VILNIAUS UNIVERSITETAS

JURIJ NOVICKIJ

BAIGTINIŲ SKIRTUMŲ SCHEMŲ HIPERBOLINEI LYGČIAI SU INTEGRALINĖMIS NELOKALIOSIOMIS KRAŠTINĖMIS SĄLYGOMIS STABILUMO TYRIMAS

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2016

Disertacija rengta 2012–2016 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas

prof. dr. Artūras Štikonas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacijos gynimo taryba:

Pirmininkas

prof. habil. dr. Raimondas Čiegis (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Nariai:

prof. dr. Algirdas Ambrazevičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

doc. dr. Pranas Katauskis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. dr. Grigorij Panasenko (Saint-Etienne universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija bus ginama viešame disertacijos gynimo tarybos posėdyje 2016 m. rugsėjo 28 d. 15 val. 00 min. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Skaitmeninių tyrimų ir skaičiavimo centre, Vaizdo konferencijų salėje, Šaltinių g. 1A.
Adresas: Šaltinių g. 1A, LT-03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2016 m. rugpjūčio 28 d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir Vilniaus universiteto interneto svetainėje adresu: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

VILNIUS UNIVERSITY

JURIJ NOVICKIJ

ON THE STABILITY OF FINITE DIFFERENCE SCHEMES FOR HYPERBOLIC EQUATION WITH NONLOCAL INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS

Summary of doctoral dissertation

Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2016

Doctoral dissertation was written in 2012–2016 at Vilnius University.

Scientific supervisor

prof. dr. Artūras Štikonas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The council:

Chairman

prof. habil. dr. Raimondas Čiegis (Vilnius Gediminas Technical University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Members:

prof. dr. Algirdas Ambrazevičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

assoc. prof. dr. Pranas Katauskis (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

prof. dr. Grigory Panasenko (Université de Saint-Etienne, Physical sciences, Mathematics – 01P)

prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on September 28, 2016 in Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, Digital Science and Computing Center, Video conference hall, Šaltinių st. 1A at 03:00 pm.
Address: Šaltinių st. 1A, LT-03225 Vilnius, Lithuania.

The summary of the doctoral dissertation was distributed on 28 August, 2016.
The dissertation is available at the library of Vilnius University and online at VU site www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

1 Mokslo problemos aktualumas

Nelokaliosios kraštinės sąlygos yra žinomos mokslininkams daugiau kaip 150 metų. Pavyzdžiui, 1896 metais V. A. Steklovas [37, Стеклов] ištyrė kietojo nehomogeninio strypo aušinimo matematinį modelį, kur nelokaliosios sąlygos buvo nustatytos kaip tiesinė nežinomos funkcijos ir jos išvestinių reikšmių ant srities krašto kombinacija. Steklovas nagrinėjo šilumos laidumo lygtį su klasikine pradine sąlyga $U(0,x) = f(x)$ ir kraštinėmis sąlygomis

$$\begin{aligned} L(U) \equiv \quad & a_1 U(t,0) + a_2 \frac{\partial U(t,0)}{\partial x} + a_3 U(t,l) + a_4 \frac{\partial U(t,l)}{\partial x} = 0, \\ L_1(U) \equiv \quad & b_1 U(t,0) + b_2 \frac{\partial U(t,0)}{\partial x} + b_3 U(t,l) + b_4 \frac{\partial U(t,l)}{\partial x} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

čia a_k ir b_k $(k = 1,2,3,4)$ yra konstantos. Nelokaliosios sąlygos (1) yra vadinamos *klasikinėmis nelokaliosiomis sąlygomis*, jei jos susieja nežinomos funkcijos ir jos išvestinių reikšmes tik srities kraštuose. Uždaviniai su analogiško tipo kraštinėmis sąlygomis taip pat buvo nagrinėti 1933 metais T. Karlemano [7, Carleman], 1964 metais R. Bilso [2, Beals] ir F. E. Brauderio [5, Browder] darbuose.

1963 metais Dž. Kenono straipsnyje [6, Cannon] buvo nagrinėta nelokalioji sąlyga

$$\int_0^1 u(x,t)dx = \phi(t). \tag{2}$$

Nelokalioji sąlyga (2) susieja nežinomos funkcijos reikšmes intervale $[0,1]$. Uždaviniai su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis yra vieni iš paprasčiausių tarp daugelio šiuolaikinių matematikų nagrinėjamų nelokaliųjų uždavinių. Nelokaliosios sąlygos atsiranda tada, kai negalima tiesiogiai išmatuoti duomenų nagrinėjamo uždavinio srities krašte. Tokių neklasikinių uždavinių tyrimas ypač aktualus, nes uždavinių su nelokaliosiomis sąlygomis atsiranda įvairiose mokslo srityse, pavyzdžiui, fizikoje, biologijoje, chemijoje ir mechanikoje.

Bicadzės ir Samarskio nelokaliosios sąlygos. 1969 metais A. V. Bicadzė ir A. A. Samarskis pateikė tyrimo rezultatus [4, Бицадзе и Самарский] apie Laplaso lygties

$$\Delta u(x,y) = 0, \qquad -l < x < l, \ 0 < y < 1,$$

su kraštinėmis sąlygomis

$$\begin{aligned} u(x,0) = \phi_1(x), \ u(x,1) = \phi_2(x), \qquad & -l \leqslant x \leqslant l, \\ u(-l,y) = \phi_3(y), \ u(0,y) = u(l,y) \qquad & 0 \leqslant y \leqslant 1, \end{aligned}$$

sprendinių egzistavimą ir vienatį. Čia ϕ_1, ϕ_2 ir ϕ_3 — žinomos tolydžiosios funkcijos. Po darbo publikavimo kraštinės sąlygos

$$u|_{\delta\Omega} = au(\xi) + b, \quad \xi \in \Omega,\ a, b \in \mathbb{R}$$

yra vadinamos Bicadzės ir Samarskio nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. 1977–1987 metais pasirodė N. I. Ionkino ir bendraautorių darbai [20, Ионкин 1977], [21, Ionkin and Moiseev 1980], Samarskio darbas [31, Самарский 1980] ir kiti darbai, kuriuose autoriai nagrinėjo uždavinius su Bicadzės ir Samarskio nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis.

2008 metais A. Aširalievas savo darbe [1, Ashyralyev] nagrinėjo elipsinę lygtį

$$-u''(t) + Au(t) = f(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \quad u(0) = \phi, \quad u(1) = u(\lambda) + \psi,\ 0 \leqslant \lambda < 1,$$

čia A yra teigiamas operatorius Banacho erdvėje. Autorius įrodė sprendinių koercityvines nelygybes Banacho erdvėje ir ištyrė uždavinio išsprendžiamumą.

Šturmo ir Liuvilio uždavinio bei elipsinio skirtuminio operatoriaus su dvitaške Bicadzės ir Samarskio kraštine sąlyga tikrinių reikšmių analizę 2015 metais atliko Elsaidas su bendraautoriais [16, Elsaid *et al.*]. Nagrinėta elipsinė lygtis

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

su kraštinėmis sąlygomis

$$u(x, 0) = u_1(x),\ u(x, 1) = u_2(x),\ u(0, y) = \gamma_1 u(1, y),\ u(\xi, y) = \gamma_2 u(1 - \xi, y),$$

čia ξ, γ_1 ir γ_2 tam tikri parametrai ir $0 < \xi < 1 - \xi < 1$. Autoriai nagrinėjo tikrinių reikšmių uždavinį Šturmo ir Liuvilio baigtinių skirtumų operatoriui su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. Gauti rezultatai buvo pritaikyti dvimačiam diskrečiam tikrinių reikšmių uždaviniui. Autoriai, naudodami kintamųjų atskyrimo metodą, gavo vienmačio uždavinio savybes ir pritaikė jas dvimačiam uždaviniui. Panaši tikrinių reikšmių analizė kito tipo uždaviniams yra padaryta ir Lietuvos matematikų R. Čiegio, M. Sapagovo ir A. Štikono darbuose (pvz., [9–11, 27]).

