ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Ingrida Vaičiulytė

Vienos išsigimstančios dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos sprendinių struktūra

Magistro darbas

Darbo vadovas
doc. dr. Donatas Jurgaitis

Šiauliai, 2009

TURINYS

ĮVADAS 3

1. UŽDAVINIO FORMULAVIMAS 5

2. DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ DALINĖMIS IŠVESTINĖMIS SISTEMOS SUVEDIMAS Į MATRICINĘ DALINIŲ IŠVESTINIŲ DIFERENCIALINĘ LYGTĮ 6

3. BENDRASIS SISTEMOS SPRENDIMO ATVEJIS 8

4. FORMALIŲJŲ LAIPSNINIŲ EILUČIŲ KONVERGAVIMO TYRIMAS 16

SANTRAUKA 23

SUMMARY 23

LITERATŪRA 24

ĮVADAS

Gamtos mokslų ir technikos uždaviniuose nagrinėjamų vyksmų tyrimas dažnai tiesiogiai neatskleidžia jų kitimo dėsnio. Tokiais atvejais svarbu sudaryti matematinį modelį, kuris būtų išreiškiamas tiriamojo vyksmo funkcijų ir jų išvestinių lygtimis.

Diferencialine lygtimi vadiname lygybę, siejančią nepriklausomus kintamuosius, nežinomą funkciją ir jos išvestines. Jei diferencialinėje lygtyje yra tik vienas nepriklausomas kintamasis, ją vadiname paprastąja diferencialine lygtimi, priešingu atveju – diferencialine dalinių išvestinių lygtimi. Išsprendę tiriamojo vyksmo matematinį modelį – diferencialinę lygtį ir atsižvelgę į pradinius duomenis, randame to vyksmo kitimo dėsnį [1].

Dažnai diferencialinėmis lygtimis ir jų sistemomis aprašomi įvairūs fizikiniai, cheminiai, ekonominiai, socialiniai ir kitokie reiškiniai. Plėtojantis įvairioms mokslų teorijoms, diferencialinių lygčių taikymo sritis labai išsiplėtė. Pastaruoju metu jos taikomos labai įvairiose mokslo srityse ir stipriai paspartino technologijų raidą ir prisidėjo prie progreso. Plėtojamos ir pačių diferencialinių lygčių teorijos įvairios šakos, tokios kaip kokybinė ir analizinė diferencialinių lygčių teorija, diferencialinių lygčių stabilumo teorija, stochastinės diferencialinės lygtys ir kt. Labai sparčiai šiuo metu vystosi diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis teorija, pastoviai platėja šios teorijos taikymų ribos.

Diferencialinių lygčių sprendimą apsunkina jų išsigimimas. Skiriami mažiausiai du išsigimimo variantai: diferencialinės lygties eilės išsigimimas ir diferencialinės lygties tipo išsigimimas. „Diferencialinės lygties išsigimimas reiškia, kad tam tikrų taškų aplinkose mažėja diferencialinės lygties eilė“ (tarkime, iš pirmos eilės diferencialinės lygties gauname algebrinę lygtį arba antros eilės diferencialinė lygtis virsta pirmos eilės diferencialine lygtimi, antruoju atveju, tam tikroje srityje diferencialinė lygtis yra elipsinė diferencialinė lygtis, o kitoje srityje, pavyzdžiui, parabolinė) [2].

Neišsigimstančių diferencialinių lygčių, kurių koeficientai yra analizinės funkcijos, sprendiniai yra analizinės funkcijos.

Daugelis diferencialinėmis lygtimis modeliuojamų uždavinių yra tiek sudėtingi, kad jų neįmanoma išspręsti analiziškai, t.y. pateikti tiriamojo vyksmo dėsnį matematinės formulės pavidalu. Dėl to iškyla būtinybė žinoti subtilias nagrinėjamų diferencialinių lygčių sprendinių savybes, atspindinčias uždavinio esminius ypatumus. Kitaip tariant, atsiranda kokybinės diferencialinių lygčių teorijos reikmė. Joje svarbią vietą užima paprastųjų diferencialinių lygčių ar jų sistemų sprendinių stabilumas, taip pat sprendinių struktūros ar jų asimptotikos lygties ypatingųjų taškų aplinkoje klausimai. Šie klausimai aktualūs tiek fundamentiniuose, tiek ir taikomojo pobūdžio tyrimuose [3].

Diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai – viena svarbiausių šiuolaikinių skaitinių metodų teorijos dalių. Matricų teorija, kaip ir funkcinė analizė, vaidina labai svarbų vaidmenį teoriškai pagrindžiant daugelį diferencialinių lygčių skaitinių sprendimo metodų. Matricų teorijos taikymai diferencialinių lygčių teorijoje leidžia kompaktiškai, vaizdžiai užrašyti sprendimo kelią ir rezultatus.

Magistro darbe nagrinėsime tiesinę keturių pirmos eilės diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistemą. Spręsdami ją naudosimės matricų teorijos metodais [4,5], apibendrintu laipsninių eilučių metodu, konstantų varijavimo metodu ir mažorantų metodu, išdėstytu monografijoje А.И.Янушаускас „Аналитическая теория эллиптических уравнений“. Darbe turime sukonstruoti diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistemos formalius sprendinius taško (0,0,0) aplinkoje. Nagrinėjamos dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos sprendinius išreikšime apibendrintomis laipsninėmis eilutėmis. Įrodysime, kad į sistemos sprendinių išraiškas įeinančios laipsninės eilutės konverguoja. Spręsdami šią sistemą supaprastinsime užrašymus bei siekdami rezultatus pateikti trumpai ir aiškiai naudosime matricų teoriją. Tirdami dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą ją užrašysime matricine dalinių išvestinių diferencialine lygtimi. Ieškosime nagrinėjamos dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos analizinių visur išskyrus gal būt išsigimimo taškus sprendinių ir tirsime jų elgseną išsigimimo taškų aplinkoje.

1. UŽDAVINIO FORMULAVIMAS

Darbe nagrinėjame tokią keturių tiesinių pirmos eilės diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistemą:

$$\begin{cases} x\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+\dfrac{\partial u_4}{\partial y}-\dfrac{\partial u_3}{\partial z}\right)+\sum\limits_{j=1}^{4} a_{1j}(x,y,z)u_j = 0, \\ x\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+\dfrac{\partial u_3}{\partial y}+\alpha\dfrac{\partial u_4}{\partial z}\right)+\sum\limits_{j=1}^{4} a_{2j}(x,y,z)u_j = 0, \\ x\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x}-\dfrac{\partial u_2}{\partial y}+\alpha\dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right)+\sum\limits_{j=1}^{4} a_{3j}(x,y,z)u_j = 0, \\ x\left(-\dfrac{\partial u_4}{\partial x}+\dfrac{\partial u_1}{\partial y}+\dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right)+\sum\limits_{j=1}^{4} a_{4j}(x,y,z)u_j = 0. \end{cases} \tag{1}$$

čia x, y, z – nepriklausomi apskritai kompleksiniai kintamieji; α - konstanta, $u_1(x,y,z), u_2(x,y,z), u_3(x,y,z), u_4(x,y,z)$- ieškomosios funkcijos.

