Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
64 tomas, 2023, 30–40
https://doi.org/10.15388/LMR.2023.33592

Diskrečiųjų martingalų statistinių modelių lokalus asimptotinis normalumas

Vaidotas Kanišauskas

Vilniaus universitetas, Šiaulių akademija
Vytauto g. 84, LT-76352 Šiauliai, Lietuva
El. paštas: kanisauskasva@gmail.com

Įteiktas 2023 liepos 10; publikuotas 2023 lapkričio 20

Santrauka. Nustatytos bendrosios sąlygos, užtikrinančios diskrečiųjų arba netolydžių lokaliųjų martingalų statistinių eksperimentų, apimančių visų tipų taškinių procesų modelius, tolygųjį lokalųjį asimptotinį normalumą. Bendrosiose sąlygose naudojamas parametrų Frešė diferencijuojamumas pagal tikimybę normuotose erdvėse tolydaus kompensatoriaus atžvilgiu.

Raktiniai žodžiai: diskretusis arba netolydus lokalusis martingalas; lokalusis asimptotinis normalumas; kompensatorius; Frešė diferencijuojamumas
AMS: 46N30, 60G55, 62E20, 62F12

Įvadas

Idėją apie tikimybinių matų šeimų aproksimavimą Gauso skirstiniu lokaliai asimptotine prasme pirmasis išsakė A. Valdas [21]. Toliau šią idėją plėtojo L. Le Kamas [19], įvedęs lokalaus asimptotinio normalumo (LAN) apibrėžimą. Nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių LAN sąlygas gavo J. Hajekas [3, 4]. Kai atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi ir nevienodai pasiskirstę, LAN sąlygas suformulavo I.A. Ibragimovas ir R.Z. Chasminskis [5]. Nehomogeninio Puasono proceso ir Puasono tipo procesų atvejais LAN sąlygas suformulavo J.A. Kutojancas [14, 15].

LAN yra viena iš keturių pagrindinių sąlygų, lemiančių asimptotiškai optimalias maksimalaus tikėtinumo ir Bajeso įverčių savybes, aprašytas I.A. Ibragimovo ir R.Z. Chasminskio monografijoje [6]. Tiriant konkrečių statistinių modelių parametrų asimptotines įverčių savybes kartu yra nustatomos konkrečios sąlygos, užtikrinančios modelio LAN. Tokiu principu J.A. Kutojancas nagrinėjo difuzinio tipo procesus [15], Puasono tipo procesus [16], nehomogeninius Puasono procesus [15], Gauso procesus [13, 15], J.N. Linkovas – semimartingalus [18], difuzinio tipo procesus [18], skaičiuojančius procesus [17, 18], atstatymo procesus ir kt. [18], V. Kanišauskas – daugiavariančius taškinius procesus [11] ir procesų klasę, kurios lokalaus tankio procesas išreiškiamas per stochastinę eksponentę nuo sumos dviejų stochastinių integralų, vienas iš kurių apibrėžtas pagal daugiamatį tolydų lokalųjį martingalą, o kitas – pagal kompensuotą taškinį matą [12]. Šiame modelyje panaikinę tolydų lokalųjį martingalą gausime modelį, kuriame lokalaus tankio procesas išreiškiamas per stochastinę eksponentę nuo diskretaus martingalo – stochastinio integralo pagal kompensuotą taškinį matą. Tas modelis kaip tik ir bus nagrinėjamas šiame straipsnyje. Skirtingai nuo visų čia minėtų modelių, kuriuose gautos LAN sąlygos, straipsnyje bus naudojamos kitokios reguliarumo sąlygos, tiksliau, bus naudojamas atsitiktinių parametrinių funkcijų Frešė diferencijavimas pagal tikimybę normuotoje erdvėje, kur norma apibrėžiama kaip stochastinis integralas pagal kompensatorių. Tokio tipo diferencijavimą naudojo A.F. Taraskinas [20], ir jis tam tikra prasme yra silpnesnis už parametrinės funkcijos diferencijavimą erdvėje $C_1^0(\Theta)$, įvestą J.N. Linkovo [17, 18] ir naudotą kitų autorių [11], arba diferencijavimą su tikimybe 1, naudotą J.A. Kutojanco [14, 15, 16].

Kadangi, norint gauti LAN išraišką, tikėtinumo santykio pertvarkymai atliekami naudojant konvergavimą pagal tikimybę, todėl šiame straipsnyje taikomas parametrų Frešė diferencijavimas pagal tikimybę normoje atžvilgiu kompensatoriaus yra tam tikra prasme optimalus, nes apima silpnesnius apribojimus, lyginant su kitais parametrinės atsitiktinės funkcijos diferencijavimais – t. y. su tikimybe 1 arba diferencijavimu erdvėje $C_1^0(\Theta)$.

1 Lokalaus tankio procesas

Straipsnyje bus naudojama terminologija, įprasta stochastinėje atsitiktinių procesų teorijoje [7, 9, 10].

Tarkime, kad duota stochastinė bazė $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta)$ ir Lūzino erdvė $(E, \mathcal{E})$, t. y. E – kompaktinės metrinės erdvės boreliškas poaibis, o Θ yra atviras ir iškilas R^k, $k \geqslant 1$, poaibis. Mačioje erdvėje $(R_+ \times E, \mathcal{B}(R_+) \otimes \mathcal{E})$ apibrėžtas sveikaskaitis atsitiktinis matas μ su $(\mathbb{P}_\theta, \mathbb{F})$-kompensatoriumi $\nu(\theta)$, tenkinančiu sąlygą $\nu(\theta, \{t\}, E) \equiv 0$.

