

„Kur koks skaičius tinka“ uždaviniai: Lietuvos ir Čekijos atvejų palyginimas

Ieva Kilienė

Matematikos ir informatikos fakultetas, Vilniaus universitetas

Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva

El. paštas: ieva.kiliene@mif.vu.lt

Įteiktas 2023 liepos 7; publikuotas 2023 lapkričio 20

Santrauka. Tekstiniai uždaviniai yra daug išsūkių kelanti tema moksleiviams. Vienas iš jų – neįsiskaitymas į uždavinio sąlygą ir mechaninis uždavinio sprendimas. Šią problemą galima spręsti įtraukiant į mokymo procesą nestandartinius tekstinius uždavinius. Straipsnyje apžvelgiamas nestandartinių uždavinių „Kur koks skaičius tinka“ (angl.: What Numbers Make Sense, WNMS) tipas ir aptariamos jo panaudojimo galimybės. Taip pat pristatomi tyrimo atlikto su Lietuvos ir Čekijos moksleiviais rezultatai.

Raktiniai žodžiai: tekstiniai uždaviniai; nestandartiniai tekstiniai uždaviniai; matematinis samprotavimas

AMS: 20F10, 97E50

Keistai skambėtų jei būtų 3 ateivių arba 4 ateivių, nesirimuoja [Penktokas]

1 Įvadas

Mokykloje dažniausiai sprendžiami standartiniai tekstiniai uždaviniai turintys tik vieną teisingą sprendinį, kuris gaunamas pritaikius tam tikras matematinės operacijas skaičiams pateiktiems uždavinio sąlygoje [4]. Tekstinio uždavinio tikslas nėra vien pritaikyti matematinę operaciją, svarbu, kad mokinys suprastų uždavinio sąlygą, ją nagrinėtų, keltų klausimus, diskutuotų apie galimus sprendimus ir strategijas.

Nestandartiniai uždaviniai „Kur koks skaičius tinka“ (angl.: What Numbers Make Sense, WNMS) yra tokio tipo uždaviniai, kuriuos spęsdami mokiniai turi įsigilinti į uždavinio sąlygą.

Lietuvių ir čekų kalbose yra specifinių taisyklių susijusių su skaičių vartojimu. Šios kalbos ypatybės leidžia sukurti ir panaudoti nestandartinius tekstinius uždavinius, kurie leistų tirti kalbos ir matematikos mokymo sąsajas.

Vadovaudamiesi tyrimu, Čekijos mokslininkų atliktu dviejose Čekijos mokyklose [2], nusprendėme atlikti bendrą tyrimą kartu su viena iš autorių ir pateikti nestandartinius tekstinius uždavinius Lietuvos moksleiviams. Lietuvių ir čekų kalbų panašumas leido tikrinti mokinių argumentavimo ir sprendimo strategijas. Toliau apžvelgsime naudotų nestandartinių uždavinių „kur koks skaičius tinka“ tipą ir potencialą vystyti mokinių argumentavimo ir samprotavimo įgūdžius.

1.1 Teorinė aplinka

Lietuvoje ir Čekijoje moksleiviai sprendžia tekstinius uždavinius nuo pirmos klasės. Pradinėje mokykloje (Lietuvoje 1–4 klasės, Čekijoje 1–5 klasės) mokiniai sprendžia vieno ar dviejų veiksmų tekstinius uždavinius, 5 klasėje ir sudėtingesnius tekstinius uždavinius. Abiejose šalyse dažniausiai mokiniams pateikiami standartiniai tekstiniai uždaviniai. Tuo tarpu patys sprendimo metodai turi skirtumų. Čekijoje moksleiviai perskaitę uždavinį turi užrašyti kas uždavinyje yra duota, apskaičiuoti ir atsakymą užrašyti pilnu sakiniu. Lietuvoje uždaviniai sprendžiami tik užrašant matematinę veiksmą ir trumpą atsakymą (pavyzdžiui: 21 mokinyms).