Daugiataškės nelokaliosios sąlygos. Nelokalioji sąlyga vadinama daugiataške, jei ji susieja nežinomos funkcijos ir jos išvestinių reikšmes mažiausiai trijuose taškuose (srities viduje ir kraštuose). Bendrą nelokaliųjų sąlygų apibrėžimą 2015 metais pateikė B. Pelonis ir D. A. Smitas [28, Pelloni and Smith]

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{m} b_{kj}^r \partial_x^k q(\eta_r, t) = g_j(t), \qquad t \in [0, T],\ j = \overline{0, n-1},$$

čia $m, n \in \mathbb{N}$, ir $0 = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_m = 1$, $b_{kj}^r \in \mathbb{C}$, čia $k, j = \overline{0, n-1}$, $r = \overline{0, m}$.

Uždavinio su nelokaliosiomis daugiataškėmis sąlygomis pavyzdys yra pateiktas D. Gordeziani su bendraautoriais darbe [17, 2010]. Autoriai tiria uždavinį:

$$Lu(\bar{x}) = F(\bar{x}), \quad \bar{x} = (x_0, \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

čia

$$Lu = -\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[K_i(\bar{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] + K(\bar{x})u,$$

$K(\cdot) \geqslant \lambda_i = \text{konst.} > 0$, $i = \overline{0, n}$.

$K(\cdot)$ tenkina kraštinę sąlygą $u(\bar{x}) = \phi(\bar{x})$, $\bar{x} \in \bar{S}_\Gamma$, čia $\bar{S}_\Gamma = \{\bar{x} : x_0 \in [0,1], x_1, \ldots, x_n \in \Gamma\}$, Γ yra Ω kraštas, kai $u(\bar{x}) = \psi(\bar{x})$, $\bar{x} \in \bar{S}_r$, su nelokaliosiomis daugiataškėmis kraštinėmis sąlygomis

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{x_0=0} + \beta_1 u(0,x) &= \gamma_1 u(\eta_1, x) + \delta_1 \frac{1}{\xi_1}\int_0^{\xi_1} u(x_0,x)dx_0 = \phi_1(x),\\
\alpha_2 \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{x_0=1} + \beta_2 u(1,x) &= \gamma_2 u(\eta_2, x) + \delta_2 \frac{1}{1-\xi_2}\int_{\xi_2}^{1} u(x_0,x)dx_0 = \phi_2(x),
\end{aligned}$$

čia $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $0 < \xi_1 \leqslant \xi_2 < 1$; ϕ_1, ϕ_2, ϕ, ir F yra glodžiosios funkcijos; $0 < \eta_1 \leqslant \eta_2 < 1$, α_i, β_i, γ_i, δ_i $(i = 1, 2)$ yra žinomi parametrai. Autoriai įrodė diferencialinio uždavinio sprendinių egzistavimą ir vienatį ir suformulavo skirtuminį uždavinio analogą.

Daugiataškės nelokaliosios sąlygos taip pat nagrinėjamos su netiesinėmis lygtimis. Darbe [12, Das *et al.* 2010] autoriai pateikė antros eilės daugiataškio skirtuminio uždavinio sprendimo algoritmą

$$u''(x) + g(u, u') = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

su klasikine pradine sąlyga ir daugiataške nelokaliąja kraštine sąlyga

$$u(0) = \alpha, \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u(\eta_i) + \gamma_i,$$

čia $\eta_i \in (0,1)$, $i = \overline{0, m}$, α_i ir γ_i žinomi parametrai.

Integralinės nelokaliosios sąlygos. Kai yra daugiataškės nelokaliosios sąlygos, susiejamos sprendinio reikšmės baigtiniame taškų skaičiuje, o kai sąlygos integralinės, susiejami taškai, priklausantys ištisiems intervalams. Tokios sąlygos dažnai atsiranda sprendžiant skysčių mechanikos [25, Нахушев 1982], hidrodinamikos [36, Шелухин 1995] ir [8, Чудновский 1976], tamprumo [13, Day 1985], vibracijų [39, Volkodavov and Zhukov 1998], biologijos [26, Нахушев 1995], plazmos teorijos [15, Diaz and Rakotoson 1996], dalelių difuzijos [24, Mu *et al.* 2010], šilumos laidumo [6, Cannon 1963] ir kitus uždavinius.

Iš šiuolaikinių tiriamų uždavinių su nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis galima paminėti L. S. Pul'kinos darbus [23, 29, 30]. Juose yra įrodytas diferencialinių uždavinių silpnųjų ir stipriųjų sprendinių egzistavimas bei vienatis energetinių nelygybių ir kitais metodais.

2 Disertacijos struktūra

Disertacija parašyta anglų kalba. Ją sudaro įvadas, 4 skyriai, išvados ir literatūros sąrašas. Kiekvienas skirtuminis uždavinys yra nagrinėjamas atskirame skyriuje — suformuluojamas uždavinys, susiję moksliniai rezultatai ir jų reikšmė. Bendra darbo apimtis yra 90 puslapių.

3 Tikslai ir tyrimo objektai

Disertacijos tyrimo objektas — baigtinių skirtumų schemos hiperbolinei lygčiai su integralinėmis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. Darbo tikslas — šių schemų stabilumo tyrimas.

- **Stabilumo sąlygos išreikštinei baigtinių skirtumų schemai.** Pirmajame disertacijos skyriuje nagrinėjama išreikštinė baigtinių skirtumų schema hiperbolinei lygčiai su integralinėmis kraštinėmis sąlygomis. Ištirta perėjimo matricos spektro struktūra, suformuluota ir įrodyta pakankama schemos stabilumo sąlyga.

- **Stabilumo sąlygos baigtinių skirtumų schemų šeimai su vienu svoriu.** Antrajame disertacijos skyriuje nagrinėjama baigtinių skirtumų schemų su vienu svoriu šeima. Diskrečiojo uždavinio spektro struktūros tyrimas atliktas charakteristinių funkcijų pagalba. Suformuluotos ir įrodytos pakankamos schemų stabilumo sąlygos, priklausančios nuo kraštinių sąlygų parametrų ir schemos svorio.

- **Stabilumo sritys baigtinių skirtumų schemų šeimai su dviem svoriais.** Trečiajame disertacijos skyriuje nagrinėjama baigtinių skirtumų schemų su dviem svoriais šeima. Gautos baigtinių skirtumų schemos stabilumo sritys ir stabilumo sąlygos, atsižvelgiant į svorio parametrus σ_1 ir σ_2.

- **Baigtinių skirtumų schemos su bendro pavidalo integralinėmis sąlygomis.** Ketvirtajame disertacijos skyriuje tiriamos nelokaliosios sąlygos, apibendrinančios integralines nelokaliąsias kraštines sąlygas, ištirtos bendro pavidalo integralinės kraštinės sąlygos. Gautos diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio ekvivalentiškumo algebriniam tikrinių reikšmių uždaviniui sąlygos. Nagrinėjamas diskretusis skirtuminis uždavinys su nepilnais integralais kraštinėse sąlygose.

4 Tyrimų metodika

Darbe naudojamas spektrinis baigtinių skirtumų schemų tyrimo metodas. Nagrinėjama skirtuminių operatorių spektro struktūra naudojant skaitinius metodus bei charakteristinės funkcijos analizės metodus. Taip pat taikomi skaitinis eksperimentas naudojant Maple programų paketą ir JAVA programavimo kalbą.