1 teorema. [8, 9, 10] *Tarkime, kad tenkinamos sąlygos*:

1) $\nu(\theta, \{t\}, E) \equiv 0$ P_y*-b.v.*, $t \in R_+$;

2) *egzistuoja neneigiamas numatomas procesas* $V(y, \theta) = V(y, \theta, \omega, t, x) \geqslant 0$*, apibrėžtas aibėje* $\Omega \times R_+ \times E$ *toks, kad* $\nu(y, \omega, dt, dx) = V(y, \theta, \omega, t, x)\, \nu(\theta, \omega, dt, dx)$;

3) $\bigl(1 - \sqrt{V(y, \theta)}\,\bigr)^2 * \nu(\theta)_t < \infty$ P_y*-b.v.*, $t \in R_+$.

Tada $P_y^t \ll P_\theta^t$*, o lokalaus tankio proceso išraiška*

$$\begin{aligned} Z_t(y, \theta) = \frac{dP_y^t}{dP_\theta^t} &= \mathcal{E}_t\bigl((V(y, \theta) - 1) * \bigl(\mu - \nu(\theta)\bigr)_t\bigr) \\ &= \exp\bigl\{ \ln V(y, \theta) * \mu_t - \bigl(V(y, \theta) - 1\bigr) * \nu(\theta)_t \bigr\}, \end{aligned}$$

čia $\mathcal{E}_t(\cdot)$ *– stochastinė eksponentė, o* $U * \mu_t = \int_0^t \int_E U(\omega, s, x)\, \mu(\omega, ds, dx)$, $U * \nu(\theta)_t = \int_0^t \int_E U(\omega, s, x)\, \nu(\theta, \omega, ds, dx)$.

Pastebėsime, kad 3) sąlyga ekvivalenti sąlygai:

3′) $\nu(\theta,\omega,[0,t],E)=\nu_t(\theta,E)<\infty$ P_y-b.v., $t\in R_+$.

2 Diferencijavimas

Atsitiktinių funkcijų diferencijavimas bus apibrėžtas pagal [1, 20].

Tarkime, kad procesas $A\in\mathcal{P}\cap\mathcal{V}$. Įvesime normuotą integruojamų funkcijų klasę $L^2_{loc}(A)=\{H: H\in\mathcal{P}, \|H\|_A\in\mathcal{A}_{loc}\}$; čia $\|H\|_{A_t}=(H^2*A_t)^{\frac{1}{2}}$ – erdvės $L^2_{loc}(A)$ norma.

Jei $U=(U_1,U_2,\dots,U_k)'$ – vektorinė funkcija, tai užrašas $U\in L^{2,(k)}_{loc}$ reiškia, kad $U_i\in L^2_{loc}$ visiems $i=1,2,\dots,k$.

Tarkime, kad $U(\theta)=(U_t(\theta))\in\mathcal{P}(\mathbb{F})\otimes\mathcal{B}(\Theta)$; čia $t\in\mathbb{R}_+$, $\theta\in\Theta\subset R$ – atvira aibė ir $U(\theta)\in L^2_{loc}(A)$ visiems θ iš taško $\theta_0\in\Theta$ aplinkos. Sakysime, kad atsitiktinė funkcija $U(\theta)$ diferencijuojama (Frešė prasme) pagal P-tikimybę erdvėje $L^2_{loc}(A)$ taške $\theta=\theta_0$, jei egzistuoja tokia funkcija $\dot U(\theta_0)=(\dot U_t(\theta_0))\in L^2_{loc}(A)$, vadinama $U(\theta)$ (Frešė) išvestine taške θ_0, kad

$$P-\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}\big(U(\theta_0+h)-U(\theta_0)\big)-\dot U(\theta_0)\right\|_{A_t}=0;$$

čia $P-\lim$ žymi konvergavimą pagal tikimybę.

Jei sąryšis galioja kiekvienam taške $\theta_0\in\Theta$, tai sakysime, kad $U(\theta)$, $\theta\in\Theta$, diferencijuojama Frešė prasme pagal P-tikimybę erdvėje $L^2_{loc}(A)$.

Analogiškai sakykime, kad funkcija $U(\theta)=(U_t(\theta))\in\mathcal{P}(\mathbb{F})\otimes\mathcal{B}(\Theta)$, $\theta\in\Theta\subset R$, tolydi pagal P-tikimybę erdvėje $L^2_{loc}(A)$ taške $\theta\in\Theta$, jei

$$P-\lim_{h\to 0}\big\|U(\theta+h)-U(\theta)\big\|_{A_t}=0,\quad t\in R_+.$$

Tarkime, kad $f(x)$ – reali diferencijuojama funkcija atviroje aibėje $D\subset R$, o $U(\theta)=(U_t(\theta))\in\mathcal{P}(\mathbb{F})\otimes\mathcal{B}(\Theta)$ – atsitiktinė funkcija su reikšmėmis aibėje D, diferencijuojama (Frešė prasme) θ atžvilgiu pagal P-tikimybę erdvėje $L^2_{loc}(A)$ taške $\theta=\theta_0$. Atsitiktinę funkciją $F_t(\theta)=f(U_t(\theta))$ vadinsime (teisingai) diferencijuojama (Frešė prasme) θ atžvilgiu pagal P-tikimybę erdvėje $L^2_{loc}(A)$ taške θ_0, jei ji diferencijuojama θ atžvilgiu pagal P-tikimybę erdvėje $L^2_{loc}(A)$ taške θ_0 ir $\dot F_t(\theta_0)=f'(U_t(\theta_0))\dot U_t(\theta_0)$ P-b.v.