Šiame tyrime nagrinėjome nestandartinius žodinius uždavinius. Skirtingai nuo standartinių tekstinių uždavinių šiuose uždaviniuose nėra klausimo, bet uždavinio pradžioje yra nurodymas ką atlikti. Skaitinės reikšmės pateikiamos kartu su nurodymu, o ne aprašant situaciją, kaip pateikta sekančiame uždavinyje:

Irašyk skaičius 6, 37, 5, 7 į tinkamas vietas ir pasitikrink, ar teisingai įrašėi.

Jonas perka balionus po centus ir vieną čiulpinuką už centus. Jis sumokėjo centus.

Tekstiniai uždaviniai: „Koks skaičius kur tinka?“ yra tokios struktūros: nurodymas, duomenų aibė (skaičiai, žodžiai ir t. t.) ir tekstinis situacijos aprašymas su paliktomis vietomis, kur duotieji duomenys iš duomenų aibės turi būti įrašyti.

Žodis „tinka“ gali būti interpretuojamas trimis prasmėmis:

- Matematiškai tinka (pavyzdžiui: $6 \cdot 5 + 7 = 37$).
- Tinka pagal kontekstą (kai kurie skaičiai į tam tikras vietas gali netikti pagal kontekstą, pavyzdžiui iš viso sumokėti 5 centus už tai ką įsigijo Jonas atrodo nelogiška).
- Tinka kalbiniu aspektu (atitinka kalbos taisykles, pvz.: 7 balionus, o ne 11 balionus).

Tai, ar mokinys atsižvelgia į šiuos aspektus ar ne, gali paveikti jo sprendimo strategijos pasirinkimą [1], bei procesą kaip uždavinys sprendžiamas [3] ir žinoma sprendimo teisingumą.

1.2 Tyrimo klausimai

Pagal tyrimą, atliktą autorių Mottlová ir Slezáková [2] buvo sukurti nauji to paties tipo tekstiniai uždaviniai, ir tyrimas atliktas dviejose šalyse Lietuvoje ir Čekijoje. Išsikėlėme šiuos tyrimo klausimus:

TK1: Kokias argumentavimo technikas sprendami WNMS tipo tekstinius uždavinius kartu su visa klase mokiniai naudoja?

TK2: Ar Čekijos ir Lietuvos moksleivių naudojami argumentai skiriasi?

Pagrindinis tyrimo tikslas buvo pateikti mokiniams WNMS tipo uždavinius ir analizuoti jų diskusijų sprendimo metu. Norėjome sužinoti kokios bus naudojamos strategijos, ar bus atkreipiamas dėmesys į kalbinius aspektus, ar mokiniai argumentuos savo pasirinkimus. Lietuvoje tokio tipo uždaviniai mokyklose nenaudojami, tad papildomas tikslas buvo stebėti ar šio tipo uždaviniai tinkami ugdyti matematinį samprotavimą, argumentavimo įgūdžius ir ar naudinga juos naudoti pamokoje, bei palyginti Lietuvos moksleivių ir Čekijos moksleivių uždavinių sprendimo eigą.

2 Metodologija

Buvo atlikti du tyrimai Čekijoje ir Lietuvoje. Dalyvavo 28 Čekijos ir 20 Lietuvos 5 klasės moksleivių. Mokiniai dalyvavo taip pat pamokose, jie kartu su visa klase sprendė du netipinius tekstinius uždavinius. Pamokas vedė abi šio tyrimo autorės, pastovios klasių mokytojos stebėjo pamokas. Mokiniai turėjo laiko savarankiškai įsigilinti ir spręsti užduotį ir tada savanoriai buvo kviečiami prie lentos paaiškinti užduoties sprendimą ir įrašyti tinkamus skaičius į laisvas vietas. Kiekvienam atėjusiam mokiniui buvo leidžiama įrašyti po vieną skaičių į uždavinio sąlygą.

2.1 Kalbiniai skirtumai

Vienas pagrindinių komponentų tekstiniuose uždaviniuose yra kalba. Šiame tyrime mums buvo svarbu atsižvelgti į čekų ir lietuvių klabų skirtumus ir panašumus. Lietuvių ir čekų kalbose svarbus veiksnys yra skaičių ir daiktavardžių linksnių derinimas. Abiejose kalbose tam tikri skaičiai dera tik su tam tikromis daiktavardžių galūnėmis. Abi kalbos turi panašias gramatines taisykles skaičiams su daiktavardžiais derinti, bet pačios skaičių grupės skiriasi. Čekų kalboje skaičius galime suskirstyti į tris grupes:

1. Skaičius 1.
2. Skaičiai 2, 3, 4.
3. Ir visi skaičiai didesni už 4.

Lietuvių kalboje taip pat galime išskirti tris grupes.