5 Moksliniai rezultatai

Žymėjimai

Disertacijoje naudojami tokie tinklai:

$$\overline{\omega}^h := \left\{x_i \colon x_i = ih, i = \overline{0,N}\right\};\ h = L/N, \quad \overline{\omega}^\tau := \left\{t^j \colon t^j = j\tau, j = \overline{0,M}\right\};\ \tau = T/M.$$

Matricos $\mathbf{A}$ spektinį spindulį žymėsime $\rho(\mathbf{A}) := \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |\lambda_i(\mathbf{A})|$, čia $\lambda_i(\mathbf{A})$ yra matricos $\mathbf{A}$ tikrinė reikšmė.

Darbe naudoti skirtuminiai operatoriai:

$$\begin{aligned}
\delta := \delta_x : \overline{\omega}^h \to \omega^h \cup \{x_N\}, \quad \delta U &:= \frac{U_i - U_{i-1}}{h}, \\
\delta_x^2 : \overline{\omega}^h \to \omega^h, \quad \left(\delta_x^2 U\right)_i &:= \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}, \\
\overline{\partial}_t : \overline{\omega}^\tau \to \widetilde{\omega}^\tau, \quad \overline{\partial}_t U &:= \frac{U - \check{U}}{\tau}.
\end{aligned}$$

Žymėjimas δ_i^j ($\delta^i := \delta_i^i$) reiškia Kronekerio delta žymėjimą:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 0 & \text{kai } j \neq i, \\ 1 & \text{kai } j = i. \end{cases}$$

Pirmasis skyrius

Pirmajame disertacijos skyriuje nagrinėjama hiperbolinė lygtis

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad x \in (0,1), \quad t \in (0,T], \tag{3}$$

su klasikinėmis pradinėmis sąlygomis

$$u(x,0) = \phi(x), \quad x \in [0,1], \tag{4}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \in [0,1], \tag{5}$$

ir nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis

$$u(0,t) = \gamma_0 \int\limits_0^1 u(\xi,t)\,d\xi + \mu_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{6}$$

$$u(1,t) = \gamma_1 \int\limits_0^1 u(\xi,t)\,d\xi + \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{7}$$

čia γ_0 ir γ_1 — parametrai, $f(x,t)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$, $\mu_1(t)$ ir $\mu_2(t)$ — žinomos funkcijos.

Suformuluojame uždaviniui (3)–(7) atitinkantį skirtuminį uždavinį

$$\overline{\partial}_t^2 U - \delta_x^2 U = F, \qquad (x_i,t_j) \in \omega^h \times \omega^\tau, \tag{8}$$

$$U^0 = \Phi, \qquad x_i \in \overline{\omega}^h, \tag{9}$$

$$\overline{\partial}_t U^1 = \Psi, \qquad x_i \in \overline{\omega}^h, \tag{10}$$

$$U_0^{j+1} = \gamma_0 h \left(\frac{U_0^{j+1} + U_N^{j+1}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} U_i^{j+1} \right) + {\mu_1}^{j+1}, \tag{11}$$

$$U_N^{j+1} = \gamma_1 h \left(\frac{U_0^{j+1} + U_N^{j+1}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} U_i^{j+1} \right) + {\mu_2}^{j+1}, \tag{12}$$

čia $F := F_i^j = f(x_i,t_j)$, $\Phi := \Phi_i = \phi(x_i)$ ir $\Psi := \Psi_i = \psi(x_i) + \frac{\tau}{2}\left(\delta_x^2 U^0 + f(x_i,t_0)\right)$. Kraštinės sąlygos (11)–(12) yra integralinių kraštinių sąlygų (6)–(7) aproksimacija trapecijų formule.

Uždavinį (8)–(12) užrašome kanoniniu trisluoksnės baigtinių skirtumų schemos pavidalu

$$\mathbf{I}U^{j+1} + \mathbf{B}U^j + \mathbf{I}U^{j-1} = \tau^2 \mathbf{F}, \tag{13}$$

$$\mathbf{B} = -\left(2\mathbf{I} - \tau^2 \mathbf{\Lambda}\right), \quad \mathbf{F} = \left(\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_{N-1}\right)^\top, \tag{14}$$

čia $\mathbf{I}$ vienetinė matrica, $\widetilde{F}_i = F_i$, $i = \overline{2, N-2}$, ir $\widetilde{F}_i = \widetilde{F}_i\big(F_i, \mu_1, \mu_2\big)$, kai $i = 1, N-1$, U^j yra $(N-1)$ eilės vektorius, ir

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2-a & -1-a & -a & -a & \ldots & -a & -a & -a & -a \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -b & -b & -b & -b & \ldots & -b & -b & -1-b & 2-b \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$a = \frac{h\gamma_0}{1 - \frac{h}{2}\gamma}, \quad b = \frac{h\gamma_1}{1 - \frac{h}{2}\gamma},$$

čia ir toliau $\gamma := \gamma_0 + \gamma_1 \neq 2/h$.

Trisluoksnė baigtinių skirtumų schema (13) paverčiama dvisluoksne

$$V^{j+1} = \mathbf{S}V^j + \mathbf{G}, \tag{16}$$

čia

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\mathbf{B} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \tau^2\mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Matricai $\mathbf{S}$ suformuluojamas tikrinių reikšmių uždavinys

$$\det(\mathbf{S} - \mu\mathbf{I}) = 0, \tag{17}$$

ir formuluojami pagrindiniai pirmojo skyriaus rezultatai.

5.1 lema (disertacijos **Lemma 1.4**). *Matricos* $\mathbf{S}$ *tikrines reikšmes* μ *galima rasti iš apibendrintojo tikrinių reikšmių uždavinio*

$$\left(\mu^2\mathbf{I} + \mu\mathbf{B} + \mathbf{I}\right)\mathbf{V} = 0. \tag{18}$$

5.2 lema (**Lemma 1.6**). *Trisluoksnės schemos (8)–(12) kiekvieną matricos* $\mathbf{\Lambda}$ *tikrinę reikšmę* λ_k $(k = \overline{1, N-1})$ *atitinka dvi matricos* $\mathbf{S}$ *tikrinės reikšmės*

$$\mu_k^m = \left(1 - \frac{\tau^2\lambda_k}{2}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\tau^2\lambda_k}{2}\right)^2 - 1}, \quad m = 1, 2. \tag{19}$$

5.3 lema (**Lemma 1.7**). *Tegul* λ_k *ir* $\mathbf{V}_k$ *yra atitinkamai matricos* $\mathbf{\Lambda}$ *tikrinė reikšmė ir tikrinis vektorius, o* μ_k^m, $m = 1, 2$ $(\mu_k^1 \neq \mu_k^2)$ *yra matricos* $\mathbf{S}$ *tikinės reikšmės, atitinkančios* λ_k. *Tada*

$$\mathbf{W}_k^m = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_k \\ \dfrac{1}{\mu_k^m}\mathbf{V}_k \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, \tag{20}$$

yra tiesiškai nepriklausomi matricos $\mathbf{S}$ *tikriniai vektoriai.*

5.4 teorema (**Theorem 1.8**). *Trisluoksnei schemai (8)–(12) lygybė* $\rho(\mathbf{S}) = 1$ *yra teisinga bet kokiam* $h > 0$ *ir* $\tau \leqslant h$ *tada ir tik tada, kai matricos* $\mathbf{\Lambda}$ *tikrinės reikšmės* λ_k *yra neneigiamos.*

5.5 išvada. *Pakankamoji išreikštinės baigtinių skirtumų schemos (8)–(12) stabilumo sąlyga yra* $\gamma < 2$, *kai* $\tau \leqslant h$.