Tarkime, kad atsitiktinė funkcija $U(\theta)=(U_t(\theta))\in\mathcal{P}(\mathbb{F})\otimes\mathcal{B}(\Theta)$, $t\in\mathbb{R}_+$, $\theta\in\Theta\subset R^k$, $k\geqslant 1$, – atvira aibė, ir $U(\theta)\in L^2_{loc}(A)$ visiems θ iš tam tikros taško $\theta_0\in\Theta$ aplinkos. Sakysime, kad atsitiktinė funkcija $U(\theta)$ diferencijuojama pagal P-tikimybę (Frešė prasme) erdvėje $L^2_{loc}(A)$ taške $\theta=\theta_0$, jei egzistuoja tokia funkcija vektorius $\dot U(\theta_0)=(\dot U_t(\theta_0))\in L^{2,(k)}_{loc}(A)$, kad

$$P-\lim_{h\to 0}\frac{\|U(\theta_0+h)-U(\theta_0)-(h,\dot U(\theta_0))\|_{A_t}}{|h|}=0,$$

čia $\dot U(\theta_0)=\big(\frac{\partial U(\theta_0)}{\partial\theta_1},\dots,\frac{\partial U(\theta_0)}{\partial\theta_k}\big)'$, o (x,y) žymi skaliarinę sandaugą.

Analogiškai $\theta\in\Theta\subset R^1$ atveju apibrėžiamas atsitiktinės funkcijos $F_t(\theta)=f(U_t(\theta))$, $(U_t(\theta))\in\mathcal{P}(\mathbb{F})\otimes\mathcal{B}(\Theta)$, $\theta\in\Theta\subset R^k$, $k\geqslant 1$, (teisingas) diferencijavimas (Frešė prasme) pagal P-tikimybę erdvėje $L^2_{loc}(A)$ taške $\theta=\theta_0$.

Iš apibendrintos Niutono–Leibnico formulės pritaikymo normuotose erdvėse gauname sekantį rezultatą.

2 teorema. [2] *Jei atsitiktinė funkcija $U(\theta) = (U_t(\theta)) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\Theta)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \Theta \subset R^k$, $k \geqslant 1$, – atvira aibė, tolydžiai diferencijuojama pagal $\theta \in \Theta$ (Frešė prasme) pagal P-tikimybę erdvėje $L^2_{loc}(A)$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, tai erdvėje $L^2_{loc}(A)$ galioja formulė*

$$U_t(\theta + u) - U_t(\theta) = \int\limits_0^1 \big(\dot{U}_t(\theta + su), u\big) ds,$$

jei $\theta + su \in \Theta$, kai $0 \leqslant s \leqslant 1$.

3 Centrinė ribinė teorema diskretiems martingalams

Tarkime, kad $U^t = (U^{t,1}, \ldots, U^{t,k})' \in L^{2,(k)}_{loc}(\nu^t)$,

$$Y^t = U^t * (\mu^t - \nu^t) = \big(U^{t,1} * \big(\mu^t - \nu^t\big), \ldots, U^{t,k} * \big(\mu^t - \nu^t\big)\big)'.$$

3 teorema. [18, 1.3.3 teorema ir 1.3.4 pastaba] *Tarkime, kad fiksuotam $s \in (0, \infty)$ ir bet kuriam $\varepsilon \in (0, 1]$ tenkinamos sąlygos*:

1) a) $P^t - \lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{I}(|U^t| > \varepsilon)|U^t|^2 * \nu^t_{st} = 0$

arba

b) $\lim\limits_{t\to\infty} E^t|U^t|^2 \wedge |U^t|^3 * \nu^t_{st} = 0,$

arba

c) *tam tikram $\delta \in (0, 1]$*

$$\lim_{t\to\infty} E^t\big|U^t\big|^{2+\delta} * \nu^t_{st} = 0;$$

2) $P^t - \lim\limits_{t\to\infty} U^t(U^t)' * \nu^t_{st} = I(s),$

čia $\mathbb{I}(A)$ – aibės A indikatorius, o $I(s)$ – tam tikra neatsitiktinė simetriška matrica, priklausoma nuo s, su baigtiniais elementais; $a \wedge b = \min(a, b)$.

Tada, kai $t \to \infty$, $\mathcal{L}(Y^t_{st}|P^t) \Rightarrow N(0, I(s))$.

Tarkime, kad P^t_θ, $\mathbb{P}_\theta$, $t \in R_+$, $\theta \in V$, yra tikimybiniai matai erdvėje $(R^k, \mathcal{B}^k)$, kur V – tam tikra aibė. Sakome, kad matas P^t_θ tolygiai pagal $\theta \in V$ silpnai konverguoja į $\mathbb{P}_\theta$, kai $t \to \infty$, žym. $P^t_\theta \Rightarrow \mathbb{P}_\theta$, jei bet kuriai tolydžiai apibrėžtai funkcijai $g : R^k \to R^1$

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{R^k} g(x) P^t_\theta(dx) = \int\limits_{R^k} g(x)\mathbb{P}_\theta(dx), \quad \theta \in V. \text{ [18]}$$

Tegu $U^{t,\theta} = (U^{t,\theta,1}, \ldots, U^{t,\theta,k})' \in L^{2,(k)}_{loc}(\nu^t)$,

$$Y^{t,\theta} = U^{t,\theta} * \big(\mu^t - \nu^t\big) \in \mathcal{M}^{2,(k)}_{loc}\big(\mathbb{F}^t, P^t\big).$$