Sistemos koeficientams galioja dėstiniai konverguojančiomis nulinio taško aplinkoje laipsninėmis eilutėmis

$$a_{ij}(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)}(y,z)x^k,$$

$$a_{ij}(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)}(x,z)y^k,$$

$$a_{ij}(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)}(x,y)z^k,$$

$$i=1,2,3,4\ ,\ j=1,2,3,4.$$

Visi šie koeficientai yra žinomos apskritai kompleksinės funkcijos. Jeigu nepriklausomi kintamieji realūs ir sistemos koeficientai įgyja realias reikšmes, tai (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema yra elipsinė.

Ieškosime (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos sprendinių analizinių visur, išskyrus gal būt patį tašką (0,0,0). (1) sistemą nagrinėsime policilindre

$$P:\ |x|< r_1,\ |y|< r_2,\ |z|< r_3.$$

(1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą spręsime apibendrintų laipsninių eilučių metodu, t.y. ieškosime jos sprendinių laipsninėmis nepriklausomų kintamųjų x, y arba z laipsnių eilutėmis. Į sprendinius įeinančių laipsninių eilučių konvergavimą tirsime mažorantų metodu.

2. DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ DALINĖMIS IŠVESTINĖMIS SISTEMOS SUVEDIMAS Į MATRICINĘ DALINIŲ IŠVESTINIŲ DIFERENCIALINĘ LYGTĮ

Tam, kad užrašai būtų trumpesni, aiškesni, (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą užrašysime matriciniu pavidalu.

Tuo tikslu naudokime tokius žymenis:

$$u(x,y,z) = \begin{pmatrix} u_1(x,y,z) \\ u_2(x,y,z) \\ u_3(x,y,z) \\ u_4(x,y,z) \end{pmatrix}$$

nežinomasis (ieškomasis) vektorius stulpelis;

$$A(x,y,z) = \{a_{ij}(x,y,z)\}, i = 1,2,3,4, j = 1,2,3,4$$

ketvirtos eilės kvadratinė matrica, sudaryta iš žinomų funkcijų, kurios yra analizinės visų trijų nepriklausomų kintamųjų atžvilgiu funkcijos;

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrica, sudaryta iš koeficientų, esančių prie ieškomųjų funkcijų dalinių išvestinių pagal nepriklausomąjį kintamąjį *x*;

$$I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrica, sudaryta iš koeficientų, esančių prie ieškomųjų funkcijų dalinių išvestinių pagal nepriklausomąjį kintamąjį *y*;

$$I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrica, sudaryta iš koeficientų, esančių prie ieškomųjų funkcijų dalinių išvestinių pagal nepriklausomąjį kintamąjį *z*, o

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nulinis vektorius stulpelis.

Pasinaudoję aukščiau išvardintais žymenimis (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą galime užrašyti tokia forma:

$$x \cdot \left(I_1 \frac{\partial u}{\partial x} + I_2 \frac{\partial u}{\partial y} + I_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) + A(x, y, z)u(x, y, z) = O. \qquad (2)$$

(2) yra matricinė dalinių išvestinių diferencialinė lygtis. Akivaizdu, jog į (2) įrašę žymenis bei atlikę veiksmus su matricomis gausime (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos užrašymą.

Toliau darbe nagrinėsime (2) matricinę dalinių išvestinių diferencialinę lygtį, o gautuosius rezultatus formuluosime (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemai.

3. BENDRASIS SISTEMOS SPRENDIMO ATVEJIS

(2) matricinę dalinių išvestinių diferencialinę lygtį spręsime apibendrintu laipsninių eilučių metodu, t.y. ieškomąją funkciją *u(x,y,z)* dėstysime nepriklausomųjų kintamųjų *x*, *y* arba *z* apibendrintomis laipsninėmis eilutėmis. (2) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties eilė taškuose $x = 0$ išsigimsta, šiuose taškuose (2) pirmos eilės dalinių išvestinių diferencialinė lygtis tampa algebrine lygtimi

$$A(x,y,z) \cdot u(x,y,z) = 0.$$

Ieškosime tokių (2) pirmos eilės matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties sprendinių, kurie būtų analiziniai visur, išskyrus galbūt diferencialinės lygties eilės išsigimimo taškus.

Pareikalaukime, kad (2) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties koeficientų matricos *A(x,y,z)* elementams galiotų dėstinys konverguojančia *x*-ų laipsnių eilute

$$A(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k A_k(y,z). \tag{3}$$

Įrodysime teoremą.

1. TEOREMA. Jeigu (2) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties koeficientams galioja (3) dėstinys, tai ši matricinė dalinių išvestinių diferencialinė lygtis turi vieną sprendinių šeimą, kuri išreiškiama tokia laipsnine eilute:

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k u_k(y,z)$$

ir kiekvienas šeimos atstovas priklauso nuo vienos laisvai parinktos analizinės kintamųjų *y* ir *z* funkcijos.

Įrodymas. (2) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties sprendinių ieškosime apibendrinta laipsnine *x* laipsnių eilute:

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)} u_k(y,z,lnx), \tag{4}$$

čia *x*, *y*, *z* – nepriklausomi apskritai kompleksiniai kintamieji, *ρ(y,z)* – nežinoma funkcija, priklausanti tik nuo kintamųjų *y* ir *z*, *lnx* – laikysime nauju nepriklausomu kintamuoju.