Antrasis skyrius

Antrajame skyriuje nagrinėjama baigtinių skirtumų schema su svoriu σ, atitinkanti diferencialinį uždavinį (3)–(7):

$$\overline{\partial}_t^2 U - \delta_x^2 U^{(\sigma)} = F, \quad (x_i, t_j) \in \omega^h \times \omega^\tau, \tag{21}$$

$$U^0 = \Phi, \quad x_i \in \overline{\omega}^h, \tag{22}$$

$$\overline{\partial}_t U^1 = \Psi, \quad x_i \in \overline{\omega}^h, \tag{23}$$

$$U_0 = \gamma_0[1, U] + V_l, \quad t^j \in \widetilde{\omega}^\tau \backslash \{t^1\}, \tag{24}$$

$$U_N = \gamma_1[1, U] + V_r, \quad t^j \in \widetilde{\omega}^\tau \backslash \{t^1\}, \tag{25}$$

čia $U^{(\sigma)} := \sigma U^{j+1} + (1 - 2\sigma)U^j + \sigma U^{j-1}$, σ — baigtinių skirtumų schemos svoris, $[\cdot, \cdot]$ — sumos žymėjimas:

$$[U, V] := \frac{U_0 V_0 h}{2} + (U, V) + \frac{U_N V_N h}{2}, \quad (U, V) := \sum_{i=1}^{N-1} U_i V_i h.$$

Analogiškai kaip ir pirmajame skyriuje baigtinių skirtumų schema užrašoma trisluoksniu pavidalu

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{U}} + \mathbf{B}\mathbf{U} + \mathbf{C}\check{\mathbf{U}} = \tau^2 \mathbf{F}, \tag{26}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} = \mathbf{I} + \tau^2 \sigma \mathbf{\Lambda}, \ \mathbf{B} = -2\mathbf{I} + \tau^2(1 - 2\sigma)\mathbf{\Lambda}, \tag{27}$$

ir paverčiama dvisluoksniu pavidalu

$$\hat{\mathbf{W}} = \mathbf{S}\mathbf{W} + \mathbf{G}, \tag{28}$$

čia

$$\hat{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{U}} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}, \ \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \check{\mathbf{U}} \end{pmatrix}, \ \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \ \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \tau^2 \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{29}$$

čia $\hat{\mathbf{U}} = U^{j+1}$ ir $\check{\mathbf{U}} = U^{j-1}$, $j = \overline{1, N-1}$.

5.6 pastaba (*Remark 2.5*). Tegul matricos $\mathbf{\Lambda}$ tikrinės reikšmės yra realios. Tada, jei σ tenkina nelygybę:

$$-\frac{1}{\tau^2 \max(0, \lambda_{\max})} < \sigma < -\frac{1}{\tau^2 \min(0, \lambda_{\min})},$$

tai $\det \mathbf{A} > 0$ ir egzistuoja $\mathbf{A}^{-1}$.

Matricai $\mathbf{\Lambda}$ yra suformuluojamas diskretusis tikrinių reikšmių uždavinys

$$-\delta_x^2 U = \lambda U, \quad U \in \omega^h, \tag{30}$$

$$U_0 = \gamma_0[1, U], \quad U_N = \gamma_1[1, U]. \tag{31}$$

ir gaunama rezultatų, kurie papildo M. Sapagovo įrodytą lemą [34, 2012].

5.7 lema (**Lemma 2.11**). *Tokios tikrinių reikšmių savybės yra teisingos:*

1) jei $\gamma < 2$, *tai* $\lambda \in (0, 4/h^2]$*;*

2) jei $\gamma \nearrow 2/h$, *tai* $\lambda_1 \to -\infty$*;*

3) jei $\gamma = 2/h$, *tada tikrinių reikšmių uždavinys neapibrėžtas;*

4) jei $\gamma \searrow 2/h$, *tai* $\lambda_1 \to +\infty$*;*

5) jei $\gamma > 2/h$, *tai visos tikrinės reikšmės* λ *yra teigiamos.*

Taip pat yra formuluojami pagrindiniai antrojo skyriaus rezultatai.

5.8 lema (**Lemma 2.18**). *Kiekvieną tikrinę reikšmę* $\lambda_k\big(\mathbf{\Lambda}\big)$, $k = \overline{1, N-1}$, *atitinka dvi matricos* $\mathbf{S}$ *tikrinės reikšmės* μ_k^1 *ir* μ_k^2*:*

$$\mu_k^m = -b_k \pm \sqrt{b_k^2 - 1}, \quad m = 1, 2, \quad b_k = \frac{-1 + \tau^2(1/2 - \sigma)\lambda_k}{1 + \tau^2 \sigma \lambda_k}, \quad k = \overline{1, N-1}. \tag{32}$$

5.9 teorema (**Theorem 2.24**). *Jei* $\gamma < 2$ *ir*

$$\sigma > \frac{1}{4} - \frac{1}{\tau^2 \lambda_{\max}}, \tag{33}$$

tai baigtinių skirtumų schema su svoriais (21)–(25) *yra stabili.*

5.10 pastaba (*Remark 2.25*). Gauta stabilumo sąlyga (33) analogiška stabilumo sąlygai trisluoksnei baigtinių skirtumų schemai su klasikinėmis Dirichlė kraštinėmis sąlygomis (žr. [33, Samarskii 2001]).

5.11 pastaba (*Remark 2.26*). Jei $\gamma < 2$, tai tikrinės reikšmės λ_k, $k = \overline{1, N-1}$, yra intervale $(0, 4/h^2)$. Todėl nelygybė

$$\sigma \geqslant \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4\tau^2}$$

yra pakankama stabilumo sąlyga. Jei $\sigma \geqslant 1/4$, tai baigtinių skirtumų schema su svoriais besąlygiškai stabili. Jei $\sigma = 0$, tada baigtinių skirtumų schema stabili su sąlyga $\tau \leqslant h$.

Trečiasis skyrius

Trečiajame skyriuje nagrinėjama baigtinių skirtumų schema su dviem svoriais

$$\overline{\partial}_t^2 U - \delta_x^2 U^{(\sigma)} = F, \quad (x_i, t_j) \in \omega^h \times \omega^\tau, \tag{34}$$

$$U^0 = \Phi, \quad x_i \in \overline{\omega}^h, \tag{35}$$

$$\overline{\partial}_t U^1 = \Psi, \quad x_i \in \overline{\omega}^h, \tag{36}$$

$$U_0 = \gamma_0[1, U] + V_l, \quad t^j \in \widetilde{\omega}^\tau \backslash \{t^1\}, \tag{37}$$

$$U_N = \gamma_1[1, U] + V_r, \quad t^j \in \widetilde{\omega}^\tau \backslash \{t^1\}, \tag{38}$$

čia $U^{(\sigma)} = \sigma_1 \check{U} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)U + \sigma_2 \widehat{U}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$. Iš antrojo skyriaus yra žinoma, kad matricos $\mathbf{S}$ tikrinės reikšmės μ randamos iš lygčių

$$\mu^2 \lambda_k(\mathbf{A}) + \mu \lambda_k(\mathbf{B}) + \lambda_k(\mathbf{C}) = 0, \quad k = \overline{1, N-1}, \tag{39}$$

čia $\lambda_k(\mathbf{M})$ yra matricos $\mathbf{M}$ ($\mathbf{M} = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$) tikrinės reikšmės.

Jei polinomas $p(\mu, \lambda) := a(\lambda)\mu^2 + b(\lambda)\mu + c(\lambda)$ tenkina šaknų kriterijų [22, 38], tai λ priklauso stabilumo sričiai, kurią apibrėžia lygtis $p(\mu, \lambda) = 0$.