4 teorema. [18, 1.3.6. teorema] *Tarkime, kad fiksuotam* $s \in (0,\infty)$ *ir bet kuriam* $\varepsilon \in (0,1]$ *tenkinamos sąlygos*:

1) a) $P^t - \lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{I}(|U^{t,\theta}| > \varepsilon)|U^{t,\theta}|^2 * \nu_{st}^{t,\theta} = 0$ *tolygiai pagal* $\theta \in V$

arba

b) $\lim\limits_{t\to\infty} E^t|U^{t,\theta}|^2 \wedge |U^{t,\theta}|^3 * \nu_{st}^{t,\theta} = 0$ *tolygiai pagal* $\theta \in V$,

arba

c) *tam tikram* $\delta \in (0,1]$

$$\lim_{t\to\infty} E^t\big|U^{t,\theta}\big|^{2+\delta} * \nu_{st}^{t,\theta} = 0$$

tolygiai pagal $\theta \in V$*;*

2) $P^t - \lim\limits_{t\to\infty} U^{t,\theta}(U^{t,\theta})' * \nu_{st}^{t,\theta} = I(s)$ *tolygiai pagal* $\theta \in V$,

čia $\mathbb{I}(A)$ *– aibės* A *indikatorius, o* $I(s)$ *– tam tikra neatsitiktinė simetriška matrica, priklausoma nuo* s*, su baigtiniais elementais;* $a \wedge b = \min(a,b)$.

3) $\lim\limits_{N\to\infty} \sup\limits_{t\in R_+,\theta\in V} P^t(tr[U^{t,\theta}(U^{t,\theta})' * \nu_{st}^{t,\theta}] > N) = 0.$

Tada, tolygiai pagal $\theta \in V$, $\mathcal{L}(Y_{st}^{t,\theta}|P^t) \Rightarrow N(0,I(s))$.

4 Pagrindinis rezultatas

Suformuluosime sąlygas, kuriomis toliau naudosimės.

1B. Sakykime, kad $\frac{d\nu(y)}{d\nu(\theta)} = V(y,\theta)$ yra $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{E}$ – tokia mačioji griežtai teigiama funkcija, kad su visais $t \in R_+$, $\theta, y \in \Theta$, P_y-b.v.,

$$\big(1 - \sqrt{V(y,\theta)}\,\big)^2 * \nu(\theta)_t < \infty, \quad V(\theta,\theta) = 1.$$

2B. Kiekvienam $\theta \in \Theta$ egzistuoja toks skaičius $\delta > 0$, kad funkcijos $V(y,\theta) = V_s(y,\theta,x)$ ir $\ln V(y,\theta) = \ln V_s(y,\theta,x)$, $s \in R_+$, $x \in E$, yra tolydžiai diferencijuojamos (Frešė prasme) taške $y \in U_\delta(\theta) = \{x : |x-\theta| < \delta\}$ erdvėje $L^2_{loc}(\nu(\theta))$ pagal P_θ-tikimybę ir $\dot V(y,\theta) = (\dot V_s^1(y,\theta,x),\ldots,\dot V_s^k(y,\theta,x))'$, $s \in R_+$, $x \in E$, yra (Frešė) išvestinė taške y, o $\frac{\dot V(y,\theta)}{V(y,\theta)} \in L^{2,(k)}_{loc}(\nu(\theta),\mathbb{F},P_\theta)$.

Jei A yra $k\times k$ matrica, o $x,y \in R^k$, tai žymėsime $|A| = (trAA')^{\frac12}$, $|x| = \big(\sum_{i=1}^k x_i^2\big)^{\frac12}$, o (x,y) – skaliarinę vektorių x ir y sandaugą.

Fišerio informaciją žymėsime $I_t(\theta) = \mathbb{E}_\theta \dot V(\theta,\theta)(\dot V(\theta,\theta))' * \nu(\theta)_t$, $\varphi_t(\theta) = [I_t(\theta)]^{-\frac12}$, $\theta_u = \theta + \varphi_t(\theta)$, $U_{\theta,t} = \{u \in R^k : \theta_u \in \Theta\}$, $\theta \in \Theta$, $t \in R_+$, kur matrica $\varphi_t(\theta)$ tokia, kad $\lim_{t\to\infty}\sup_{\theta\in K}|\varphi_t(\theta)| = 0$ kiekvienam kompaktui $K \subset \Theta$.

3B. Kiekvienam kompaktui $K \subset \Theta$ tolygiai pagal $\theta \in K$

$$P_\theta - \lim_{t\to\infty} \varphi_t(\theta)\big[\dot V(\theta,\theta)\big(\dot V(\theta,\theta)\big)' * \nu(\theta)_t\big]\varphi_t(\theta) = I_k,$$

čia I_k – vienetinė $k\times k$ matrica.

