = ½$, by using of computer mathematic system Mathcad. These constants are equal: lower $\approx 2{,}532...$ and upper $\approx \frac{16}{15} \cdot 2{,}532... = 2{,}7008.$

$$p_1 := \left[\frac{1}{\Gamma\left(1,\frac{5}{4}\right)}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 2^\alpha}\right]\right] \quad p_2 := \left[\left(1-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 3^\alpha}\right]\right]$$

$$p_3 := \left[\left(1-\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 5^\alpha}\right]\right] \quad p_4 := \left[\left(1-\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 7^\alpha}\right]\right]$$

$$p_5 := \left[\left(1-\frac{1}{11}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 11^\alpha}\right]\right] \quad p_6 := \left[\left(1-\frac{1}{13}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 13^\alpha}\right]\right]$$

$$p_7 := \left[\left(1-\frac{1}{17}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 17^\alpha}\right]\right] \quad p_8 := \left[\left(1-\frac{1}{19}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 19^\alpha}\right]\right]$$

$$p_9 := \left[\left(1-\frac{1}{23}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 23^\alpha}\right]\right] \quad p_{10} := \left[\left(1-\frac{1}{29}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 29^\alpha}\right]\right]$$

$$p_{11} := \left[\left(1-\frac{1}{31}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 31^\alpha}\right]\right] \quad p_{12} := \left[\left(1-\frac{1}{37}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 37^\alpha}\right]\right]$$

$$p_{13} := \left[\left(1-\frac{1}{41}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 41^\alpha}\right]\right] \quad p_{14} := \left[\left(1-\frac{1}{43}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 43^\alpha}\right]\right]$$

$$p_{15} := \left[\left(1-\frac{1}{47}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 47^\alpha}\right]\right] \quad p_{16} := \left[\left(1-\frac{1}{53}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 53^\alpha}\right]\right]$$

$$p_{17} := \left[\left(1-\frac{1}{53}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 53^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{18} := \left[\left(1-\frac{1}{59}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 59^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{19} := \left[\left(1-\frac{1}{61}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 61^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{20} := \left[\left(1-\frac{1}{67}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 67^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{21} := \left[\left(1-\frac{1}{71}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 71^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{22} := \left[\left(1-\frac{1}{73}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 73^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{23} := \left[\left(1-\frac{1}{79}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 79^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{24} := \left[\left(1-\frac{1}{83}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 83^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{25} := \left[\left(1-\frac{1}{89}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 89^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{26} := \left[\left(1-\frac{1}{97}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 97^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{27} := \left[\left(1-\frac{1}{101}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 101^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{28} := \left[\left(1-\frac{1}{103}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 103^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{29} := \left[\left(1-\frac{1}{107}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 107^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{30} := \left[\left(1-\frac{1}{109}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 109^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{31} := \left[\left(1-\frac{1}{111}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 111^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{32} := \left[\left(1-\frac{1}{113}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2\cdot(\alpha!)^2\cdot 113^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{33} := \left[\left(1-\frac{1}{115}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2}}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(\alpha!)^{2}\cdot 115^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{34} := \left[\left(1-\frac{1}{117}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2}}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(\alpha!)^{2}\cdot 117^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{35} := \left[\left(1-\frac{1}{119}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2}}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(\alpha!)^{2}\cdot 119^{\alpha}}\right]\right]\right]$$

$$p_{36} := \left[\left(1-\frac{1}{121}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2}}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(\alpha!)^{2}\cdot 121^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{37} := \left[\left(1-\frac{1}{123}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2}}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(\alpha!)^{2}\cdot 123^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{38} := \left[\left(1-\frac{1}{127}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2}}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(\alpha!)^{2}\cdot 127^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{39} := \left[\left(1-\frac{1}{131}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2}}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(\alpha!)^{2}\cdot 131^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{40} := \left[\left(1-\frac{1}{133}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2}}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(\alpha!)^{2}\cdot 133^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{41} := \left[\left(1-\frac{1}{139}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2}}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(\alpha!)^{2}\cdot 139^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{42} := \left[\left(1-\frac{1}{143}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2}}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(\alpha!)^{2}\cdot 143^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{43} := \left[\left(1-\frac{1}{149}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2}}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(\alpha!)^{2}\cdot 149^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{44} := \left[\left(1-\frac{1}{151}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2}}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(\alpha!)^{2}\cdot 151^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{45} := \left[\left(1-\frac{1}{157}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2}}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(\alpha!)^{2}\cdot 157^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{46} := \left[\left(1-\frac{1}{161}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2}}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(\alpha!)^{2}\cdot 161^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{47} := \left[\left(1-\frac{1}{163}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2}}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(\alpha!)^{2}\cdot 163^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{48} := \left[\left(1-\frac{1}{167}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2}}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(\alpha!)^{2}\cdot 167^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{49} := \left[\left(1-\frac{1}{173}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2}}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(\alpha!)^{2}\cdot 173^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{50} := \left[\left(1-\frac{1}{179}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sum_{\alpha=0}^{1000}\left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2}}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(\alpha!)^{2}\cdot 179^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{51} := \left[\left(1-\frac{1}{181}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{1000} \left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\alpha!)^2 \cdot 181^{\alpha}}\right]\right] \quad p_{52} := \left[\left(1-\frac{1}{183}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{1000} \left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\alpha!)^2 \cdot 183^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{53} := \left[\left(1-\frac{1}{187}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{1000} \left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\alpha!)^2 \cdot 187^{\alpha}}\right]\right] \quad p_{54} := \left[\left(1-\frac{1}{191}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{1000} \left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\alpha!)^2 \cdot 191^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{55} := \left[\left(1-\frac{1}{193}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{1000} \left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\alpha!)^2 \cdot 193^{\alpha}}\right]\right] \quad p_{56} := \left[\left(1-\frac{1}{197}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{1000} \left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\alpha!)^2 \cdot 197^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{57} := \left[\left(1-\frac{1}{203}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{1000} \left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\alpha!)^2 \cdot 203^{\alpha}}\right]\right] \quad p_{58} := \left[\left(1-\frac{1}{209}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{1000} \left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\alpha!)^2 \cdot 209^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{59} := \left[\left(1-\frac{1}{211}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{1000} \left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\alpha!)^2 \cdot 211^{\alpha}}\right]\right] \quad p_{60} := \left[\left(1-\frac{1}{217}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{1000} \left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\alpha!)^2 \cdot 217^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{61} := \left[\left(1-\frac{1}{221}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{1000} \left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\alpha!)^2 \cdot 221^{\alpha}}\right]\right] \quad p_{62} := \left[\left(1-\frac{1}{223}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{1000} \left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\alpha!)^2 \cdot 223^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{63} := \left[\left(1-\frac{1}{227}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{1000} \left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\alpha!)^2 \cdot 227^{\alpha}}\right]\right] \quad p_{64} := \left[\left(1-\frac{1}{229}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{1000} \left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\alpha!)^2 \cdot 229^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{65} := \left[\left(1-\frac{1}{233}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{1000} \left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\alpha!)^2 \cdot 233^{\alpha}}\right]\right] \quad p_{66} := \left[\left(1-\frac{1}{239}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{1000} \left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\alpha!)^2 \cdot 239^{\alpha}}\right]\right]$$

$$p_{67} := \left[\left(1-\frac{1}{241}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{1000} \left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\alpha!)^2 \cdot 241^{\alpha}}\right]\right] \quad p_{68} := \left[\left(1-\frac{1}{247}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{1000} \left[\frac{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}{\Gamma\left(1,\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\alpha!)^2 \cdot 247^{\alpha}}\right]\right]$$