Įstatę $z := \tau\lambda$ į lygtį (39) turėsime:

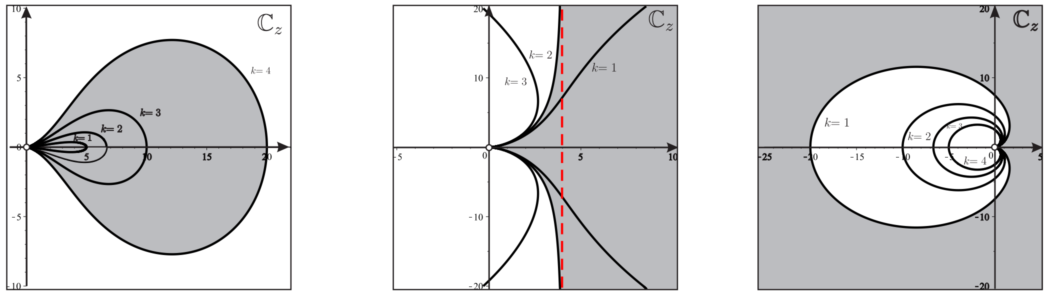
$$z(\mu) = -\frac{(\mu - 1)^2}{\sigma_1 \mu^2 + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)\mu + \sigma_2}. \tag{40}$$

Įstatę $\mu = e^{\imath\varphi}$, $\varphi \in (-\pi, +\pi]$, gauname stabilumo srities krašto formulę

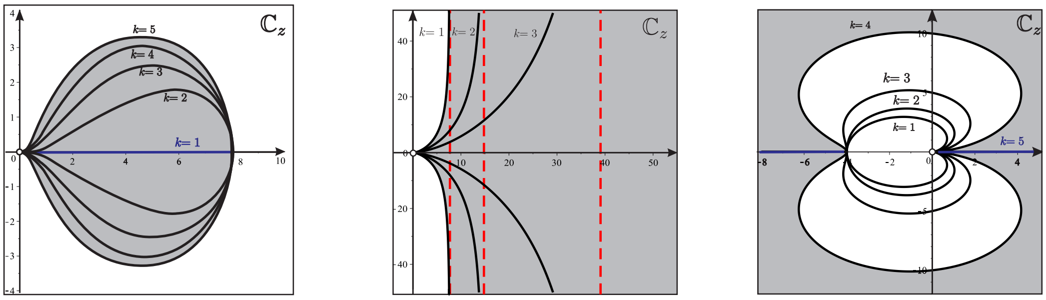
$$z(\varphi) = \frac{2(1 - \cos\varphi)\left(1 - (\sigma_1 + \sigma_2)(1 - \cos\varphi) - (\sigma_1 - \sigma_2)\imath \sin\varphi\right)}{\left(1 - (\sigma_1 + \sigma_2)(1 - \cos\varphi)\right)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)\sin^2\varphi}. \tag{41}$$

Skirtingos stabilumo sritys vaizduojamos 1 pav. Disertacijoje atlikta stabilumo sričių analizė ir padarytos tokios išvados:

- Baigtinių skirtumų schema su dviem svoriais turi stabilumo sritį, jei $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$. Jeigu schemos spektras yra intervale $(0, \infty)$, tai antroji stabilumo sąlyga yra $\sigma_1 + \sigma_2 \geqslant 1/2$ (analogiška stabilumo sąlyga buvo gauta darbe [33, Samarskii 2001]).
- Stabilumo sritis priklauso nuo $\sigma_1 - \sigma_2$. Jei $\sigma_1 - \sigma_2 < 1/2$, tai stabilumo sritis aprėžta, jei $\sigma_1 - \sigma_2 \geqslant 1/2$, — neaprėžta.
- Jei spektre yra kompleksinių tikrinių reikšmių su sąlyga $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, tai baigtinių skirtumų schema nestabili.



(a) $\sigma_1 = 0.1k$, $\sigma_2 = 0$, $k = \overline{1,4}$ (b) $\sigma_1 = 0.46 + 0.02k$, $\sigma_2 = 0$, $k = \overline{1,3}$ (c) $\sigma_1 = 0.5 + 0.1k$, $\sigma_2 = 0$, $k = \overline{1,4}$



(d) $\sigma_1 + \sigma_2 = 0.25$, $\sigma_1 = 0.07k$, $k = \overline{1,5}$ (e) $\sigma_1 + \sigma_2 = 0.5$, $\sigma_1 = 0.48 - 0.05k$, $k = \overline{1,3}$ (f) $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$, $\sigma_1 = 0.1k$, $k = \overline{1,5}$

1 pav.: Stabilumo sritys, kai skirtingos svorių σ_1 ir σ_2 reikšmės.

Ketvirtasis skyrius

Ketvirtajame skyriuje išnagrinėtas diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio ekvivalentiškumas algebriniam tikrinių reikšmių uždaviniui. Tirtas uždavinys

$$\mathcal{L}U := -\delta(P\delta U) + QU = \lambda U, \quad x_i \in \omega^h, \tag{42}$$

$$\langle k_0, U\rangle = \gamma_0\langle n_0, U\rangle, \quad \langle k_1, U\rangle = \gamma_1\langle n_1, U\rangle, \tag{43}$$

čia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ yra tiesinis funkcionalas, aprašantis klasikinę ($\langle k_i, U\rangle$, $i = 0, 1$) ir nelokaliąją ($\langle n_i, U\rangle$, $i = 0, 1$) kraštinių sąlygų dalis, koeficientai P ir Q yra realiosios funkcijos.

Algebrinis uždavinys yra išsigimęs, jei negalima išreikšti U_0 ir U_N iš kraštinių sąlygų. Nelokaliosios kraštinės sąlygos (43) perrašomos kaip algebrinių lygčių sistema atžvilgiu nežinomos fukcijos U

$$\begin{pmatrix} \langle k_0 - \gamma_0 n_0, \delta^0\rangle & \langle k_0 - \gamma_0 n_0, \delta^N\rangle \\ \langle k_1 - \gamma_1 n_1, \delta^0\rangle & \langle k_1 - \gamma_1 n_1, \delta^N\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \gamma_0 n_0 - k_0, \mathring{U}\rangle \\ \langle \gamma_1 n_1 - k_1, \mathring{U}\rangle \end{pmatrix}, \tag{44}$$

čia $\mathring{U} = 0$, kai $i = 0$, $i = N$ ir $\mathring{U} = U$ kitu atveju.

Lygčių sistema (44) yra išsigimusi, jei

$$\gamma_0\gamma_1\mathrm{D}(n_0, n_1) + \gamma_0\mathrm{D}(n_0, k_1) + \gamma_1\mathrm{D}(n_1, k_0) + \mathrm{D}(k_0, k_1) = 0, \tag{45}$$

čia

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(n_0, n_1) &= \begin{vmatrix} \langle n_0, \delta^0 \rangle & \langle n_0, \delta^N \rangle \\ \langle n_1, \delta^0 \rangle & \langle n_1, \delta^N \rangle \end{vmatrix}, \ \mathrm{D}(k_1, n_0) = \begin{vmatrix} \langle k_1, \delta^0 \rangle & \langle k_1, \delta^N \rangle \\ \langle n_0, \delta^0 \rangle & \langle n_0, \delta^N \rangle \end{vmatrix}, \\
\mathrm{D}(n_1, k_0) &= \begin{vmatrix} \langle n_1, \delta^0 \rangle & \langle n_1, \delta^N \rangle \\ \langle k_0, \delta^0 \rangle & \langle k_0, \delta^N \rangle \end{vmatrix}, \ \mathrm{D}(k_0, k_1) = \begin{vmatrix} \langle k_0, \delta^0 \rangle & \langle k_0, \delta^N \rangle \\ \langle k_1, \delta^0 \rangle & \langle k_1, \delta^N \rangle \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{46}$$

Teisinga tokia lema.