1. Skaičiai, kurių pavadinimai baigiasi žodžiu vienas: 1, 21, 31, 41, ...
2. Skaičiai, kurie baigiasi nuliu ir visi skaičiai nuo 11 iki 19: 10–20, 30, 40, 50, ...
3. Skaičiai, kurie baigiasi skaičtmenimis 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, išskyrus skaičius nuo 12 iki 19: 2–9, 22–29, 32–39 ...

Siekdami tikslo, kad mokinys įsigilintų į uždavinio sąlygą ir ją suprastų galime pateikti uždavinius, kur mokinys turi į sąlygą įrašyti duotus skaičius. Tuo atveju visai neskaitant sąlygos, jei duota n skaičių ir n tuščių vietų, būdų įrašyti skaičius yra $n!$. Tinkamai suformuluota sąlyga kelia apribojimus, kur skaičiai gali būti įrašyti, juos lemia matematinė išraiška ir tekstinė išraiška.

Uždaviniai buvo pateikti čekiškai Čekijos mokiniams ir lietuviškai Lietuvos mokiniams, žemiau pateikiame uždavinius lietuvių, čekų ir anglų kalbomis. Lietuvių

ir čekų kalba uždavinio formuluotėje žodžių galūnės prie vietų, į kurias reikia įrašyti skaičius tinka tik tam tikriems skaičiams, tuo tarpu anglų kalboje visi skaičiai kalbiniu aspektu tinka į visas laisvas vietas.

2.2 Tyrime naudojami uždaviniai

Naudojome du tekstinius uždavinius. Pirmasis buvo skirtas pristatyti WNMS tipo uždavinius. Tokio tipo uždaviniai įprastai nėra naudojami mokykloje nei Čekijoje nei Lietuvoje. Žemiau pateikiami abu šie uždaviniai lietuvių, čekų ir anglų kalbomis. Pirmajame uždavinyje pasirinkome skaičius iš tų pačių grupių, visi skaičiai pagal linksnius tinka į visas laisvas vietas, todėl kalbiniai aspektai nebuvo svarbūs, svarbu buvo, kad mokiniai susipažintų su užduotimi. Antrąją užduotį pateikėme jau norėdami stebėti patį sprendimo procesą. Jame į pirmą ir trečią laisvas vietas pagal linksnius tinka tik skaičiai 12 ir 18, į antrą ir ketvirtą skaičiai 3 ir 4. Bet pagal matematinę išraišką uždavinį atitinka tik vienas sprendinys.

Įrašyk skaičius 6, 37, 5, 7 į tinkamas vietas ir pasitikrink, ar teisingai įrašei

1.1 Lietuvių kalba:

Jonas perka balionus po centus ir vieną čiulpinuką už centus.
Jis sumokėjo centus.

1.2 Čekų kalba:

Jonáš si do košíku dává balónků po korunách a lízátko za korun. U pokladny zaplatí korun.

1.3 Anglų kalba:

John buys balloons for cents each and one lollipop for cents.
He paid cents.

Įrašyk skaičius 3, 12, 18, 4 į tinkamas vietas ir pasitikrink, ar teisingai įrašei.

2.1 Lietuvių kalba: Planetoje D gyvena ateivių. Jie nusipirko dėžes pirštinių. Kiekvienoje dėžėje buvo pirštinių porų. Kiekvienas ateivis turi rankas. Kai visi užsimovė po pirštinę ant kiekvienos rankos, laisvų pirštinių nebeliko.

2.2 Čekų kalba: Na planetě D je mimozemšťanů. Koupili balíky rukavic. V každém balíku bylo párů. Každý mimozemšťan má ruce s nasazenými rukavicemi. Žádná rukavice v balíku nezbyla.

2.3 Anglų kalba: Planet D is home to aliens. They bought boxes of gloves. Each box contained pairs of gloves. Each alien has hands. Once everyone had put on a glove on each hand, there were no more free gloves left.