4B. Kiekvienam kompaktui $K \subset \Theta$ ir tam tikram $\delta \in (0,1]$ tolygiai pagal $\theta \in K$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_\theta \big|\varphi_t(\theta)\dot V(\theta,\theta)\big|^{2+\delta} * \nu(\theta)_t = 0.$$

5B. Kiekvienam kompaktui $K \subset \Theta$

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{t\in R_+} \sup_{\theta\in K} P_\theta\big\{\mathrm{tr}\big\{\varphi_t(\theta)\big[\dot V(\theta,\theta)\big(\dot V(\theta,\theta)\big)' * \nu(\theta)_t\big]\varphi_t(\theta)\big\} > N\big\} = 0.$$

5 teorema. *Tarkime, kad tenkinamos* 1B–5B *sąlygos ir* $K \subset \Theta$ *yra kompaktas. Tada su visais* $u \in U_{\theta,t}$ *galioja*

$$Z_t(\theta_u,\theta) = \frac{dP^t_{\theta_u}}{dP^t_\theta} = \exp\left\{u'(\eta_{t,\theta} + \delta_{t,\theta}) - \frac{1}{2}u'(I_k + a_{t,\theta})u\right\},$$

kur $\eta_{t,\theta} = \varphi_t(\theta)\dot V(\theta,\theta) * (\mu - \nu(\theta))_t \in \mathcal{M}^{2,(k)}_{loc}(\mathbb{F}, P_\theta)$, $\mathcal{L}(\eta_{t,\theta}|P_\theta) \Rightarrow N(0, I_k)$, $t \to \infty$, *tolygiai su visais* $\theta \in K$, *o* $\delta_{t,\theta}$ *ir* $a_{t,\theta}$ *yra tokie, kad tolygiai pagal* $\theta \in K$

$$P_\theta - \lim_{t\to\infty} \big(|\delta_{t,\theta}| + |a_{t,\theta}|\big) = 0.$$

Čia $\Rightarrow$ *žymi silpną konvergavimą, o* I_k *– vienetinę* $k \times k$ *matricą.*

Įrodymas. Tarkime, kad galioja 1B sąlyga. Tada $P^t_y \ll P^t_\theta$ ir lokalaus tankio procesas turi tokią išraišką:

$$Z_t(y,\theta) = \frac{dP^t_y}{dP^t_\theta} = \exp\big\{\ln V(y,\theta) * \mu_t - \big(V(y,\theta) - 1\big) * \nu(\theta)_t\big\}.$$

Tolimesniame įrodyme reikalinga informacinė Fišerio matrica, kuri pagal apibrėžimą apskaičiuojama formule [6]

$$I_t(\theta) = \mathbb{E}_y\left(\frac{d}{dy}\ln Z_t(y,\theta)\right)\left(\frac{d}{dy}\ln Z_t(y,\theta)\right)'\Bigg|_{y=\theta}.$$

Tarkime, kad tenkinama 2B sąlyga. Tada

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\ln Z_t(y,\theta) &= \frac{\dot V(y,\theta)}{V(y,\theta)} * \mu_t - \dot V(y,\theta) * \nu(\theta)_t = \frac{\dot V(y,\theta)}{V(y,\theta)} * \mu_t - \frac{\dot V(y,\theta)}{V(y,\theta)} * \nu(y)_t\\ &= \frac{\dot V(y,\theta)}{V(y,\theta)} * \big(\mu - \nu(y)\big),\end{aligned}$$

nes $V(y,\theta) = \frac{d\nu(y)}{d\nu(\theta)}$.

Kai $\Theta \subset R^1$, tai

$$I_t(\theta) = \mathbb{E}_y\left[\frac{\dot V(y,\theta)}{V(y,\theta)}*\big(\mu-\nu(y)\big)_t\right]^2\Bigg|_{y=\theta} = \mathbb{E}_y\left(\frac{\dot V(y,\theta)}{V(y,\theta)}\right)^2*\nu(y)_t\Bigg|_{y=\theta} = \mathbb{E}_\theta\dot V(\theta,\theta)^2*\nu(\theta)_t,$$

nes $V(\theta,\theta) = 1$.

Kai $\Theta \subset R^k$, analogiškai gauname

$$I_t(\theta) = \mathbb{E}_\theta \dot V(\theta,\theta)\big(V(\theta,\theta)\big)' * \nu(\theta)_t.$$

Pagal 2B sąlygą pažymėkime $\varphi_t(\theta) = (I_t(\theta))^{-\frac{1}{2}}$, $\theta_u = \theta + \varphi_t(\theta)u$, kur $\lim_{t\to\infty} \sup_{\theta\in K} |\varphi_t(\theta)| = 0$, $K \subset \Theta$ – bet kuris kompaktas.

Pažymėkime $\Delta_t = u\varphi_t(\theta)$. Tada, remiantis 2B sąlyga, atliekami pertvarkymai:

$$\begin{aligned}
\ln Z_t(\theta_u,\theta) &= \ln V(\theta_u,\theta) * \big(\mu - \nu(\theta)\big)_t - \big[V(\theta_u,\theta) - V(\theta,\theta) - \ln V(\theta_u,\theta)\big] * \nu(\theta)_t \\
&= \left(\Delta_t' \int_0^1 \frac{\dot V(\theta + z\Delta_t,\theta)}{V(\theta+z\Delta_t,\theta)} dz\right) * \big(\mu - \nu(\theta)\big)_t \\
&\quad - \left(\Delta_t' \int_0^1 \frac{\dot V(\theta + s\Delta_t,\theta)}{V(\theta+s\Delta_t,\theta)} \big[V(\theta+s\Delta_t,\theta) - V(\theta,\theta)\big] ds\right) * \nu(\theta)_t \\
&= \left(\Delta_t' \int_0^1 \frac{\dot V(\theta + z\Delta_t,\theta)}{V(\theta+z\Delta_t,\theta)} dz\right) * \big(\mu - \nu(\theta)\big)_t \\
&\quad - \left(\Delta_t' \int_0^1 \frac{\dot V(\theta + s\Delta_t,\theta)}{V(\theta+s\Delta_t,\theta)} \int_0^s \dot V(\theta + z\Delta_t,\theta)' dz ds\right) * \nu(\theta)_t \\
&= u'\big[\varphi_t(\theta)\dot V(\theta,\theta) * \big(\mu-\nu(\theta)\big)_t + d_t(\theta)\big] - \frac{1}{2} u'\big(I_k + g_t(\theta)\big)u,
\end{aligned}$$