Diferencijuojame šią eilutę pagal nepriklausomus kintamuosius *x*, *y*, *z* ir gauname, kad

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x^{k+\rho(y,z)-1} \big(k + \rho(y,z)\big) u_k(y,z,lnx) + x^{k+\rho(y,z)} \frac{\partial u_k(y,z,lnx)}{\partial lnx} \cdot \frac{1}{x} \right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(x^{k+\rho(y,z)}lnx\frac{\partial\rho(y,z)}{\partial y}u_k(y,z,lnx)+x^{k+\rho(y,z)}\frac{\partial u_k(y,z,lnx)}{\partial y}\right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(x^{k+\rho(y,z)}lnx\frac{\partial\rho(y,z)}{\partial z}u_k(y,z,lnx)+x^{k+\rho(y,z)}\frac{\partial u_k(y,z,lnx)}{\partial z}\right). \tag{7}$$

(3),(4),(5),(6),(7) įrašome į (2) ir gauname

$$x\left(I_1\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho-1}(k+\rho)u_k+I_1\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho-1}\frac{\partial u_k}{\partial lnx}\right.$$

$$+I_2\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}lnx\frac{\partial\rho}{\partial y}u_k+I_2\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}lnx\frac{\partial\rho}{\partial y}u_k$$

$$\left.+I_3\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}lnx\frac{\partial\rho}{\partial z}u_k+I_3\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}\frac{\partial u_k}{\partial z}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}x^kA_k(y,z)\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}u_k=O.$$

Pertvarkome gautą reiškinį ir jį užrašome taip

$$\sum_{k=0}^{\infty}I_1x^{k+\rho}(k+\rho)u_k+I_1x^{k+\rho}\frac{\partial u_k}{\partial lnx}+x^{k+\rho+1}lnx\cdot u_k\left(I_2\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_3\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)+x^{k+\rho+1}\times$$

$$\times\left(I_2\frac{\partial u_k}{\partial y}+I_3\frac{\partial u_k}{\partial z}\right)+\sum_{l=0}^{k}A_lu_{k-l}x^{k+\rho}=O. \tag{8}$$

Norėdami surasti (4) laipsninės eilutės koeficientus, turime (8) lygybėje prilyginti nuliui koeficientus prie vienodų x-o laipsnių. Mažiausias x-o laipsnis šioje lygybėje, kai $k=0$, yra ρ. Koeficientą prie x^{ρ} prilyginę nuliui gauname:

$$I_1\rho(y,z)u_0(y,z,lnx)+I_1\frac{\partial u_0(y,z,lnx)}{\partial lnx}+A_0(y,z)u_0(y,z,lnx)=O. \tag{9}$$

Pareikalaukime, kad u_0 nepriklausytų nuo kintamojo lnx, t.y. $u_0(y,z)$. Tuomet iš (9) gauname, kad

$$\big(I_1\rho(y,z)+A_0(y,z)\big)u_0(y,z)=O. \tag{10}$$

Gavome tiesinių homogeninių algebrinių lygčių sistemą, kurioje $u_0(y,z)$ yra nežinomas keturmatis vektorius stulpelis. Iš tiesinės algebros kurso žinome, kad tiesinių homogeninių lygčių sistema turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai sistemos matricos determinantas lygus nuliui, ir turi tik nulinį sprendinį, kai matricos determinantas yra nelygus nuliui [5]. Taigi, kad gautume (10) nenulinį sprendinį, turi būti

$$det\big(I_1\rho(y,z)+A_0(y,z)\big)=0. \tag{11}$$

Tuomet $u_0(y,z)$ yra bet koks ir iš (11) lygybės randame $\rho(y,z)$.

Imdami $k=1$, prilyginę nuliui koeficientą prie $x^{\rho+1}$ turime

$$I_1(\rho+1)u_1+I_1\frac{\partial u_1}{\partial lnx}+lnx\cdot u_0\left(I_2\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_3\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)+I_2\frac{\partial u_0}{\partial y}+I_3\frac{\partial u_0}{\partial z}+A_0u_1+A_1u_0=O.$$

Imdami $k = 2$ ir prilyginę nuliui koeficientą prie $x^{\rho+2}$ gauname, kad

$$I_1(\rho+2)u_2 + I_1\frac{\partial u_2}{\partial lnx} + lnx \cdot u_1\left(I_2\frac{\partial \rho}{\partial y} + I_3\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + I_2\frac{\partial u_1}{\partial y} + I_3\frac{\partial u_1}{\partial z} + A_0u_2 + A_1u_1 +$$

$$+A_2u_0 = O.$$

Iš šių matricinių lygčių gauname rekurentines formules laipsninės eilutės koeficientams u_1 ir u_2 skaičiuoti.

Prilyginę nuliui koeficientus prie $x^{\rho+k}$ gauname rekurentinę formulę koeficientams u_k, $k=1,2,3,...$ rasti ir ją užrašome vienu iš būdų

$$I_1(\rho+k)u_k + I_1\frac{\partial u_k}{\partial lnx} + lnx \cdot u_{k-1}\left(I_2\frac{\partial \rho}{\partial y} + I_3\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_3\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k} A_{k-l}u_l =$$

$$= O;$$

$$(I_1(\rho+k) + A_0)u_k + I_1\frac{\partial u_k}{\partial lnx} =$$

$$= -\left[lnx \cdot u_{k-1}\left(I_2\frac{\partial \rho}{\partial y} + I_3\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_3\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l}u_l\right]. \quad (12)$$

Pastarosios matricinės rekurentinės lygybės naujojo nepriklausomo kintamojo lnx atžvilgiu yra pirmos eilės diferencialinės lygtys. Tam, kad rekurentinę laipsninės eilutės koeficientų radimo lygtį užrašyti patogesne tolimesniems tyrimams forma, pastarąją rekurentinę diferencialinę lygtį spręsime nepriklausomo kintamojo lnx atžvilgiu konstantos varijavimo metodu. Pirmiausia spręsime atitinkamą homogeninę diferencialinę lygtį, t.y. prilyginame nuliui kairiąją (12) lygybės pusę ir gauname

$$(I_1(\rho+k) + A_0)u_k + I_1\frac{\partial u_k}{\partial lnx} = 0. \quad (13)$$

Taikydami kintamųjų atskyrimo metodą, gauname

$$\frac{du_k}{u_k} = -(I_1)^{-1}(I_1(\rho+k) + A_0)dlnx. \quad (14)$$

Suintegravę abi diferencialinės lygties puses, gauname

$$lnu_k = -(I_1)^{-1}[(I_1(\rho+k) + A_0)lnx + C]. \quad (15)$$

Iš (15) išreiškiame u_k ir turime

$$u_k = e^{-(I_1)^{-1}(I_1(\rho+k)+A_0)lnx} \cdot C \quad (16)$$

čia C – integravimo konstanta.