Matematinis aspektas

Jei mokiniai pastebi, kad pirmoje tuščioje vietoje netinka skaičiai 3 ir 4, tada jiems lieka tik nuspręsti, tarp skaičių 12 ir 18. Jie gali tai atlikti bandymų ir tikrinimų būdu, bei toliau užpildyti likusias tuščias vietas. Yra tik vienas galimas šio uždavinio sprendimas:

Planetoje D gyvena 18 ateivių. Jie nusipirko 3 dėžes pirštinių. Kiekvienoje dėžėje buvo 12 pirštinių porų. Kiekvienas ateivis turi 4 rankas. Kai visi užsimovė po pirštinę ant kiekvienos rankos, laisvų pirštinių nebeliko.

Kontekstinis aspektas

Uždavinys apie ateivius buvo pasirinktas siekiant sudominti 5 klasės moksleivius. Situacija neatitinka realaus pasaulio objektų, joje minimi ateiviai, todėl mokiniai neturi galvoti apie realaus pasaulio faktų atitikimą. Bet svarbu, kad mokiniai pastebėtų, sąlygoje minimą terminą pora (pirštinių), ir sprendime atsispindėtų ne poros, o pirštinių vienetai.

3 Rezultatai

Šioje dalyje pateikiami mokinių teiginiai, kurie labiausiai atspindi tris uždavinio sprendimo aspektus: kalbinį, matematinį ir kontekstinį sprendžiant antrą uždavinį. Pateikiami abiejų šalių moksleivių teiginių pavyzdžiai kiekvienam iš aspektų ir jie pakomentuoti.

3.1 Kalbiniai aspektai

Kalbiniai aspektai turėjo įtakos uždavinio sprendimui. Ir Lietuvos ir Čekijos moksleiviai įvertino kalbinius aspektus ir pirmiausia į tuščias vietas įrašė skaičius pritaikydami kalbines taisykles. 1 lentelėje: pateikti vaikų argumentų pavyzdžiai kai kalbama apie kalbinį aspektą. Galime pastebėti, kad abiejų šalių mokiniai atkreipė dėmesį į kalbinį aspektą ir nusprendė, kad 3 (arba 4) ateivių yra neteisingas išsireiškimas. Jie išreiškė savo mintis naudodami tokias išraiškas: „nesirimuoja“, „neturi prasmės“, „negali būti“. Po to kai mokiniai tai pastebėjo jiems reikėjo pasirinkti tik tarp 2 skaičių kiek bus ateivių 12 ar 18.

1 lentelė.

Čekijos mokinių argumentai kalbant apie kalbos aspektą	Lietuvos mokinių argumentai kalbant apie kalbos aspektą
mes manome, kad čia yra klaida [ateivių – mimozemštanū]	Negali būt 4 arba 3. Nesirimuoja.
3 ateivių [3 mimozemštanū], neturi prasmės	Ateiviai turėtų būti, bet čia ateivių.
12 dėžes [balíky] arba 18 dėžes [balíky] neturi prasmės, bet 3 dėžes [balíky] ir 4 dėžes [balíky] tinka.	Keistai skambėtų [jei būtų 3 arba 4 ateivių].
kažkiek porų [párů] kiekvienoje pakuotėje, negali būti 3 porų [párů] arba 4 porų [párů], todėl vėl 12 arba 18.	18 porų būtų geriau.

3.2 Matematiniai aspektai

Dažniausiai sprendžiant matematinius uždavinius reikia įvertinti tik matematinius aspektus. Mokiniam pateiktame uždavinyje buvo ir kitų svarbių aspektų, bet skaičiai įrašyti į vietas taip pat turėjo tikti ir pagal matematinius veiksmus. 2 lentelėje pateikti abiejų šalių mokinių argumentų pavyzdžiai, kur kalbama apie matematinį uždavinio

aspektą. Čekijos moksleiviai bandė užrašyti lygtį, Lietuvos moksleiviai naudojo spėjimo – tikrinimo strategiją. Šie pasirinkimai gali priklausyti nuo mokomojo turinio, kurį mokiniai tuo metu nagrinėjo klasėse, ar kitų šalių, ar konkrečios klasės įpročių. Lietuvos moksleiviai gavo galutinį teisingą atsakymą, Čekijos moksleiviai nespėjo to padaryti. Tai gali priklausyti nuo pasirinktų sprendimų strategijų. Iš diskusijų ištraukų galime pastebėti, kad abiejų šalių moksleiviai diskutavo aktyviai ir naudojo matematinius argumentus.