čia

$$d_t(\theta) = \varphi_t(\theta)\left(\int_0^1 \left(\frac{\dot V(\theta + z\Delta_t,\theta)}{V(\theta+z\Delta_t,\theta)} - \frac{\dot V(\theta,\theta)}{V(\theta,\theta)}\right) dz\right) * \big(\mu - \nu(\theta)\big)_t,$$

$$g_t(\theta) = g_{t,1}(\theta) + g_{t,2}(\theta),$$

$$g_{t,1}(\theta) = \varphi_t(\theta)\big[\dot V(\theta,\theta)\big(\dot V(\theta,\theta)\big)' * \nu(\theta)_t\big]\varphi_t(\theta) - I_k,$$

$$\begin{aligned}
g_{t,2}(\theta) = 2\varphi_t(\theta) \int_0^1 \int_0^s \left[\frac{\dot V(\theta + s\Delta_t,\theta)}{V(\theta+s\Delta_t,\theta)} \big(\dot V(\theta + z\Delta_t,\theta)\big)' - \dot V(\theta,\theta)\big(\dot V(\theta,\theta)\big)'\right] dz ds \\
* \nu(\theta)_t \varphi_t(\theta).
\end{aligned}$$

Pagal martingalų savybes ir pagal 2B sąlygą, kur $\frac{\dot V(y,\theta)}{V(y,\theta)}$ tolydi erdvėje $L^2_{loc}(\nu(\theta))$ pagal P_θ-tikimybę, kai $y \in U_\delta(\theta)$,

$$\begin{aligned}
\big|d_t(\theta)\big| &\leqslant \big|\varphi_t(\theta)\big| \left(\int_0^1 \left|\frac{\dot V(\theta + z\Delta_t,\theta)}{V(\theta+z\Delta_t,\theta)} - \frac{\dot V(\theta,\theta)}{V(\theta,\theta)}\right|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} * \nu(\theta)_t \\
&\leqslant \big|\varphi_t(\theta)\big| \left\| \frac{\dot V(\theta + \varphi_t(\theta)u,\theta)}{V(\theta+\varphi_t(\theta)u,\theta)} - \frac{\dot V(\theta,\theta)}{V(\theta,\theta)}\right\|_{\nu(\theta)_t} \xrightarrow{P_\theta} 0, \quad \text{kai } t \to \infty.
\end{aligned}$$

Iš 3B sąlygos išplaukia, kad tolygiai pagal $\theta \in K$

$$P_\theta - \lim_{t\to\infty} \left|g_{t,1}(\theta)\right| = 0.$$

Atlikus tuos pačius pertvarkymus kaip [18, 14, 16, 12], galima įsitikinti, kad tolygiai pagal $\theta \in K$

$$P_\theta - \lim_{t\to\infty} \left|g_{t,2}(\theta)\right| = 0,$$

kai galioja sąlyga C:

C. Kiekvienam kompaktui $K \subset \Theta$ ir visiems $c \in (0,\infty)$

$$P_\theta - \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^1 \Bigl(\bigl|\varphi_t(\theta)\bigl(\dot V\bigl(\theta + s\varphi_t(\theta)u,\theta\bigr) - \dot V(\theta,\theta)\bigr)\bigr|^2 + \left|\varphi_t(\theta)\left(\frac{\dot V(\theta + s\varphi_t(\theta)u,\theta)}{V(\theta + s\varphi_t(\theta)u,\theta)} - \dot V(\theta,\theta)\right)\right|^2 \Bigr) ds * \nu(\theta)_t = 0$$

tolygiai pagal $\theta \in K$ ir $|u| \leqslant c$, $u \in U_{\theta,t}$.

Nesunku matyti, kad C sąlyga tenkinama, kai $t \to \infty$,

$$\bigl|\varphi_t(\theta)\bigr| \bigl\|\dot V\bigl(\theta + \varphi_t(\theta)u,\theta\bigr) - \dot V(\theta,\theta)\bigr\|_{\nu(\theta)_t} \xrightarrow{P_\theta} 0,$$
$$\bigl|\varphi_t(\theta)\bigr| \left\|\frac{\dot V(\theta + \varphi_t(\theta)u,\theta)}{V(\theta + \varphi_t(\theta)u,\theta)} - \frac{\dot V(\theta,\theta)}{V(\theta,\theta)}\right\|_{\nu(\theta)_t} \xrightarrow{P_\theta} 0$$

tolygiai pagal $\theta \in K$, $|u| \leqslant c$, $u \in U_{\theta,t}$.

Šios abi sąlygos tenkinamos dėl 2B sąlygoje garantuoto $\dot V(y,\theta)$ ir $\frac{\dot V(y,\theta)}{V(y,\theta)}$ tolydumo erdvėje $L^2_{loc}(\nu(\theta))$ pagal P_θ-tikimybę, kai $y \in U_\delta(\theta)$.