Trumpumo dėlei pažymėkime

$$a = (I_1)^{-1}(I_1(\rho+k) + A_0).$$

Varijuosime konstantą, tarkime, kad C yra ne konstanta, o nepriklausomo kintamojo *lnx* funkcija $C=C(lnx)$. Diferencijuojame (16) lygybę pagal kintamąjį *lnx*

$$u'_k = -a \cdot e^{-alnx} \cdot C + e^{-alnx} \cdot C'. \quad (17)$$

Gautąją išvestinės išraišką įrašome į (12) diferencialinę lygtį ir gauname

$$(I_1(\rho + k) + A_0) \cdot e^{-alnx} \cdot C - I_1(I_1)^{-1}(I_1(\rho + k) + A_0) \cdot e^{-alnx} \cdot C + I_1 e^{-alnx} \cdot C' =$$

$$= -\left[lnx \cdot u_{k-1}\left(I_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_3 \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + I_2 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_3 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l} u_l\right]. \quad (18)$$

Sutraukę panašiuosius narius (18) lygybėje, gauname

$$I_1 e^{-alnx} \cdot C' =$$

$$= -\left[lnx \cdot u_{k-1}\left(I_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_3 \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + I_2 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_3 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l} u_l\right]. \quad (19)$$

Ieškomosios varijuotos konstantos atžvilgiu gavome pirmos eilės diferencialinę lygtį. Sprendžiame ją kintamųjų atskyrimo metodu ir turime

$$dC = -(I_1)^{-1} e^{alnx} \cdot$$

$$\cdot \left[lnx \cdot u_{k-1}\left(I_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_3 \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + I_2 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_3 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l} u_l\right] dlnx. \quad (20)$$

Suintegravę abi lygties puses, gauname

$$C = -\int (I_1)^{-1} e^{alnx} \cdot$$

$$\cdot \left[lnx \cdot u_{k-1}\left(I_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_3 \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + I_2 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_3 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l} u_l\right] dlnx + C_1. \quad (21)$$

Parenkame integravimo konstantą $C_1=0$ ir įrašę (21) į (16), gauname

$$u_k = -e^{-alnx} \cdot \int (I_1)^{-1} e^{alnx} \cdot$$

$$\cdot \left[lnx \cdot u_{k-1}\left(I_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_3 \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + I_2 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_3 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l} u_l\right] dlnx. \quad (22)$$

Matrica I_1 turi atvirkštinę matricą, nes kaip ištirta bakalauro darbe [6], jos determinantas nelygus nuliui, t.y. ji yra neišsigimusi matrica.

Iš gautos (22) lygybės galime vienareikšmiškai nustatyti visus (4) laipsninės eilutės koeficientus u_k, $k=1,2,3,...$ pagal laisvai pasirinktą $u_0(y,z)$, kuris yra analizinė nepriklausomų kintamųjų y ir z funkcija.

Teorema įrodyta.

Dabar ieškosime (2) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties sprendinių nepriklausomo kintamojo y laipsnių eilute.

Tam pareikalaukime, kad (2) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties koeficientų matricos $A(x,y,z)$ elementams galiotų dėstinys konverguojančia y-ų laipsnių eilute

$$A(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k A_k(x,z). \tag{23}$$

2. TEOREMA. Jeigu (2) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties koeficientams galioja (23) dėstinys, tai ši matricinė diferencialinė lygtis turi vieną sprendinių šeimą. Ši sprendinių šeima išreiškiama tokia laipsnine eilute:

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k u_k(x,z)$$

ir kiekvienas šios šeimos sprendinys priklauso nuo vienos laisvai parinktos analizinės kintamųjų *x* ir *z* funkcijos.

Įrodymas. Sprendinių ieškosime apibendrinta laipsnine *y* laipsnių eilute:

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} y^{k+\rho} u_k(x,z). \tag{24}$$

Analogiškai kaip darėme anksčiau, diferencijuojame (24) pagal nepriklausomus kintamuosius *x*, *y*, *z* ir gauname tokias lygybes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k=0}^{\infty} y^{k+\rho} \frac{\partial u_k(x,z)}{\partial x}; \tag{25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{k=0}^{\infty} y^{k+\rho-1} (k+\rho) u_k(x,z); \tag{26}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sum_{k=0}^{\infty} y^{k+\rho} \frac{\partial u_k(x,z)}{\partial z}. \tag{27}$$

Įrašę (23),(24),(25),(26),(27) į (2) matricinę diferencialinę lygtį ir sutvarkę reiškinį turime, kad

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Bigg[I_2 y^{k+\rho-1}(k+\rho)u_k(x,z) + x \cdot y^{k+\rho}\left(I_1 \frac{\partial u_k(x,z)}{\partial x} + I_3 \frac{\partial u_k(x,z)}{\partial z}\right)$$
$$+ \sum_{l=0}^{k} A_l u_{k-l}(x,z) y^{k+\rho} \Bigg] = 0. \tag{28}$$

(28) lygybėje lyginame nuliui koeficientus prie vienodų *y* laipsnių.

Kai $k=0$, koeficientą prie nario $y^{\rho-1}$ prilyginę nuliui turime

$$I_2 \rho u_0(x,z) = 0. \tag{29}$$

Iš čia gauname du atvejus:

1) kai $\rho = 0$, tai $u_0(x,z)$ – bet koks;
2) kai $\rho \neq 0$, tai $u_0(x,z) \equiv 0$.

Imdami $k = 1$ ir prilyginę nuliui koeficientą prie y^ρ turime

$$I_2(\rho+1)u_1(x,z) + x\left(I_1\frac{\partial u_0(x,z)}{\partial x} + I_3\frac{\partial u_0(x,z)}{\partial z}\right) + A_0u_0(x,z) = O. \tag{30}$$

Iš (30) išreiškę u_1 gauname tokią jo radimo per u_0 lygtį:

$$u_1(x,z) = -\frac{1}{\rho+1}(I_2)^{-1}\left[x\left(I_1\frac{\partial u_0(x,z)}{\partial x} + I_3\frac{\partial u_0(x,z)}{\partial z}\right) + A_0u_0(x,z)\right] \tag{31}$$

Iš čia vėl gauname du atvejus. Pirmuoju $u_1(x,z)$ vienareikšmiškai išreiškiamas per $u_0(x,z)$, antruoju – $u_1(x,z) \equiv 0$.

Lygindami nuliui koeficientą prie $y^{\rho+1}$ gauname, kad

$$I_2(\rho+2)u_2(x,z) + x\left(I_1\frac{\partial u_1(x,z)}{\partial x} + I_3\frac{\partial u_1(x,z)}{\partial z}\right) + A_0u_1(x,z) + A_1u_0(x,z) = O. \tag{32}$$

Iš (32) išreiškę u_2 gauname tokią išraišką:

$$u_2(x,z) = -\frac{1}{\rho+2}(I_2)^{-1}\left[x\left(I_1\frac{\partial u_1(x,z)}{\partial x} + I_3\frac{\partial u_1(x,z)}{\partial z}\right) + A_0u_1(x,z) + A_1u_0(x,z)\right]. \tag{33}$$

Taip tęsdami toliau gauname rekurentinę formulę koeficientams u_k, $k=1,2,3,...$ prie bet kokio laipsnio rasti:

$$I_2(\rho+k)u_k(x,z) + x\left(I_1\frac{\partial u_{k-1}(x,z)}{\partial x} + I_3\frac{\partial u_{k-1}(x,z)}{\partial z}\right) + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l}u_l(x,z) = O. \tag{34}$$

Kadangi mus domina tik nenuliniai nagrinėjamos matricinės diferencialinės lygties sprendiniai, imame pirmąjį atvejį ir pasirenkame $\rho = 0$:

$$u_k(x,z) = -\frac{1}{k}(I_2)^{-1}\left[x\left(I_1\frac{\partial u_{k-1}(x,z)}{\partial x} + I_3\frac{\partial u_{k-1}(x,z)}{\partial z}\right) + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l}u_l(x,z)\right]. \tag{35}$$

Matrica I_2 taip pat turi atvirkštinę matricą, nes jos determinantas, kaip ištirta bakalauro darbe [6], nelygus nuliui.