5.12 lema (Lemma 4.1). *Uždavinio (42)–(43) išsigimimo sritis parametrų γ_0, γ_1 plokštumoje $\mathbb{R}^2$ gali būti penkių tipų:*

1. *Jei $D(n_0, n_1) = D(k_0, k_1) = D(n_0, k_1) = D(k_0, n_1) = 0$ — visa plokštuma;*
2. *Jei $D(n_0, n_1) = D(n_0, k_1) = D(k_0, n_1) = 0$, $D(k_0, k_1) \neq 0$ — tuščia aibė;*
3. *Jei $D(n_0, n_1) = 0$, $D(n_0, k_1) \neq 0$ arba $D(n_0, n_1) = 0$, $D(k_0, n_1) \neq 0$ — tiesė;*
4. *Jei $D(n_0, n_1) \neq 0$ ir $\det \mathrm{A} = 0$ — vertikalios ir horizontalios tiesių sąjunga;*
5. *Jei $D(n_0, n_1) \neq 0$ ir $\det \mathrm{A} \neq 0$ — hiperbolė.*

Ketvirtajame skyriuje nagrinėjamas skirtuminis hiperbolinis uždavinys (21)–(23) su nepilnais integralais kraštinėse sąlygose:

$$\begin{aligned}
U_0 &= \gamma_0[\chi^0, U] + V_l, \quad t^j \in \overline{\omega}^\tau, \\
U_n &= \gamma_1[\chi^1, U] + V_r, \quad t^j \in \overline{\omega}^\tau.
\end{aligned} \tag{47}$$

čia

$$\chi_{[a,b]}(x_j) = \begin{cases} 0 & x_j < a \text{ arba } x_j > b, \\ \frac{h}{2} & x_j = a \text{ arba } x_j = b, \\ h & a < x_j < b. \end{cases}$$

Tiriant skirtuminio uždavinio spektrą, gautas parametrų γ_0, γ_1 ir parametro q (kuris aprašo tikrines reikšmes λ) ryšys, priklausantis nuo svorinių funkcijų χ^0 ir χ^1:

$$\gamma_0\gamma_1 \begin{vmatrix} [\chi^0, \cos(qx)] & [\chi^0, \sin(qx)] \\ [\chi^1, \cos(qx)] & [\chi^1, \sin(qx)] \end{vmatrix} - \gamma_0[\chi^0, \sin q(1-x)] - \gamma_1[\chi^1, \sin(qx)] + \sin q = 0.$$

6 Mokslinis naujumas

Šioje disertacijoje išnagrinėtas trisluoksnės baigtinių skirtumų schemos hiperbolinei lygčiai su integralinėmis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis stabilumas. Dauguma matematinių rezultatų, pateiktų šioje disertacijoje, yra nauji suformuluotam uždaviniui ir iki šiol nebuvo aprašyti mokslinėje literatūroje. Kai kurie metodai buvo naudoti kitiems matematinės fizikos uždaviniams, tačiau šių metodų taikymas hiperboliniams uždaviniams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis yra visiškai naujas.

7 Praktinė reikšmė

Stabilumas yra viena iš esminių baigtinių skirtumų schemų teorijos sąvokų. Gautos stabilumo sąlygos gali būti panaudotos skaitiniais metodais modeliuojant procesus, kurie aprašomi hiperbolinėmis lygtimis su integralinėmis nelokaliosiomis sąlygomis, pavyzdžiui, požeminio vandens tekėjimo modeliavimas su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis [3, Beilin 2001] ir [14, Dehghan 2005], svyravimų procesus [18, Gordeziani ir Avalishvili 2000], irigacijos modelius [35, Serbina 2007] ir kitus procesus. Spektro analizės rezultatai naudingi konstruojant naujas baigtinių skirtumų schemas ir tiriant tam tikrų schemų stabilumo sritis.

8 Ginamieji teiginiai

- Išreikštinės baigtinių skirtumų schemos hiperbolinei lygčiai su integraline nelokaliąja kraštine sąlyga pakankamoji stabilumo sąlyga yra $\gamma_0 + \gamma_1 < 2$, kai $\tau \leqslant h$.

- Baigtinių skirtumų schemos su vienu svoriu σ hiperbolinei lygčiai su integraline nelokaliąja kraštine sąlyga pakankamoji stabilumo sąlyga yra $\gamma_0 + \gamma_1 < 2$ ir $\sigma > \frac{1}{4} - \frac{1}{\tau^2 \lambda_{\max}}$.

- Baigtinių skirtumų schema su vienu svoriu σ hiperbolinei lygčiai su integraline nelokaliąja kraštine sąlyga yra nestabili, jei skirtuminio uždavinio spektras turi kompleksinių tikrinių reikšmių.

- Baigtinių skirtumų schema su dviem svoriais σ_1 ir σ_2 hiperbolinei lygčiai su integraline nelokaliąja kraštine sąlyga turi stabilumo sritį, jei $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$. Jei skirtuminio uždavinio spektras yra realusis, antroji stabilumo sąlyga yra $\sigma_1 + \sigma_2 \geqslant 1/2$.

- Baigtinių skirtumų schemos su dviem svoriais σ_1 ir σ_2 hiperbolinei lygčiai su integraline nelokaliąja kraštine sąlyga stabilumo sritis yra aprėžta, jei $\sigma_1 - \sigma_2 < 1/2$. Priešingu atveju ($\sigma_1 - \sigma_2 \geqslant 1/2$) stabilumo sritis neaprėžta.
- Baigtinių skirtumų schema su dviem svoriais σ_1 ir σ_2 hiperbolinei lygčiai su integraline nelokaliąja kraštine sąlyga yra nestabili, jei skirtuminio uždavinio spektras turi kompleksinių tikrinių reikšmių.

9 Autoriaus publikacijos

Disertacijos rezultatai paskelbti penkiuose straipsniuose, iš jų dvi mokslinės publikacijos yra „Web of Science“ duomenų bazėje:

1. J. Novickij, A. Štikonas, On the stability of a weighted finite difference scheme for wave equation with nonlocal boundary conditions, *Nonlinear Anal. Model. Control*, **19**(3):460–475, 2014.
2. F. F. Ivanauskas, Yu. A. Novitski, and M. P. Sapagovas. On the stability of an explicit difference scheme for hyperbolic equations with nonlocal boundary conditions, *Differ. Equ.*, **49**(7):849–856, 2013 (vertimas iš: Ф. Ф. Иванаускас, Ю. А. Новицкий, М. П. Сапаговас, Об устойчивости явной разностной схемы для гиперболических уравнений с нелокальными краевыми условиями, *Дифференц. Уравнения*, **49**(7), с. 877–884, 2013).

Trys mokslinės publikacijos paskelbtos konferencijų darbų rinkiniuose

3. J. Novickij, A. Skučaitė, and A. Štikonas, On the stability of a weighted finite difference scheme for hyperbolic equation with integral boundary conditions, In *Proc. Numerical Mathematics and Advanced Applications – ENUMATH 2015*, *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, Vol. 112, Springer International Publishing, 2016.
4. J. Novickij, A. Štikonas, On the equivalence of discrete Sturm–Liouville problem with nonlocal boundary conditions to the algebraic eigenvalue problem, *Liet. matem. rink. Proc. LMS, Ser. A*, **56**:66–71, 2015.
5. J. Novickij, A. Štikonas, On the stability of a finite difference scheme with two weights for wave equation with nonlocal conditions, *Liet. matem. rink. Proc. LMS*, *Ser. A*, **55**:22–27, 2014.

10 Darbo rezultatų aprobavimas

Konferencijos: Disertacijos rezultatai pristatyti šiose tarptautinėse konferencijose

- *Hyp2016*, Aachen, Germany, August 1–5, 2016.
- *Actual Problems in Theory of Partial Differential Equations, dedicated to the centenary of Andrey V. Bitsadze*, Moscow, Russia, June 15–18, 2016.
- *MMA2016*, Tartu, Estonia, June 1–4, 2016.
- *ENUMATH2015*, Ankara, Turkey, September 14–18, 2015.
- *MMA2015*, Sigulda, Latvia, May 26–29, 2015.
- *MMA2014*, Druskininkai, Lithuania, May 26–29, 2014.
- *MMA2013 & AMOE2013*, Tartu, Estonia, May 27–30, 2013.
- *MMA2012*, Tallinn, Estonia, June 6–9, 2012.

Tarpiniai disertacijos rezultatai taip pat buvo pristatyti Lietuvos LMD53–LMD56 konferencijose 2012–2015 metais ir diferencialinių lygčių ir skaičiavimo matematikos katedros seminare 2016 metais gegužės 24 d.