Teorema įrodyta. $\square$

4.1 Pavyzdžiai

1. *Daugiavariantinis taškinis procesas*

Tarkime, kad stochastinėje bazėje $(\Omega,\mathcal F,\mathbb F,\mathbb P_\theta,\theta \in \Theta)$ su Lūzino erdve $(E,\mathcal E)$ užduotas daugiavariantinis taškinis procesas (T_n, X_n), $n \geqslant 1$, kurio sveikaskaitis atsitiktinis matas

$$\mu\bigl([0,t]\times \varGamma\bigr) = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb I(T_n \leqslant t)\mathbb I(X_n \in \varGamma), \quad \varGamma \in \mathcal E,\ t \geqslant 0,$$

o $(P_\theta,\mathbb F)$-kompensatoriaus išraiška

$$\nu_t(\theta,\varGamma) = \int\limits_0^t \int\limits_\varGamma h_s(\theta,x) l_s(dx) ds, \quad \varGamma \in \mathcal E,\ \theta \in \Theta \subset R^k,$$

čia $h_s(\theta,x)$ yra $\mathcal P(\mathbb F) \otimes \mathcal E$-mati griežtai teigiama funkcija.

Šiuo atveju B sąlygose funkcija

$$V(y,\theta,t,x) = V_t(y,\theta,x) = \frac{d\nu_t(y,x)}{d\nu_t(\theta,x)} = \frac{h_t(y,x)}{h_t(\theta,x)},$$

o jo išvestinė taške $y=\theta$ yra

$$\dot V(\theta,\theta)=\frac{dV_t(y,\theta)}{dy}\bigg|_{y=\theta}=\frac{\dot h_t(\theta)}{h_t(\theta)}.$$

Tada Fišerio informacija yra

$$I_t(\theta)=\mathbb{E}_\theta\frac{\dot h(\theta)}{h(\theta)}\left(\frac{\dot h(\theta)}{h(\theta)}\right)'*\nu(\theta)_t,\quad \varphi_t(\theta)=\left[I_t(\theta)\right]^{-\frac{1}{2}},$$

o LAN išraiškoje

$$\eta_{t,\theta}=\varphi_t(\theta)\frac{\dot h(\theta)}{h(\theta)}*\left(\mu-\nu(\theta)\right)_t.$$

2. *Atstatymo procesas*

Tarkime, kad atstatymo proceso

$$N_t=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{I}(T_n\leqslant t),\quad t\geqslant 0,$$

tarpiniai atstatymo momentai $X_n=T_n-T_{n-1}$, $n=1,2,\dots$ $(T_0=0)$ nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su pasiskirstymo funkcija

$$F(\theta,t)=P_\theta(X_1\leqslant t)=\int_0^t p(\theta,s)ds,\quad \theta\in\Theta\subset R^k.$$

Tada N_t $(\mathbb{F}^N,P_\theta)$-kompensatoriaus išraiška [11]

$$\nu_t(\theta)=\int_0^t h_\theta(L_s)ds,$$

čia $h_\theta(t)=\frac{p(\theta,t)}{1-F(\theta,t)}$, $L_s=s-T_{N_{s-}}$.

6 teorema. [11] *Jei su visais* $\theta\in\Theta$

$$0<a(\theta)\equiv\mathbb{E}_\theta X_1<\infty,\qquad 0<b(\theta)\equiv\mathbb{E}_\theta u(\theta,X_1)<\infty,$$

tai

$$P_\theta\Bigl(\lim_{t\to\infty}\Psi_t^{-1}(\theta)Y_t(\theta)=1\Bigr)=1,$$

čia $\Psi_t(\theta)=\frac{b(\theta)t}{a(\theta)}$, $Y_t(\theta)=\int_0^t u(\theta,L_s)d\nu_s(\theta)$.

Kadangi pagal šią teoremą P_θ-b.v., kai $t\to\infty$,

$$\begin{aligned}&\left\|f(\theta+h)-f(\theta)-h'\dot f(\theta)\right\|_{\nu_t(\theta)}\\&=\left(\int_0^t\left[f(\theta+h,L_s)-f(\theta,L_s)-h'\dot f(\theta,L_s)\right]^2d\nu_s(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}\\&\sim\left(\frac{t}{a(\theta)}\mathbb{E}_\theta\left[f(\theta+h,X_1)-f(\theta,X_1)-h'\dot f(\theta,X_1)\right]^2\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

jei $0 < a(\theta) < \infty$ ir $\mathbb{E}_\theta|f(\theta, X_1)|^2 < \infty$, $\mathbb{E}_\theta|\dot{f}(\theta, X_1)|^2 < \infty$, tai atsitiktinės funkcijos $f(\theta, L_s)$, $\theta \in \Theta \subset R^k$, diferencijavimas (Frešė prasme) taške θ erdvėje $L^2_{loc}(\nu(\theta))$ pagal P_θ-tikimybę ekvivalentus atsitiktinės funkcijos $f(\theta, X_1)$ diferencijavimui taške θ vidurkio kvadrato prasme, pagal kurį egzistuoja tokia vektorinė funkcija $\dot{f}(\theta, X_1)$, kad $\mathbb{E}_\theta|\dot{f}(\theta, X_1)|^2 < \infty$, $\mathbb{E}_\theta|f(\theta, X_1)|^2 < \infty$ ir

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{|h|^2}\mathbb{E}_\theta\big[f(\theta + h, X_1) - f(\theta, X_1) - h'\dot{f}(\theta, X_1)\big]^2 = 0.$$