Iš šios formulės visi (24) laipsninės eilutės koeficientai vienareikšmiškai nustatomi pagal laisvai pasirinktą $u_0(x,z)$, kuris gali būti parinktas taip, kad jis būtų bet kuri analizinė kintamųjų x ir z funkcija.

Teorema įrodyta.

Nagrinėsime trečiąjį atvejį.

Pareikalaukime, kad (2) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties koeficientų matricos $A(x,y,z)$ elementams galiotų dėstinys konverguojančia z-ų laipsnių eilute

$$A(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k A_k(x,y). \tag{36}$$

Teisinga teorema.

3. TEOREMA. Jeigu (2) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties koeficientams galioja (36) dėstinys, tai ši matricinė dalinių išvestinių diferencialinė lygtis turi vieną sprendinių šeimą

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k u_k(x,y)$$

ir kiekvienas šeimos sprendinys priklauso nuo vienos laisvai parinktos analizinės kintamųjų *x* ir *y* funkcijos.

Įrodymas. Šiuo atveju (2) matricinės diferencialinės lygties sprendinių ieškokime apibendrinta laipsnine *z* laipsnių eilute:

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^{k+\rho} u_k(x,y). \qquad (37)$$

Pasirėmę bakalauro darbe [6] gautais rezultatais, gauname tokį rezultatą:

1) $\rho=0$, $u_0(x,y)$-bet koks.

2) $\alpha = 0$, $\rho\neq 0$, $u_{02}(x,y)=u_{03}(x, y)=0$, o $u_{01}(x, y)$, $u_{04}(x, y)$ – bet kokie;

3) $\alpha \neq 0$, $\rho\neq 0$, $u_0(x,y)\equiv 0$;

ir tokią rekurentinę formulę (37) laipsninės eilutės koeficientams u_k, $k=1,2,3,...$ rasti

$$u_k(x,y)=-\frac{1}{k+\rho}(I_3)^{-1}\left[x\left(I_1\frac{\partial u_{k-1}(x,y)}{\partial x}+I_2\frac{\partial u_{k-1}(x,y)}{\partial y}\right)+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l(x,y)\right]. \qquad (38)$$

Ši formulė galioja kai $\alpha \neq 0$, nes priešingu atveju matrica I_3 yra išsigimusi ir negalima rasti jos atvirkštinės matricos. Kadangi mus domina tik nenuliniai nagrinėjamos matricinės diferencialinės lygties sprendiniai, tai renkamės atvejį, kai $\rho=0$ ir turime tokią laipsninės eilutės koeficientų radimo rekurentinę formulę:

$$u_k(x,y)=-\frac{1}{k}(I_3)^{-1}\left[x\left(I_1\frac{\partial u_{k-1}(x,y)}{\partial x}+I_3\frac{\partial u_{k-1}(x,y)}{\partial y}\right)+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l(x,y)\right]. \qquad (39)$$

Iš šios rekurentinės formulės visi (37) laipsninės eilutės koeficientai vienareikšmiškai nustatomi pagal laisvai pasirinktą $u_0(x,y)$, kurį parenkame kaip analizinę jos kintamųjų funkciją.

Teorema įrodyta.

IŠVADA.

Gautuosius rezultatus suformuluosime tiriamajai dalinių išvestinių sistemai (1) kaip teoremą.

4. TEOREMA. (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema turi atskirųjų formaliųjų sprendinių šeimas, išreiškiamas tokiu pavidalu:

1. $u(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)} u_k(y, z, lnx)$

$\rho(y,z)$ – funkcija, randama iš (11) lygties,

2. $u(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k u_k(x, z),$

3. $jeigu\ \alpha = 0, \qquad u(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+\rho} u_k(x, y),$

ρ – bet koks realusis skaičius,

$$jeigu\ \alpha \neq 0, \qquad u(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k u_k(x, y).$$

Skirtingų šeimų atstovai yra tiesiškai nepriklausomi.

4. FORMALIŲJŲ LAIPSNINIŲ EILUČIŲ KONVERGAVIMO TYRIMAS

Į formaliuosius (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos sprendinius įeina šios laipsninės eilutės:

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k u_k(y,z),$$

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k u_k(x,z),$$

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k u_k(x,y).$$

Jų konvergavimą tirsime mažorantų metodu [7]. Konvergavimo tyrimas visais atvejais yra analogiškas, todėl ištirsime (4) laipsninės eilutės konvergavimą.

Turime, kad (4) laipsninės eilutės koeficientams galioja įvertis

$$|u_k(y,z,lnx)| < M^k|y|^{-k}|z|^{-k}|lnx|^k, \qquad k = 1,2,3 \dots$$

Šią nelygybę įrodysime matematinės indukcijos metodu pasinaudodami (4) laipsninės eilutės koeficientų radimo rekurentine formule (22).

Tarkime, kad pastaroji nelygybė teisinga, kada

$$|u_l(y,z,lnx)| < M^l|y|^{-l}|z|^{-l}|lnx|^l, \qquad l = 0,1,2,\dots,k-1. \tag{40}$$

Reikia įrodyti, kad

$$|u_k(y,z,lnx)| < M^k|y|^{-k}|z|^{-k}|lnx|^k, \qquad k = 1,2,3 \dots,; \tag{41}$$

čia M – nežinoma konstanta.