2 lentelė.

Čekijos mokinių argumentai kalbant apie matematinį aspektą	Lietuvos mokinių argumentai kalbant apie matematinį aspektą
Aš žinau, vieną iš šių skaičių [3 arba 4 antrame laukelyje], turi būti padaugintas iš šio skaičiaus [12/18 trečiame laukelyje], kad aš sudauginęs tuos du skaičius ir tuos kitus du. Ir pusė skaičiaus, kurę gaučiau turėtų būti vienas iš šių skaičių.	Nes jei bus 18 ir turės po 4 rankas Tai tada 12... jiem reikia 72 pirštinių. ir jeigu bus 3 dėžės po 12... [skaičiuoja mintyse].

3.3 Kontekstiniai aspektai

Sprendami tekstinius uždavinius mokiniai naudoja savo gyvenimišką patirtį (3 lentelė). Abiejose šalyse mokiniai pastebėjo, kad „pora pirštinių“ yra dvi pirštinės, taip pat jų manymu rankų skaičius turėtų būti lyginis

3 lentelė.

Čekijos mokinių argumentai kalbant apie konteksto aspektą	Lietuvos mokinių argumentai kalbant apie konteksto aspektą
Jei būtų 3 rankos nebūtų porų, nes poros yra po 2	Nes kiekvienas ateivis turi 4 rankas. Nes taip keista. Kiekvienoj pusėj turi būti lygiai [rankų].
Jie turi 4 rankas ir mažesnis skaičius turėtų būti čia (antrame laukelyje), nes jei būtų 4 dėžėje ir jie turėtų 3 rankas, jie neatitiktų porų.	Nes 4, negali mažai gyvent [ateivių].

4 Diskusija

WNMS tipo uždaviniai natūraliai kelia poreikį argumentavimui. Matome, kad abiejų šalių moksleiviai atsižvelgė į visus tris aspektus: matematinį, kalbinį ir konteksto, tai parodo, kad uždavinio tipas skatina vertinti uždavinio situaciją ir į ją įsigilinti. Šio tipo uždaviniai gali būti vienas iš įrankių ugdyti matematinį mąstymą, matematinę kalbą, samprotavimą, bei grąžinti tekstiniam uždaviniui jo prasmę: vertinti pačią uždavinio situaciją. Tai vienas iš būdų mokyti mokinius vieną reprezentaciją pakeisti į kitą: tekstinę istoriją pakeisti į matematinę išraišką.

Literatūra

- [1] M. Hegarty, R.E. Mayer, C.A. Monk. Comprehension of arithmetic word problems: a comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *J. Educ. Psychol.*, **87**(1):18, 1995.
- [2] K. Mottlová, J. Slezáková. What number makes sense? Standard word problems with nonstandard wording. In *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*, number 23, 2022.
- [3] K. Reusser. *From Situation to Equation. On Formulation, Understanding and Solving “Situation Problems”*. Technical report, Institute of Cognitive Science, University of Colorado, 1985.
- [4] L. Verschaffel, F. Depaepe, W. Van Dooren. Word problems in mathematics education. In S. Lerman(Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, pp. 641–645, Dordrecht, 2014. Springer Netherlands. ISBN 978-94-007-4978-8. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_163. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_163.

SUMMARY

Comparison of “What numbers make sense?” problems solving in the Czech Republic and Lithuania

I. Kilienė

Word problems pose many challenges for students. One of them is the failure to understand the task conditions and the mechanical solution of the problem. This problem can be addressed by incorporating non-standard word problems into the learning process. The article reviews the type of non-standard word problems called “Where numbers make sense?” and discusses its potential applications. It also presents the results of a study conducted with students from Lithuania and the Czech Republic.

Keywords: word problems; non-standard word problems; mathematical reasoning