Doktorantų mokyklos: Doktorantūros studijose buvo plečiamos matematinės žinios doktorantų mokyklose:

- Trento, Italy, Trento Winter School on Numerical Methods 2015, February 2–13, 2015.
- Barcelona, Spain, JISD2014, Universitat Politècnica de Catalunya, June 16–20, 2014.

11 Summary

The doctoral dissertation deals with the hyperbolic problem with nonlocal integral boundary conditions. The research object is the stability of finite difference approximation of the hyperbolic problem and eigenspectrum analysis. We consider hyperbolic equation

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad x \in (0,1), \quad t \in (0,T],$$

with classical initial conditions

$$u(x,0) = \phi(x), \quad x \in [0,1],$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \in [0,1],$$

and nonlocal boundary conditions of the form

$$u(0,t) = \gamma_0 \int\limits_0^1 u(\xi,t)\, d\xi + \mu_1(t), \quad t \in (0,T],$$

$$u(1,t) = \gamma_1 \int\limits_0^1 u(\xi,t)\, d\xi + \mu_2(t), \quad t \in (0,T]$$

in Chapters 1–3, and of the form

$$u(0,t) = \gamma_0 \int\limits_0^1 \beta^0(x) u(\xi,t)\, d\xi + \mu_1(t), \quad t \in (0,T],$$

$$u(1,t) = \gamma_1 \int\limits_0^1 \beta^1(x) u(\xi,t)\, d\xi + \mu_2(t), \quad t \in (0,T]$$

in Chapter 4.

Our main interest is the finite difference scheme for the formulated problem

$$\overline{\partial}_t^2 U - \delta_x^2 U^{(\sigma)} = F, \quad (x_i, t_j) \in \omega^h \times \omega^\tau,$$

$$U^0 = \Phi, \quad \overline{\partial}_t U^1 = \Psi, \qquad x_i \in \overline{\omega}^h,$$

where

$$\overline{\omega}^h := \left\{x_i \colon x_i = ih, i = \overline{0,N}\right\}; \ h = L/N, \qquad \omega^h := \{x_1, \dots, x_{N-1}\},$$

$$\overline{\omega}^\tau := \left\{t^j \colon t^j = j\tau, j = \overline{0,M}\right\}; \ \tau = T/M, \qquad \omega^\tau := \left\{t^1, \dots, t^{M-1}\right\},$$

are discrete grids,

$$\begin{aligned}
&\delta_x^2 : \overline{\omega}^h \to \omega^h, \quad \left(\delta_x^2 U\right)_i := \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2},\\
&\overline{\partial}_t : \overline{\omega}^\tau \to \omega^\tau \cup \{t^M\}, \quad \overline{\partial}_t U := \frac{U - \check{U}}{\tau},\\
&\overline{\partial}_t^2 : \overline{\omega}^\tau \to \omega^\tau, \quad \overline{\partial}_t^2 U := \frac{\check{U} - 2U + \hat{U}}{\tau^2},
\end{aligned}$$

are grid operators, and

$$\begin{aligned}
&U^{(\sigma)} := \sigma U^{j+1} + (1-2\sigma)U^j + \sigma U^{j-1}, \ \sigma \in \mathbb{R} && \text{in Chapter 2},\\
&U^{(\sigma)} := \sigma_1 U^{j+1} + (1-\sigma_1-\sigma_2)U^j + \sigma_2 U^{j-1}, \ \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R} && \text{in Chapter 3},
\end{aligned}$$

with nonlocal conditions in Chapters 1–3

$$U_0 = \gamma_0[1, U] + V_l, \quad U_N = \gamma_1[1, U] + V_r, \qquad t^j \in \widetilde{\omega}^\tau \backslash \{t^1\},$$

and in Chapter 4

$$U_0 = \gamma_0[\chi^0, U] + V_l, \quad U_N = \gamma_1[\chi^1, U] + V_r, \qquad t^j \in \widetilde{\omega}^\tau \backslash \{t^1\},$$

where $\widetilde{\omega}^\tau := \left\{t^1, \ldots, t^M\right\}$ and

$$[U, V] := \frac{U_0 V_0 h}{2} + (U, V) + \frac{U_N V_N h}{2}.$$

χ^0 and χ^1 are the functions of the following form

$$\chi_{[a,b]}(x_j) = \begin{cases} 0 & x_j < a \text{ or } x_j > b,\\ \frac{h}{2} & x_j = a \text{ or } x_j = b,\\ h & a < x_j < b. \end{cases}$$

We investigate the eigenstructure of the explicit finite difference scheme for the hyperbolic problem with two integral boundary conditions, formulate and prove the sufficient stability condition of such scheme (Chapter 1). We also investigate a class of weighted finite difference schemes with one weight parameter (Chapter 2). We use the generalized characteristic functions to investigate eigenspectrum (complex and real) of discrete problem. We obtain the structure of eigenspectrum, formulate and prove stability conditions according to boundary parameters and weights of the scheme. We also consider a class of weighted schemes with two weights (Chapter 3). Numerically modelling characteristic functions we obtain stability regions and restrictions on weights σ_1 and σ_2. We obtain equivalence conditions for the Sturm–Liouville problem (which can be generalized to the evolution equations) to the algebraic eigenvalue problem (Chapter 4). These conditions obtained assuming a general type of integral conditions (containing weight functions in the integral nonlocal boundary conditions). Moreover, we investigate hyperbolic problem with partial integrals in the boundaries.

The main results presented in the doctoral dissertation are as follows:

- The sufficient stability condition of the explicit FDS for hyperbolic equation with integral NBCs is $\gamma_0 + \gamma_1 < 2$ under the condition $\tau \leqslant h$.
- The sufficient stability condition of the weighted FDS (with one weight σ) for hyperbolic equation with integral NBCs is $\gamma_0 + \gamma_1 < 2$ and $\sigma > \frac{1}{4} - \frac{1}{\tau^2 \lambda_{\max}}$.
- The FDS for hyperbolic equation with integral NBCs (with one weight σ) is unstable if the spectrum has complex eigenvalues.
- The weighted FDS for hyperbolic equation with integral NBCs (with two weights σ_1 and σ_2) has a stability region if $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$. If the spectrum is real, then the second stability condition is $\sigma_1 + \sigma_2 \geqslant 1/2$.
- The stability region of weighted FDS for hyperbolic equation with integral NBCs (with two weights σ_1 and σ_2) is bounded if $\sigma_1 - \sigma_2 < 1/2$, elsewise ($\sigma_1 - \sigma_2 \geqslant 1/2$) stability region unbounded.
- The FDS for hyperbolic equation with integral NBCs (with two weights σ_1 and σ_2) is unstable if the spectrum has complex eigenvalues.

Obtained results can be useful for modelling physical phenomena formulated into nonlocal mathematical models: electrolytic refining of non-ferrous metals, deformation of metals under high strain rates, the phenomena of Ohmic heating, flow of fluids through fissured, etc. Eigenspectrum analysis results can be used for constructing new difference schemes and for the investigations of the stability regions of certain finite difference schemes.

12 Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta:

1987 m. gruodžio 6 d., Visaginas.

Išsilavinimas ir kvalifikacija:

1994–2006 m. Visagino „Atgimimo“ gimnazija.

2006–2010 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, matematikos ir matematikos taikymų studijų programos bakalauras.

2010–2012 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, matematinio modeliavimo ir optimizavimo studijų programos magistras.

2012–2016 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, matematikos doktorantūra.

Darbo patirtis:

– UAB „VTEX“

· IT projektų vadovas, nuo 2015 m.

· Elektroninių duomenų redaktorius, 2010–2015 m.

– Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos institutas, projekto jaunesnysis mokslo darbuotojas, 2015–2016 m.

Literatūros sąrašas

[1] A. Ashyralyev. A note on the Bitsadze–Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach space. *J. Math. Anal. Appl.*, **344**:557–573, 2008. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.03.008.