Diferencijuodami (41) nelygybę pagal nepriklausomus kintamuosius y ir z, gauname tokias nelygybes:

$$\left|\frac{\partial u_{k-1}(y,z,lnx)}{\partial y}\right| < M^{k-1}|k-1| \cdot |y|^{-k} \cdot |z|^{-k+1} \cdot |lnx|^{k-1}; \tag{42}$$

$$\left|\frac{\partial u_{k-1}(y,z,lnx)}{\partial z}\right| < M^{k-1}|y|^{-k+1} \cdot |k-1| \cdot |z|^{-k} \cdot |lnx|^{k-1}; \tag{43}$$

Kadangi nagrinėjamos dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos koeficientams galioja dėstiniai konverguojančiomis laipsninėmis eilutėmis, tai jiems galioja tokie įverčiai [10]:

$$|A_{k-l}(y,z)| < A^{k-l}|y|^{-1}|z|^{-1}; \tag{44}$$

$$|\rho(y,z)| < R|y|^{-1}|z|^{-1}; \tag{45}$$

čia A ir R yra žinomos konstantos.

Diferencijuojame (45) nelygybę pagal nepriklausomus kintamuosius y ir z, ir gauname, kad teisingos nelygybės

$$\left|\frac{\partial \rho(y,z)}{\partial y}\right| < R|y|^{-2}|z|^{-1}; \tag{46}$$

$$\left|\frac{\partial \rho(y,z)}{\partial z}\right| < R|y|^{-1}|z|^{-2}. \tag{47}$$

Įrašę (42), (43), (44), (45), (46) ir (47) į (22), gauname

$$|u_k(y,z,lnx)| < |(I_1)^{-1}|e^{-alnx} \cdot$$

$$\cdot \int e^{alnx}\Bigg[|lnx|M^{k-1}|y|^{-k+1}|z|^{-k+1}|lnx|^{k-1}(|I_2|R|y|^{-2}|z|^{-1} + |I_3|R|y|^{-1}|z|^{-2})$$

$$+ |I_2|M^{k-1}|k-1||y|^{-k}|z|^{-k+1}|lnx|^{k-1} + |I_3|M^{k-1}|k-1||y|^{-k+1}|z|^{-k}|lnx|^{k-1}$$

$$+ \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l}|y|^{-1}|z|^{-1}M^l|y|^{-l}|z|^{-l}|lnx|^l\Bigg] dlnx. \tag{48}$$

Iš (48) nelygybės laužtinių skliaustų iškėlę narį $M^k|y|^{-k}|z|^{-k}|lnx|^k$, gauname

$$|u_k(y,z,lnx)| < |(I_1)^{-1}|e^{-alnx} \cdot \int e^{alnx} \cdot M^k|y|^{-k}|z|^{-k}|lnx|^k \cdot$$

$$\cdot \Bigg[\frac{1}{M}|I_2|R\frac{1}{|y|} + \frac{1}{M}|I_3|R\frac{1}{|z|} + \frac{1}{M}|k-1||I_2||z|\frac{1}{|lnx|} + \frac{1}{M}|k-1||I_3||y|\frac{1}{|lnx|}$$

$$+ \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l}M^{l-k}|y|^{-l-1+k}|z|^{-l-1+k}|lnx|^{l-k}\Bigg] dlnx. \tag{49}$$

Dalinio integravimo būdu suintegruokime integralą $\int e^{alnx}(lnx)^k dlnx$.

$$\int e^{alnx}(lnx)^k dlnx =$$

$$= \frac{1}{a}e^{alnx}(lnx)^k + \frac{k}{a^2}e^{alnx}(lnx)^{k-1} + \frac{k(k-1)}{a^3}e^{alnx}(lnx)^{k-2}$$

$$+ \frac{k(k-1)(k-2)}{a^4}e^{alnx}(lnx)^{k-3} + \cdots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots 2\cdot 1}{a^{k+1}}e^{alnx} =$$

$$= e^{alnx}\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{C_k^n}{n!\,a^{n+1}}(lnx)^{k-n}. \tag{50}$$

Pasinaudoję gauta (50) formule, (49) nelygybę galime užrašyti taip:

$$|u_k(y,z,lnx)| < |(I_1)^{-1}|M^k|y|^{-k}|z|^{-k}|lnx|^k \sum_{n=0}^{k}(-1)^n \frac{C_k^n}{n!\,a^{n+1}}|lnx|^{-n}\Bigg(\frac{1}{M}|I_2|R\frac{1}{|y|}$$

$$+\frac{1}{M}|I_3|R\frac{1}{|z|}+\frac{k-n}{k}\cdot\frac{1}{M}|k-1||I_2||z|\frac{1}{|lnx|}+\frac{k-n}{k}\cdot\frac{1}{M}|k-1||I_3||y|\frac{1}{|lnx|}$$

$$+\sum_{l=0}^{k-1}A^{k-l}M^{l-k}|y|^{-l-1+k}|z|^{-l-1+k}|lnx|^{l-k}\Bigg). \tag{51}$$

Įvertinkime sumą, iškėlę narius, kurie nepriklauso nuo sumavimo parametro *l*:

$$\sum_{l=0}^{k-1}A^{k-l}M^{l-k}|y|^{-l-1+k}|z|^{-l-1+k}|lnx|^{l-k} = \frac{A^k|y|^{k-1}|z|^{k-1}}{M^k|lnx|^k}\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{M|lnx|}{A|y||z|}\right)^l. \tag{52}$$

Kadangi $|y| < r_2, |z| < r_3,$ tai galime parašyti, kad

$$\frac{A^k|y|^{k-1}|z|^{k-1}}{M^k|lnx|^k}\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{M|lnx|}{A|y||z|}\right)^l < \frac{A^k{r_2}^{k-1}{r_3}^{k-1}}{M^k|lnx|^k}\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{M|lnx|}{Ar_2r_3}\right)^l. \tag{53}$$

Pagal geometrinės progresijos baigtinio skaičiaus narių sumos formulę tiriamajai sumai apskaičiuoti turime

$$\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{M|lnx|}{Ar_2r_3}\right)^l = \frac{\left(\frac{M|lnx|}{Ar_2r_3}\right)^k-1}{\frac{M|lnx|}{Ar_2r_3}-1}. \tag{54}$$

Skaitiklyje pridėję vienetą, gauname tokį įvertį:

$$\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{M|lnx|}{Ar_2r_3}\right)^l < \frac{\left(\frac{M|lnx|}{Ar_2r_3}\right)^k}{\frac{M|lnx|}{Ar_2r_3}-1}. \tag{55}$$

Įrašome (55) nelygybę į (53) ir gauname, kad

$$\frac{A^k|y|^{k-1}|z|^{k-1}}{M^k|lnx|^k}\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{M|lnx|}{A|y||z|}\right)^l < \frac{A^k{r_2}^{k-1}{r_3}^{k-1}}{M^k|lnx|^k}\frac{\left(\frac{M|lnx|}{Ar_2r_3}\right)^k}{\frac{M|lnx|}{Ar_2r_3}-1}, \tag{56}$$

arba

$$\frac{A^k|y|^{k-1}|z|^{k-1}}{M^k|lnx|^k}\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{M|lnx|}{A|y||z|}\right)^l < \frac{\frac{A}{|lnx|}}{M-\frac{Ar_2r_3}{|lnx|}}. \tag{57}$$