Kadangi pagal 6 teoremą

$$\mathbb{E}_\theta \int_0^t \frac{\dot{h}_\theta(L_s)}{h_\theta(L_s)}\left(\frac{\dot{h}_\theta(L_s)}{h_\theta(L_s)}\right)' d\nu_t(\theta) \sim \frac{t}{a(\theta)} I(\theta), \quad \text{kai } t \to \infty,$$

tai kaip Fišerio informacinę matricą imame

$$I_t(\theta) := \frac{t}{a(\theta)} I(\theta), \quad \text{kur } 0 < a(\theta) = \mathbb{E}_\theta X_1 < \infty, \quad I(\theta) = \mathbb{E}_\theta \frac{\dot{h}_\theta(X_1)}{h_\theta(X_1)}\left(\frac{\dot{h}_\theta(X_1)}{h_\theta(X_1)}\right)' < \infty.$$

LAN išraiškoje esanti $\eta_{t,\theta}$ išraiška analogiška daugiavariančio taškinio proceso atvejo išraiškai.

Tada 3B, 4B ir 5B salygos iš karto tenkinamos, kai $0 < a(\theta) = \mathbb{E}_\theta X_1 < \infty$ ir $\mathbb{E}_\theta|\frac{\dot{h}_\theta(X_1)}{h_\theta(X_1)}|^{2+\delta} < \infty$ tam tikram $\delta \in (0, 1]$ su visais $\theta \in K$, o K – bet kuris kompaktas iš Θ.

Literatūra

[1] P. Bickel, Ch. Klaassen, Y. Ritov, J. Wellner. *Efficient and Adaptive Estimation for Semiparametric Models*. Springer, New York, 1998.

[2] N. Diadko. *Freše diferencijuojamumas pagal tikimybę reguliariuose statistiniuose eksperimentuose*. Magistro darbas, Šiauliai, 2015.

[3] J. Hajek. A characterization of limiting distributions of regular estimates. *Z. Wahrsch. Verw. Geb.*, **14**, 1970.

[4] J. Hajek. Local asymptotic minimax and admissibility in estimation. *Proc. 6th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob.*, pp. 175–194, 1972.

[5] I.A. Ibragimov, R.Z. Khas'minskii. Local asymptotic normality for non-identically distributed observations. *Theory Probab. Appl.*, **20**(2):246–260, 1976. https://doi.org/10.1137/1120032.

[6] I.A. Ibragimov, R.Z. Khas'minskii. *Statistical Estimation: Asymptotic Theory*. Springer-Verlag, New York, 1981.

[7] J. Jacod, A.N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[8] Yu.M. Kabanov, R.Sh. Liptser, A.N. Shiryaev. Criteria of absolute continuity of measures corresponding to multivariate point processes. *Lect. Notes Math.*, **550**, 1976.

[9] Yu.M. Kabanov, R.Sh. Liptser, A.N. Shiryaev. Absolute continuity and singularity of locally absolutely continuous probability distributions. I. *Math. USSR-Sb.*, **35**(5):631–680, 1979. https://doi.org/10.1070/SM1979v035n05ABEH001615.

[10] Yu.M. Kabanov, R.Sh. Liptser, A.N. Shiryaev. Absolute continuity and singularity of locally absolutely continuous probability distributions. II. *Math. USSR-Sb.*, **36**(1):31–58, 1980. https://doi.org/10.1070/SM1980v036n01ABEH001760.

[11] V. Kanišauskas. Asymptotic parameter estimation for multivariate point processes. *Lith. Math. J.*, **37**(4):352–363, 1997. https://doi.org/10.1007/BF02465576.

[12] V. Kanišauskas. *Atsitiktinių procesų asimptotinis parametrų įvertinimas ir paprastų hipotezių atskyrimas*. Daktaro disertacija, Vilnius, 1998.

[13] Yu.A. Kutoyants. Estimation of signal parameter in Gaussian noise. *Probl. Inf. Transm.*, **13**(4):266–271, 1977.

[14] Yu.A. Kutoyants. Locally asymptotic normality for processes of Poisson. *Izv. Ak. Nauk Armyanskoi SSSR. Matematika*, **14**(1):3–20, 1979.

[15] Yu.A. Kutoyants. *Estimating the Parameters of Random Processes*. Armenian Academy of Sciences, Yerevan, 1980.

[16] Yu.A. Kutoyants. Estimating the parameters for Poisson type processes. *Izv. Ak. Nauk Armyanskoi SSSR. Matematika*, **19**(3):233–241, 1984.

[17] Yu.N. Lin'kov. On estimates of parameters of counting processes. *Probl. Inf. Transm.*, **18**(1):63–76, 1982.

[18] Yu.N. Lin'kov. *Asymptotic Statistical Methods for Stochastic Processes*. American Mathematical Society, 2001.

[19] L. Le Cam. Locally asymptotically normal families of distributions. *Univ. Calif. Publ. Statist.*, **3**, 1960.

[20] A.F. Taraskin. Lokal'naja asimptotičeskaja bezgraničnaja delimost' semejstv markovskich processov. *Teorija Slučajnych Processov*, **13**, 1985.

[21] A. Wald. Asymptotic most powerful tests of statistical hypotheses. *An. Math. Stat.*, **12**, 1941.

SUMMARY

Local asymptotic normality of statistical models of discrete martingales

K. Kanišauskas

We establish general conditions assuring the local asymptotic normality of statistical experiments of discrete or purely discontinuous local martingales obtained models of point processes of all types were found out. The general conditions include the Fréchet differentiability of parameters in probability in normed spaces with regard to a continuous compensator.

Keywords: discrete or purely discontinuous local martingale; local asymptotic normality; compensator; Fréchet differentiability