[2] R. W. Beals. Nonlocal elliptic boundary value problems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70**:693–696, 1964.

[3] S. A. Beilin. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions. *Electron. J. Diff. Eqns.*, **42**:1–8, 2001.

[4] А. В. Бицадзе, А. А. Самарский. О некоторых простейших обобщениях эллиптических краевых задач. *Докл. АН СССР*, **185**:739–740, 1969. Available from Internet: `http://samarskii.ru/articles/1969/1969-002ocr.pdf`.

[5] F. E. Browder. Non-local elliptic boundary value problems. *Amer. J. Math*, **86**:735–750, 1964. http://dx.doi.org/10.2307/2373156.

[6] J. R. Cannon. The solution of the heat equation subject to specification of energy. *Quart. Appl. Math.*, **21**(2):155–160, 1963.

[7] T. Carleman. Sur la tehorie des equatuibs integrals et ses applications. In *Verh. Internat. Math. Kongr.*, pp. 138–151, Orell Fussli, Zurich, 1932.

[8] А. Ф. Чудновский. *Теплофизика почв*. Наука, Москва, 1976.

[9] R. Čiegis, A. Štikonas, O. Štikonienė and O. Suboč. Stationary problems with nonlocal boundary conditions. *Math. Model. Anal.*, **6**(2):178–191, 2001. http://dx.doi.org/10.1080/13926292.2001.9637157.

[10] R. Čiegis, A. Štikonas, O. Štikonienė and O. Suboč. A monotonic finite-difference scheme for a parabolic problem with nonlocal conditions. *Differ. Equ.*, **38**(7):1027–1037, 2002. http://dx.doi.org/10.1023/A:1021167932414.

[11] R. Čiupaila, Ž. Jesevičiūtė and M. Sapagovas. On the eigenvalue problem for one-dimensional differential operator with nonlocal integral condition. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **9**(2):109–116, 2004. Available from Internet: `http://www.mii.lt/na/issues/NA_0902/NA09201.pdf`.

[12] S. Das, S. Kumar and O. P. Singh. Solutions of nonlinear second order multi-point boundary value problems by homotopy perturbation method. *Appl. Appl. Math.*, **5**(10):1592–1600, 2010.

[13] W. Day. *Heat Conduction within Linear Thermoelasticity*. Springer-Verlag, 1985.

[14] M. Dehghan. On the solution of an initial-boundary value problem that combines neumann and integral condition for the wave equation. *Numer. Methods Partial Differ. Equ.*, **21**:24–40, 2005. http://dx.doi.org/10.1002/num.20019.

[15] J. I. Diaz and J. M. Rakotoson. On a nonlocal stationary free-boundary problem arising in the confinement of a plasma in a stellarator geometry. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **134**(1):53–95, 1996. http://dx.doi.org/10.1007/BF00376255.

[16] A. Elsaid, S. M. Helal and A. M. A. El-Sayed. The eigenvalue problem for elliptic partial differential equation with two-point nonlocal conditions. *J. Appl. Anal. Comput.*, **5**(1):146–158, 2015.

[17] Д. Гордезиани, Е. Гордезиани, Т. Давиташвили, Г. Меладзе. О решении некоторых нелокальных краевых и начально-краевых задач. *GESJ: Computer Science and Telecommunications*, **3**(26):161–169, 2010. Available from Internet: `http://gesj.internet-academy.org.ge/download.php?id=1683.pdf&t=1`. (in Russian)

[18] D. G. Gordeziani and G. A. Avalishvili. On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations. *Quarterly Applied Mathematics*, **12**(1):94–103, 2000.

[19] Н. И. Ионкин, Е. И. Моисеев. О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями. *Дифференц. Уравнения*, **15**(7):1284–1295, 1979.

[20] Н. И. Ионкин. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. *Дифференц. Уравнения*, **13**(2):294–304, 1977. (N.I. Ionkin. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, *Differ. Uravn.*)

[21] N. I. Ionkin and E. I. Moiseev. Problem for the heat-transfer equation with two point boundary conditions. *Differ. Equ.*, **15**(7):915–924, 1980. (see [19])

[22] J. Jachimavičienė, M. Sapagovas, A. Štikonas and O. Štikonienė. On the stability of explicit finite difference schemes for a pseudoparabolic equation with nonlocal conditions. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **19**(2):225–240, 2014. Available from Internet: http://www.mii.lt/na/issues/NA_1902/NA19206.pdf.

[23] А. И. Кожанов, Л. С. Пулькина. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений. *Дифференц. Уравнения*, **42**(9):1166–1179, 2006. (A. I. Kozhanov and L. S. Pul'kina. On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations, *Differ. Uravn.*, in Russian)

[24] C. Mu, D. Liu and S. Zhou. Properties of positive solutions for a nonlocal reaction-diffusion equation with nonlocal nonlinear boundary condition. *J. Korean Math. Soc.*, **47**(6):1317–1328, 2010.

[25] А. М. Нахушев. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод. *Дифференц. Уравнения*, **18**(1):72–81, 1982. (A. M. Nakhushev. An approximation method for solving boundary value problems for differential equations with applications to the dynamics of soil moisture and groundwater, *Differ. Uravn.*, in Russian)

[26] А. М. Нахушев. *Уравнения математической биологии.* Нальчик: Высшая школа, 1995. (in Russian)

[27] S. Pečiulytė, O. Štikonienė and A. Štikonas. Sturm–Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal integral boundary condition. *Math. Model. Anal.*, **10**(4):377–392, 2005. http://dx.doi.org/10.1080/13926292.2005.9637295.

[28] B. Pelloni and D. A. Smith. Nonlocal and multipoint boundary value problems for linear evolution equations. *arXiv.org*, 2015. Available from arXiv:1511.07244.

[29] Л. С. Пулькина. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения. *Дифференц. Уравнения*, **40**(7):887–892, 2004. (L. S. Pul'kina. A nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation, *Differ. Uravn.*, in Russian)

[30] L. S. Pul'kina. A nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions of the 1st kind with time-dependent kernels. *Russian Math.*, **56**(10):26–37, 2012. http://dx.doi.org/10.3103/S1066369X12100039.

[31] А. А. Самарский. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений. *Дифференц. Уравнения*, **16**(11):1925–1935, 1980. Available from Internet: http://samarskii.ru/articles/1980/1980_009ocr.pdf. (A. A. Samarskii. Some problems of the theory of differential equations, *Differ. Uravn.*)

[32] А. А. Самарский. *Теория разностных схем.* Наука, Москва, 1983.

[33] A. A. Samarskii. *The Theory of Difference Schemes.* Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 2001. (see [32])

[34] М. Сапаговас. О спектральных свойствах трехслойных разностных схем для параболических уравнений с нелокальными условиями. *Дифференц. Уравнения*, **48**(7):1033–1041, 2012. (M. Sapagovas. On the spectral properties of three-layer difference schemes for parabolic equations with nonlocal conditions, *Differ. Uravn.*, in Russian)

[35] Л. И. Сербина. *Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах.* Наука, Москва, 2007.

[36] В. В. Шелухин. Нелокальная по времени задача для уравнений динамики баротропного океана. *Sibirskij matematiceskij zurnal*, **36**(3):701–724, 1995.

[37] В. А. Стеклов. Задача об охлаждении неоднородного твердого стержня. *Сообщения Харьковского матем. общества, серия 2*, **5**(3–4):136–181, 1896.

[38] A. Štikonas. The root condition for polynomial of the second order and a spectral stability of finite-difference schemes for Kuramoto–Tsuzuki equations. *Math. Model. Anal.*, **3**:214–226, 1998. http://dx.doi.org/10.1080/13926292.1998.9637104.

[39] V. F. Volkodavov and V. E. Zhukov. Two problems for the string vibration equation with integral conditions and special matching conditions on the characteristic. *Differ. Equ.*, **34**(4):501–505, 1998.