Kadangi (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos eilė išsigimsta kada nepriklausomas kintamasis artėja į nulį, t.y., kai *x→0,* tai *lnx*→∞. Tuomet $\frac{1}{lnx} < \varepsilon$, čia *ε→0.*

Turime, kad

$$\frac{A^k|y|^{k-1}|z|^{k-1}}{M^k|lnx|^k}\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{M|lnx|}{A|y||z|}\right)^l < \frac{A\varepsilon}{M-A\varepsilon r_2 r_3}. \quad (58)$$

Įrašę (58) į (51), gauname, kad

$$|u_k(y,z,lnx)| < M^k|y|^{-k}|z|^{-k}|lnx|^k \cdot |(I_1)^{-1}|\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{C_k^n}{n!\,a^{n+1}}\varepsilon\left(\frac{1}{M}|I_2|R\frac{1}{r_2}+\frac{1}{M}|I_3|R\frac{1}{r_3}\right.$$
$$\left.+\frac{k-n}{k}\cdot\frac{1}{M}|k-1||I_2|\cdot r_3\cdot\varepsilon+\frac{k-n}{k}\cdot\frac{1}{M}|k-1||I_3|\cdot r_2\cdot\varepsilon+\frac{A\varepsilon}{M-A\varepsilon r_2r_3}\right). \quad (59)$$

Šioje nelygybėje turi būti

$$|(I_1)^{-1}|\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{C_k^n}{n!\,a^{n+1}}\varepsilon\left(\frac{1}{M}|I_2|R\frac{1}{r_2}+\frac{1}{M}|I_3|R\frac{1}{r_3}+\frac{k-n}{k}\cdot\frac{1}{M}|k-1||I_2|\cdot r_3\cdot\varepsilon+\frac{k-n}{k}\right.$$
$$\left.\cdot\frac{1}{M}|k-1||I_3|\cdot r_2\cdot\varepsilon+\frac{A\varepsilon}{M-A\varepsilon r_2r_3}\right)\le 1. \quad (60)$$

Konstantą *M* parinksime tokią didelę, kad galiotų (60) nelygybė.

Iš (4) ir (41) lygybių, pasinaudodami modulio savybėmis gauname, kad

$$|u(x,y,z)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho(y,z)}u_k(y,z,lnx)\right| < x^{\rho(y,z)}\sum_{k=0}^{\infty}|x|^k|u_k(y,z,lnx)|. \quad (61)$$

(41) nelygybę įrašę į (61), gauname, kad

$$|u(x,y,z)| < x^{\rho(y,z)}\sum_{k=0}^{\infty}|x|^kM^k|y|^{-k}|z|^{-k}|lnx|^k. \quad (62)$$

(4) laipsninės eilutės mažorantinė eilutė (62) konverguoja, jei

$$\frac{|x|M|lnx|}{|y||z|} < 1 \quad (63)$$

Kadangi $|x| < r_1$, $|y| < r_2$, $|z| < r_3$, $\frac{1}{lnx} < \varepsilon$ tai

$$|x| < \frac{|y||z|}{M|lnx|} < \frac{r_2r_3\varepsilon}{M} \quad (64)$$

Konstantą *M* parinkime taip, kad

$$\frac{r_2r_3\varepsilon}{M}\le 1,$$

$$M \ge r_2r_3\varepsilon. \quad (65)$$

Vadinasi laipsninė eilutė (4) konverguoja absoliučiai ir tolygiai policilindre

$$|x| < \frac{r_2r_3\varepsilon}{M}, |y| < r_2, |z| < r_3. \quad (66)$$

Kitų laipsninių eilučių (24) ir (37) konvergavimas įrodomas analogiškai. Laipsninė eilutė (24) konverguos absoliučiai ir tolygiai policilindre

$$|x| < r_1, |y| < \frac{r_1r_3\varepsilon}{N}, |z| < r_3, \quad N \ge r_1r_3\varepsilon, \quad (67)$$

o laipsninė eilutė (37) konverguos absoliučiai ir tolygiai policilindre

$$|x| < r_1, |y| < r_2, |z| < \frac{r_1 r_2 \varepsilon}{K}, \quad K \geq r_1 r_2 \varepsilon. \tag{68}$$

Gautąjį rezultatą suformuluosime kaip teoremą.

5. TEOREMA. Laipsninė eilutė

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)} u_k(y,z,lnx)$$

konverguoja absoliučiai ir tolygiai policilindre

$$|x| < \frac{r_2 r_3 \varepsilon}{M}, |y| < r_2, |z| < r_3,$$

čia konstanta *M* parenkama taip

$$M \geq r_2 r_3 \varepsilon;$$

laipsninė eilutė

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} y^{k+\rho} u_k(x,z)$$

konverguoja absoliučiai ir tolygiai policilindre

$$|x| < r_1, |y| < \frac{r_1 r_3 \varepsilon}{N}, |z| < r_3,$$

konstanta *N* parenkama taip

$$N \geq r_1 r_3 \varepsilon;$$

o laipsninė eilutė

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+\rho} u_k(x,y)$$

konverguoja absoliučiai ir tolygiai policilindre

$$|x| < r_1, |y| < r_2, |z| < \frac{r_1 r_2 \varepsilon}{K},$$

kur konstanta *K* parenkama taip

$$K \geq r_1 r_2 \varepsilon.$$

IŠVADA.

Gautuosius rezultatus suformuluosime kaip teoremas.

6. TEOREMA. (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos sprendiniai policilindre

$$|x| < \frac{r_2 r_3 \varepsilon}{M}, |y| < r_2, |z| < r_3, \qquad M \geq r_2 r_3 \varepsilon$$

išreiškiami tokiu pavidalu:

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)} u_k(y,z,lnx),$$

eilutės koeficientai randami iš formulės

$$u_k = -e^{-alnx} \cdot \int (I_1)^{-1} e^{alnx} \cdot$$

$$\cdot \left[lnx \cdot u_{k-1} \left(I_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_3 \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + I_2 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_3 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l} u_l \right] dlnx,$$

ρ(y,z) – funkcija, randama iš lygties

$$det\big(I_1 \rho(y,z) + A_0(y,z)\big) = 0,$$

$u_0(y,z)$ - laisvai pasirinkta analizinė nepriklausomų kintamųjų *y* ir *z* funkcija.

Analogiškai įrodome kitas dvi teoremas.

7. TEOREMA. (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos sprendiniai policilindre

$$|x| < r_1, |y| < \frac{r_1 r_3 \varepsilon}{N}, |z| < r_3, \qquad N \geq r_1 r_3 \varepsilon$$

išreiškiami tokiu pavidalu:

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k u_k(x,z),$$

eilutės koeficientai randami iš formulės

$$u_k(x,z) = -\frac{1}{k}(I_2)^{-1} \left[x \left(I_1 \frac{\partial u_{k-1}(x,z)}{\partial x} + I_3 \frac{\partial u_{k-1}(x,z)}{\partial z} \right) + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l} u_l(x,z) \right],$$

čia $u_0(x,z)$ gali būti parinktas taip, kad jis būtų bet kuri analizinė kintamųjų *x* ir *z* funkcija.

8. TEOREMA. Jeigu $\alpha \neq 0$, tai (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos sprendiniai policilindre

$$|x| < r_1, |y| < r_2, |z| < \frac{r_1 r_2 \varepsilon}{K}, \qquad K \geq r_1 r_2 \varepsilon$$

išreiškiami tokiu pavidalu:

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k u_k(x,y),$$

eilutės koeficientai randami iš formulės

$$u_k(x,y) = -\frac{1}{k}(I_3)^{-1} \left[x \left(I_1 \frac{\partial u_{k-1}(x,y)}{\partial x} + I_3 \frac{\partial u_{k-1}(x,y)}{\partial y} \right) + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l} u_l(x,y) \right],$$

čia $u_0(y,z)$ – laisvai parenkamas vektorius stulpelis.

Jeigu $\alpha = 0$, tai (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos sprendiniai tame policilindre išreiškiami tokiu pavidalu

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+\rho} u_k(x,y),$$

čia ρ – bet koks realusis skaičius, o eilutės koeficientai randami iš formulės

$$u_k(x,y) = -\frac{1}{k+\rho}(I_3)^{-1}\left[x\left(I_1\frac{\partial u_{k-1}(x,y)}{\partial x} + I_2\frac{\partial u_{k-1}(x,y)}{\partial y}\right) + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l}u_l(x,y)\right].$$

Čia $u_0(x,y)$ laisvai parenkamas vektorius stulpelis ir jo struktūra tokia

$$(u_{01}(x,y), 0, 0, u_{04}(x,y)\ ),$$

čia $u_{01}(x,y)$, $u_{04}(x,y)$ - laisvai parenkamos analizinės tik nepriklausomų kintamųjų x ir y funkcijos.

Darbo rezultatas.

9. TEOREMA. (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos sprendiniai yra:

1. $u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)} u_k(y,z,lnx), \qquad srityje\ |x| < \frac{r_2 r_3 \varepsilon}{M}, |y| < r_2, |z| < r_3$

čia $\rho(y,z)$ – funkcija, randama iš (11) lygties;

2. $u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k u_k(x,z), \qquad srityje\ |x| < r_1, |y| < \frac{r_1 r_3 \varepsilon}{N}, |z| < r_3;$

3. $jeigu\ \alpha = 0, \qquad u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+\rho} u_k(x,y)$

čia ρ – bet koks realusis skaičius,

$$jeigu\ \alpha \neq 0, \qquad u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k u_k(x,y), \quad srityje\ |x| < r_1, |y| < r_2, |z| < \frac{r_1 r_2 \varepsilon}{K}.$$

VIENOS IŠSIGIMSTANČIOS DALINIŲ IŠVESTINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS SPRENDINIŲ STRUKTŪRA

Santrauka

Šiame darbe išnagrinėta išsigimstanti keturių pirmos eilės dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema. Dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemai spręsti pritaikytas apibendrintų laipsninių eilučių metodas. Rasti analiziniai šios sistemos sprendiniai ir ištirtos jų savybės išsigimimo daugdaros taškų aplinkoje.

Apibendrintų laipsninių eilučių metodas gali būti pritaikytas sprendžiant panašios struktūros dalinių išvestinių diferencialines lygtis, kurių eilė išsigimsta. Darbe gauti rezultatai gali būti pritaikomi modeliuojant ir tiriant realius procesus.

Raktiniai žodžiai: dalinė išvestinė, diferencialinių lygčių sistema, laipsninė eilutė.

THE STRUCTURE OF THE SOLUTIONS OF THE ONE SYSTEM OF DEGENERATING DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PARTIAL DERIVATIVES

Summary

In this work the system of four degenerating differential equations with partial derivatives of first order was studied. For the solution of system of differential equations with partial derivatives the method of generalized power series was applied. Analytical solutions of this system were found and properties of solutions on neighbourhood of points of degeneration manifold were investigated.

The method of generalized power series can be applied to the solution of systems of differential equations with partial derivatives of similar structure, which order is degenerating. The results, which were obtained in this work, can be applied to modelling and studying the real processes.

Keywords: partial derivative, system of differential equations, power series.

LITERATŪRA

1. Golokvosčius, P. *Diferencialinės lygtys*. Vilnius, 2000.
2. Čiučkytė, R. 2006, *Išsigimstančios dalinių išvestinių sistemos sprendinių struktūra*. Magistro darbas. Šiauliai, 2006.
3. *Diferencialinių lygčių ir skaičiavimo metodų modulis*. [Žiūrėta 2009 04 26]. Prieiga per internetą: http://mif.vu.lt/lt/studijos/matdok/atnaujinta_matdok_files/3_Dif_Lygt_Sk_Metodai_NAUJAS.doc.
4. Kvedaras, B. *Matricų teorija*: I dalis. Kaunas, 1999.
5. Kvedaras, B. *Matricų teorija*: II dalis. Vilnius, 2000.
6. Vaičiulytė, I. *Vienos dalinių išvestinių sistemos sprendimas.* Diplominis darbas. Šiauliai, 2006.
7. Янушаускас, А.И. *Аналитическая теория эллиптических уравнений*. Новосибирск, Наука СО, 1979.
8. Ambrazevičius, A. *Matematinis modeliavimas*. Vilnius, 2004. [Žiūrėta 2009 04 30]. Prieiga per internetą: http://www.mif.vu.lt/katedros/dlsm/darbuotojai/algam/mm/mmpdf.pdf.
9. Golokvosčius, P. *Tiesinės ir kvazitiesinės pirmosios eilės dalinių išvestinių diferencialinės lygtys.* Mokomoji priemonė. Vilnius, 1996.
10. Янушаускас, А.И. *Многомерные эллиптические системы с переменными коэффициентами.* Вильнюс, Мокслас, 1990.
11. Юргайтис, Д. Решение одной вырождающейся эллиптической системы первого порядка. *Lietuvos Matematikos rinkinys*, 1983.
12. Юргайтис, Д. О решение вырождающейся эллиптической системы первого порядка. *Lietuvos Matematikos rinkinys*, 1982.